

学位論文

機械コンダクタンスの直接測定による熱雑音の推定

平成 11 年 12 月 博士(理学)申請

東京大学大学院理学系研究科
物理学専攻

大石奈緒子

目次

1	はじめに	1
1.1	共振から離れた周波数における熱振動	1
1.2	干渉計型重力波検出器の熱雑音	2
1.2.1	干渉計型重力波検出器	2
1.2.2	モード展開による鏡の熱雑音の推定	4
1.2.3	Q値測定	4
1.3	非一様な散逸による熱雑音の推定	5
1.3.1	揺動散逸定理	6
1.4	反共振を利用したコンダクタンスの直接測定	6
1.4.1	共振から離れた周波数におけるコンダクタンス	6
1.4.2	反共振	7
1.5	本論文の構成	8
2	熱雑音の推定	9
2.1	熱振動	9
2.2	揺動散逸定理	9
2.3	調和振動子の熱振動	10
2.4	モード展開による推定	12
2.4.1	換算質量	14
2.4.2	Q値の測定原理	16
2.4.3	モード展開の問題点	17
2.5	機械コンダクタンスの直接測定による熱雑音の推定	19
2.5.1	共振から離れた周波数における伝達関数	19
2.5.2	反共振	20
2.6	散逸角 $\phi(\omega)$	21
2.6.1	物質内部で起こる散逸	22
2.6.2	物質の外部で起こる散逸	24
2.7	本章のまとめ	25

目次

3	機械コンダクタンスの直接測定	27
3.1	振動子	27
3.2	伝達関数の測定系	29
3.3	伝達関数の測定結果	34
3.3.1	伝達関数の測定結果	35
3.3.2	モード展開による推定	36
3.3.3	反共振周波数付近での伝達関数の虚部	37
3.3.4	損失の原因	38
3.4	本章のまとめ	39
4	熱雑音の直接測定	41
4.1	測定系の雑音	41
4.1.1	地面振動	42
4.1.2	散射雑音	44
4.2	干渉計の雑音スペクトルの測定	44
4.2.1	雑音スペクトルの測定結果	44
4.2.2	測定系	44
4.2.3	制御系の影響	46
4.3	振動子の設計	47
4.4	伝達関数の測定	49
4.4.1	伝達関数の絶対値	49
4.4.2	伝達関数の虚部	52
4.5	熱振動の直接測定	52
4.5.1	熱振動の測定結果	52
4.6	直接測定された熱振動と、推定値との比較	52
4.7	本章のまとめ	54
5	干渉計型重力波検出器に用いる鏡への応用	57
5.1	干渉計型重力波検出器における鏡の熱雑音の推定	57
5.1.1	鏡	58
5.1.2	鏡の振動方程式とその解	58
5.1.3	換算質量	60
5.2	反共振を使った TAMA の鏡の熱雑音の推定	65
5.2.1	伝達関数の計算	66
5.2.2	実際の測定系での問題	69
5.2.3	測定装置	71
5.2.4	測定方法	72
5.2.5	測定結果	72
5.2.6	雑音の評価と今後の展開	75

5.3	本章のまとめ	77
6	考察	79
6.1	反共振を利用した方法の利点	79
6.2	問題点	80
6.3	今後の展開	80
7	結論	83
A	伝達マトリックス法	85
A.1	基礎概念	85
A.1.1	状態量ベクトル (state vector)	85
A.1.2	伝達マトリックス (transfer matrix)	86
A.1.3	外力のある場合の伝達マトリックス	87
A.2	系全体の伝達マトリックス	88
A.3	境界条件	88
A.4	特性方程式	89
A.5	伝達関数	90
A.6	伝達マトリックスの導出	90
B	重力波	95
B.1	重力波の導出	96
B.2	重力波の偏光	97
B.3	重力波源	97
B.4	検出	98
B.5	干渉計型重力波検出器の雑音	100
C	回路	101

第1章

はじめに

本論文は、機械系の共振周波数から離れた周波数における熱振動のスペクトルを推定する方法について、原理、検証、応用という一連の研究をまとめたものである。この推定法では、反共振を利用して、共振から離れた周波数における機械コンダクタンスを、直接測定し、測定されたコンダクタンスに揺動散逸定理を適用して熱振動を推定する。したがって、従来のモード展開を使った推定法に比べて、散逸の周波数依存性や分布を仮定せずに推定できるという利点がある。

本章では、まず、共振から離れた周波数における熱雑音の特徴を簡単に説明する。次に、反共振を利用した推定法を考案する背景となった、干渉計型重力波検出器における鏡の熱雑音の推定法と推定の結果を簡単にまとめ、問題点を指摘する。そして、今回考案した推定法の特徴や、意義を説明する。

1.1 共振から離れた周波数における熱振動

熱振動の RMS 振幅

温度 T の熱浴中に置かれたマクロな物体は、熱浴との相互作用によって、各自由度に熱エネルギー $k_B T/2$ が分配され、常に振動している。但し、 k_B はボルツマン定数である。この振動の大きさは、一般に非常に小さい。例えば、質量 m が 1 kg、共振周波数 $\omega_0/2\pi$ が 30kHz の調和振動子の場合、その RMS (root mean square) 振幅 \bar{x} は、 $m\omega_0^2\bar{x}^2/2 = k_B T/2$ から、 $3.4 \times 10^{-16} \text{m}$ と計算される。

共振周波数における熱振動スペクトル

熱振動のエネルギーは、どの自由度でも等しく $k_B T/2$ であるが、振動のスペクトルは、物体のもつ散逸などの性質を反映している。例えば、機械系の共振周波数における熱振動のスペクトル密度 $x^2(\omega_0)$ は、共振での散逸を表す Q 値を用いて、次のように表される。

$$x^2(\omega_0) = \frac{4k_B T Q}{m\omega_0^3} \quad (1.1)$$

この式から、 Q 値が高い程、すなわち、散逸が小さい程、共振周波数における熱振動が大

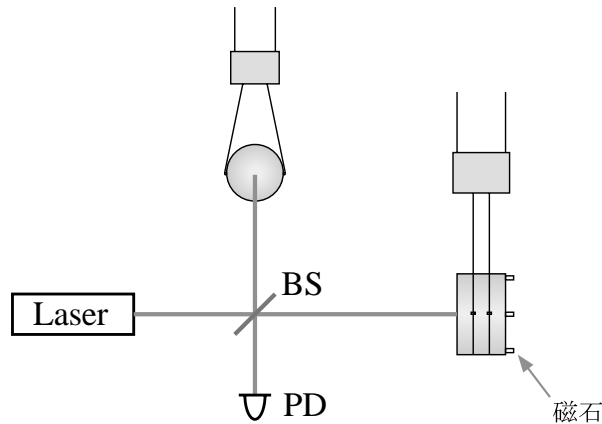


図 1.1: 干渉計型重力波検出器の原理図

きくなることが分かる。先程の調和振動子の例では、 Q 値を 1×10^6 とすると、共振周波数でのスペクトル密度は、 $1.6 \times 10^{-15} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ となる。

共振周波数から離れた周波数における熱振動スペクトル

振動の RMS 振幅 \bar{x} は一定なので、共振周波数以外の周波数では、逆に Q 値が高くなるほど、熱振動スペクトルは小さくなる。

しかし、共振から離れた周波数における熱振動のスペクトル密度は、先程の共振における熱振動のような簡単な形では表せない。共振から離れた周波数では、一般に、複数の共振の寄与を考慮しなくてはならないからである。正確な値は難しいが、共振から離れた周波数における熱振動のスペクトル密度は、共振における値のおよそ $1/Q$ 以下になる。つまり、先程の調和振動子の例では、 $1.6 \times 10^{-21} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ 以下ということになる。

これほど小さな振動は、普通に考えれば、直接測定することも困難である。しかし、重力波検出のような精密測定では、このような共振から離れた周波数における熱振動が、検出器の感度を制限する深刻な問題になると予想されている。

1.2 干渉計型重力波検出器の熱雑音

1.2.1 干渉計型重力波検出器

干渉計型重力波検出器(補遺 B)は、基本的には、光源から出た光をビームスプリッターで2つに分け、戻ってきた光を干渉させて2つの光路長の差を測定する、マイケルソン干渉計である(図 1.1)。干渉計を構成する鏡は、観測帯域で自由質点にするためと、鏡を防振するために、振り子状に懸架されている。重力波が来ると、2つの光路長に差が生じて、干渉計の信号として検出できる。

干渉計は、2本の腕の光路長の差を検出しているので、

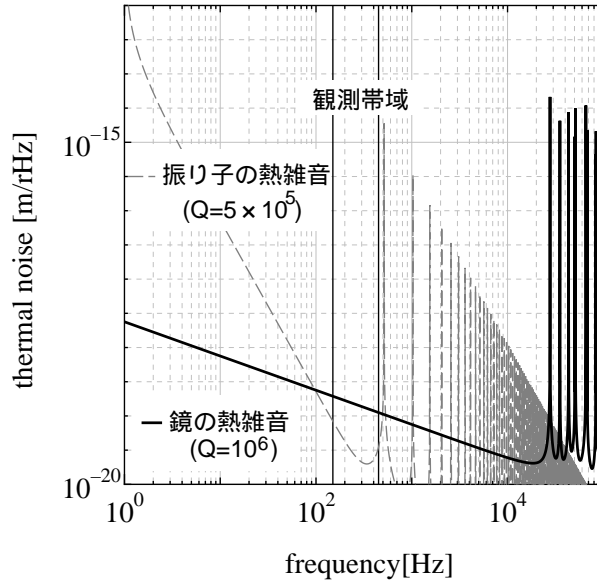


図 1.2: 干渉計型重力波検出器の熱雑音

- 鏡を吊っているワイヤーの熱振動で、鏡の位置が動いたり、
- 鏡の固有振動モードの熱振動によって、鏡の重心に対して鏡面が変位したり

すると、重力波と同様に干渉計で検出され、雑音となる。

図 1.2 に、1995 年から国立天文台三鷹キャンパスに建設中の干渉計型重力波検出器、TAMA300 [1, 2] で推定されている熱振動のスペクトルを示す。干渉計型重力波検出器の観測帯域は、通常、数 10 Hz から数 kHz (TAMA300 の場合は、150Hz から 450Hz) である。これに対して、振り子の共振周波数は 1Hz 以下¹、鏡の固有振動は数 10kHz 以上である。これらの共振から離れた周波数における熱振動は、先程述べたように非常に小さく、現在開発中の干渉計では、直接測定されているわけではない。干渉計の感度が目標に近付いてはじめて、これらの熱雑音が見えてくると予想されている。

熱振動の推定法は、振り子と鏡で若干異なる。振り子の系は比較的単純なので、その運動を解析的に計算することができる。しかし、鏡の振動は、解析的には解けない。次に、鏡の熱雑音の推定方法を説明する (鏡の熱振動の推定法については、5 章第 1 節にもまとめた)。

¹数百 Hz 以上の振り子に起因する共振は、violin mode とよばれるワイヤーの高次モードである。violin mode は換算質量が大きいため、振り子モードに比べて熱雑音への寄与は小さい。

1.2.2 モード展開による鏡の熱雑音の推定

TAMA300 で用いられる鏡は、基材が合成石英 SUPRASIL P-10 で、大きさは直径が 10cm、高さが 6cm の円柱形をしている。このような形の弾性体の運動方程式は、解析的に解くことができないが、半解析的な方法 [3] を用いて、固有振動の周波数や、形を精度良く計算することができる。

固有振動の周波数や形が計算できれば、系の各共振を独立な調和振動子として扱い、系の振動を、これらの調和振動子の重ね合わせで表すことができる (モード展開)。モード展開を使うと、熱振動のパワースペクトル密度 $x^2(\omega)$ は、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega} \sum_i \frac{\phi_i(\omega)\omega_i^2}{m_i [(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \phi_i(\omega)^2\omega_i^4]} \quad (1.2)$$

と表される。但し、 m_i 、 ω_i 、 $\phi_i(\omega)$ は、それぞれ、 i 番目の共振の換算質量、共振角周波数、散逸を表す量である。 $\phi_i(\omega)$ は、共振周波数では、 Q 値と関連付けられる ($\phi_i^{-1}(\omega_i) = Q_i$)。 m_i 、 ω_i は、機械系の材質と大きさのみで決まる。一方、系の散逸 $\phi_i(\omega)$ は、実際に測定してみないと分からない量である。しかし、共振周波数以外では、 $\phi_i(\omega)$ を測定することが難しいので、通常は、共振で測定された Q 値と、散逸の周波数依存性に対する仮定を用いて計算している。固体の内部損失は、周波数によらず一定である (このような散逸を structure damping という) ことが多く [4]、干渉計型重力波検出器に用いられる鏡でも、この仮定を用いている。図 1.2 の熱雑音は、全ての固有振動での Q 値が等しく、散逸の周波数依存性は structure damping model に従うとして計算されたものである。

モード展開による推定は、散逸が一樣で、系の各モードが独立であれば正しい。しかし、散逸が非一樣だと、モードが独立ではなくなり、式 (1.2) による熱振動の推定が不正確になってしまうことに注意する必要がある。

1.2.3 Q 値測定

モード展開によって熱振動を推定するには、 Q 値が必要で、また、散逸が非一樣な場合はモード展開による推定は不正確であると述べた。それでは、実際の鏡の Q 値、および散逸の分布はどのようになっているのだろうか。

実際に測定される Q 値は、

- 材質の内部損失と、
- 鏡の外部で起こる付加的な損失

できる。TAMA の鏡の材質 (SUPRASIL P-10) の 内部損失のみによって決まる Q 値 (intrinsic Q) は、外部損失を減らした状態での測定から、 3×10^6 であるといわれている。しかし、干渉計で実際に使用する状態、即ち、ワイヤーで吊って、制御用の磁石を接着した状態 (図 1.1) で鏡の Q 値を測定してみると、内部損失から推定される Q 値よりもかなり低い値しか得られない。

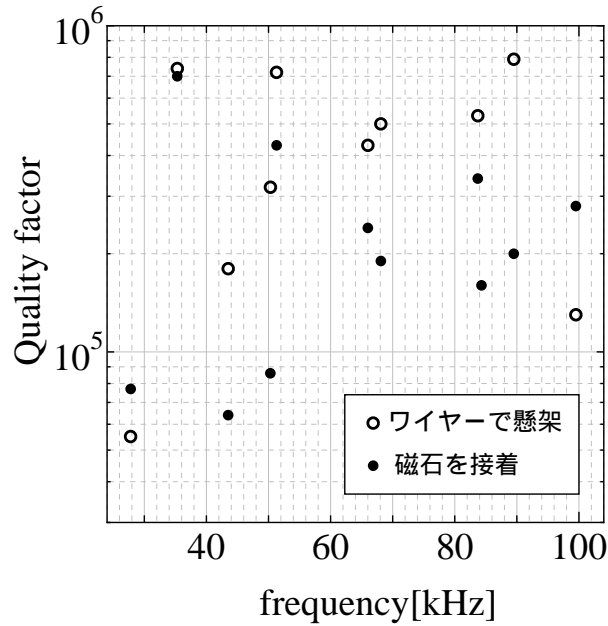


図 1.3: TAMA で用いられる鏡と同じサイズで、基材が SUPRASIL P-30 の鏡で測定された Q 値

図 1.3 に、TAMA で用いる鏡と同じ大きさで、材質が SUPRASIL P-30² の鏡を用いて、100kHz 以下にある 11 個の軸対称モードの Q 値を測定した結果を示す。Q 値の測定精度はおよそ 10% であり、モードによって Q 値がばらつくことが分かる。また、制御用に接着される磁石が、磁石を貼らない場合に比べて Q 値をかなり下げることが分かる [5]。しかし、磁石の接着による付加的散逸の周波数依存性は分かっていない。また、磁石に起因する散逸は、分布が非一様である。したがって、モードが独立ではなくなり、そもそもモード展開を使った方法では、正しい推定ができなくなる。

1.3 非一様な散逸による熱雑音の推定

前節で述べた問題とは別に、散逸が非一様な場合の熱振動を推定する方法が研究されている [6, 7, 8]。これらの推定法では、鏡のコーティングによる散逸などの非一様な散逸を評価するために、モード展開を使わず、揺動散逸定理に基づいた計算を行っている。しかし、コーティング等の非一様な散逸の大きさを実験的に評価する方法がないため、散逸の大きさを適当に仮定して議論している。

² 脈理などの性質が SUPRASIL P-10 より若干劣る。

第1章. はじめに

1.3.1 揺動散逸定理

この推定法の基礎になっている揺動散逸定理によると、熱雑音のパワースペクトル $x^2(\omega)$ は、機械コンダクタンス $\sigma(\omega)$ を用いて次式のように表される [9].

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T \sigma(\omega)}{\omega^2} \quad (1.3)$$

但し、 k_B は Boltzmann 定数、 T は温度、機械コンダクタンス $\sigma(\omega)$ は、アドミッタンス $Y(\omega)$ の実部である。

$$\sigma(\omega) = \text{Re}[Y(\omega)], \quad Y(\omega) \equiv v(\omega)/f(\omega) \quad (1.4)$$

$f(\omega)$ は系に加えられた一般化力、 $v(\omega)$ は系の一般化速度である。

また、系の力から変位への伝達関数 $H(\omega) = x(\omega)/f(\omega)$ を考えると、 $Y(\omega) = i\omega H(\omega)$ となるので、式 (1.3) は、

$$x^2(\omega) = -\frac{4k_B T}{\omega} \text{Im}[H(\omega)] \quad (1.5)$$

と書き表される。系の機械コンダクタンスが分かり、揺動散逸定理を適用して熱振動を推定する場合は、散逸が非一様であっても、正しい推定ができる。

1.4 反共振を利用したコンダクタンスの直接測定

非一様な散逸の場合も正確に推定できるなら、コンダクタンスを直接測定し、モード展開を使わずに揺動散逸定理を使って推定すればよいと思われる。しかし、共振以外の周波数における機械コンダクタンスの直接測定は、いくつか例はあるものの [10, 11]、難しい。次に、その理由をモード展開を使って説明する。以下、伝達関数で議論する。

1.4.1 共振から離れた周波数におけるコンダクタンス

モード展開を使うと、系の伝達関数は、次のように表される。

$$H(\omega) = \sum_i \frac{1}{m_i [(\omega_i^2 - \omega^2) + i\phi_i(\omega)\omega_i^2]} \quad (1.6)$$

但し、散逸が一様 ($\phi(\omega)$ とする) な場合は、各モードの散逸は、 $\phi_i(\omega) = \phi(\omega)$ となる。散逸が非一様な場合は、共振周波数付近ではよい近似になっているが、共振から離れた周波数では不正確になる。

一つのモードに着目すると、共振より低い周波数 ($\omega \ll \omega_i$) では、

$$H_i(\omega) = \frac{1}{m_i \omega_i^2} - i \frac{\phi_i(\omega)}{m_i \omega_i^2} \quad (1.7)$$

1.4. 反共振を利用したコンダクタンスの直接測定

共振では、

$$H_i(\omega_i) = -i \frac{Q_i}{m_i \omega_i^2} \quad (1.8)$$

但し、 $Q_i = \phi_i^{-1}(\omega_i)$ 。共振より高い周波数 ($\omega \gg \omega_i$) では、

$$H_i(\omega) = -\frac{1}{m_i \omega^2} - i \frac{\phi_i(\omega) \omega_i^2}{m_i \omega^4} \quad (1.9)$$

となる。式 (1.7)、(1.9) から、共振から離れた周波数では、系の伝達関数には、虚部よりも $\phi_i^{-1}(\omega)$ 倍以上大きな実部が存在することが分かる。したがって、実際に、伝達関数を測定すると、測定系のわずかな位相遅れなどによって、実部が虚部に混入してしまう。そのため、 $\phi(\omega)$ が小さくなる程、虚部を分離して精度良く測定することが困難になる。現実的には、数 kHz くらいの周波数では、虚部と実部の比が 10^{-3} より大きければ、直接測定が可能である。しかし、それより散逸が小さくなる、あるいは興味のある周波数が高くなると、精度の良い測定は難しい。

一方、共振では、伝達関数は虚部のみ (式 (1.8)) になる。したがって、実部の混入がない。また、共振では、伝達関数の虚部は、共振から離れた周波数の Q^2 倍大きくなる。よって、容易に散逸、 Q 値を測定することができる。

1.4.2 反共振

共振から離れた周波数でも、実部の混入なく伝達関数の虚部を測定できないだろうか。実は、共振以外の周波数でも、実部が消失して虚部のみが残る周波数が存在する。先程の伝達関数の式 (1.7)、(1.9) を見ると、伝達関数の実部の符号は、共振の前後で反転することが分かる。系全体の伝達関数 (式 (1.6)) は、複数の調和振動子の伝達関数の重ね合わせになっている。つまり、複数の共振の間の周波数においては、伝達関数は、正の伝達関数と、負の伝達関数の和になっている。したがって、これらの伝達関数が打ち消しあって、零になる周波数が存在する。これが、反共振である。

2 つの共振を持つ系で考えると、共振周波数が十分離れていれば、2 つの共振の間の周波数 ($\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$) における伝達関数は、

$$H(\omega) \sim \left[-\frac{1}{m_1 \omega^2} + \frac{1}{m_2 \omega_2^2} \right] - i \left[\frac{\phi_1(\omega) \omega_1^2}{m_1 \omega^4} + \frac{\phi_2(\omega)}{m_2 \omega_2^2} \right] \quad (1.10)$$

と近似される³。従って、 $\omega_{\text{anti}} = \sqrt{m_2/m_1} \omega_2$ では、実部が零になり、虚部のみが残る。2 つの共振を持つ系の伝達関数を図 1.4 に示す。この反共振周波数においても、実部の混入がないので、伝達関数の虚部が精度良く測定できると期待できる。伝達関数の虚部が測定できれば、式 (1.5) から熱雑音を推定できる。この推定法は、モード展開を使わず、揺動散逸定理のみを用いているため、散逸が非一様な場合にも適用できる。また、興味のある周

³散逸が一様ならば $\phi_1(\omega)$ と $\phi_2(\omega)$ は等しい。散逸が非一様な場合は、共振以外の周波数で $\phi_i(\omega)$ を考えることは難しく、伝達関数の虚部が測定できても、それから $\phi_i(\omega)$ を知ることはできない。

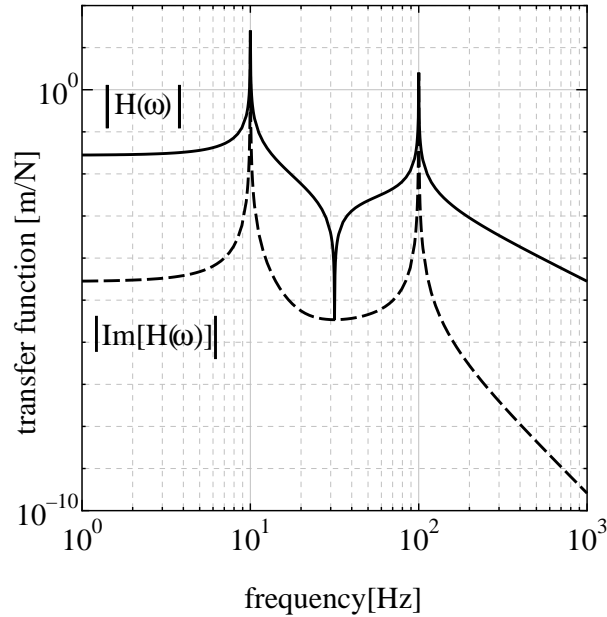


図 1.4: 2-mode oscillator の伝達関数の計算例。 m_1 は 10g, m_2 は 1g, 角共振周波数はそれぞれ $\omega_1/2\pi = 10$ Hz, $\omega_2/2\pi = 100$ Hz。散逸は $\phi_1(\omega) = \phi_2(\omega) = 10^{-3}$ 。実線が伝達関数の絶対値で、破線が虚部を示している。反共振周波数は $\omega_{\text{anti}}/2\pi = 31.6$ Hz。

波数に反共振をつくることができれば、散逸の周波数依存性に対する仮定もおかずに推定ができる。

1.5 本論文の構成

これまで、モード展開を使った推定法の問題点を述べ、その問題を回避できる反共振を利用した推定法を説明してきた。本論文では、この推定法を使って、実際に熱振動を推定することができることを示す。

第2章では、熱雑音の推定方法を概説する。また、散逸について分かっていることなどをまとめておく。第3章では、この方法で、実際にコンダクタンスを測定できることを示すために、2段の板ばねと質量からなる振動子を作成して、反共振で伝達関数を測った結果を述べる。測定されたコンダクタンスはモード展開による推定値とよく一致した。次に、第4章では、この方法で推定される熱振動と、実際の熱振動が一致することを示すために、第3章で用いたものより小さな振動子を作成して、反共振で伝達関数を測り、直接測定した熱振動と比較した。推定値と実測値はよく一致した。第5章では、この方法を干渉計に用いる鏡に応用し、どの程度の推定が行えるか、実験も含めて、考察した。第6章では、この方法のメリット、デメリット、将来この方法を用いてどのような研究が可能か、を議論する。第7章では、全体の結論をまとめる。

第2章

熱雑音の推定

本章では、熱振動の基本的な性質と推定法、熱振動を決める種々の散逸の要因について簡単にまとめる。

2.1 熱振動

一般に、温度 T の熱浴中に置かれたマクロな物体は、熱浴との相互作用によって各自由度に熱エネルギー $k_B T/2$ が分配され、常に振動している。この振動は、非常に小さいが、水面に浮かんだ花粉中の微粒子の Brown 運動や、抵抗の両端に現れる電圧 [12] 等にその例を見ることが出来る。

この振動のエネルギーは全ての自由度で等しく、 $k_B T/2$ であるが、その振動スペクトルは、系の散逸と関係づけられる。この系の散逸と熱揺らぎの関係は、1905 年 Einstein [13] によってはじめて示され、その後、Callen らによって一般化された [9, 14, 15, 16]。次に、この系の散逸と揺動の関係式を簡単に紹介する。

2.2 揺動散逸定理

揺動散逸定理は、機械系の散逸と、揺動のパワースペクトル密度との関係を表す式である。機械系の性質は、インピーダンス $Z(\omega)$ 、抵抗 $R(\omega)$ 、アドミッタンス $Y(\omega)$ 、コンダクタンス $\sigma(\omega)$ 、伝達関数 $H(\omega)$ などによって表される。

$$Z(\omega) \equiv \frac{f(\omega)}{v(\omega)} = \frac{f(\omega)}{i\omega x(\omega)} \quad (2.1)$$

$$R(\omega) \equiv \text{Re}[Z(\omega)] \quad (2.2)$$

$$Y(\omega) \equiv Z^{-1}(\omega) \quad (2.3)$$

$$\sigma(\omega) \equiv \text{Re}[Y(\omega)] \quad (2.4)$$

第2章. 熱雑音の推定

$$H(\omega) \equiv \frac{x(\omega)}{f(\omega)} \quad (2.5)$$

但し、 $f(\omega)$ 、 $v(\omega)$ 、 $x(\omega)$ は、それぞれ、一般化力、一般化速度、一般化座標をフーリエ変換したものである。

揺動散逸定理によると [9]、揺動のパワースペクトル密度 $x^2(\omega)$ は、系のコンダクタンス $\sigma(\omega)$ を用いて、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T \sigma(\omega)}{\omega^2} \quad (2.6)$$

と表される。但し、 k_B は Boltzmann 定数で、 T は温度である。式、(2.6) を伝達関数 $H(\omega)$ を使って表すと、

$$x^2(\omega) = -\frac{4k_B T}{\omega} \text{Im}[H(\omega)] \quad (2.7)$$

となる。式 (2.6)、式 (2.7) を第一種揺動散逸定理という。

系のコンダクタンスや、伝達関数の虚部は、系の散逸を表す。したがって、第一種揺動散逸定理は、系の揺動と散逸との関係を与える式と考えることができる。

また、揺動力のパワースペクトル密度 $f^2(\omega)$ は、

$$f^2(\omega) = 4k_B T R(\omega) \quad (2.8)$$

と表される。これを第二種揺動散逸定理という。

2.3 調和振動子の熱振動

次に、調和振動子に揺動散逸定理を適用して、実際に、熱振動を求めてみる。

まず、速度に比例した抵抗力が働いている調和振動子の熱雑音を考える。振動子の運動方程式は、外力を $f(t)$ として、

$$m\ddot{x} = -kx - \zeta\dot{x} + f(t) \quad (2.9)$$

と表される。ここで、 m 、 k はそれぞれ振動子の質量とばね定数である。これをフーリエ変換して整理すると、系に加えられた力 $f(\omega)$ から変位 $x(\omega)$ への伝達関数 $H(\omega)$ は、

$$H(\omega) = \frac{x(\omega)}{f(\omega)} = \frac{1}{-m\omega^2 + k + i\zeta\omega} \quad (2.10)$$

となる。

これに、揺動散逸定理を適用すると、変位のパワースペクトル密度 $x^2(\omega)$ は、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T \zeta}{(k - m\omega^2)^2 + (\zeta\omega)^2} \quad (2.11)$$

と表される。

また、共振角周波数 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ と Q 値 $Q = m\omega_0/\zeta$ を使って式 (2.11) を書き直すと、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T}{Q} \frac{\omega_0}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega\omega_0/Q)^2]} \quad (2.12)$$

となる。式 (2.12) を使うと、共振角周波数 ω_0 における熱振動スペクトルは、

$$x^2(\omega_0) = \frac{4k_B T Q}{m\omega_0^3} \quad (2.13)$$

であることが分かる。また、共振より低い周波数 ($\omega \ll \omega_0$) では、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T}{m\omega_0^3 Q} \quad (2.14)$$

であり、共振より高い周波数 ($\omega \gg \omega_0$) では、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T \omega_0}{mQ} \frac{1}{\omega^4} \quad (2.15)$$

となっている。

散逸の性質と熱振動スペクトル

熱振動のスペクトルは、散逸の性質によって変化する。先程は、調和振動子のもつ散逸として、速度に比例する抵抗 (viscous damping) を考えた。しかし、散逸にはこのほかに、物質内部の散逸などにみられる周波数に依存しない散逸 (structure damping) などがある¹。本節では、調和振動子の散逸が、structure damping model であった場合の熱振動スペクトルを計算し、散逸の周波数依存性によってスペクトルが変わることを示す。

structure damping の場合、運動方程式は、周波数領域で、

$$-m\omega^2 x(\omega) = -k(1 + i\phi)x(\omega) + f(\omega) \quad (2.16)$$

と表される。これから、伝達関数 $H(\omega)$ は、

$$H(\omega) = \frac{1}{-m\omega^2 + k(1 + i\phi)} \quad (2.17)$$

となる。この式を、 $k = m\omega_0^2$ 、 $\phi = 1/Q$ を用いて書き直し、揺動散逸定理を適用すると、熱雑音スペクトル $x^2(\omega)$ は、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega} \frac{\omega_0^2/Q}{m [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega_0^4/Q^2]} \quad (2.18)$$

¹いくつかの散逸の周波数依存性については、2.6 節にまとめてある。

第2章. 熱雑音の推定

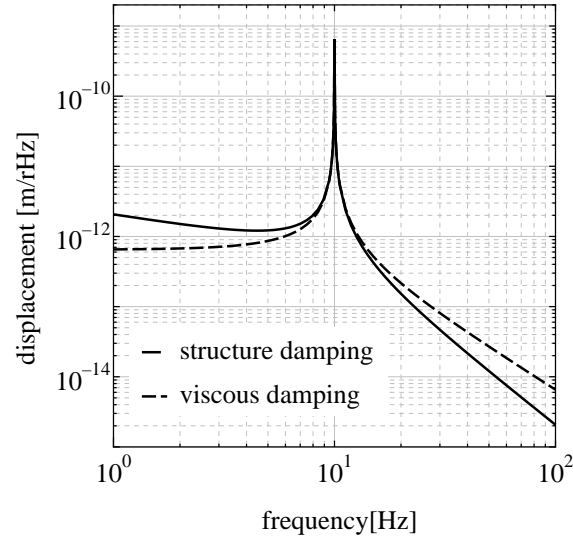


図 2.1: 散逸の周波数依存性が異なる場合の調和振動子の熱振動スペクトルの比較

と表される。共振でのスペクトル密度は、viscous damping の場合 (式 (2.13)) と同じになるが、共振周波数より低い周波数 ($\omega \ll \omega_0$) では、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T}{m\omega_0^2 Q} \frac{1}{\omega} \quad (2.19)$$

高い周波数 ($\omega_0 \gg \omega$) では、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T \omega_0^2}{mQ} \frac{1}{\omega^5} \quad (2.20)$$

となり、viscous damping の場合とスペクトルの大きさが変わってくる。共振の周波数と Q 値は同じだが、散逸の周波数依存性が異なる熱振動のスペクトルを図 2.1 に示す。

また、散逸によって異なる熱振動の 2 つの式 (2.12)、(2.18) は、散逸を一般的に $\phi(\omega)$ で表すと、

$$x^2(f) = \frac{4k_B T}{\omega} \frac{\phi(\omega)\omega_0^2}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \phi^2(\omega)\omega_0^4]} \quad (2.21)$$

と表すことができる。viscous damping の場合は、 $\phi(\omega) = \omega/\omega_0 Q$ 、structure damping の場合は、 $\phi(\omega) = 1/Q$ とすれば、もとの表式が得られる。

2.4 モード展開による推定

前節では、簡単に運動方程式が解ける調和振動子に structure damping model や、viscous damping model といった、散逸のモデルを仮定し、揺動散逸定理を適用して熱振動を調べた。次に、一般の弾性体の場合を考える。

一般に、密度 ρ 、Poisson 比 ν 、ヤング率 E の等方性弾性体の振動方程式は、変位ベクトルを $\vec{u}(\vec{r}, t)$ として、

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \vec{u}(\vec{r}, t) - \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{grad div } \vec{u}(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t) \quad (2.22)$$

と表される [17]。但し、 $f(\vec{r}, t)$ は外力。このような機械系の振動方程式を

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} - L[\vec{u}(\vec{r}, t)] = f(\vec{r}, t) \quad (2.23)$$

と略記する。

外力 $f(\vec{r}, t) = 0$ の場合の自由振動解を、 $w_n(\vec{r})q_n(t)$ とすると、変位ベクトル $\vec{u}(\vec{r}, t)$ は、

$$\vec{u}(\vec{r}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(\vec{r})q_n(t) \quad (2.24)$$

のように展開できる。但し、固有関数 $w_n(\vec{r})$ は、

$$L[w_n(\vec{r})] = -\rho\omega_n^2 w_n(\vec{r}) \quad (2.25)$$

の解で、直交系をなすので、 $l \neq m$ の時、

$$\int w_l(\vec{r})w_m(\vec{r})dV = 0 \quad (2.26)$$

となる。

式 (2.24) を式 (2.23) に代入し、 $\omega_l(\vec{r})$ をかけて積分すると、

$$\left(\ddot{q}_l(t) + \omega_l^2 q_l(t)\right) \int \rho w_l^2(\vec{r})dV = \int w_l(\vec{r})f(\vec{r}, t)dV \quad (2.27)$$

$f(\vec{r}, t) = P(\vec{r})F(t)$ とし、式 (2.27) をフーリエ変換すると、

$$\tilde{q}_l = \frac{\int P(\vec{r})w_l(\vec{r})dV}{\int \rho w_l^2(\vec{r})dV} \frac{\tilde{F}}{(\omega_l^2 - \omega^2)} \quad (2.28)$$

ここで、変位ベクトル $\vec{u}(\vec{r})$ に、重み $R(\vec{r})$ をかけた座標 x を考える。

$$x(t) = \int R(\vec{r})\vec{u}(\vec{r}, t)dV \quad (2.29)$$

式 (2.29) に式 (2.24) を代入し、フーリエ変換すると、

$$\tilde{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{F}}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (2.30)$$

但し、

$$m_n = \int \rho w_l^2(\vec{r})dV \cdot \left(\int P(\vec{r})w_l(\vec{r})dV \cdot \int R(\vec{r})w_n(\vec{r})dV \right)^{-1} \quad (2.31)$$

第2章. 熱雑音の推定

結局、力 $P(\vec{r})F(t)$ を加えた時の、座標 $x(t)$ への伝達関数は、

$$H(\omega) = \frac{\tilde{x}}{\tilde{F}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (2.32)$$

となり、無限個の調和振動子の重ね合わせで表すことができる。

この状態で、散逸を導入すると、伝達関数は、

$$H(\omega) = \frac{\tilde{x}}{\tilde{F}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n\{\omega_n^2[1 + i\phi_n(\omega)] - \omega^2\}} \quad (2.33)$$

となる。

以上、一般的な弾性体の式を用いて伝達関数を計算し、伝達関数が、質量 m_n 、共振周波数 ω_n の調和振動子の重ね合わせで表されることをみてきた。この方法を使えば、系の運動方程式が解析的には解けないような場合にも、系の共振周波数や、振動の形を数値的に計算することができれば、伝達関数や熱振動を求めることができる。

但し、この方法では、散逸のない状態で方程式を解いて、モード展開してから各調和振動子に散逸を導入しているのので、散逸が非一様な場合などに、モード展開で計算される値と直接散逸のある方程式を解いて得られた値が異なってしまうことがある。

次に、モード展開に必要な3つのパラメタ $\omega_i, m_i, \phi_i(\omega)$ のうち、換算質量 m_i について説明する。

2.4.1 換算質量

n 番目のモードに着目すると、系のもつ運動エネルギー U は次の式で表せる。

$$U = \int \frac{\rho}{2} |\dot{\vec{u}}(\vec{r}, t)|^2 dV = \int \frac{\rho}{2} \omega_n^2 |\vec{u}(\vec{r}, t)|^2 dV \quad (2.34)$$

この時、変位ベクトルに重み $R(\vec{r})$ をかけて見ていると、

$$x(t) = \int R(\vec{r}) \vec{u}(\vec{r}, t) dV \quad (2.35)$$

$x(t)$ のRMS振幅 \bar{x} は、式(2.34)、(2.35)から、

$$\bar{x}^2 \int \frac{\rho}{2} \omega_n^2 w_n^2(\vec{r}) dV = U \left(\int R(\vec{r}) w_n(\vec{r}) dV \right)^2 \quad (2.36)$$

となる。式(2.36)を、式(2.31)の換算質量と比べると、結局、

$$\frac{1}{2} m'_n \omega_n^2 \bar{x}^2 = U \quad (2.37)$$

となっている(但し、換算質量 m'_n は、力の分布 $P(\vec{r})$ が、変位にかけた重み $R(\vec{r})$ に一致している場合のもの)。これから、換算質量は、系全体のエネルギーを、振動を見ている

場所にある換算質量 m_i の質点の運動エネルギーと等しいとおくことによって得られることが分かる。

次に、弾性体が熱浴中において、各振動モードに $k_B T/2$ が分配されている場合を考える。この時の \bar{x}^2 は、

$$\bar{x}^2 = \frac{k_B T}{m_n' \omega_n^2} \quad (2.38)$$

である。

同じ \bar{x}^2 を、前節で求めた散逸を入れた伝達関数 H (式 (2.33)) に揺動散逸定理 (式 (2.7)) を適用して計算してみる²。

$$\bar{x}^2 = \int_0^\infty \frac{4k_B T}{\omega} \text{Im} \left[\frac{1}{m_n \{\omega_n^2 [1 + i\phi(\omega)] - \omega^2\}} \right] \frac{d\omega}{2\pi} = \frac{k_B T}{m_n \omega_n^2} \quad (2.39)$$

これが、式 (2.38) と一致するのは、変位をみているのと同じ分布で力を加えた時の伝達関数を用いた場合である。

換算質量の計算例として、下に示す図のような、長さ L の板ばねと、質量 M の質点からなる系の i 番目の振動モードの質点における換算質量 m_i を考える。系全体のエネルギー K は、 i 番目の固有振動モードの振幅 $x_i(l)$ を用いて、

$$K = \frac{1}{2} M \omega^2 x_i^2(L) + \frac{1}{2} \int_0^L \rho \omega^2 x_i^2(l) dl \quad (2.40)$$

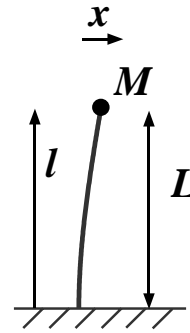
と表される。但し、 ρ は板ばねの線密度である。

ここで質点の換算質量 m_i を考えると、

$$\frac{1}{2} m_i \omega^2 x_i^2(L) = K \quad (2.41)$$

から、

$$m_i = \frac{M x_i^2(L) + \int_0^L \rho x_i^2(l) dl}{x_i^2(L)} \quad (2.42)$$



となる。

換算質量は、質点以外の、例えば、板ばねの途中の点でも定義することができる。先程の板ばねの長さ l のところでの換算質量は、質点の場合と同様にして、

$$m_i(l) = \left(M x_i^2(L) + \int_0^L \rho x_i^2(l') dl' \right) / x_i^2(l) \quad (2.43)$$

と表される。

同じ振動モードでも、振動子のどこで振動を見ているかによって振動の大きさが変わる。換算質量は、その効果を質量にとりこんで、熱エネルギーが与えられた時、見ている座標の変動を表すのに便利な量である。

²散逸には viscous damping model を用いた。

第2章. 熱雑音の推定

2.4.2 Q 値の測定原理

共振以外の周波数における 散逸角 $\phi(\omega)$ は、通常は、共振において測定された Q 値と、散逸の周波数依存性に対する仮定を用いて推定される。

実際に Q 値を測定するには、主に

- 共振付近での伝達関数を測定して、半値幅から Q 値を求める、
- 共振を励起して、励起をとめたときの減衰の様子から Q 値を求める、

という2つの方法がある。本論文で主に用いた測定法は後者であり、本節では、この方法を説明する。

系の共振では、一つのモードの寄与のみが大きくなるので、系の運動を、減衰のある調和振動子の運動方程式で表すことができる。

$$m_i \left(\ddot{x} + \frac{\omega_i}{Q_i} \dot{x} + \omega_i^2 x \right) = f(t) \quad (2.44)$$

ここで、 m_i は換算質量、 ω_i は共振の角周波数、 Q_i が Q 値である。

x 、 f のラプラス変換を X 、 F とすると、伝達関数 $H_i(s)$ は、

$$X(s) = H_i(s)F(s) \quad (2.45)$$

で定義され、式 (2.44) の場合は、

$$H_i(s) = \frac{1}{m_i \left(\omega_i^2 + s^2 + \frac{\omega_i s}{Q_i} \right)} \quad (2.46)$$

となる。更に、ここで $Q_i \gg 1$ の近似を用いると、

$$H_i(s) \simeq \frac{1}{m_i} \left\{ \frac{1}{2i\omega_i} \frac{1}{\left(s + \frac{\omega_i}{2Q_i} - i\omega_i \right)} - \frac{1}{2i\omega_i} \frac{1}{\left(s + \frac{\omega_i}{2Q_i} + i\omega_i \right)} \right\} \quad (2.47)$$

となる。このような系の外力 $f(t)$ に対する応答 $x(t)$ は、 H のラプラス逆変換を h とすると、

$$x(t) = \int h(t-t')f(t')dt' \quad (2.48)$$

で表され、ラプラス逆変換の公式

$$L^{-1} \left[\frac{1}{s-\alpha} \right] (t) = e^{\alpha t} \quad (2.49)$$

を用いると、

$$x(t) = \frac{1}{m_i} \int \left\{ \frac{1}{2i\omega_i} \exp \left[\left(\frac{-\omega_i}{2Q_i} + i\omega_i \right) (t-t') \right] - \frac{1}{2i\omega_i} \exp \left[\left(\frac{-\omega_i}{2Q_i} - i\omega_i \right) (t-t') \right] \right\} f(t') dt' \quad (2.50)$$

となる。外力として

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega_i t} & (t < 0) \\ 0 & (t \geq 0) \end{cases} \quad (2.51)$$

を考えると、変位は、

$$x(t) = \frac{2Q_i}{m_i\omega_i^2} \exp\left(-\frac{\omega_i}{2Q_i}t\right) \sin \omega_i t \quad (2.52)$$

で表される減衰振動になる。

実際に Q 値を測定するには、まず機械系の共振を共振周波数で力を加えることによって励起し、励起信号を切った時の変位の減衰を測定すればよい。測定された減衰の傾きと、共振の角周波数 ω_i から Q 値を求めることができる。

2.4.3 モード展開の問題点

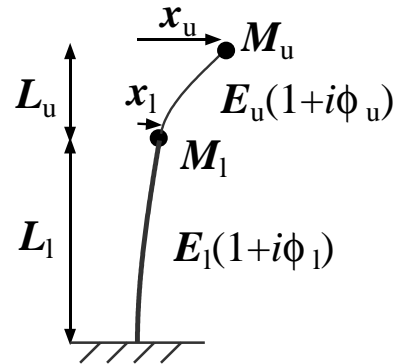
以上にモード展開と、モード展開に関連して換算質量 m_i 、 Q 値の測定と $\phi_i(\omega)$ について説明してきた。 m_i 、 ω_i 、 $\phi_i(\omega)$ を用いると、モード展開を使った伝達関数が得られるので、これに揺動散逸定理を適用して、熱振動を求めることができる。

モード展開は、系の各共振が独立であれば、正しく系の振動を記述している。しかし、系の散逸が一様でない、モードが独立ではなくなり、伝達関数や、熱雑音の推定が不正確になるという問題がある。本節では、具体例を計算してこの問題を示す。

例として、板ばねと質量を 2 段に組み合わせた振動子 (右図) の熱振動を考える。簡単な系なので、伝達マトリックス法 (補遺 A) を用いて直接振動方程式を解き、伝達関数を計算することができる。

散逸は、上の段の板ばねのヤング率 E_u に $E_u(1 + i\phi_u(\omega))$ 、下の段の板ばねのヤング率 E_1 に $E_1(1 + i\phi_1(\omega))$ という形で入れる。

また、直接振動方程式が解けるので、系の共振周波数、換算質量、 Q 値を計算することができる。これを使って、モード展開による計算を行うことができる。



(Q 値は、伝達関数の極の角周波数 $\omega'_i = \pm \text{Re}[\omega'_i] + i \text{Im}[\omega'_i]$ を用いて、 $Q_i = \text{Re}[\omega'_i] / \text{Im}[\omega'_i] / 2$ と計算した。)

散逸が非一様な場合

まず、散逸が非一様な場合として、 $\phi_u(\omega) = 10^{-2}$ 、 $\phi_1(\omega) = 10^{-3}$ の場合を考える³。上段質量の伝達関数 (質量に力を加えた時の質量の変位への応答) を計算し、モード展開と比較した結果を図 2.2 に示す。

³計算に必要な他の具体的な数値は、第 4 章で伝達関数と熱振動を測定した振動子の設計に使ったのと同じ値を用いた。

第2章. 熱雑音の推定

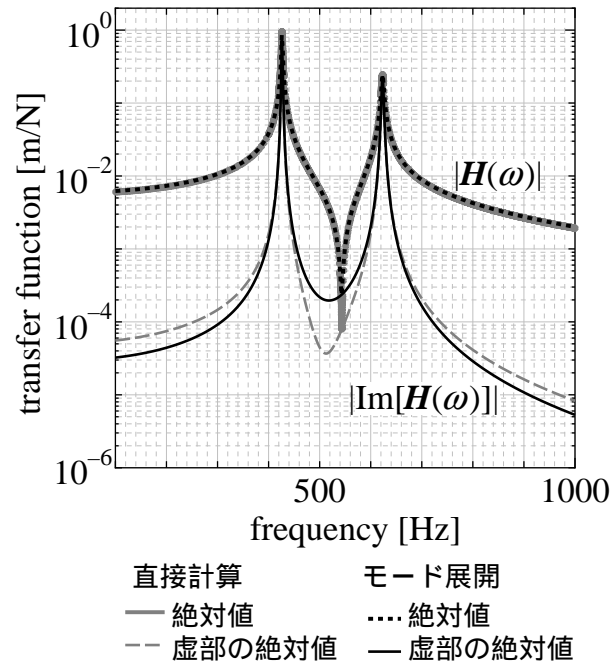


図 2.2: 散逸が非一様な場合の伝達関数の計算結果。灰色の線が直接計算、黒い線がモード展開による推定。

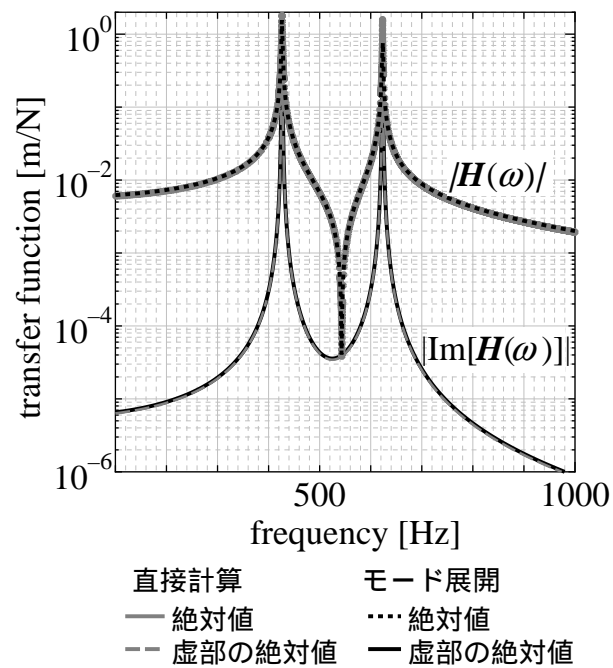


図 2.3: 散逸が一様な場合の伝達関数の計算結果。灰色の線が直接計算、黒い線がモード展開による推定。

2.5. 機械コンダクタンスの直接測定による熱雑音の推定

このとき計算された Q 値は、第一共振で $Q_1 = 2.3 \times 10^2$ 、第二共振で $Q_2 = 1.5 \times 10^2$ である。この Q 値に、散逸の周波数依存性はないとして、 $\phi_1 = 4.4 \times 10^{-3}$ 、 $\phi_2 = 6.6 \times 10^{-3}$ として、モード展開の計算を行った。共振周波数付近ではモード展開と直接計算はよく一致している。しかし、共振から離れた周波数では一致していない。

散逸が一様な場合

また、散逸が一様な場合として、 $\phi_u(\omega) = 10^{-3}$ 、 $\phi_l(\omega) = 10^{-3}$ の場合の計算結果を図 2.3 に示した。この場合は直接とモード展開が一致している。

2.5 機械コンダクタンスの直接測定による熱雑音の推定

モード展開の問題点、

- 散逸の分布が非一様だと不正確
- 散逸の周波数依存性を仮定する必要がある

を回避して、共振以外の周波数における熱雑音を正確に推定するために、本論文では、機械系のコンダクタンスを直接測定する方法を提案する。コンダクタンスを直接測定することができれば、モード展開を使わずに揺動散逸定理だけで熱振動を推定できる。また、興味のある周波数でコンダクタンスを測定できれば、散逸の周波数依存性に対する仮定も使わずに、正確な推定ができる。

しかし、通常は、共振以外の周波数における機械コンダクタンスの測定は簡単ではない。ここでは、モード展開を使ってその理由を説明し、次に、反共振を利用した直接測定方法をまとめる。

2.5.1 共振から離れた周波数における伝達関数

共振以外の周波数における機械コンダクタンスについて、モード展開を使って説明する。モード展開を使っても、散逸の影響の少ない伝達関数の実部に関してはかなり正確に計算できる。また、散逸が一様に分布している場合も正確に系の性質を調べることができる。機械系の伝達関数 $H(\omega)$ は、モード展開を使うと

$$H(\omega) = \sum_i \frac{1}{m_i [(\omega_i^2 - \omega^2) + i\phi_i(\omega)\omega_i^2]} \quad (2.53)$$

と表される。ここで、 m_i 、 ω_i 、 $\phi_i(\omega)$ はそれぞれ、 i 番目のモードの換算質量、共振角周波数、散逸角を表す。

1 つの調和振動子の伝達関数 $H_i(\omega)$ を考えると、共振周波数より低い周波数 ($\omega \ll \omega_i$) では、ほぼ一定の値をとる。

$$H_i(\omega) \simeq \frac{1}{m_i \omega_i^2} - i \frac{\phi_i(\omega)}{m_i \omega_i^2} \quad (2.54)$$

第2章. 熱雑音の推定

また、共振周波数では、虚部のみになる。

$$H_i(\omega_i) = -i \frac{Q_i}{m_i \omega_i^2} \quad (2.55)$$

ここで Q_i は Q 値である ($Q_i = \phi^{-1}(\omega_i)$)。

共振周波数よりも高い周波数 ($\omega \gg \omega_i$) では、

$$H_i(\omega) \simeq -\frac{1}{m_i \omega^2} - i \frac{\phi_i(\omega) \omega_i^2}{m_i \omega^4} \quad (2.56)$$

となり、実部の符号が反転し、絶対値は周波数の2乗に反比例して小さくなっていく。

式(2.54)と式(2.56)から分かるように、共振から離れた周波数では、伝達関数の実部は、虚部の $\phi_i^{-1}(\omega)$ 倍以上になっている。

したがって、共振から離れた周波数で伝達関数を測定して、虚部を分離しようとしても、

- 大きな実部が、測定系のわずかな位相遅れなどによって虚部に混入する
- 実部で検出系の感度が決まるため、虚部が測定系の雑音に埋もれてしまう。

などの問題があつて精度の良い測定ができなくなるのである。この影響は、実部と虚部の比が大きくなる程大きくなる。共振から離れた周波数においては、この比が数百以上になると、コンダクタンスを直接測定することは困難になる。

2.5.2 反共振

しかし、共振から離れた周波数においても、共振と同じように実部が0になり、虚部のみが残る反共振周波数が存在する。この周波数においては、実部の混入がないので、伝達関数の虚部を精度良く測定できると考えられる。次に、共振が2つある振動系(2-mode oscillator)を例に、なぜ反共振ができるのか、説明する。

2-mode oscillator の共振周波数を ω_1 、 ω_2 とする。但し、 $\omega_1 \ll \omega_2$ 。モード展開を使うと、系全体の伝達関数は、2つの共振の重ね合わせで書ける。

$$H(\omega) = \sum_{i=1,2} \frac{1}{m_i [(\omega_i^2 - \omega^2) + i\phi_i(\omega)\omega_i^2]} \quad (2.57)$$

2つの共振の間 ($\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$) では、伝達関数の実部は、次式のように近似される。

$$\text{Re}[H(\omega)] \simeq -\frac{1}{m_1 \omega^2} + \frac{1}{m_2 \omega_2^2} \quad (2.58)$$

式(2.58)から、 ω_{anti} となる周波数が存在し、

$$\omega_{\text{anti}} \simeq \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \omega_2 \quad (2.59)$$

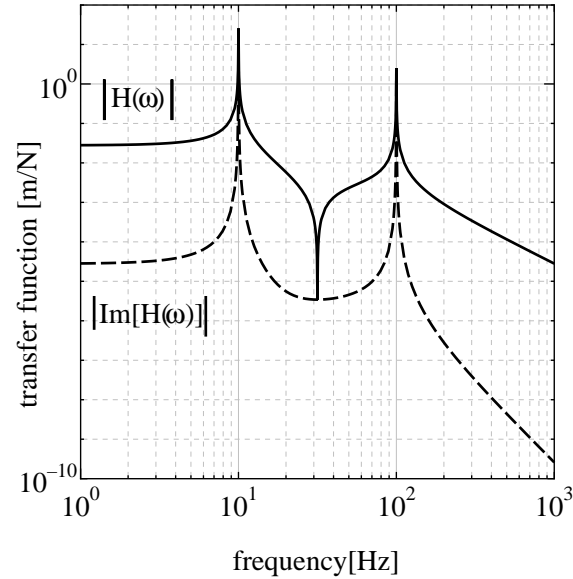


図 2.4: 2-mode oscillator の伝達関数の計算例。 m_1 は 10g, m_2 は 1g, 共振角周波数はそれぞれ $\omega_1/2\pi = 10$ Hz, $\omega_2/2\pi = 100$ Hz。散逸は $\phi_1(\omega) = \phi_2(\omega) = 10^{-3}$ 。実線が伝達関数の絶対値で、破線が虚部を示している。反共振周波数は $\omega_{\text{anti}}/2\pi = 31.6$ Hz。

この周波数においては、伝達関数の実部が 0 になり、虚部のみが残る。

$$H(\omega_{\text{anti}}) \simeq -i \left[\frac{\phi_1(\omega_{\text{anti}})\omega_1^2}{m_1\omega_{\text{anti}}^4} + \frac{\phi_2(\omega_{\text{anti}})}{m_2\omega_2^2} \right] \quad (2.60)$$

つまり、興味のある周波数よりも高い共振周波数をもつ共振の伝達関数の正の実部と、低い共振周波数を持つ共振の伝達関数の負の実部が打ち消しあって、実部が消え、虚部のみが残るのである。この周波数では伝達関数の虚部が、実部の混入を避けて測定できると考えられる。この反共振周波数で、伝達関数の虚部を測定し、揺動散逸定理を用いて熱雑音を推定する、というのが、本論文で提案している熱雑音の推定法である。

2-mode oscillator の伝達関数の計算例を図 2.4 に示す。共振より低い周波数では、伝達関数はほぼ一定の値をとる。最初の共振周波数では Q_1 倍大きくなり、そのあと周波数の 2 乗に反比例して小さくなる。更に周波数が高くなると、2 番目のモードの寄与が無視できなくなり、1 番目の伝達関数と同じ大きさになったときに $|-1/m_1\omega^2| = |1/m_2\omega_2^2|$ 、系の実部が消失し、虚部のみが残っている様子が分かる。

2.6 散逸角 $\phi(\omega)$

前節で出て来た $\phi(\omega)$ は系の散逸を表す。よく知られている散逸の例は、摩擦や空気抵抗等がある。これらの散逸の大きさは、速度に比例し、viscous damping と呼ばれる。こ

第2章. 熱雑音の推定

	Tungsten	Fused silica	Sapphire	Brass	Unit
E	36.2	7.29	47	10.4	10^{10} [Pa]
α	4.5	0.4~0.55	4.5,5.3	17.5	10^{-6} [K ⁻¹]
C	0.0317	0.2	0.186	0.088	[cal g ⁻¹ K ⁻¹]
ρ	19.3	2.22	3.97	8.53	[g cm ⁻³]
$c = C\rho$	2.56	1.86	3.09	6.64	[J cm ⁻³ K ⁻¹]
Δ	850	2.9	1300	1309	10^{-6}
κ	173	1.4~1.9	46	106	[W m ⁻¹ K ⁻¹]
$D = \kappa/c$	673	8.6	149	159	10^{-7} [m ² s ⁻¹]

表 2.1: 熱弾性の計算に必要な物理定数

れに対して、バルクな物質の内部で起こる散逸は、周波数に依存しない structure damping になることが経験的に知られている。また、細いワイヤーやリボンでは、熱弾性効果の寄与が大きくなる。本節では、これらの散逸についてその起源や特徴をまとめる。

2.6.1 物質内部で起こる散逸

structure damping

物質内部で起こる損失は、周波数に依存しない structure damping になることがいくつかの実験から知られている [4, 18, 19, 20]。しかし、この散逸の起源は、現在でもよく分かっていない。

熱弾性

熱弾性は、機械系の弾性振動によって非一様な伸縮がおこると、物質内部での温度分布が非一様になり、対流が生じてエネルギーを失うものである [21]。

この散逸は、薄い板やファイバー等の Q 値を決めるの要因のひとつとして知られている [22, 23, 24]。この散逸による $\phi(\omega)$ は、

$$\phi(\omega) = \Delta \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad (2.61)$$

と表される。ここで、 Δ は、次のように表される。

$$\Delta = \frac{E\alpha^2 T}{c} \quad (2.62)$$

但し、 E はヤング率、 α は線膨張係数、 T は温度である。 c は単位体積あたりの比熱で、比熱 C と密度 ρ を用いて $c = C\rho$ と表される。 τ は、直径 d のワイヤーの場合、

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = 2.16 \frac{D}{d^2} \quad (2.63)$$

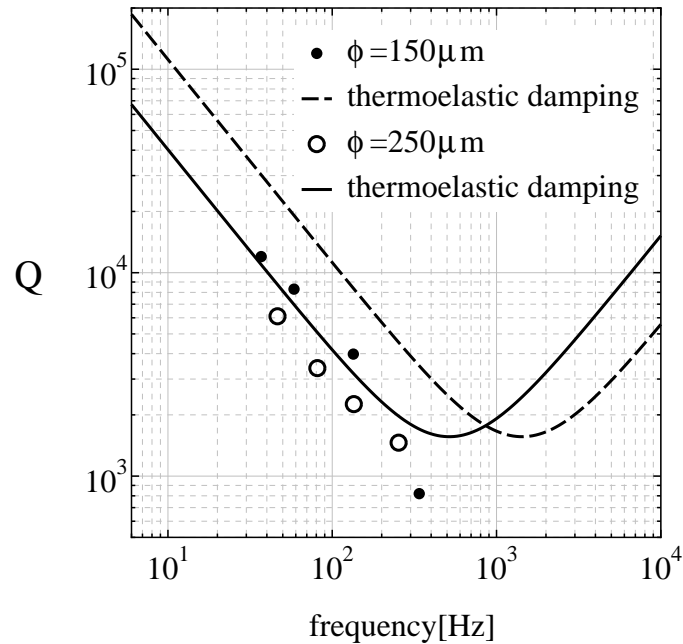


図 2.5: サファイアファイバーで測定された Q 値

となる。 f_0 は、熱弾性による散逸がもっとも大きくなる周波数である。ここで、 κ は、熱伝導率、 $D = \kappa/c$ は熱拡散係数である。厚さが t の板の場合は、

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{\pi D}{2 t^2} \quad (2.64)$$

と表される。

いくつかの物質に関して、熱弾性の計算に必要な物理量を表 2.1 にまとめた。熱弾性によって Q 値が制限されている例を図 2.5 に示す。これは、直径が $150\mu\text{m}$ と $250\mu\text{m}$ のサファイアファイバーの長さを変えながら、Q 値を測定した結果である⁴。熱弾性から推定される値が線で示してあり、若干のずれはあるが、実測された Q 値が、熱弾性によって制限されているように見える。

式 (2.62) からわかるように、 Δ の大きさは、線膨張係数の 2 乗に比例する。このため、常温では、サファイアは金属と同じくらい Q 値が下がる。しかし、低温では、線膨張率が小さくなるため、熱弾性によって制限される Q 値は高くなる。

⁴この測定は、1997 年に、著者が宇宙線研究所黒田研究室の協力を得て行ったものである。サファイアファイバーは同研究室に提供して頂いた。

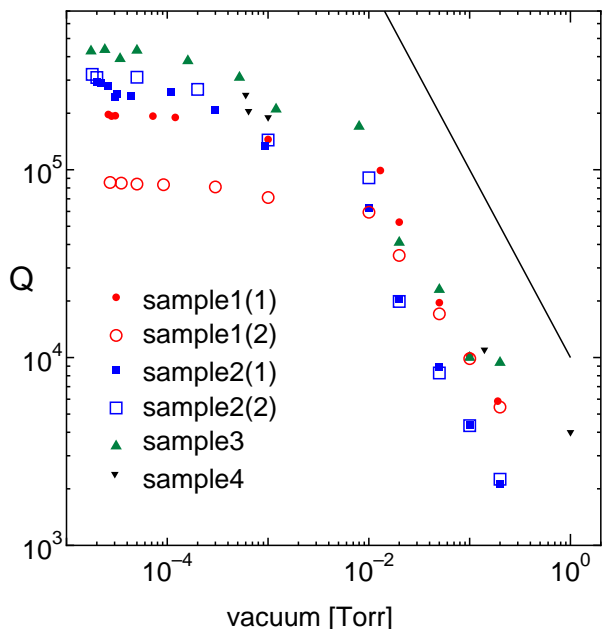


図 2.6: 合成石英のファイバーで測定された Q 値

2.6.2 物質の外部で起こる散逸

残留ガス

気体を構成する分子の平均自由行程が被測定物の大きさを越えるようになると、残留ガスによる散逸は、粘性ではなく分子の衝突によって記述されるようになり、以下の式で表わされる [25]。

$$Q_{\text{gas}} = Ch \frac{\rho \omega_0}{n \sqrt{m_{\text{mol}} k_B T}} \quad (2.65)$$

上の式で、 $C \sim 1$ の定数、 h は試料の特徴的な長さで、 ρ は物質密度、 ω_0 は共振の角周波数、 n は残留ガスの分子数密度、 m_{mol} は気体分子の質量、 k_B は Boltzmann 定数、 T は温度である。気体の状態方程式を用いて書き直すと以下のようになり、

$$Q_{\text{gas}} = Ch \rho \omega_0 \sqrt{\frac{k_B T}{m_{\text{mol}} p}} \quad (2.66)$$

圧力 p に反比例している事が分かる。

残留ガスで Q 値が制限されている例を図 2.6 に示す。これは、何本かの合成石英ファイバーの Q 値を、真空度を変えながら測定した結果である⁵。直線は、 p^{-1} に比例する線を示している。この場合、Q 値は、 10^{-1} から 10^{-2} torr 付近までは、残留ガスによって制限されていることが分かる。

⁵この測定も、1997 年に著者が宇宙線研究所黒田研究室の協力を得て行ったものである。

2.7 本章のまとめ

本章では、熱雑音の推定について概説した。

まず、推定法の基礎になっている揺動散逸定理によって、系のコンダクタンスや伝達関数の虚部といった散逸を表す量と、熱振動スペクトルが関連付けられることをみた。次に、具体例として、調和振動子の熱振動の推定法と、散逸の関係を説明し、共振から離れた周波数における熱振動は、散逸の周波数依存性によって変化することを説明した。また、一般に機械振動の方程式は、調和振動子の重ね合わせ(モード展開)で表されることを述べ、モード展開に必要な換算質量の概念や、 Q 値の測定についてまとめた。

しかし、モード展開を使った方法は、散逸が一様であれば正しいが、散逸が非一様な系では不正確になる。このことを単純な機械系の伝達関数の計算で示した。モード展開の問題を回避して、正確な推定をするためには、直接コンダクタンスを測定できればよい。次に、共振から離れた周波数では、通常はコンダクタンスの直接測定が困難であるが、反共振を利用することによって、測定上の問題点を解決できることを説明した。この反共振を利用して機械コンダクタンスを直接測定し、熱振動を推定するというのが、本論文で提案している熱振動の推定法である。最後に比較的良好に知られている散逸について、散逸の実測値も含めてその性質をまとめた。

第3章

機械コンダクタンスの直接測定

本章では、反共振周波数では、機械コンダクタンスが直接測定できることを確認するために行った検証実験についてまとめる。

この実験では、簡単な振動子を作成し、実際に伝達関数を測定した。その結果、反共振周波数で、コンダクタンスが測定できることを確かめた。振動子は、真鍮の板ばねと質量を2重に組み合わせたものを使用し、下段の質量に加えた力から変位への伝達関数を測定した。測定の結果、7.5 Hz と 53 Hz の2つの共振の間の 26.9 Hz に、反共振を確認した。また、反共振周波数付近では、伝達関数の虚部を精度よく測定することができた。2つの共振における Q 値は 8.7×10^2 と 8.3×10^2 で、ほぼ一定であり、伝達関数の虚部の測定値は、モード展開による推定値とよく一致した。

本章では、まず、測定に用いた振動子について説明し、測定装置、測定結果の順に述べる。

3.1 振動子

前章で、2つの共振を持つ系を例に、反共振ができることを説明した。そこで、実際に2つの共振を持つ単純な機械系として、板ばねと質量を二重に組み合わせた振動子を作成することにした。振動子の形状、材質は、以下のような条件を考慮して決定した。

- 2つの共振と反共振の周波数が適当に離れている。
- 高次モードの寄与が少ない。
- 加工しやすい材質と大きさである。

具体的には、板ばねの長さ、厚さ、幅、質量の重さ、材質などのパラメータを変えながら、伝達マトリックス法 (補遺 A 参照) を使って振動子の伝達関数を調べていった。その結果、真鍮で、表 3.1 に示すような大きさの振動子を作ることにした。このパラメータを使って計算した伝達関数を、図 3.1 に示す。但し、伝達関数の虚部は、 $\phi(\omega) = 1 \times 10^{-3}$ として計算した。

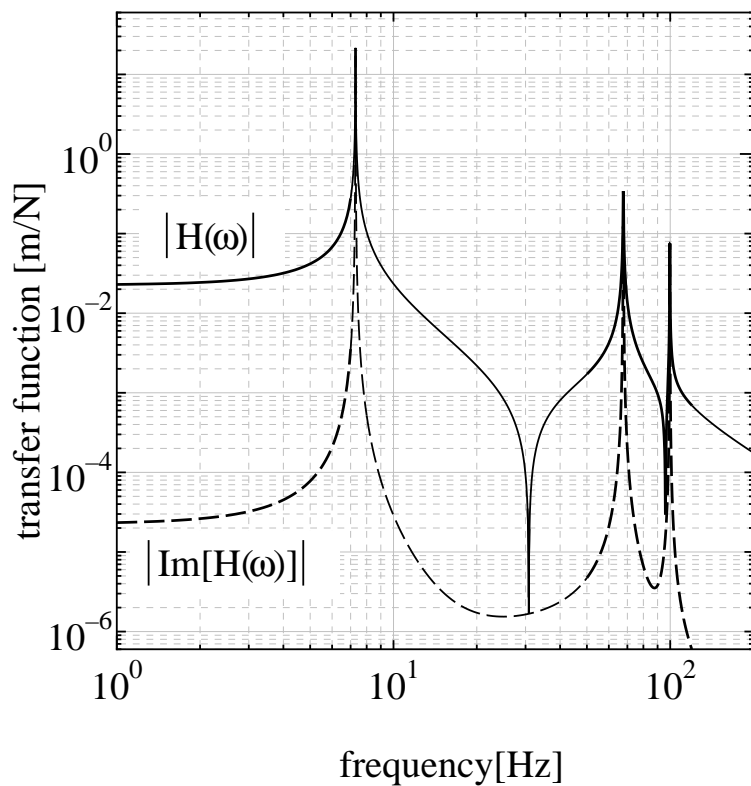


図 3.1: 伝達マトリックス法で計算された伝達関数

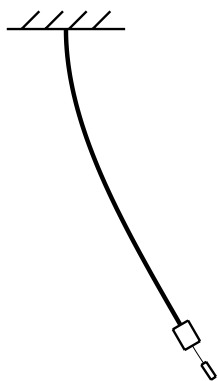


図 3.2: first mode



図 3.3: second mode



図 3.4: third mode

	長さ [mm]	厚さ [mm]	幅 [mm]	質量 [g]
上段	200	1.5	6	20
下段	12	0.3	3	4

表 3.1: 振動子の仕様

図 3.1 に示した伝達関数には、3つのモードが現れている。それぞれのモードの共振周波数と換算質量、および最初の2つのモードの間にある反共振の周波数を表 3.2 に示す。モードの形は各々、図 3.2、図 3.3、図 3.4 に示した。

表 3.2 中の低周波での伝達関数は、各共振の共振角周波数を ω_i 、換算質量を m_i としたときの、 $1/m_i\omega_i^2$ である。計算値から、低周波での伝達関数は、ほとんど最初の共振できまっていることが分かる。また、第二共振と第三共振の周波数がそれほど離れていないが、換算質量が4倍ほど違うため、第二共振より低い周波数での第三共振の寄与は、第二共振の1/10程度である。これは、第三共振の直前の反共振の周波数が、第三共振に接近していることから分かる。以上の計算結果から、この振動子の3番目の共振より低い周波数では、系の性質は、ほぼ1番目と2番目の共振だけで決まることを確認した。

	第一共振	反共振	第二共振	第三共振
周波数 [Hz]	7.29	30.8	68.7	99.7
換算質量 [g]	21		5.4	24
低周波での伝達関数 [m/N]	2.3×10^{-2}		9.9×10^{-4}	1.1×10^{-4}

表 3.2: 計算された共振周波数と換算質量

3.2 伝達関数の測定系

振動子の伝達関数を測定するためには、系に加える力と、系の変位を測定しなければならない。本章の測定では、力を加えるためには、振動子に磁石を接着し、磁石を覆うように置いたコイルに電流を流して力を加える、コイル-磁石アクチュエータを用いた。また、磁石の反対側に小さな鏡を接着してあり、マイケルソン干渉計とフォトセンサーを用いて変位を測定した。

マイケルソン干渉計を使った伝達関数の測定系を図 3.5 に示す。振動子は、上端で固定されている。下段の質量に力を加え、変位を測定している。

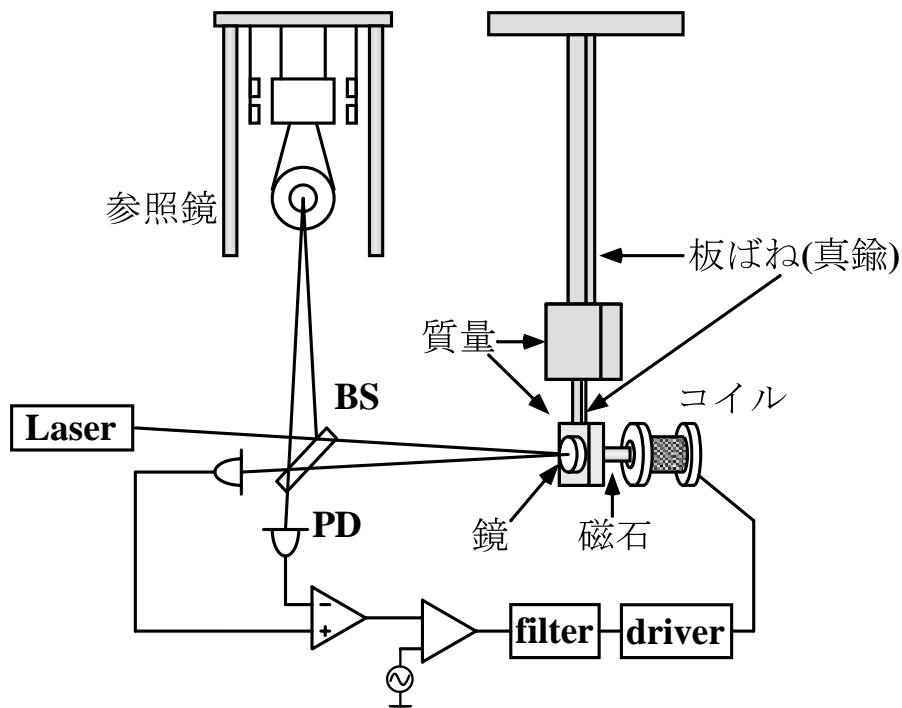


図 3.5: 2 段の板ばねと質量からなる振動子の伝達関数の測定系。下段質量には磁石と鏡が接着しており、磁石を覆うように置いたコイルに電流を流し、フォトセンサーまたはマイケルソン干渉計を用いて変位を測定している。

コイル-磁石 アクチュエータ

コイル-磁石アクチュエータが発生する力は、コイルに流れる電流に比例する。したがって、コイルに流れる電流、あるいはコイルドライバにかける電圧、といった電気的な量からアクチュエータが発生する力への変換係数が分かっているならば、電流や電圧をモニターすることで、アクチュエータが発生している力を知ることができる。この変換係数は、力と電気的な量を同時に測定することによって求めることができる。ここでは、力を測定するために電子天秤を使い、コイルに流れる電流から力への変換係数を求めた。但し、この係数は、コイルと磁石の相対距離に依存しているため、距離を変えながら、力を測定することで、距離に対する依存性も求めた。

アクチュエータのカップリングの測定方法

コイルに一定の電流を流した時に磁石にかかる力を測定するために、アクチュエータを図 3.6 のように配置した。電子天秤の上に磁石を接着した板を置き、磁石の直上に置いたコイルと磁石の距離をステージで変えながら、電子天秤で重さを読みとった。本章の実験では、直径が 2mm 長さが 5mm の Nd 磁石と、内径 10mm 長さ 15mm のコイルを用いている。これらを用いて測定されたコイル-磁石間の距離と、補遺 C に示すコイルドライバへ

の入力電圧からアクチュエータが発生する力への変換係数を測定した結果を、図 3.7 に示す。伝達関数の測定では、 1.9×10^{-3} [N/V] となる距離でアクチュエータを使用している。

フォトセンサ

低周波 (数 10Hz 以下) での変位の測定と、Q 値の測定には、フォトセンサを用いた。この測定に用いたフォトセンサを図 3.8 に示す。フォトセンサは、測定対象で反射された LED の光を、LED 両側につけた PD で受光して距離を測るものである。フォトセンサと測定対象の間の距離と、図 3.8 に示したフォトセンサの出力の関係を図 3.9 に示す。距離と出力の線形な領域を使って変位を測定することができる。図 3.9 に示した直線では、フォトセンサの出力電圧から、変位への換算係数は、 2.3×10^{-4} [m/V] となっている。

マイケルソン干渉計

数 10Hz 以上の周波数では、マイケルソン干渉計を用いて変位を測定した。マイケルソン干渉計は、光源から出た光をビームスプリッタで 2 つに分け、戻って来た光を干渉させて、2 つの腕の長さの差を検出するものである。ここで、その変位の検出原理を、図 3.10 を使って簡単に説明する。

鏡 M_1 、 M_2 で反射されて戻ってきた光の複素振幅をそれぞれ、 E_1 、 E_2 とする。

$$E_1 = A_1 \exp [i(2kx_1 - \omega t)] \quad (3.1)$$

$$E_2 = A_2 \exp [i(2kx_2 - \omega t)] \quad (3.2)$$

但し、 $k = 2\pi/\lambda$ は波数。波長 λ は、He-Ne レーザーの場合、633 nm である。

このとき、フォトディテクター PD₁ に入る光の強度 I_1 は、

$$I_1 = \left[\left(\frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \right) + A_1 A_2 \cos \{2k(x_1 - x_2)\} \right] \quad (3.3)$$

と表される。PD₂ に入る干渉光は、反射率 r の鏡でもう一度反射されているので、

$$I_2 = r^2 \left[\left(\frac{A_1^2 + A_2^2}{2} \right) - A_1 A_2 \cos \{2k(x_1 - x_2)\} \right] \quad (3.4)$$

と表される。フォトディテクターの受光量の最大値を I_{\max} 、最小値を I_{\min} とすると、式 (3.3) は次式のように表される。

$$I_1 = \frac{I_{\max} + I_{\min}}{2} + \frac{I_{\max} - I_{\min}}{2} \cos \{2k(x_1 - x_2)\} \quad (3.5)$$

2 つの腕の長さの差 $x = x_1 - x_2$ が変化すると、それぞれのフォトディテクターの受光量が上の式のように変化する。ここで、 I_{\max} 、 I_{\min} を用いて、干渉計の対称性を表す visibility を定義できる。

$$K = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad (3.6)$$

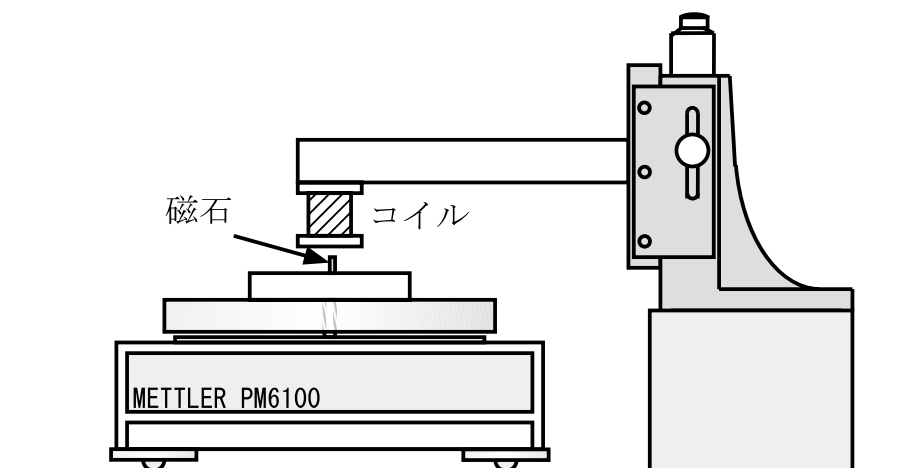


図 3.6: カップリングの測定系

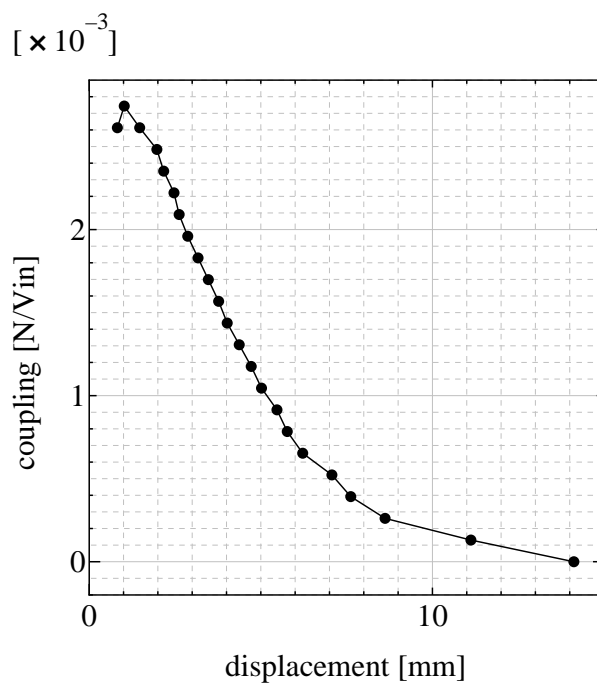


図 3.7: コイルと磁石の間の距離と力。但し、コイルと磁石の下端が一致した時の距離を 0 としている。

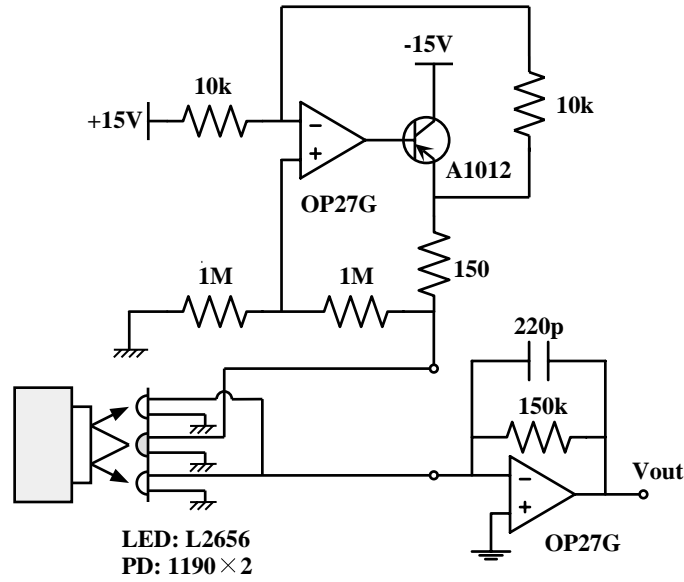


図 3.8: フォトセンサ原理図

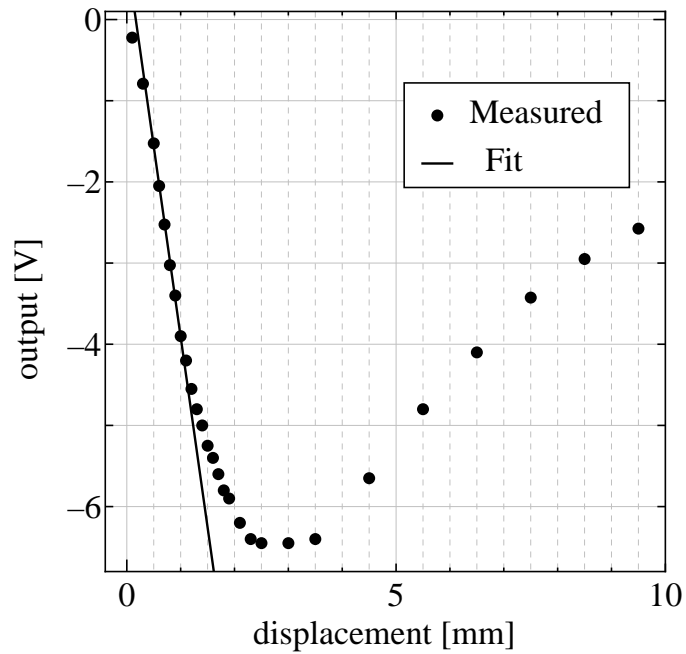


図 3.9: フォトセンサの応答

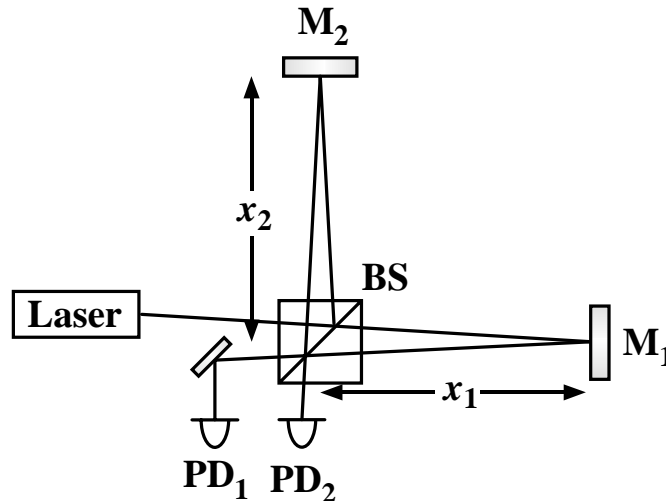


図 3.10: マイケルソン干渉計

理想的な干渉計ならば、 $K=1$ であるが、実際には、干渉計の非対称性などから 1 より小さな値になる。

2 つのフォトディテクターで受けた信号の差をとると、

$$I_1 - I_2 = \left(\frac{A_1^2 + A_2^2}{2}\right)(1 - r^2) + A_1 A_2 (1 + r^2) \cos 2k(x_1 - x_2) \quad (3.7)$$

となる。オフセットを調整すると、これは、次式のように表される。

$$I = A \cos(2kx) \quad (3.8)$$

この状態では、フォトディテクタの出力電圧 I と、光路長の差 $x = x_1 - x_2$ が比例せず、変位計として使いにくい。そこで、片方の鏡の位置を制御して、光路長差を変位と電圧が比例しているとみなせる範囲に収める (ロックする) ようにする。式 (3.8) で、 $I = 0$ になるように制御した場合、変位と受光量の関係は、

$$\frac{dI}{dx} = 2kA \sin(2kx) \Big|_{2kx=3\pi/2} = 2kA \quad (3.9)$$

となる。つまり、光源の波数 k と、2 つのフォトディテクタの差動出力の振幅 A が分かれば、差動出力から変位への変換係数を求めることができる。光源が波長 633 nm の He-Ne レーザーで、 A が 1V の場合、変換係数は、 5.0×10^{-8} [m/V] となる。

3.3 伝達関数の測定結果

次に、今まで述べてきた測定系を用いて測定された振動子の伝達関数についてまとめる。

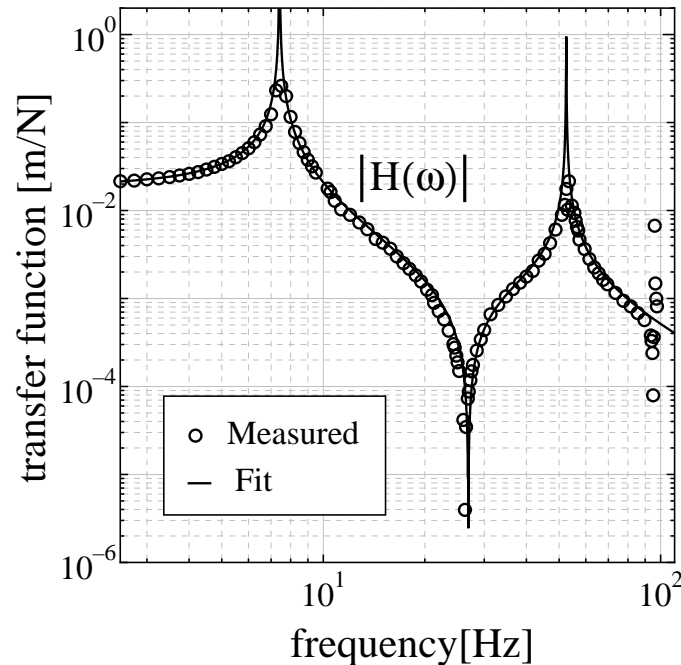


図 3.11: 2-mode oscillator の下段質量で測定された伝達関数。白丸が実際に測定された伝達関数の絶対値。実線はモード展開による値 (3.10)。7.5Hz と 52.5Hz に共振があり、26.9Hz に反共振が見える。96Hz に高次モードがあり、95Hz に反共振が見える。

3.3.1 伝達関数の測定結果

図 3.11 に測定された伝達関数を示す。白丸が測定された伝達関数の絶対値である。7.5Hz と 52.5Hz に共振があり、その間の 26.9 Hz に反共振が見える。96Hz に高次モードがあり、その直前の 95Hz にも反共振がある。

最初の共振の周波数は、伝達関数の計算とよくあっているが、第二共振の周波数はかなり低くなってしまった。第二共振では、下段質量の寄与が大きいですが、この質量には、鏡や磁石が接着してあり、単純なモデルでの計算では、それほど精度が出なかったのではないかと考えている。また、反共振周波数付近での伝達関数の拡大図を図 3.12 に示す。反共振周波数では、伝達関数の絶対値が、最小値 2.4×10^{-6} m/N をとっている。

Q 値の測定

2つの共振で Q 値を測定したところ、それぞれ 8.7×10^2 と 8.3×10^2 であまり変わらなかった。Q 値は、第二章で述べた、共振を励起して減衰を測定する方法で測定した。

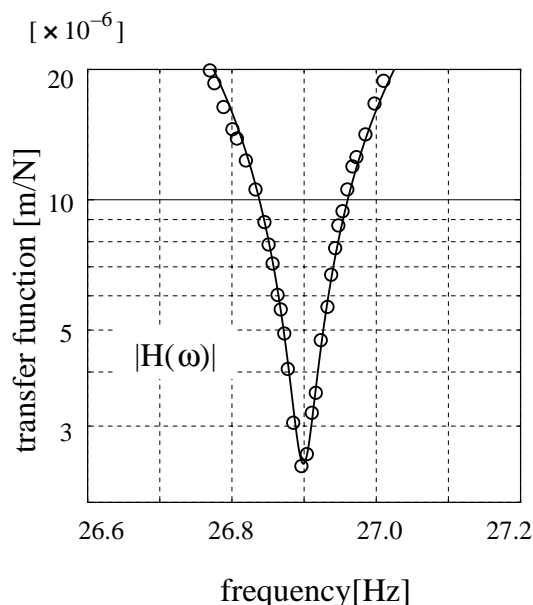


図 3.12: 反共振周波数付近での拡大図。伝達関数の絶対値は反共振で最小値 2.4×10^{-6} [m/N] をとる。

3.3.2 モード展開による推定

測定された伝達関数の第二共振の周波数が、伝達マトリックス法による計算とかなりずれてしまった。そこで、モード展開による計算を行い、実測値と比較することにした。モード展開による伝達関数の計算を行うためには、各モードの共振角周波数 ω_i 、換算質量 m_i と Q 値 Q_i が必要である。共振周波数と Q 値は既に測定から得られているので、測定された伝達関数を次式でフィットして、換算質量を求めた。

$$|H(\omega)| = \left| \frac{1}{m_1[(\omega_1^2 - \omega^2) + i\omega_1^2/Q_1]} + \frac{1}{m_2[(\omega_2^2 - \omega^2) + i\omega_2^2/Q_2]} \right| \quad (3.10)$$

それぞれの共振の周波数と、Q 値、伝達関数のフィットから得られた換算質量を表 3.3 にまとめる。また、フィットの結果を、図 3.11、3.12 中の実線で示す。

周波数 [Hz]	Q 値 [10^2]	換算質量 [g]
7.5	8.7	25.6
52.5	8.3	8.4

表 3.3: 真鍮振動子で測定された共振の周波数と Q 値、および換算質量

次に反共振周波数での伝達関数の虚部の測定値を調べる。

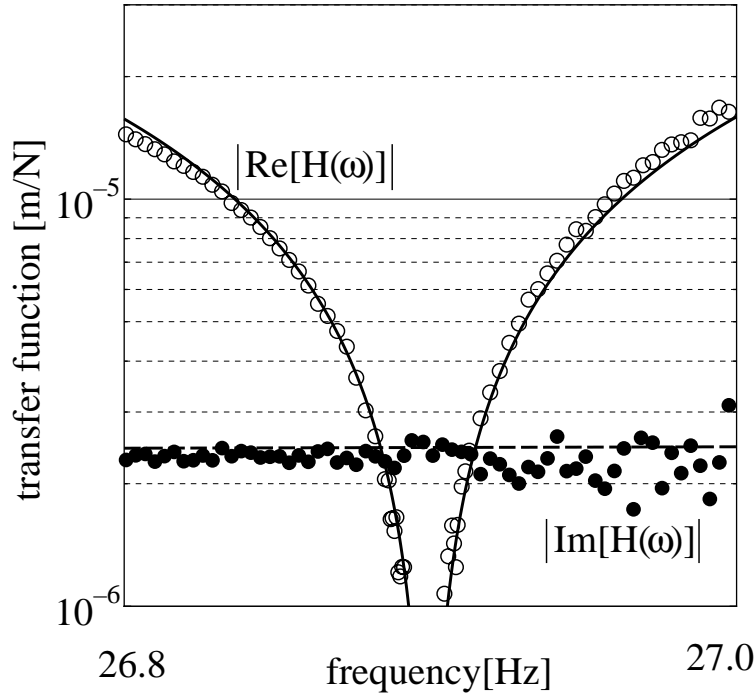


図 3.13: 反共振周波数付近で測定された伝達関数の虚部と実部。白丸が実際に測定された伝達関数の実部で、黒丸が虚部。実線が、式 (3.10) による実部、破線が虚部。反共振周波数では実部が小さくなり、虚部が精度よく測られることが分かる。

3.3.3 反共振周波数付近での伝達関数の虚部

図 3.13 は反共振周波数付近での伝達関数の測定値を実部と虚部に分けて示したものである。白丸が実際に測定された伝達関数の実部で、黒丸が虚部である。実線が、モード展開による実部を示し、破線が虚部を示している。反共振周波数では実部が小さくなり、0.2Hz 程度の周波数領域で、虚部が精度よく測られていることが分かる。

測定された伝達関数の虚部は、モード展開による計算値とよく一致している。これは、今回用いた振動子では、測定された Q 値がほとんど一定で、周波数依存性がみられなかったためだと考えられる。

この測定から、反共振周波数付近では実部が消失し、虚部が精度よく測定できることを確認した。また、測定された値はモード展開による計算値とよく一致していた。

熱振動の推定

この伝達関数の、反共振周波数 $\omega_{\text{anti}}/2\pi = 26.9$ Hz における虚部の測定値に、揺動散逸定理を適用して推定される熱雑音の大きさは、

$$\sqrt{x^2(\omega_{\text{anti}})} = 1.5 \times 10^{-14} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$$

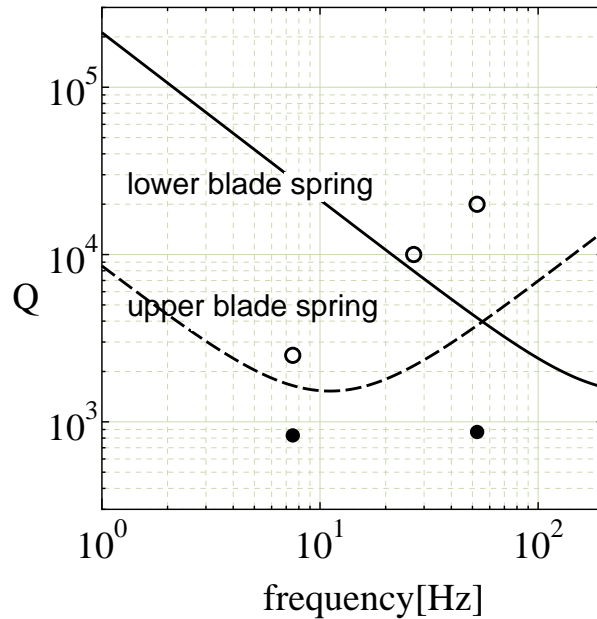


図 3.14: 熱弾性から計算される、それぞれの板ばねの $\phi(\omega)^{-1}$ と、熱弾性から推定される Q 値 (白丸)、および振動子の共振で測定された Q 値 (黒丸)。

である。この大きさの熱振動を直接測定するのは容易ではない。しかし、反共振を利用した伝達関数の虚部の測定は、比較的容易に行うことができた。

3.3.4 損失の原因

今回真鍮の振動子で測定された Q 値はほとんど変わらず、850 程度であった。次に、考えられる散逸の要因として、熱弾性による散逸と、大気との摩擦を検討した。

熱弾性

それぞれの板ばねの熱弾性による $\phi(\omega)$ を、第二章の式を用いて計算した。結果を図 3.14 に示す。振動子の Q 値と比較するために、伝達マトリックスによって、モードの形を計算し、この散逸によって決まる Q 値を

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{2\pi} \frac{\text{散逸するエネルギー}}{\text{系全体のエネルギー}} \quad (3.11)$$

として、それぞれの共振について計算した。但し、散逸するエネルギーは、

$$2\pi \sum_{i=1,2} \phi_i \times \text{板ばね } (i) \text{ の運動エネルギー}$$

とした。最初のモードでは、振動の運動エネルギーは、上段板ばねの寄与が大きく、 $Q_1 = 2.5 \times 10^3$ となった。また、2 番目の共振では、散逸のない下段質量の寄与が大きいため、

Q 値が高くなり、 $Q_2 = 2.0 \times 10^4$ となった。また、反共振では、上段質量の寄与が大きく、 $\phi^{-1}(\omega_{\text{anti}}) = 1 \times 10^4$ となった。

最初のモードでは、計算による ϕ の推定値が、実測の 1/3 になっているので、熱弾性の効果は無視できないと考えられる。しかし、熱弾性の効果は、周波数が高くなるほど小さくなっており、第二共振では、実測値の 1/20 にしかない。したがって、今回共振で測定された散逸が、全てが熱弾性で説明できるわけではない。

残留ガス

この測定は、大気中で行ったので、散逸の原因として、空気抵抗が考えられる。そこで、真空度を変えて、振動子の Q 値を測定してみた。しかし、真空度を 10^{-4} torr まで下げても測定された Q 値は変わらず、この散逸は、今回測定された散逸の要因ではないことが分かった。

3.4 本章のまとめ

本章では、反共振でコンダクタンスが測れることを確認するために板ばねと質量を 2 段に組み合わせた振動子を作成し、伝達関数の測定を行った。実際に 2 つの共振の間に反共振が現れ、そこでは虚部が精度よく測定できた。また、その値はモード展開によるものとよく一致していた。伝達関数の測定値から推定される熱振動の大きさは、周波数、26.9Hz において、 $1.5 \times 10^{-14} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$ であった。実際にこの大きさの熱振動を測定することは難しいが、伝達関数の測定は比較的容易であった。

第4章

熱雑音の直接測定

前章では、真鍮の振動子の伝達関数を測定し、反共振周波数付近で、伝達関数の虚部が精度よく測定できることを示した。また、測定された伝達関数の虚部は、モード展開から推定される値とよく一致していた。しかし、本論文で提案している推定法の正しさを示すためには、実際に測定された熱雑音の大きさと推定値を比較する必要がある。本章では、小さな振動子を用いて実際に熱振動とコンダクタンスの両方を測定し、結果を比較する。

これまでも述べてきたように、共振周波数以外の周波数における熱振動は非常に小さく、直接測定することは容易ではない。前章で用いた真鍮の振動子の反共振周波数 26.9 Hz における熱振動の推定値は、 $1.5 \times 10^{-14} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ であった。この周波数では、地面の常微振動がおよそ 10^4 倍の $1.4 \times 10^{-10} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ あり、このままでは、熱振動を測定することはできない。

そこで、まず、地面振動による変位を小さくするために、押しばねを利用した防振系を組み立て、熱振動の測定系を防振した。更に、振動子を小さくして、共振周波数を高く、換算質量を小さくする、などの変更を加えた。その結果、数百 Hz において、振動子の熱振動を測定することができた。実際に測定された熱振動は、伝達関数の測定から推定される値と、モード展開による推定値の両方と一致した。

4.1 測定系の雑音

振動子の熱振動を直接測定するためには、熱振動より感度のよい変位計が必要である。逆に、測定系の感度がだいたい分かっているならば、振動子の設計に役立てることができる。今回は、熱振動の測定に、マイケルソン干渉計を用いた。干渉計では、一般に、低い周波数 ($< 1\text{kHz}$) では地面振動、高い周波数 ($> 1\text{kHz}$) では光源の散射雑音が感度を制限する。次にこの 2 つの雑音について述べ、熱振動の測定に用いる干渉計の感度を見積もる。

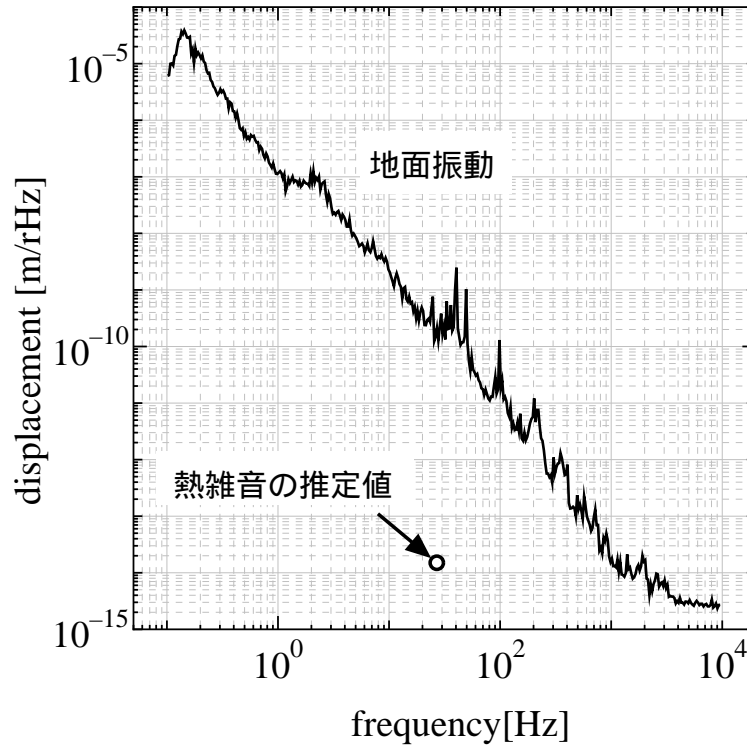


図 4.1: 東京大学理学部地下で測定された典型的な地面振動のスペクトル。白丸は、第 3 章で用いた振動子の反共振における熱雑音の推定値を示している。

4.1.1 地面振動

地面は、地震などで大きく振動する他にも、振幅は小さいが、常に振動している。この振動のスペクトルは、およそ次の式で表されることが知られている。

$$x^2(f) = \frac{10^{-7}}{f^2} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (4.1)$$

10^{-7} という値は、東京近郊などでの値であるが、場所によって異なり、岐阜県の神岡鉱山などでは、これより 2 桁程小さくなる。

図 4.1 に、東京大学の地下で測定された地面振動のスペクトルを示す。常微振動は、地震などと比較すると小さな振動である。しかし、第 3 章で用いた振動子で推定される熱振動と比べると、4 桁も大きい。このことから、共振以外の周波数における熱振動の小さいことが分かる。

周波数が高くなれば、地面振動の影響は小さくなる。しかし、振動子の共振より高い周波数では、熱振動も、地面振動と同じように小さくなってしまふ。したがって、熱振動を測定するには、ある程度共振周波数の高い振動子を用い、測定系を防振することが必要である。

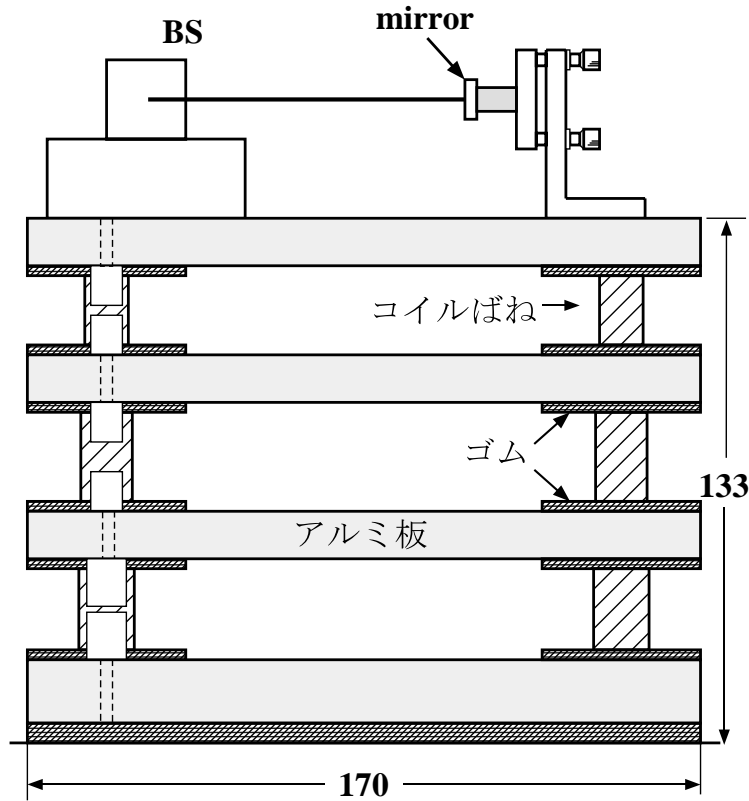


図 4.2: 防振系

防振系の原理

地面振動を防振するため、本実験では、ゴムとコイルばねを組み合わせた受動的な防振系を用いた(図 4.2)。

簡単のため、鉛直方向の振動を考え、防振の原理を示す。地面の振動を x_s とすると、ばね定数 k のばねで支えられた質量 m の台の運動は、

$$m\ddot{x}_m = -k(x_m - x_s) \quad (4.2)$$

と表される。ここで、 x_m が台の振動である。これをフーリエ変換して整理すると、

$$\frac{\tilde{x}_m}{\tilde{x}_s} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_p)^2} \quad (4.3)$$

となる。但し、 $\omega_p = \sqrt{k/m}$ は共振角周波数である。

式(4.3)から分かるように、共振周波数 ω_p より高い周波数では、地面の振動 x_s が、台に伝達されにくくなる。横振動に関しても、原理的には同じように防振される。

原理は単純だが、実際に防振系を組むと、ばねの高次モードの影響などで、なかなか計算通りには防振されない。この防振系では、高次モードの寄与を抑えるために、ばねに厚

第4章. 熱雑音の直接測定

さ 0.1mm の鉛を巻いて共振の Q 値を下けている。また、防振系を 3 段重ねている。その結果、地面振動の影響をかなり抑えることができた。結果を、図 4.3 に示す。

4.1.2 散射雑音

フォトディテクタに入射する光の強度が一定で、光電流 $I_{dc}[A]$ が流れているとき、

$$i^2(\omega) = 2eI_{dc} [A^2/Hz] \quad (4.4)$$

の雑音電流が存在する。これを散射雑音という [27]。但し、 $e = 1.6 \times 10^{-19} [C]$ は電気素量である。

フォトディテクタの電流を電圧に変換する抵抗 R を用いて、これを電圧の揺らぎのスペクトル密度 $v^2(\omega)$ に直すと、

$$v^2(\omega) = 2eRV_{dc} [V^2/Hz] \quad (4.5)$$

となる。但し、 $V_{dc} = RI_{dc}$ である。2 つのフォトディテクタの出力の差動信号では、2 つのディテクタの雑音は独立なので、二乗和になる。

$$v^2(\omega) = 2e(R_1V_{dc1} + R_2V_{dc2}) [V^2/Hz] \quad (4.6)$$

この電圧を、前章の干渉計の信号の換算係数 (3.9) を使って換算すると、散射雑音による変位のスペクトルを計算することができる。雑音スペクトル測定の際の散射雑音の計算結果を図 4.3 に示す。

4.2 干渉計の雑音スペクトルの測定

以上のことをふまえて、干渉計の雑音を見積もるために、防振系の上に固定鏡で干渉計の組み、スペクトルを測定した。

4.2.1 雑音スペクトルの測定結果

最初に、測定されたスペクトルを図 4.3 に示す。大気中の測定では、音などの影響が大きいが、真空にひかなくても、測定系を入れてある真空槽の蓋を閉めるだけで、静かになる。図は、蓋を閉めた時の干渉計の雑音を示している。実線は、計算された散射雑音の値である。

4.2.2 測定系

次に前節に示したスペクトルの測定方法を説明する。測定系は、図 4.4 のようになっている。防振系の上に、固定鏡を 2 つ使った干渉計を組んでいる。鏡は、直径 10mm、厚さ

4.2. 干渉計の雑音スペクトルの測定

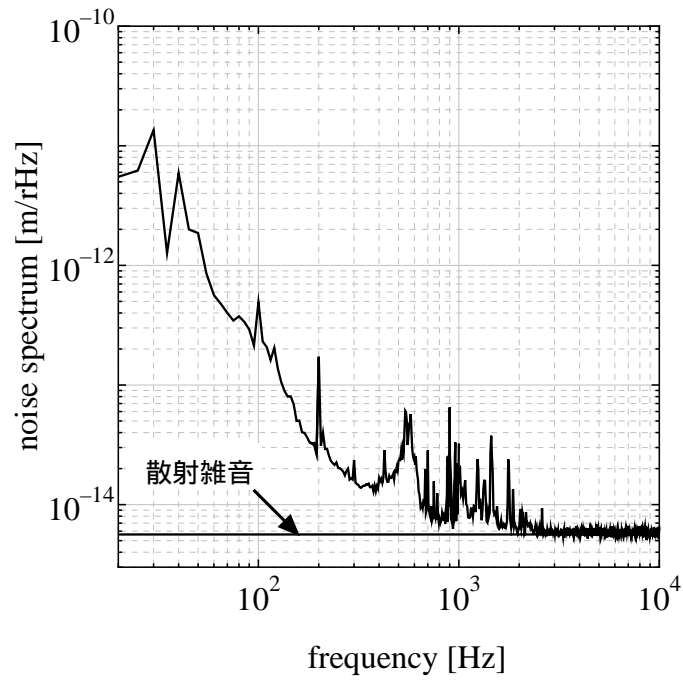


図 4.3: 固定鏡の干渉計で測定された雑音スペクトル

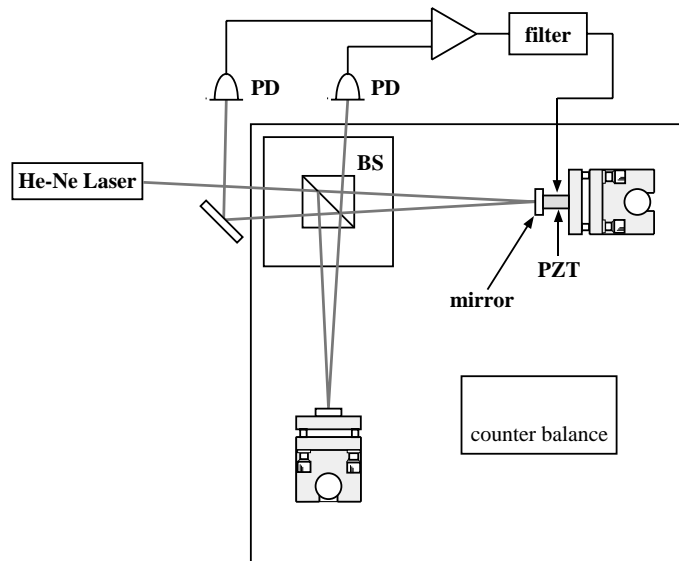


図 4.4: 干渉計の雑音の測定系

第4章. 熱雑音の直接測定

3mm のアルミ鏡であり、片方の鏡には PZT (ピエゾ) を接着してある。干渉計の出力を、フィルタを介して、PZT にフィードバックし、干渉計をロックしている。フィルタは補遺 C の PZT 制御用フィルタを用いた。

ロックした干渉計の差動出力を測定し、変位に変換すれば、振動のスペクトルが求められる。しかし、測定されたスペクトルから変位への換算を行う時には、干渉計の制御の影響を考慮する必要がある。次に、制御の影響を考慮した換算方法を示す。

4.2.3 制御系の影響

干渉計の差動出力を、変位スペクトルに換算するためには、制御系の影響を考慮しなければならない。このことを図 4.5 の、制御のブロックダイアグラムを使って説明する。

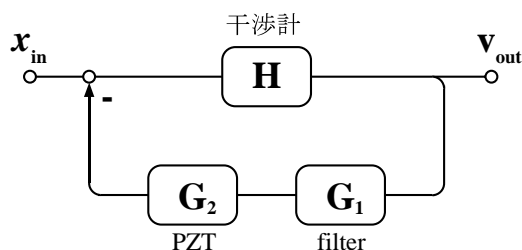


図 4.5: 制御のブロックダイアグラム

図中 v_{out} は干渉計の差動出力、 x_{in} は振動子の変位であり、 G_1 は PZT 制御フィルタの伝達関数、 G_2 は PZT に加える電圧から、PZT の変位への換算係数であり、今回使用した PZT では、 $0.1 \mu\text{m}/\text{V}$ である。H は第 3 章で述べた、フォトディテクタの差動出力から変位への換算係数の逆数にあたる。

出力 v_{out} が、ループをまわってもとに戻ってくると、

$$v_{out} = (x_{in} - G_1 G_2 v_{out}) H \quad (4.7)$$

となる。これを整理すると、

$$x_{in} = \frac{1 + G_1 G_2 H}{H} v_{out} \quad (4.8)$$

となる。即ち、制御のオープンループ伝達関数 $H_o = G_1 G_2 H$ が 1 より小さい時には、制御の影響は小さい。しかし、制御のゲインが大きい時は、干渉計の出力は制御によって実際より小さく押えられている。この制御の影響は、干渉計の出力に、 $(1 + H_o)$ をかけることによって補正することができる。PZT ループのオープンループ伝達関数の実測値を図 4.6 に示す。600Hz 付近に、PZT とその支持系に起因すると見られる共振があるが、Q 値も小さく、制御には問題ない。ループの絶対値が 1 になる周波数 (UGF) は、このとき 90Hz であった。これ以上高い周波数では制御の寄与は小さい。

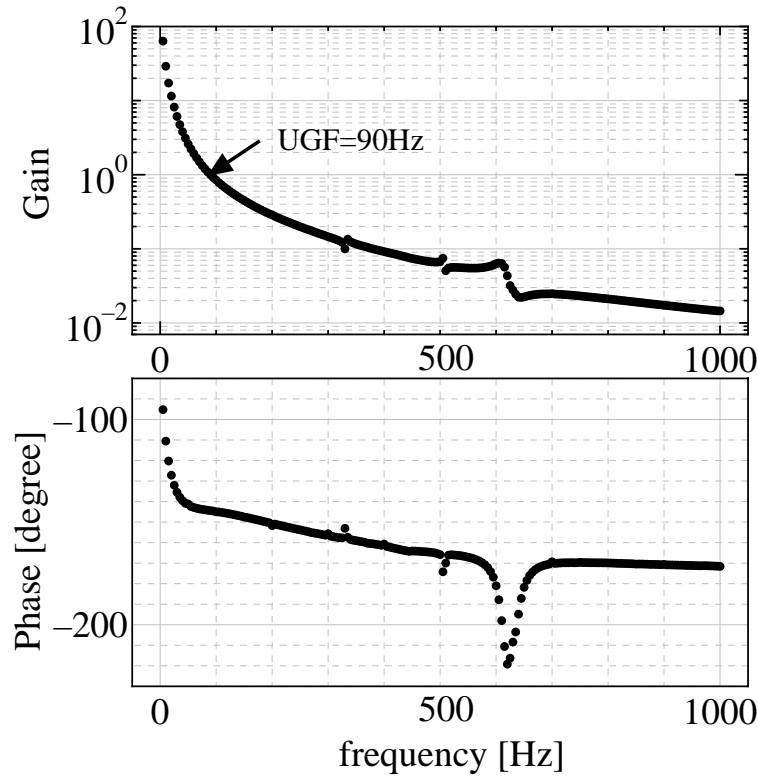


図 4.6: オープンループ伝達関数

4.3 振動子の設計

振動子は、前節と同様に板ばねと質量を組み合わせた 2-mode oscillator を用いる。換算質量を小さくし、熱振動を大きくするためと、雑音をさけるために、振動子は、以下のような方針で設計した。(但し、熱振動の測定では、振動子を下端で固定しているのので、振動子の上段、下段が、第 3 章の振動子とは逆になっている。)

- 共振周波数は数百 Hz 以上にする。
- 上板の厚さを 0.1mm とする。(これより薄くすることは難しい。)
- 熱振動を測定する上段の質量は、磁石のみとする
- 2 つの共振周波数をあまり離さない。

この方針に基づいて決定した振動子のパラメタを、表 4.1 に示す。

また、表 4.1 に示したパラメタで計算した伝達関数とモードの形を図 4.7、図 4.8、図 4.9 に示す。但し、伝達関数の虚部は、 $\phi(\omega) = 10^{-3}$ として計算した。また、共振周波数と換算

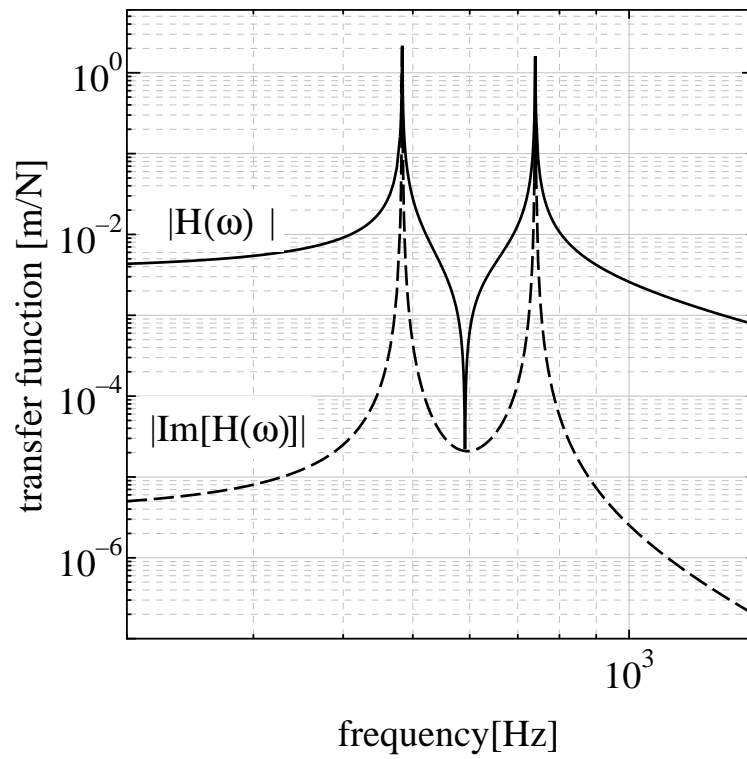


図 4.7: 伝達マトリックス法で計算された伝達関数

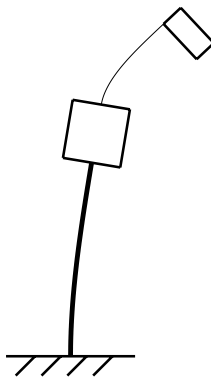


図 4.8: first mode

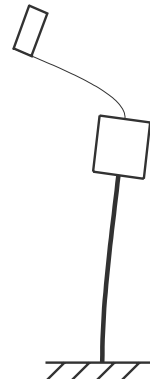


図 4.9: second mode

	長さ [mm]	厚さ [mm]	幅 [mm]	質量 [mg]
下段	12	0.5	3.0	400
上段	5.0	0.1	1.5	17

表 4.1: 振動子の寸法

質量、反共振周波数の計算結果を表 4.2 に示す。

この計算では、反共振における熱雑音の推定値が $1.4 \times 10^{-14} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ となる。この値は、十分大きいとは言えない。しかし振動子のパラメタを変えて、計算される熱振動をこれ以上大きくすることは難しい。実際には ϕ 等の値が計算に用いた値とは若干異なっていることを期待して、このパラメタの振動子で測定を行うことにした。

振動子の材質については、真鍮の他、燐青銅なども考慮したが、これは、加工時の熱変形が問題になり、真鍮を用いることにした。

	第一共振	反共振	第二共振
周波数 [Hz]	426	543	623
換算質量 [mg]	32.6		39.3
低周波での伝達関数 [m/N]	4.27×10^{-3}		1.66×10^{-3}

表 4.2: 共振周波数と換算質量の計算値

次に、この振動子の伝達関数の測定について述べる。

4.4 伝達関数の測定

作成した振動子 (口絵写真参照) を用いて、まず、伝達関数を測定した。伝達関数の測定系を図 4.10 に示す。測定系は、基本的に第 3 章で用いたものと同じである。いくつか細かい変更点をあげると、磁石を直径 1mm 長さ 3mm の Nd 磁石に変えたため、コイルドライバに加える電圧から力への変換係数が、 $6.15 \times 10^{-5} \text{ [N/V]}$ になっている。また、鏡を貼らずに、真鍮の面を磨いて光を反射しているため、反射率が悪くなっている。レンズでビーム径を絞っているが、コントラストは 0.3 くらいにしかならない。

4.4.1 伝達関数の絶対値

図 4.11 に、3kHz までの伝達関数の測定結果を示す。計算では、数百 Hz の 2 つの共振しかなかったが、計算になかった 1kHz、2.2kHz、2.3kHz に共振が現れた。しかし、こ

第4章. 熱雑音の直接測定

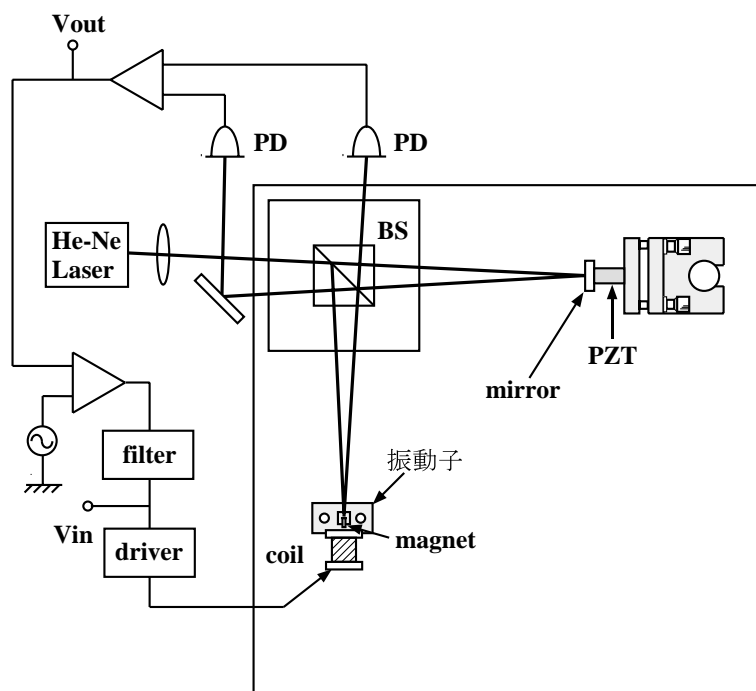


図 4.10: 伝達関数の測定系

これらの共振の直前にある反共振の周波数は、共振周波数に接近している。したがって、これらの共振の低周波での寄与は小さいことが分かる。

次に、最初の2つの共振とその間にできた反共振を図4.12に示す。2つの共振の周波数はそれぞれ、334Hzと507Hz、反共振の周波数が415Hzと、計算値よりも100Hzほど低くなっている。この伝達関数を2つの調和振動子の和の伝達関数でフィットし、換算質量を計算すると、それぞれ、42mg、30mgとなっていた。また、PZTループで干涉計をロックし、振動子のQ値を測定した。Q値の測定は、共振を励起して、減衰を読む方法で行った。結果は、それぞれ、 4.2×10^2 と 4.0×10^2 で、ほとんど変わらなかった。これらの測定結果を表4.3にまとめる。

	第一共振	反共振	第二共振
周波数 [Hz]	334	415	507
Q値 [10^2]	4.2		4.0
換算質量 [mg]	42		30

表 4.3: 測定された共振周波数とQ値、および換算質量

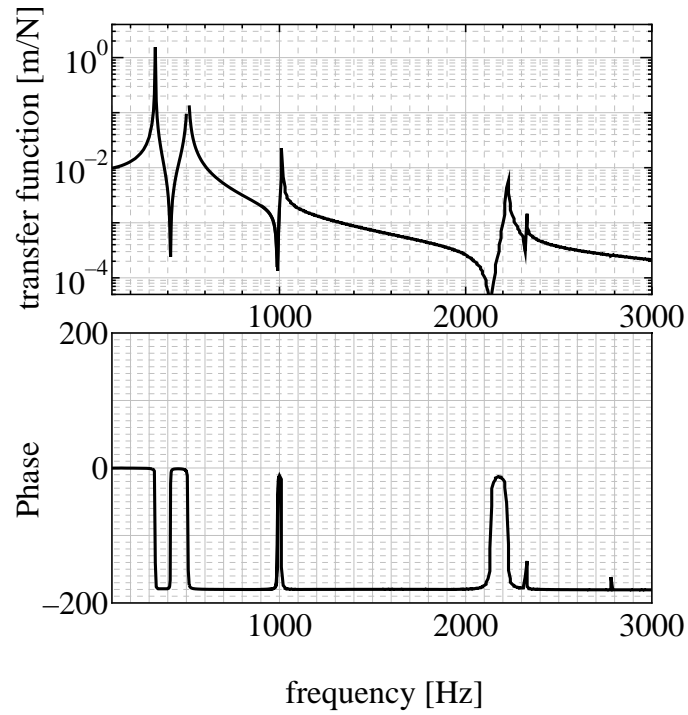


図 4.11: 伝達関数の測定結果 -1.

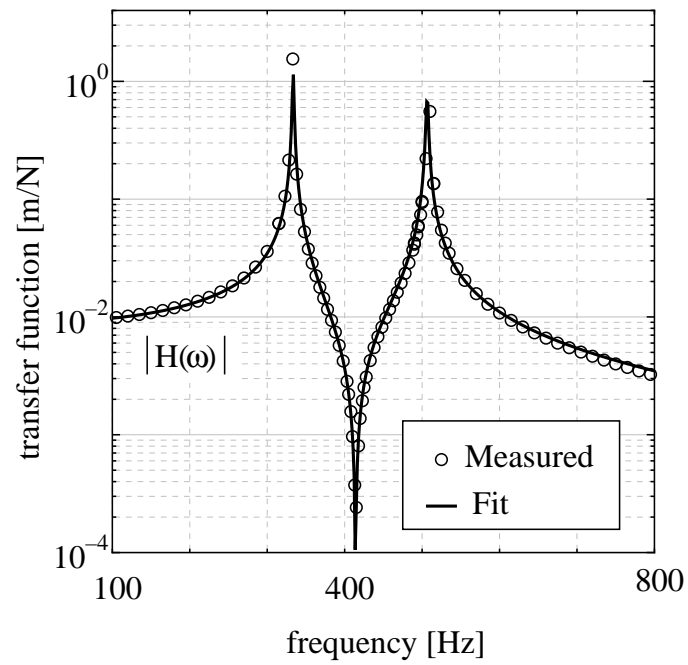


図 4.12: 伝達関数の測定結果 -2.

第4章. 熱雑音の直接測定

4.4.2 伝達関数の虚部

図 4.13 に、図 4.12 と同じ周波数領域で測定された伝達関数の虚部を示す。実線はモード展開から推定される値である。反共振周波数を含め、伝達関数の虚部を、かなり広い周波数領域で測定することができた。また、測定された値は、モード展開とほぼ一致している。しかし、700Hz より高い周波数では、モード展開から推定される伝達関数の虚部と、実測値が大きく異なっている。この差はなぜ生じたのだろうか。

広範囲で虚部が測定された理由は、この振動子の2つの共振と、反共振の周波数が接近していて、虚部が実部に比べてそれほど小さくない領域が広がっているためだと考えられる。この考えを確かめるために、モード展開から推定される伝達関数の虚部と実部の比を計算した。結果を図 4.14 に示す。

300Hz から 550Hz くらいの周波数範囲では、実部と虚部の比は、 10^{-2} よりも大きくなっている。また、モード展開とのずれが大きくなっている 700Hz 以上では、この比が 2×10^{-3} より小さくなっている。したがって、700Hz 以上の周波数でのモード展開による虚部の推定値と実測値のずれは、散逸の非一様性などから生じるものではなく、単に伝達関数の虚部と実部の比が小さいために、測定できていないのだと考えられる。これは、虚部と実部の比が比較的大きいところでは伝達関数の虚部が精度良く測定できるが、比が小さいと測定が難しいという考えとも合う。具体的には、今回の場合は、比が $1/500$ より小さくなると測定が難しくなっている。

4.5 熱振動の直接測定

次に、この振動子を用いた熱振動の直接測定について述べる。熱振動の測定系は、雑音スペクトルの測定系で用いた固定鏡を振動子と取り換えただけのものである。

4.5.1 熱振動の測定結果

図 4.15 に制御の影響を補正していない干渉計の差動出力のスペクトルを示す。振動子の共振に他に電気系のラインノイズ (50Hz の高調波) や機械振動に起因すると思われるピークがあるが、このスペクトルを解析して、コンダクタンスによる推定と比較することにした。

4.6 直接測定された熱振動と、推定値との比較

図 4.16 に、

- 実際に測定された熱振動と、
- 伝達関数の虚部に揺動散逸定理を適用して推定される熱振動

4.6. 直接測定された熱振動と、推定値との比較

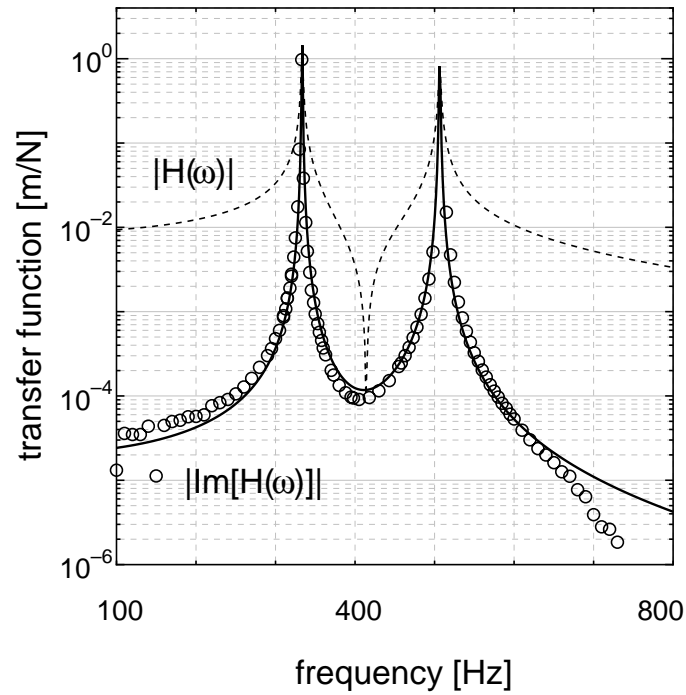


図 4.13: 測定された伝達関数の虚部と、モード展開による推定値。点線は伝達関数の絶対値をフィットしたもの。実線がモード展開から推定される虚部の値。白丸が実測値。

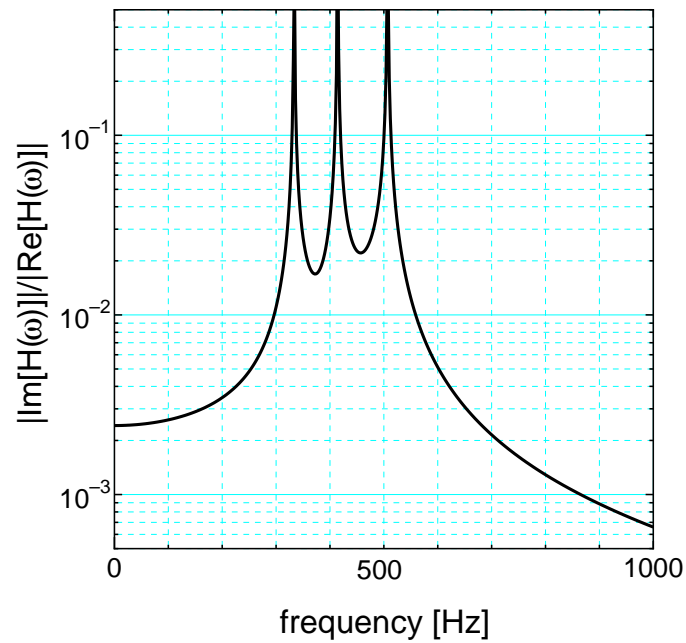


図 4.14: モード展開から計算される伝達関数の実部と虚部の比

第4章. 熱雑音の直接測定

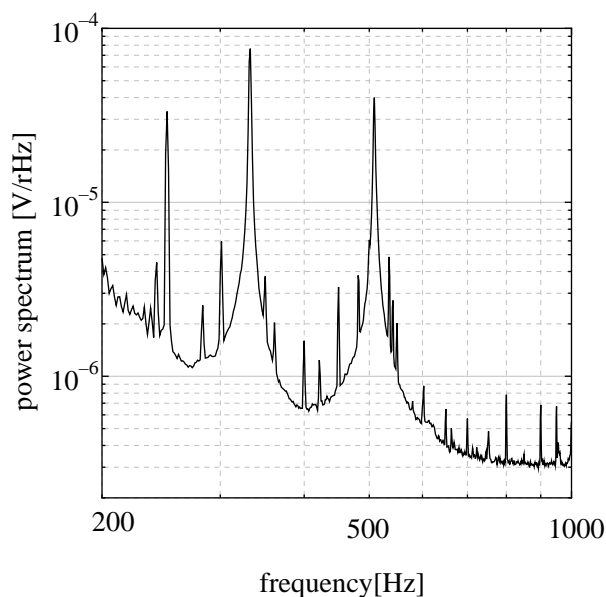


図 4.15: 干渉計の差動出力 (補正なし)

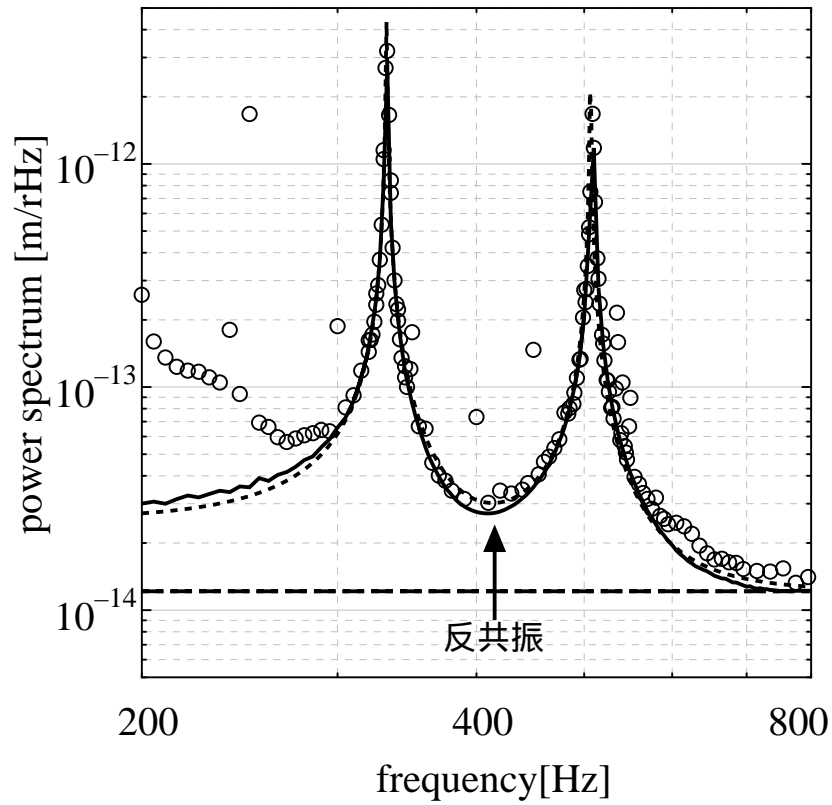
- モード展開から推定される熱振動

の3つを比較した結果を示す。

但し、推定値は、計算された熱雑音と、散射雑音の2乗和をとっている。推定値と実測値は広い範囲で一致している。

4.7 本章のまとめ

本章では、小さな真鍮の振動子を用いて、伝達関数と熱振動の両方を測定した。伝達関数の虚部は、反共振周波数を含め、虚部と実部の比がだいたい1/500よりも大きいところでは、精度良く測定できた。熱振動の推定値と実測値を比較した結果、直接測定された熱振動と、伝達関数の虚部から推定される熱振動、さらにモード展開から推定される熱振動の3つがよく一致することを確認した。



- 実測値
- コンダクタンスの測定による推定値
- ... モード展開による推定値
- 散射雑音レベル

図 4.16: 熱振動の推定値

第5章

干渉計型重力波検出器に用いる鏡への応用

前章まで、反共振を利用して機械コンダクタンスを直接測定し、揺動散逸定理を適用する方法で、熱振動を推定できることを確認してきた。本章では、この推定方法を用いて、干渉計型重力波検出器に用いられる鏡の熱雑音を推定することを考える。

まず最初に、従来の干渉計型重力波検出器における熱雑音の推定法とその推定結果をまとめる。そして、どのような振動モードを考慮すべきか、といったことを説明する。次に、この説明をふまえて、これまで述べてきたコンダクタンスの直接測定による熱雑音の推定法を干渉計の鏡に応用するためには、どのような測定を行うべきか論ずる。そして、実際に用いた鏡の伝達関数の測定系と測定結果を述べる。

吊った鏡の伝達関数の測定の結果、観測帯域に近い 2kHz 付近に反共振ができることを確認した。しかし、前章までの測定で用いた小さな振動子と比べ、質量、 Q 値ともに 3 桁程大きな鏡の伝達関数の虚部を直接測定することは、反共振を利用しても困難であった。最後にこれらの測定結果をまとめ、測定を制限する雑音について議論し、今後の展望を示す。

5.1 干渉計型重力波検出器における鏡の熱雑音の推定

微弱な重力波を検出するためには、検出器の様々な雑音を低減していく必要がある。干渉計型重力波検出器を構成する鏡の熱振動も、将来検出器の感度を制限する主要な雑音のひとつとなることが予想されており、その雑音の大きさを正確に把握し、かつこれを低減していくことは、検出器開発のうえで重要な課題になっている。

干渉計に用いられる鏡の弾性振動の共振周波数は、数 10 kHz 以上にあり、この熱振動は、数 10 Hz から数 kHz の干渉計の観測帯域では非常に小さい。そのため、現在開発中の干渉計では、直接測定することができず、何らかの方法で推定するしかない。次に、干渉計型重力波検出器に用いられている鏡について述べ、干渉計型重力波検出器開発の分野で従来行われてきた熱振動の推定法について説明していく。

第5章. 干渉計型重力波検出器に用いる鏡への応用

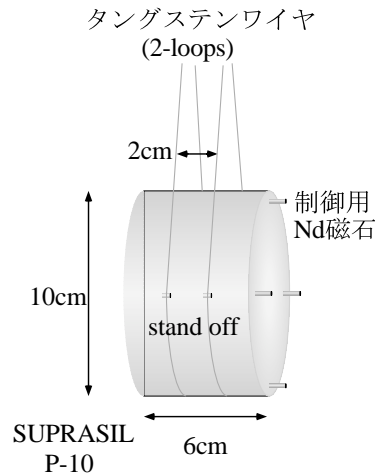


図 5.1: TAMA の鏡とその懸架系

5.1.1 鏡

干渉計型重力波検出器、TAMA300 で用いられる鏡は、基材が合成石英 SUPRASIL P-10 [26] で、直径が 10cm、高さが 6cm の円柱形をしている。密度が 2.19g/cm^3 なので、質量は 1.03kg。高い反射率を実現するために鏡面には、誘電体多層膜コーティングを施してある。また、干渉計で用いる際には、1. 鏡を慣性系におくためと、2. 防振のために、直径 $50\mu\text{m}$ のタングステンワイヤー 2 本で吊っている (図 5.1)。

鏡には、直径 1mm 長さ 5mm の Nd 磁石を 4 つ、鏡の縁から 2mm の位置に接着してある。この磁石を覆うように置いたコイルに電流を流して、鏡の位置を制御する。また、ワイヤーと鏡の接点には、スタンドオフとよばれるアルミ製の小さな棒 (直径 2mm、長さ 4mm) が貼ってある。これは、ワイヤーと鏡の相対運動による摩擦を減らし、振り子振動の Q 値を高くするためのものである。

5.1.2 鏡の振動方程式とその解

前節で述べたような形状の鏡の運動方程式は、解析的には解くことができない。そこで、数値計算を含む半解析的な解法が研究されてきた [3]。この方法を使うと、弾性体の共振周波数や振動モードの形を精度よく計算する事ができる¹。したがって、通常は、モード展開を使って観測帯域での熱雑音を推定している。

本節では、実際の計算方法にはあまり立ち入らず、計算の結果得られる

- 鏡の固有振動モードの特徴

を説明する。

¹100kHz 以下のモードでは、周波数の計算値と実測値の誤差は 1%程度である。

5.1. 干渉計型重力波検出器における鏡の熱雑音の推定

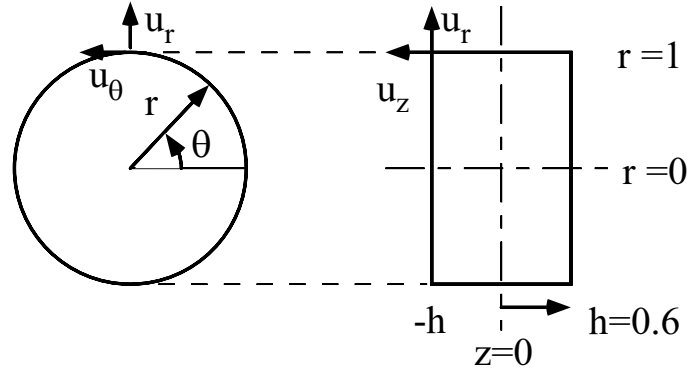


図 5.2: 座標系

鏡の運動方程式

弾性体の運動方程式は、変位ベクトル \mathbf{u} 、弾性体の密度を ρ 、Poisson 比 ν 、ヤング率 E を用いて、

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\nu)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} \text{grad div } \mathbf{u} \quad (5.1)$$

と表される。

座標系

鏡は円柱形なので、式 (5.1) を図 5.2 の円柱座標系 (r, θ, z) で計算する。但し、 z の原点は鏡の中心にとる。この時、方程式 (5.1) は、次の表 5.1 のような解をもつ。

	(1)	(2)	(3)
u_r	$2\alpha J'_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$-\alpha \beta J'_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$-\frac{n}{r} J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$
u_θ	$-\frac{2n}{r} J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$	$\frac{\beta n}{r} J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$	$\alpha J'_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$
u_z	$2\delta J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} -\sin \delta z \\ \cos \delta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$\alpha^2 J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} -\sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	0

表 5.1: 弾性体の微分方程式の解。文献 [3] より引用。

但し、 J_n は n 次の Bessel 関数。 α, β, δ は角周波数 ω の関数。

これら 3 つの独立な解 (1), (2), (3) の適当な線形結合をとり、円柱の端面での応力が 0 という境界条件を課して、方程式を解く。

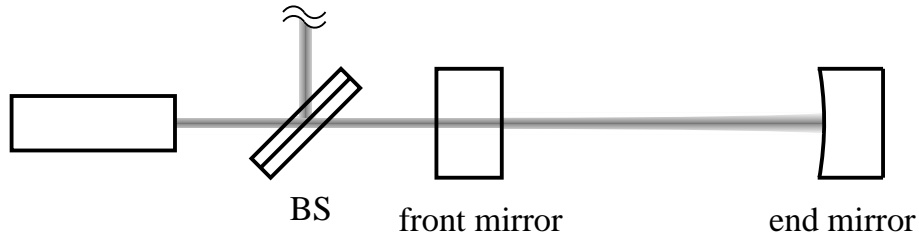


図 5.3: Fabry-Perot 干渉計

固有振動モードの形

得られた解の特徴のひとつとして、変位の θ 依存性を説明する。

基底関数 (表 5.1) より、方程式の解は、 θ に対して、 $\sin n\theta$ か $\cos n\theta$ の依存性を持っている。これから、 n は鏡面の振動の節の本数を示していることが分かる。

$n=0$ の場合を軸対称モードと呼び、この場合、変位は θ に対する依存性を持たない。また、 $n \neq 0$ の場合には、整数 n の値に応じて、変位の θ 依存性が決まる。

5.1.3 換算質量

温度 T の熱浴中では、鏡は 3 次元の熱振動をしている。しかし、干渉計で問題となるのは、鏡の熱振動によってひきおこされる光路長変動 (1 次元) である。鏡の熱振動による干渉計の実効的な光路長の変動は、干渉計内の電場の強度分布と鏡の振動モードの形に依存している。そこで、これらの影響を考慮して、

- 干渉計における鏡の熱雑音を推定する場合、どのようなモードを考慮すべきかを説明する。

電場の空間分布

補遺 B で、重力波検出器は基本的には Michelson 干渉計であると述べた。しかし、実際には、実効的な基線長を延ばすためにそれぞれの腕には 2 枚の鏡を向かい合わせた Fabry-Perot 共振器を用いている (図 5.3)。

干渉計型重力波検出器では、ビームスプリッター (BS) に近い方の鏡を front mirror、BS から遠い方の鏡を end mirror と言っている。

Fabry-Perot Cavity 内の電場の空間分布 $\psi(x, y, z)$ は、エルミート-ガウシアン関数系や、ラゲール-ガウシアン関数系によって展開できる [42] が、実際の干渉計では、基本モード (TEM₀₀) のみになるようにしている。 z を電場の進行方向にとると、基本モードは、

$$\psi_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{k_0}{\pi z_R q(z)}} e^{-i \frac{k_0}{q(z)} \frac{x^2 + y^2}{2}} \quad (5.2)$$

5.1. 干渉計型重力波検出器における鏡の熱雑音の推定

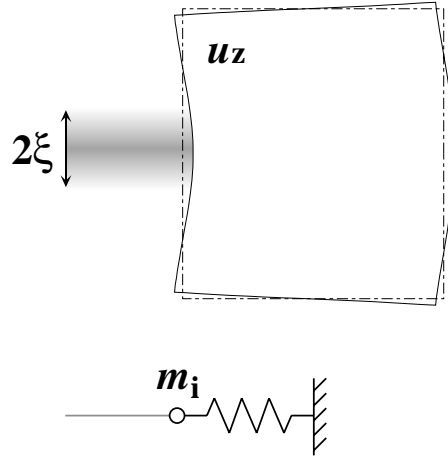


図 5.4: 鏡の固有振動と換算質量

と表される。但し、 $k_0 = 2\pi\nu_0/c$ は波数、 $q(z) = z + iz_R$ 。 $z_R = k_0 w_0^2/2$ はレイリーレンジ、 w_0 は $z = 0$ でのビーム径 (振幅が原点の $1/e$ になるところまでの距離) である。結局、

- 光軸に垂直な方向の電場の分布はガウシアンで表される

ことが分かる。TAMA300 の場合、front と end の鏡面上での電場は、ビーム半径がそれぞれ、8.5mm と 15mm のガウス分布になる。

次に、このビームと鏡の振動モードとのカップリングを考え、どのような振動モードの寄与を考えるべきか示す。

鏡の換算質量

鏡の固有振動は 3 次元だが、干渉計の光路長変動 x を考えることによって、1 次元の振動として扱うことができる。ここでは、共振角周波数 ω_i の 1 つのモードに着目し、換算質量を考える。

干渉計の感じる実効的な光路長変動 Δl は、鏡面の変位ベクトル \vec{u} と、電場の波数ベクトル \vec{k} を用いて、

$$\Delta l = \frac{1}{|\vec{k}|} \int_S \frac{2}{\pi\xi^2} \exp\left[-\frac{2r^2}{\xi^2}\right] \vec{k} \cdot \vec{u} dS \quad (5.3)$$

と表される。但し、 ξ は鏡面上でのビーム径を表す。この式と、鏡の振動の θ 依存性から、ガウシアンビームが鏡の中心に当たっていれば、軸対称モード ($n = 0$) 以外のモードは、実効的な光路長変動をひきおこさない ($\Delta l = 0$ となる) ことが分かる。

このとき、系全体の運動エネルギー U は、鏡の密度 ρ を用いて、

$$U = \int \frac{\rho}{2} |\dot{\vec{u}}|^2 dV = \int \frac{\rho\omega_i^2}{2} |\vec{u}|^2 dV \quad (5.4)$$

第5章. 干渉計型重力波検出器に用いる鏡への応用

と表される。この U と Δl を用いて、換算質量 m_i は、

$$\frac{1}{2}m_i\omega_i^2\Delta l^2 = U \quad (5.5)$$

から、以下のように表される [29, 30, 31]。

$$m_i = \frac{U}{\omega_i^2\Delta l^2/2} = \frac{1}{\Delta l^2} \int \rho |\vec{u}|^2 dV \quad (5.6)$$

つまり、換算質量を考えることで、鏡の3次元の振動を、1次元の調和振動子の振動と考えることができるようになっている。 $\Delta l = 0$ となる非軸対称モードでは、換算質量 m_i は ∞ となる。

以上、単一モードに着目して換算質量を計算し、干渉計では軸対称モードのみを考慮すればよいことを示した。

全熱雑音の計算

次に、各モードの変位のパワースペクトル密度を足し合わせて、全てのモードを考慮した場合の熱雑音の大きさを計算する。

モード展開を使うと、鏡の熱振動による実効的な光路長変動のパワースペクトル密度 $x^2(\omega)$ は、

$$x^2(\omega) = \frac{4k_B T}{\omega} \sum_i \frac{\omega_i^2 \phi_i(\omega)}{m_i [(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \phi_i^2(\omega)\omega^4]} \quad (5.7)$$

と表される。知りたいのは、鏡の共振角周波数 ω_i より低い周波数における熱振動スペクトルなので、 $\omega \ll \omega_i$ と近似すると、

$$x^2(\omega) \simeq \frac{4k_B T}{\omega} \sum_i \frac{\phi_i(\omega)}{m_i \omega_i^2} \quad (5.8)$$

となる。原理的には全てのモードの寄与を考慮しないと、正確な振動を表せない。しかし、式 (5.8) の分母に、固有振動の共振角周波数の2乗が入っていることからわかるように、共振周波数が高くなる程、系の運動への寄与が小さくなる。また、共振周波数が高くなると、換算質量が大きくなるという効果もある。周波数の高いモードでは、 r 方向の振動の節の数が増えると考えられる。ビーム径内に節があれば、振動の θ 依存性から非軸対称モードの換算質量が無限大になったのと同じように、鏡が径内で正と負の振動をするので、実効的な光路長変動を打ち消し合ってしまうからである。したがって、現実には適当な周波数までを考えればよい。

図 5.5 に、干渉計型重力波検出器 TAMA300 に用いられている鏡で、横軸に示す周波数以下の共振の寄与を考慮した時の、1 Hz における鏡の熱振動の推定値を示す (但し、図中の front mirror は、ビーム径を 8.5mm とした場合、end mirror は、ビーム径を 15mm にした場合である。)。これから、600kHz 程度までの固有振動の寄与を考慮すれば全熱振動に近い値が推定できると考えられる。

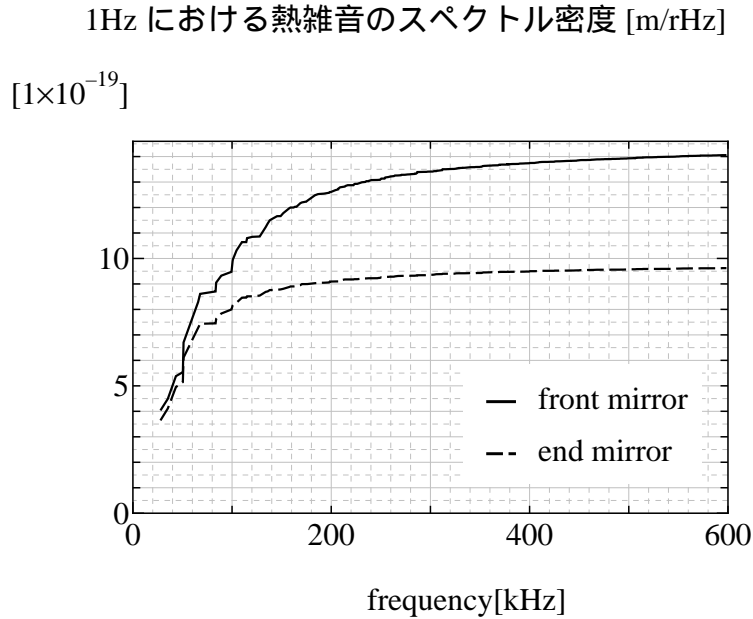


図 5.5: 鏡の共振周波数と観測帯域での熱雑音への寄与

100kHz 以下の軸対称モード

およそ 600kHz 以下の軸対称モードを考慮すればよいとわかっていても、実際に該当する全ての振動モードの Q 値を測定して熱振動を評価することは現実的でない。実際には、最低次のモードのみで Q 値を測定して推定することが多い。TAMA では、より正確な推定を行うために、市販の測定器で比較的容易に測定できる 100kHz 以下にある 11 個の軸対称モードで Q 値を測定し、残りのモードに関しては適当に散逸を仮定して熱振動を推定している。

参考までに、100kHz 以下にある 11 個の軸対称モードの共振周波数と概形を図 5.6 に示す。上から吊された鏡を光軸方向と垂直な方向から見た形になっているので、図の側面中央に光が当たるものと考えればよい。また、front mirror での換算質量係数 α_i (実際の鏡の質量を M とし、換算質量を m_i とすると、 $\alpha_i = M/m_i$) も併記してある。

また、各モードの変位はそれぞれの運動エネルギーの平方根で規格化されている。

Q 値測定

鏡の熱振動を推定するために、TAMA で用いられているのと同じサイズで、基材が SUPRASIL P-30 の鏡を使って、様々な条件下での Q 値が測定されている [5, 28]。

Q 値の測定から、以下のような結果が得られている。

- SUPRASIL P-30 の材質の Q 値は、 1×10^6 。

第5章. 干渉計型重力波検出器に用いる鏡への応用

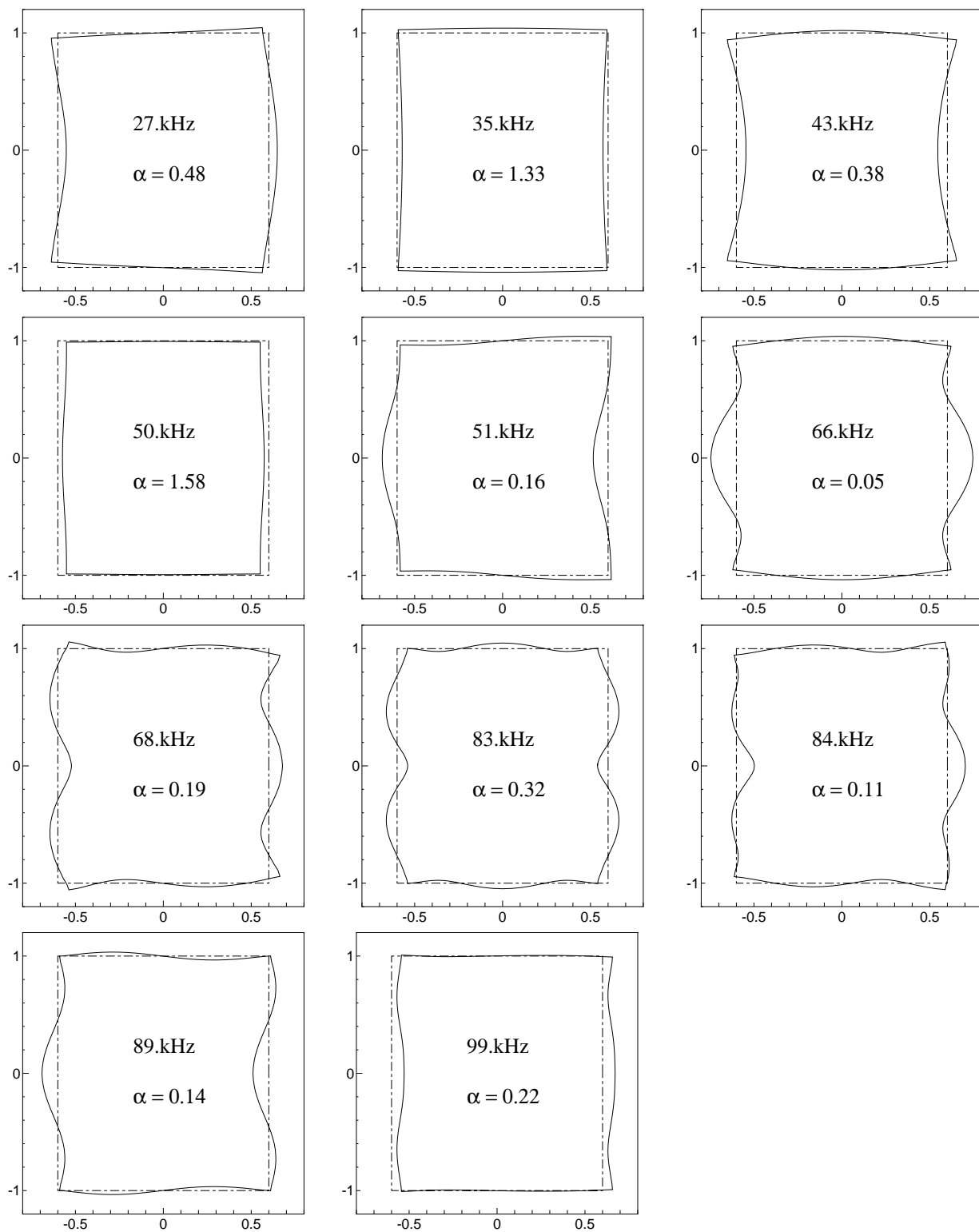


図 5.6: 100kHz 以下の 11 個の軸対称モード

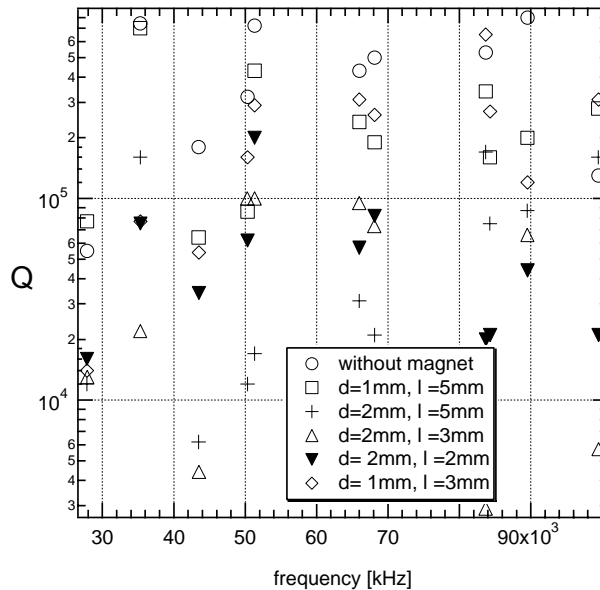


図 5.7: 磁石を接着した場合の鏡の Q 値。

- 鏡に何も接着せず、ワイヤで吊っただけの状態での Q 値は、基材内部の損失と、ワイヤとの摩擦による損失で決まる。
- スタンドオフをつけると、ワイヤとの摩擦の大きかったモードの Q は改善するが、Q 値の高いいくつかのモードでは、若干 Q 値が下がる。
- 直径 2mm の磁石 (長さは、2, 3, 5mm を試した) を接着すると、いくつかのモードでは、Q 値が 10^4 程度にまで下がる (図 5.7)。
- 直径 1mm 長さ 5mm の磁石を接着した場合の Q 値は、 1.5×10^5 程度。

これらの結果から、鏡の共振周波数で測定される散逸は、基材内部に一様に分布している散逸ではなく、非一様に分布している付加的な損失の寄与で決まっていると考えられる。このため、付加的な散逸の周波数依存性を調べないと、観測帯域での熱振動の正確な推定は困難であることが予想される。また、以前も述べたように、散逸が非一様に分布している系では、モード展開では正確な熱振動の推定が出来ない。

5.2 反共振を使った TAMA の鏡の熱雑音の推定

前節で、問題点も含めて、モード展開による推定法を説明した。この論文にまとめたコンダクタンスの直接測定による推定法は、散逸が非一様な場合には、従来のモード展開による推定は不正確になるという問題を解決するために考えられたものである。また、その

最終的な目標は、実際の干渉計と同じビーム径で、観測帯域の鏡の熱振動スペクトルを正確に推定することにある。

検証実験を通して、今回提案した推定法の有用性を確認してきたが、この方法を使って、直ちに鏡の熱振動を推定できるような測定を実現することは、それほど容易なことではない。そこで、少し条件をゆるめて、どのような測定をしたら知りたい情報に近いものを得られるか検討し、現在までに行った測定について述べ、最終的な測定を行うためにはどのような課題があるかを考えていく。

5.2.1 伝達関数の計算

まず、知りたいのは、鏡の中心にガウシアンビームが当たっている時の実効的な光路長変動 $\Delta l_x(t)$ である。波数ベクトルを \vec{k} とし、鏡の変位ベクトルを $\vec{u}(\vec{r}, t)$ として、

$$\Delta l_x(t) = \frac{1}{|\vec{k}|} \int g(\vec{r}) \vec{k} \cdot \vec{u}(\vec{r}, t) dS \quad (5.9)$$

となる。但し、 $g(\vec{r})$ は、

$$g(\vec{r}) = \frac{2}{\pi \xi^2} \exp \left[-\frac{2r^2}{\xi^2} \right] \quad (5.10)$$

ビーム径 ξ のガウス分布である。

これまでの伝達関数の測定も、変位の測定は干渉計で行ってきたので、ビーム径は調整する必要があるが、ガウス分布の重みをかけ変位を測定することは可能である。

この $\Delta l_x(t)$ の熱振動スペクトルを伝達関数の測定から推定するためには、系に力を加えて、変位を測定しなければならない。次にどのような分布の力を加えればよいか述べる。

力の分布

第2章でも若干説明を試みたが、熱振動を推定するために伝達関数を測定する場合は、変位の重みと同じ重みをかけた力を加える。

Levin の論文 [6] では、これを次のように説明している。式 (5.9) の一般化座標 $\Delta l_x(t)$ に共役な運動量のみを励起する一般化力 $F(t)$ は、鏡のハミルトニアン H に次式のように現れる。

$$H = -F(t) \Delta l_x \quad (5.11)$$

この式に式 (5.9) を代入すると、

$$H = -\frac{1}{|\vec{k}|} \int F(t) g(\vec{r}) \vec{k} \cdot \vec{u}(\vec{r}, t) dS \quad (5.12)$$

これを

$$H = -\int P(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) dS \quad (5.13)$$

と比較して、結局

$$P(\vec{r}, t) = F(t)g(\vec{r})\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} \quad (5.14)$$

即ち、一般化力は、変位をみるのと同じ分布でかける必要がある。

実際問題としては、ガウス分布で鏡に力を加えることは不可能ではないが、それほど容易ではないと考えられる。次に、とりあえずそういう力を加えることができたとしたら、伝達関数はどうなるか ということを考えてみる。

伝達関数の計算

まず、鏡のみの伝達関数 $H_m(\omega)$ を考える。モード展開を使うと伝達関数は、

$$H_m(\omega) = \sum_i \frac{1}{m_i [(\omega_i^2 - \omega^2) + i\phi_i(\omega)\omega_i^2]} \quad (5.15)$$

と表すことができた。

先程みたように、鏡の共振周波数は数 10kHz 以上にしかない。したがって、それらの調和振動子を重ね合わせた伝達関数では、反共振も数 10kHz 以上の周波数にしかあられない。反共振は幾つかのモードの間の周波数において、複数のモードの伝達関数の寄与が相殺してできると考えられるから、もっと低い共振周波数をもつモードと組み合わせる必要がある。

周波数の低いモードとしては、まず、干渉計型重力波検出器に用いられる時のように、鏡のワイヤーで吊ってできる振り子の振動モードを思いつく。振り子の共振周波数はワイヤーの長さで決まり、30cm くらいで共振周波数が 1Hz になる。

吊った鏡の系は、鏡の固有振動モードに加えて、振り子モード (共振周波数は数 Hz) や violin モード (ワイヤーの固有振動、共振周波数は数百 Hz 以上) を持つが、これらの振動モードは殆ど独立と考えられる。そこで、系全体の伝達関数を、振り子の伝達関数と鏡の伝達関数の足し合わせで計算した。

振り子の伝達関数

振り子モードの伝達関数 $H_p(\omega)$ は、モード展開を使うと、振り子の共振 ($\omega_p/2\pi \sim 1\text{Hz}$) より高い周波数では、

$$H_p(\omega) = -\frac{1}{m\omega^2} + i\frac{\omega_p^2\phi_p(\omega)}{m\omega^4} \quad (5.16)$$

と近似できる。但し、 m は鏡の質量。共振より高い周波数では、ほとんど自由質点として振る舞うので、伝達関数の実部は振り子の共振周波数 ω_p によらない。

この伝達関数と、鏡の伝達関数 $H_m(\omega)$ (式 (5.15)) を足し合わせ、伝達関数を計算した結果を図 5.9 に示す。但し、鏡の換算質量は、ビーム径 $\xi=8.5\text{mm}$ として、計算した。これから、振り子モードと鏡の固有振動モードを組み合わせることによって、8 kHz 付近に反共振ができることが分かる。

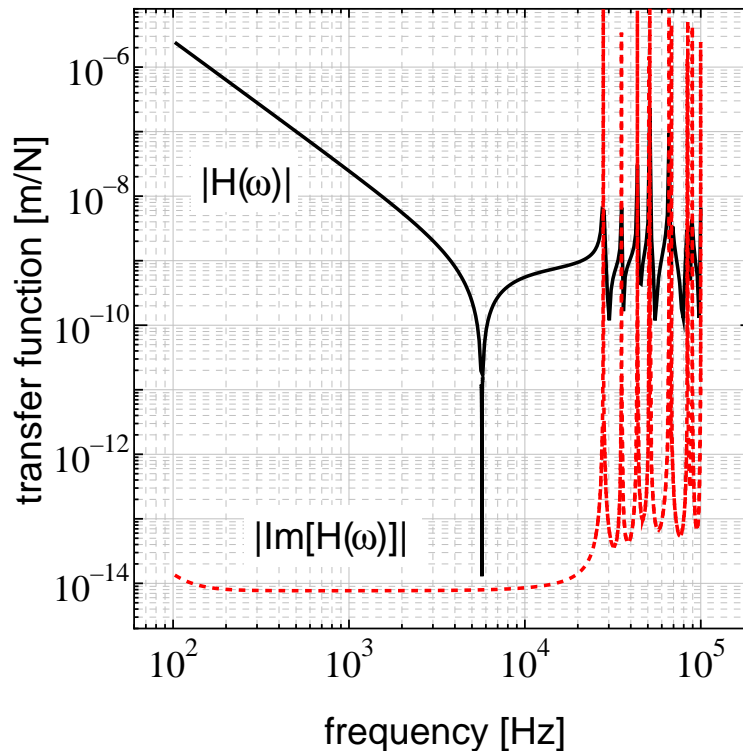


図 5.8: 振り子振動と鏡の固有振動モードで出来る反共振

この反共振の意味を図 5.9 を使って説明する。まず、鏡の共振より低い周波数では、外力 f に対する鏡の弾性体としての応答は、力と同相である。一方、振り子の共振より高い周波数では、振り子としての応答は、外力 f に対して逆相である。これらの応答の絶対値が一致する周波数、すなわち反共振周波数では、鏡に力を加えている点は力をかけても振動しなくなるのである。

反共振で測定される伝達関数の虚部の起源

$\phi(\omega)$ が一定だとすると、振り子の伝達関数の虚部は、共振より高い周波数ではおよそ周波数の 4 乗に反比例して小さくなっていく。これに対して、鏡の伝達関数の虚部は、共振より低い周波数でほぼ一定になっている。図 5.9 は、両方とも $\phi(\omega) = 1 \times 10^{-5}$ とした時の伝達関数である。計算された伝達関数の虚部の周波数依存性から、振り子の散逸は、およそ 100Hz 以上では鏡の寄与で決まっていることが分かる。観測帯域より一桁上の 8kHz 付近では、鏡の虚部が振り子の虚部を大きく上回っていると考えられる。したがって、この条件で伝達関数の虚部を測定できれば、ほとんど鏡の寄与で虚部が決まっており、測定された虚部から鏡の熱振動が推定できると考えられる。

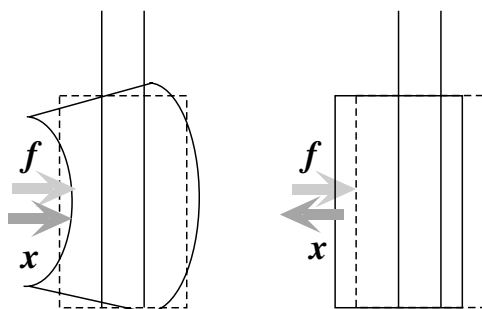


図 5.9: 力を加えた時の、弾性振動モードの応答と振り子モードの応答 (力を受けていない時の位置を点線で示す。)

violin mode の伝達関数

violin mode に関しても同様に計算すると、violin mode の換算質量が大きすぎて、反共振が violin mode に接近してしまい、共振から離れた周波数に反共振を作れないことが分かった。

5.2.2 実際の測定系での問題

以上で、仮想的に、変位を見るのと同じ重みをかけた力を加えた場合の伝達関数を議論してきた。次に実際の測定系ではどのような力を加えることができるか考える。

アクチュエータ

実際に鏡に力を加えるためには、次のようなアクチュエータを利用することが考えられる。

- 磁石で力を加えるコイル-磁石アクチュエータ
- 極板を利用した静電アクチュエータ

コイル-磁石アクチュエータは、大きな力を加えられるという特徴があるが、磁石を接着した面で力を加えるため、1. 力の分布などを変えにくい、2. 磁石を接着することによって付加的な散逸を増やす、3. あまり大きな面積で力を加えられないという問題点もある。

一方、静電アクチュエータは、非接触なので余分な散逸を増やさないし、力を加える面積を大きく取れ、極板面上の導体のパターンによっては、分布もある程度変えられる。しかし、コイル-磁石に比べると力がかなり小さい。

結局、いろいろ問題はあるが、まずは手軽に大きな力の加えられる コイル-磁石アクチュエータを用いるのがよいだろうと考えた。

第5章. 干渉計型重力波検出器に用いる鏡への応用

ところで、前節では、変位と力の重みを各々ビーム径 8.5mm のガウス分布として換算質量を計算した。しかし、磁石を接着して、力を加える場合には、直径 8.5mm のガウス分布で力が加わるように磁石を接着する、というのはあまり現実的でない。鏡の散逸をあまり増やさないように、直径 1, 2 mm の小さな磁石を貼って、磁石の接着面で一様な力を加え、同じくらいの直径のビームで変位を測定するというのが現実的である。このような形で伝達関数を測定すると、

- 実際よりも狭い領域で熱振動を見た場合の推定になる
- 力と変位の重みの分布が厳密には一致しない

という問題が生じることになる。次にこの 2 つの問題を論じる。また、

- 力と変位を測定する場所をどのように一致させるか

ということも考える。

ビーム径が小さい場合の伝達関数

本章第 1.3 節で重力波検出器のビーム径で各振動モードの寄与を調べた際に、600kHz 付近の高次モードの寄与までを考えればよいことをみた。しかし、高い周波数のモードの寄与が小さくなるのは、

- 共振周波数が高くなる
- 換算質量が重くなる

という 2 つのことと関係がある。ビーム径を細くしても、共振周波数に関しては、事情は変わらない。しかし、ビームが当たっている領域内に振動の節が出来て、実効的な光路長変動が小さくなり、換算質量が大きくなる効果がおこる周波数は高くなる。したがって、先程のような計算方法で全熱振動を計算する場合、より高い周波数のモードの寄与まで考えないといけなくなり、なかなか収束しなくなる。

また、伝達関数を測定する領域が狭くなって、高次モードの寄与が多くなれば、鏡の伝達関数の絶対値が大きくなり、反共振の周波数が低くなると考えられる。

変位の重みと力の重みが一致しない場合

次に、力の分布 (磁石接着面内で一様) と、変位を測定するガウス分布が一致しないという問題について考える。

単純に考えれば、この不一致によって、換算質量が若干変わってしまう。第 2 章の換算質量のところでも述べたように、力の分布と変位の分布が異なる場合、換算質量は

$$m'_i = \frac{1}{\Delta l_f \Delta l_x} \int \rho |\vec{a}|^2 dV \quad (5.17)$$

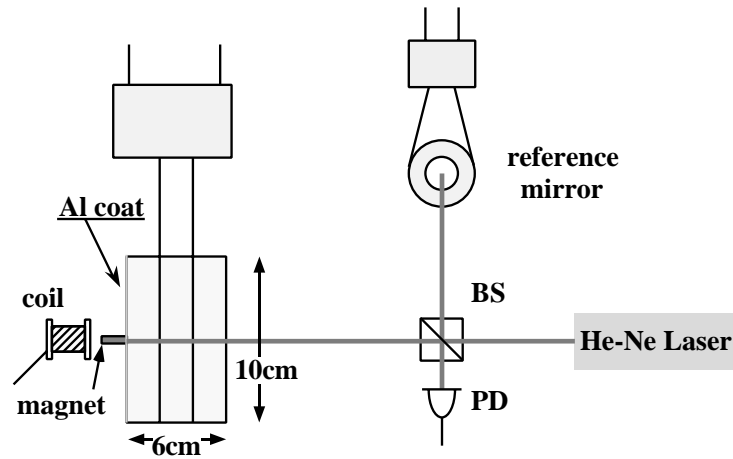


図 5.10: 鏡の反共振の測定系

但し、変位にガウス分布の重みをかけたのと全く同じように力を加える場所の変位 Δl_f を定義する。 Δl_f と Δl_x を一致させたときに、熱振動を考える時の換算質量と等しくなる。

分布のずれによる換算質量の変化は、寄与の大きな低周波のモードではそれほど大きくない(低周波のモードに対しては、直径 1mm 程度の領域は殆ど点とみなせるから)と考えられる。しかし、高次モードでは問題となる。さらに、散逸が非一様に分布している場合などは特に、場所による熱振動の相関をきちんと評価できなくなると考えられる。

変位を測定する点に力を加える

力を加える場所と変位を測定する場所を一致させるといっても、真鍮振動子の場合と違ってバルクな弾性体を扱うため、磁石を貼っているのと反対側の面で変位を測定するというようなことはできない。実際このような条件での伝達関数も計算もしてみたが、換算質量が負になるものもあり、反共振周波数が高くなってしまふ。

そこで、合成石英が透明なことを利用して、磁石を接着しているコーティング面の裏側から光を透過させ、コーティング面の裏側で反射して、面の変位を測定することにした。

5.2.3 測定装置

いくつかの問題点を述べたが、鏡をワイヤで懸架し、片面のみアルミコーティングした鏡の中心に磁石を接着して、コイル-磁石アクチュエータを用いて力を加え、反対側から透過した光を磁石を貼っている場所で反射して、マイケルソン干渉計で変位を測定するという方針で測定を行うことにした。図 5.10 に測定系(口絵写真参照)を示す。

第5章. 干渉計型重力波検出器に用いる鏡への応用

鏡

測定に用いた鏡は、TAMAと同じ、直径10cm高さ6cmの円柱形で、基材が合成石英 SUPRASIL P-30² と Q 値の低い低膨張ガラス、CLEARCERAM-Z (OHARA ガラス) の2種類を用意した。鏡には、片方の鏡面にアルミコーティングが施されている。鏡面は研磨してあるが、側面は研磨されていない。

懸架系

鏡は、直径50 μ mの2本のタングステンワイヤで懸架した。懸架系は、TAMAの懸架系の試作機を借用している(口絵参照)。

アクチュエータ

アクチュエータに用いる磁石は、直径1~4mm長さが3~14mm程度のNd磁石を数種類用意した。磁石は、鏡の中心に接着材(アロンアルファ)で接着した。

コイルは、アクリルの厚い板(厚さ20mm)に直接ねじどめし、アクリルの板を懸架系のフレームにねじでとめている。

光源

鏡の変位を測定するマイケルソン干渉計の光源には、He-Neレーザーを用いた。ビームの位置を上下左右に動かせるように、ステージの上に固定している。

5.2.4 測定方法

測定は大気中で行った。干渉計の信号を伝達関数を測定する鏡に返して干渉計をロックし、伝達関数を測定した。

5.2.5 測定結果

次に、これらの測定装置を使って鏡の伝達関数を測定した結果について述べる。

磁石の共振の影響

吊った鏡の伝達関数の一例を図5.11に示す。一見きれいに伝達関数が測定されているようだが、25kHzの共振は、鏡の振動モードではない。

この共振の原因として、

- 磁石の共振

²脈理の性質がP-10より若干悪い

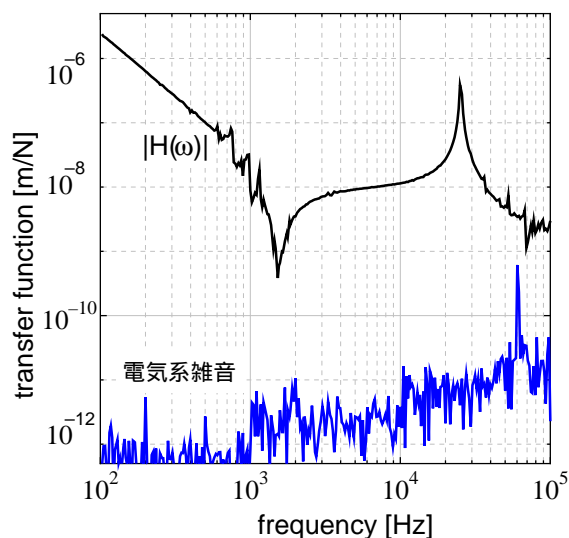


図 5.11: 測定された伝達関数

- コイルサポートの共振

等の可能性を考えた。

まず、懸架系の影響を除いて、磁石の影響を調べるため、図 5.12 のような系を組んで、磁石の共振を調べた。鏡は、数 cm 離してねじでとめた直径 1cm 程度の 3 つのアルミ半球の上に、鏡を吊っている時と同じように置いている。磁石の振動を調べるのに鏡を使ったのは、磁石の共振が接着面の状況を鏡を吊っている時と変わらないようにするためである。

磁石の近傍においたコイルに電流を流して力を加え、磁石の振動を、シャドウセンサーで読み取った。図 5.11 の伝達関数を測定したときに用いていた磁石も含め、いくつかの磁石について測定したところ、数百 Hz から数 kHz に磁石の共振があることがわかった (図 5.13³)。

この測定系で振動が検出されることから、これらの共振は、磁石の曲げ振動であると考えられる。25kHz 付近では測定系の感度が低くなってしまい、共振を測定することが出来なかったが、長さが短く、あまり直径が細くない磁石を用いることによって、曲げ振動の共振周波数を高くして、伝達関数を測定してみることにした。

図中の電気雑音は、後述する電気系の回り込みによる伝達関数の測定限界を示している。

鏡の反共振の測定

磁石の曲げ振動の影響をさけるため、直径 2mm 長さ 3mm の磁石を用いて伝達関数の測定を行った。ステージを動かして、測定された伝達関数の絶対値を調べ、一番大きくな

³図 5.13 の縦軸は、フォトディテクタの出力電圧をコイルドライバに加える電圧で割ったものなので、変位 / 力に換算できる量であるが、共振周波数のみに関心があったので、特に校正を行っていない。

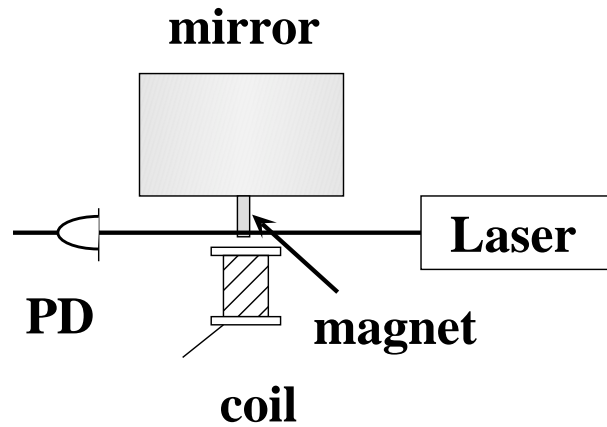


図 5.12: 磁石の共振の測定系

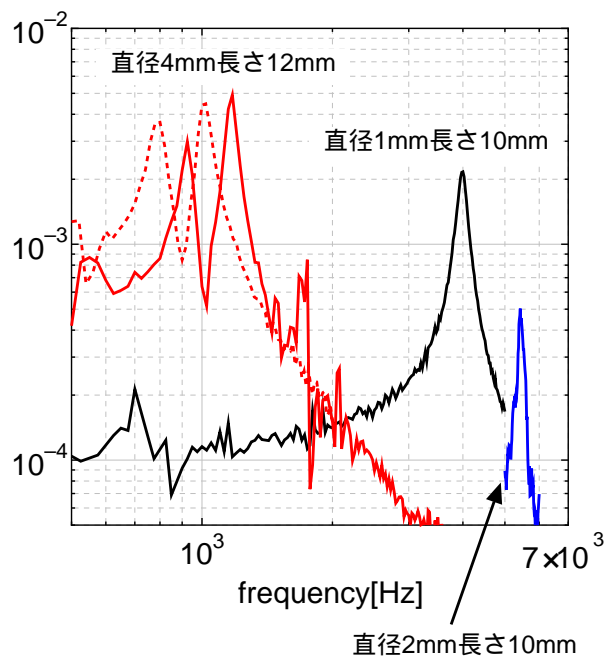


図 5.13: 磁石の共振の測定結果。

5.2. 反共振を使った TAMA の鏡の熱雑音の推定

るところを探して、伝達関数を測定するようにした。結果を図 5.14 に示す。10kHz 以上で

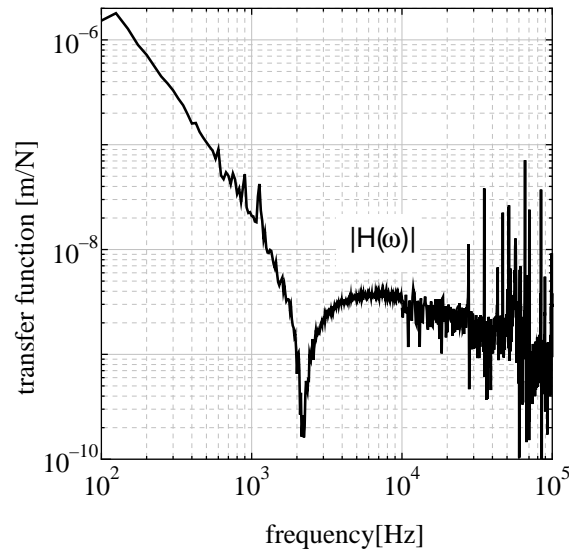


図 5.14: 測定された伝達関数

絶対値が周波数が高くなるにつれて小さくなってしまっているが、先程のグラフにあったような大きな共振の影響はなくなった。この伝達関数の特徴を列挙する。

- 2kHz に反共振ができた。
- 数 10kHz 以上にある鏡の固有振動も測定された。
- 反共振より低い周波数では、伝達関数の絶対値は f^{-2} に比例している。

残る問題点としては、高い周波数での伝達関数の振幅が小さくなっていることがある。この原因は、まだよく分かっていないが、コイル-磁石アクチュエータのコイルにコアを入れて使っているためではないかと考えている。コアを入れたのは、共振の影響をさけるために磁石を小さくしたので、アクチュエータのカップリングが弱くなってしまったのを補うためである。

また、測定系の変位雑音の影響で、反共振での伝達関数の虚部を精度よく測定するまでにはいたっていない。次に雑音についての評価をまとめる。

5.2.6 雑音の評価と今後の展開

伝達関数を測定するのに問題となる雑音として、干渉計の変位雑音と電気系の回り込みについて述べる。

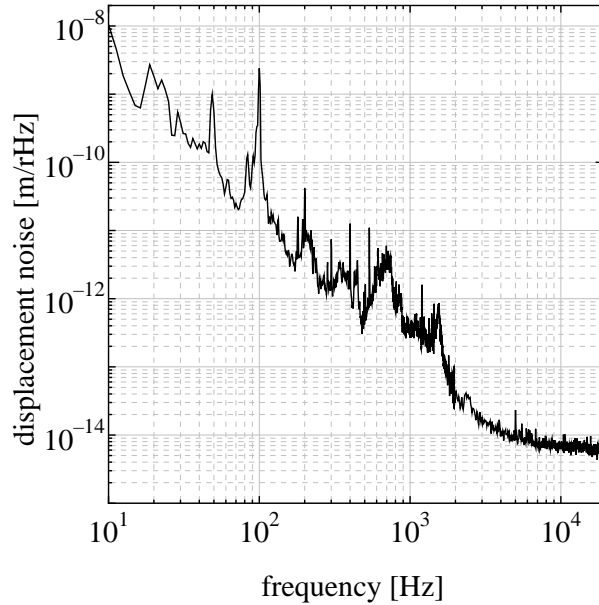


図 5.15: 変位雑音

まわりこみ雑音

ここでは、鏡に力を加えるための電気信号が、コイルドライバに加える電圧 力 機械系の伝達関数 変位 マイケルソン干渉計 PD の出力電圧という経路以外の経路を通して、検出系にもれてくるものをまわりこみ雑音といている。この雑音の大きさは、測定系に光をいれない状態で伝達関数の測定を行って評価している。この雑音に関しては、フォトディテクタを差動出力にしたり、フィルタ回路に同相雑音除去のためのコアをいれたりして、3桁程低減することが出来た。現在のまわりこみ雑音の値は図 5.13 に示してある。

変位雑音

変位雑音の影響を評価する。

伝達関数の虚部の大きさは、反共振の測定された 2kHz では、だいたい次のようになる。

$$\text{Im}[H] \sim \frac{\phi}{m\omega^2} = 6.1 \times 10^{-9} \phi \quad [\text{m/N}] \quad (5.18)$$

系に加える力 $f = 3 \times 10^{-3} \text{ [N]}$ のとき、応答 x_{sig} は

$$x_{\text{sig}} \sim \text{Im}[H] \cdot f \simeq 2 \times 10^{-11} \phi \quad [\text{m}] \quad (5.19)$$

変位雑音の大きさは、

$$\sqrt{x_{\text{noise}}^2(\omega)} \sim 4 \times 10^{-14} \quad [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}] \quad (5.20)$$

これをバンド幅 0.03Hz で測定すると、

$$\sqrt{x_{\text{noise}}^2} \sim 7 \times 10^{-15} \text{ [m]} \quad (5.21)$$

したがって、

$$\frac{x_{\text{sig}}}{\sqrt{x_{\text{noise}}^2}} \sim 3 \times 10^3 \phi \text{ [m]} \quad (5.22)$$

となる。この値から、 $\phi \sim 10^{-3}$ 程度までなら、防振、防音などで変位雑音を下げる、アクチュエータのカップリングを大きくすることによって伝達関数の虚部を測定することができると考えられる。しかし、 ϕ が 10^{-6} になると、 $S/N = 1$ の測定をするのに必要な感度は、 $4 \times 10^{-17} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$ となる。これは、一般的な光源で組んだマイケルソン干渉計では測定困難な値である。これを測定するためには、変位計を Fabry-Perot にする等の大規模な改造が必要であろう。それでも、熱振動 (鏡 4 枚分でも $5 \times 10^{-20} [\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}]$) を直接測定することに比べると、3桁程度必要な感度は低くなっている。

5.3 本章のまとめ

本章では、干渉計型重力波検出器に用いられている鏡の熱振動の推定法を説明し、実際の測定と結果、問題点をまとめた。

まず、鏡の熱振動の推定法をまとめ、どのようなモードを考える必要があるかを説明した。次に、この説明をふまえて、これまで述べてきたコンダクタンスの直接測定による熱雑音の推定法を干渉計の鏡に応用するためには、どのような測定を行うべきか論じた。コンダクタンスの直接測定による推定法を鏡に適用すれば、直ちに鏡の熱振動が推定できるというわけではなく、実際に推定を行うためには、現実に変位と力の重みを一致させるようにする、実際の干渉計のビーム径での測定が難しいなどの様々な問題を考慮する必要がある。

また、それらの問題を考慮した上で、伝達関数をどのように測定すべきか考え、実際に吊った鏡の伝達関数を測定して、2kHz に反共振ができることを確認することができた。しかし、前章までの測定で用いた小さな振動子と比べ、質量、Q 値ともに 3桁程大きな鏡の伝達関数の虚部を直接測定することは、反共振を利用しても困難であった。反共振での測定を制限する雑音については、変位雑音の影響を議論し、現在の測定系では、若干の改良で、 ϕ が 10^{-3} 程度の鏡の伝達関数は測定できそうだということ、また、 ϕ が 10^{-6} 程度のものだと、あと 3桁程感度の向上、または加える力を大きくする、といったかなり大きな変更が必要になることを述べた。それでも、伝達関数の測定に必要な変位計の感度は、熱振動を直接測定する場合と比べると、3桁程度低くなっている。

第6章

考察

これまで、反共振を利用した推定法の検証実験、応用実験について述べてきた。本章では、この方法の特徴、利点、不利な点を検討し、今後どのような研究に活用できるか考察する。

6.1 反共振を利用した方法の利点

反共振を利用した機械コンダクタンスの直接測定による熱振動の推定の利点は、これまでも述べてきたように、

- 散逸の非一様な系でも正確に熱振動を推定できる
- 散逸の周波数依存性を仮定せずに推定できる

ことにある。

また、

- 原理的には、散逸が小さな系でもコンダクタンスを測定できる

ことも利点としてあげられる。

コンダクタンスの直接測定は、伝達関数の実部と虚部の比が小さければ、反共振周波数でなくても測定できる。このことは、第4章の測定でも確かめられた。しかし、同じ測定から、伝達関数の実部と虚部の比が、500以上になると、コンダクタンスの測定が難しくなる様子も見られた。これに対して、反共振周波数では、伝達関数の虚部が、良い精度 (S/N が 3×10^3 ¹⁾) で測定されていたので、単純に考えれば、このような系では、 $\phi(\omega) \sim 10^{-6}$ 程度のものまで測定できるのではないかと考えられる。しかし、どれくらいの散逸まで測定可能かという問題は、機械系の性質に依存しているので、全ての機械系において $\phi^{-1}(\omega) \sim 10^6$ で制限されるわけではない。

¹⁾ S/N は測定した伝達関数のコヒーレンスから算出した

第6章. 考察

次に、測定できる散逸を制限する別の要因として、変位計の雑音を考える。反共振における伝達関数の虚部が、 $\text{Im}[H(\omega_{\text{anti}})]$ の時、機械系に力 f を加えていると、その時の応答 x は、 $\text{Im}[H(\omega)] \times f$ になる。つまり、

- 系に加える力を大きくすることによって、見たい信号を大きくすることができる。

これは、大きさを変えることの出来ない熱振動を直接測定することに比べて、伝達関数の測定に特徴的なことである。

次に、第3章で述べた振動子に働く熱的な揺動力の大きさと、伝達関数の測定時にかけている力の大きさを比較し、熱振動の測定に比べて、伝達関数の虚部の測定が容易であることを示す。

第3章で用いた振動子の反共振周波数 26.9Hz における伝達関数の虚部は、 2.4×10^{-6} [m/N] であった。揺動力 $f^2(\omega)$ と、熱振動スペクトル $x^2(\omega)$ は、伝達関数によって、

$$x^2(\omega) = |H(\omega)|^2 f^2(\omega) \quad (6.1)$$

と表されるので、反共振周波数における揺動力は、

$$f^2(\omega_{\text{anti}}) = \frac{4k_B T}{\omega} \frac{1}{|\text{Im}[H(\omega_{\text{anti}})]|} \quad (6.2)$$

となる。但し、反共振での伝達関数は虚部のみになることを使った ($|H(\omega_{\text{anti}})| = -\text{Im}[H(\omega_{\text{anti}})]$)。これを計算すると、 $f^2(\omega) = 4.1 \times 10^{-17}$ [N²/Hz] となる。これに測定のバンド幅 10mHz を掛けて、平方根をとると、 6.4×10^{-10} [N] になる。これは、伝達関数を測定する際に系に加える力 3×10^{-3} [N] の 2×10^{-7} 倍になっている。したがって、伝達関数の虚部の測定は、熱振動の測定に比べて、S/N 比 5×10^6 倍で測定できる。

6.2 問題点

次にこの推定法の問題点を述べる。まず問題になるのは、

- 反共振周波数でしか熱雑音を推定できない

ことである。しかし、通常、機械系は複数の共振を持つため、それらの共振の間にならず反共振をつくることができる。したがって、複数の共振での Q 値の測定と同じように、複数の反共振での $\text{Im}[H(\omega)]$ の測定により、散逸の周波数依存性を調べることができる。また、鏡の場合のように、他の振動系とうまく組み合わせることによって、ある程度までは、興味のある周波数に反共振をつくることができるであろう。

6.3 今後の展開

本論文で提案している熱振動の推定方法を用いると、直接測定の困難な、共振から離れた周波数における熱振動を、散逸に対する仮定をおかずに、実験的に推定することが可能

になる。機械コンダクタンスの測定は、熱振動の直接測定に比べると容易であり、今後この方法を用いて、散逸の実験的な研究がすすめられると考えている。

この方法の特徴を活かすには、まず、

- 非一様な散逸の研究

が考えられる。重力波検出器の鏡のような、換算質量の大きなものに直接この推定法を適用することは、困難であった。しかし、この方法を小さなサンプルに適用すれば、簡単に伝達関数を測定することができる。小さなサンプルでの測定であっても、磁石を接着することによる散逸の周波数依存性などの性質が分かれば、これは、重力波検出器の雑音の正確な推定に役立つと考えられる。

また、この推定法を利用して、

- 散逸の周波数依存性

を、共振以外の周波数でも実験的に調べることができると考えられる。

第7章

結論

共振から離れた周波数における機械系の熱振動は、非常に微小であるため、直接測定された例はほとんどない。しかし、干渉計型重力波検出器などの精密測定の技術の発展によって、この振動が実際に測定可能になりつつあり、理論、実験双方からの関心を集めている。

現在、アメリカの LIGO[38]、欧州の VIRGO[39]、GEO[40]、日本の TAMA[1, 2] 等干渉計型重力波検出器の建設が相次いでいる。これらの検出器では、熱雑音が、感度を制限する主要な雑音となることが予想されており、熱振動に関連して、以下に示すような様々な研究がすすめられている。

- さまざまな材質の Q 値の測定による、高い Q 値をもつ物質の探索
- 散逸の少ない支持系の研究
- 熱振動を低減するための検出器の低温化
- 散逸の周波数依存性の研究
- 揺動散逸定理を用いた、散逸が非一様な系での熱振動の研究

このなかで、非一様散逸の研究は、モード展開によらず、揺動散逸定理を用いて熱振動を推定するというものである。しかし、実際の散逸を知る手段がないため、散逸の非一様分布を仮定した計算にとどまっていた。

このような研究がすすめられている中、私も、干渉計型重力波検出器に用いる鏡の Q 値の測定を通して、非一様に分布した散逸や散逸の周波数依存性に興味を持つようになった。そして、共振から離れた周波数においても、実験的に散逸を評価する方法はないか、と考えたのが、本論文にまとめた、反共振を利用して機械コンダクタンスを直接測定する方法である。

揺動散逸定理によると、熱振動は機械コンダクタンスから推定できる。しかし、共振から離れた周波数におけるコンダクタンスを精度良く測定することは、通常は、アドミッタンスの虚部の混入により困難である。しかし、反共振周波数においては、虚部が消失して

第7章. 結論

コンダクタンスのみが残る。したがって、コンダクタンスを測定し、揺動散逸定理を適用して熱振動を推定できるであろうというのが、この推定法の主旨である。この推定法は、揺動散逸定理のみに基づいているので、散逸の周波数依存性や分布によらず、正確な推定が可能になる。

上記の推定法で熱振動が推定できることを確かめるため、簡単な振動子を用いて機械コンダクタンスを直接測定し(第3章)、この推定法を使った熱振動の推定値と直接測定された熱振動を比較(第4章)した。以上の検証実験では、コンダクタンスは精度良く測定され、また、直接測定された熱振動と推定値はよく一致した。

この推定法の検証ができたので、続く第5章では、この推定法を干渉計型重力波検出器に用いる鏡の熱振動の推定に応用した。この実験では、反共振での虚部を測定することはできなかったものの、現実の測定を制限する具体的な問題などを洗い出し、評価することができた。

最後に、この推定法の特徴をまとめ、応用の際の利点や問題点を議論した。この方法の利点は、

- 共振から離れた周波数で、散逸の周波数依存性や分布に対する仮定を必要とせず、熱振動を正しく推定できる
- 原理的には Q 値の高い材料にも適用できる
- 伝達関数の測定なので、熱振動の直接測定に比べれば、測定が容易である

ことなどである。問題点は、

- 反共振周波数でしか熱振動が推定できない
- 興味のある場所と周波数に反共振をつくれるとはかぎらない

ということである。これらの特徴をふまえると、今後は、適切なサンプルを使うことによって、この推定法を

- 共振から離れた周波数における散逸の周波数依存性
- 非一様分布の散逸をもつ系の熱振動

を実験的に研究する手段として用いることができるだろう。

補遺 A

伝達マトリックス法

本論文では、板ばねと質量を 2 段に組み合わせた振動子の性質を調べるために、伝達マトリックス法を用いた。本章では、伝達マトリックス法を概説する。

A.1 基礎概念

伝達マトリックス法 [32] では、複雑な線形弾性系をいくつかの要素に分割し、各要素間の特性をマトリックスで表す。系全体としての特性を表すマトリックスは、個々の要素のマトリックスの掛け算で表される。全体のマトリックスが求められれば、系の両端に境界条件を課して、振動特性を得ることができる。

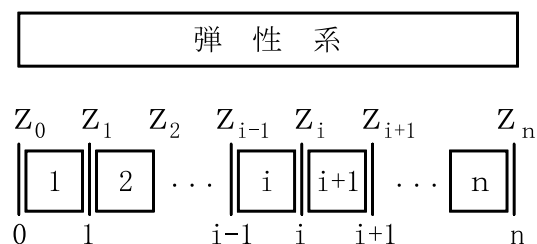


図 A.1: 系の分割

図 A.1 に、弾性系を n 個の要素に分割した様子を示す。各要素には、1 から n まで番号が付けられ、 i 番目の要素の左端の点を $i-1$ 点、右端の点を i 点としている。 z_i は、 i 点での状態量である。

A.1.1 状態量ベクトル (state vector)

弾性系を基本要素に分割した時に、その要素の両端の物理状態は、広い意味での内力とそれに対応する変位で表される。そこで、 i 番目の要素の右端、 i 点 における変位と内力

補遺 A. 伝達マトリックス法

を並べて列ベクトルで表示したものを、状態量ベクトル \mathbf{z}_i と定義する。

$$\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} x : \text{一般化座標} \\ F : \text{一般化力} \end{pmatrix}_i \quad (\text{A.1})$$

状態量ベクトルは、変位と力の組を書き並べたものである。したがって、一般に $2n$ 個の成分を持っている。

例) はりの曲げ振動系

例として、はりの曲げ振動を考える時の状態量ベクトルを示す。

$$\mathbf{z}_i = \begin{pmatrix} v : \text{たわみ} \\ \psi : \text{傾き角} \\ M : \text{曲げモーメント} \\ V : \text{せん断力} \end{pmatrix}_i \quad (\text{A.2})$$

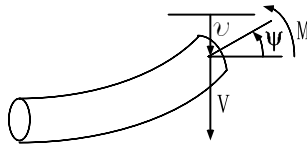


図 A.2: はりの曲げ振動

A.1.2 伝達マトリックス (transfer matrix)

点 $i-1$ における状態量は、 i 番目の基本要素の特性を介して、 i 点における状態量に伝達される。これは、系が線形であれば、次式のように表せる。

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mm} \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{bmatrix}_{i-1} \quad (\text{A.3})$$

この式を、

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{T}_i \mathbf{z}_{i-1} \quad (\text{A.4})$$

と略記する。

ここで \mathbf{T}_i は、点 $i-1$ での状態量ベクトルを i 点に伝達する正方マトリックスであり、伝達マトリックスと呼ばれる。各点における状態量は図 A.3、A.4 のようにとる。

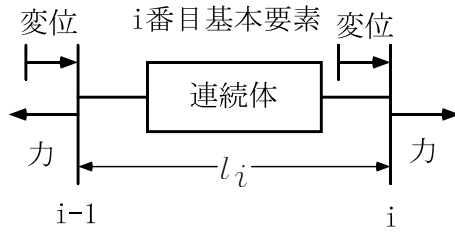


図 A.3: 弾性体の場合

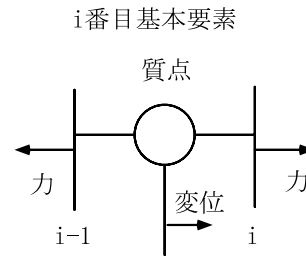


図 A.4: 質点の場合

例) 質点の伝達マトリックス

質点の左端と右端の状態量の関係は、次式のように表される。

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} \\ -m\omega^2 x_i = F_i - F_{i-1} \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

したがって、質点の伝達マトリックスは、次のようになる。

$$\begin{pmatrix} x \\ F \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ F \end{pmatrix}_{i-1} \quad (\text{A.6})$$

A.1.3 外力のある場合の伝達マトリックス

系に外力がかかる場合は、式 (A.3) の状態量と伝達マトリックスを拡張して、次のような形で表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1m} & f_1 \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2m} & f_2 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mm} & f_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \\ 1 \end{bmatrix}_{i-1} \quad (\text{A.7})$$

ここで、 f_1, f_2, \dots, f_m が外力項である。式 (A.7) を、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{f} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_i \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ 1 \end{bmatrix}_{i-1} \quad (\text{A.8})$$

と略記する。

補遺 A. 伝達マトリックス法

例) 質点に外力が働く場合の伝達マトリックス

質点に外力 f_i が働く場合の運動方程式は、次のようになる。

$$\begin{cases} x_i = x_{i-1} \\ -m\omega^2 x_i = F_i - F_{i-1} + f_i \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

したがって、伝達マトリックスは、

$$\begin{pmatrix} x \\ F \\ 1 \end{pmatrix}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m\omega^2 & 1 & -f_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ F \\ 1 \end{pmatrix}_{i-1} \quad (\text{A.10})$$

と表される。

A.2 系全体の伝達マトリックス

基本要素ごとの伝達方程式は、

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1 &= \mathbf{T}_1 \mathbf{z}_0 \\ \mathbf{z}_2 &= \mathbf{T}_2 \mathbf{z}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{z}_n &= \mathbf{T}_n \mathbf{z}_{n-1} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

と表される。ところで、上の n 番目の式を、他の $n-1$ 個の式を用いて書き直すと、

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{T}_{n-1} \cdots \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \mathbf{z}_0 \quad (\text{A.12})$$

となる。したがって、系の左端 (0 点) と右端 (n 点) の各状態ベクトルを結び付ける伝達マトリックスを \mathbf{T} とすれば、

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{T} \mathbf{z}_0 \quad (\text{A.13})$$

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_n \cdot \mathbf{T}_{n-1} \cdots \mathbf{T}_2 \cdot \mathbf{T}_1 \quad (\text{A.14})$$

となる。つまり、個々の基本要素の伝達マトリックスを機械的に掛け合わせることで、系全体の伝達マトリックスを求めることができる。

A.3 境界条件

系の左端、右端に境界条件を課して、系の振動特性を求める。

例として、はりの曲げ振動系のような4次の系に外力が働いている場合を考える。左端固定(変位=0)、右端自由(応力=0)の境界条件を課すと、

$$\begin{matrix} -v \\ \phi \\ M \\ V \end{matrix} \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_n = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} & f_1 \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} & f_2 \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} & f_3 \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} & f_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ 1 \end{bmatrix}_0 \quad (\text{A.15})$$

となる。

まず、左端の物理量を考える。上の式で左端で未知の物理量を含む3, 4, 5行目を抜き出すと、

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} t_{33} & t_{34} & f_3 \\ t_{43} & t_{44} & f_4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \\ 1 \end{pmatrix}_0 \quad (\text{A.16})$$

これから、

$$\begin{pmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{pmatrix}_0 = - \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.17})$$

となり、これを

$$\mathbf{T}'\mathbf{z}'_0 = -\mathbf{f}' \quad (\text{A.18})$$

と略記する。

A.4 特性方程式

式(A.18)で、外力 $\mathbf{f}' = 0$ とすると、0以外の解を持つためには、

$$\det \mathbf{T}' = 0 \quad (\text{A.19})$$

でなければならない。この方程式の解が、系の固有振動を与える。

式(A.17)の場合は、 $\det \mathbf{T}' = t_{33}t_{44} - t_{34}t_{43}$ となる。

左端未知量は、いずれか一つを1とすると、残りの全ての未知量を、方程式

$$\mathbf{T}'\mathbf{z}'_0 = 0 \quad (\text{A.20})$$

を使って、解くことができる。式(A.17)の場合、 $\zeta_3=1$ とすると、

$$\begin{pmatrix} t_{33} & t_{34} \\ t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \zeta_4 \end{pmatrix}_0 = 0 \quad (\text{A.21})$$

となる。したがって、

$$\zeta_4 = -\frac{t_{33}}{t_{34}} = -\frac{t_{43}}{t_{44}} \quad (\text{A.22})$$

と解ける。

A.5 伝達関数

また、式 (A.18) を解くことによって、強制振動に対する応答を調べることができる。

$$\mathbf{z}'_0 = -\mathbf{T}'^{-1}\mathbf{f}' \quad (\text{A.23})$$

式 (A.17) を使うと、左端の未知量は、

$$\begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{pmatrix}_0 = -\frac{1}{\det \mathbf{T}'} \begin{pmatrix} t_{44} & -t_{34} \\ -t_{43} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

として決定される。右端の未知量は、

$$\begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix}_n = \begin{pmatrix} t_{13} & t_{14} \\ t_{23} & t_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{pmatrix}_0 \quad (\text{A.25})$$

と表される。したがって、外力 f_4 をかけた時の変位 ζ_1 への伝達関数を考えると、

$$\frac{\zeta_1}{f_4} = -\frac{t_{14}t_{33} - t_{13}t_{34}}{t_{33}t_{44} - t_{34}t_{43}} \quad (\text{A.26})$$

となる。

A.6 伝達マトリックスの導出

ここまで、伝達マトリックス法を使った、系の振動特性の求め方を述べてきた。興味のある系の個々の要素の伝達マトリックスが分かれば、これまでの知識で振動特性を求められる。個々の伝達マトリックスは、代表的なものは文献 [32] などを調べれば分かる。伝達マトリックスが分からない場合でも、次に説明するように、微分方程式などから導出することができる。本節では、微分方程式から伝達マトリックスを導出する方法を述べ、例として、はりの曲げ振動の伝達マトリックスを求める。

微分方程式からの導出

連続体の物理状態が、 n 階の微分方程式で与えられている場合を考える。微分方程式の一般解は、座標 x の関数として次のように表される。

$$\zeta(x) = A_1 B_1(x) + A_2 B_2(x) + \cdots + A_n B_n(x) \quad (\text{A.27})$$

但し A_1, A_2, \dots, A_n は積分定数。 $B_1(x), B_2(x), \dots, B_n(x)$ が解。

必要な物理状態は、この解 (A.27) をもとにして、

$$\begin{aligned} \zeta_1(x) &= A_1 B_{11}(x) + A_2 B_{12}(x) + \cdots + A_n B_{1n}(x) \\ \zeta_2(x) &= A_1 B_{21}(x) + A_2 B_{22}(x) + \cdots + A_n B_{2n}(x) \\ &\vdots \\ \zeta_m(x) &= A_1 B_{m1}(x) + A_2 B_{m2}(x) + \cdots + A_n B_{mn}(x) \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

と表される。

ここで、式 (A.28) を

$$\mathbf{z}(x) = \mathbf{B}(x) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.29})$$

と表す。但し、

$$\mathbf{z}(x) = \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{bmatrix}_x \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_m \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \cdots & B_{mn} \end{bmatrix}_x \quad (\text{A.30})$$

である。いま基本要素として長さ l のものを考えると、境界では、

$$\mathbf{z}_{i-1} = \mathbf{z}(0) = \mathbf{B}(0) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.31})$$

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{z}(l) = \mathbf{B}(l) \cdot \mathbf{a} \quad (\text{A.32})$$

これより、

$$\mathbf{a} = \mathbf{B}^{-1}(0) \cdot \mathbf{z}(0) \quad (\text{A.33})$$

故に

$$\mathbf{z}_i = \mathbf{B}(l) \cdot \mathbf{B}^{-1}(0) \cdot \mathbf{z}_{i-1} \quad (\text{A.34})$$

よって、伝達マトリックスを

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{B}(l) \cdot \mathbf{B}^{-1}(0) \quad (\text{A.35})$$

として求めることが出来る。

例) はりの曲げ振動の伝達マトリックス

はりの運動方程式は、

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{\rho S}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.36})$$

ここで、 ρ は密度、 E はヤング率、 S は x 一定の断面積。 I は x 一定の面の y 軸周りの断面 2 次モーメント。但し、 y 軸周りの断面 2 次モーメントは、

$$I = \int z^2 dS \quad (\text{A.37})$$

で定義される。半径 r の円柱では $I = \pi r^4/4$ であり、 z 軸方向の長さ a 、 y 軸方向の長さ b の板では、 $I = a^3 b/12$ となる。

$$v(x, t) = v(x) e^{i\omega t} \quad (\text{A.38})$$

とおくと、式 (A.36) は、

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = k^4 v \quad (\text{A.39})$$

補遺 A. 伝達マトリックス法

となる。但し、

$$k^4 = \frac{\rho S}{EI} \omega^2 \quad (\text{A.40})$$

である。方程式 (A.39) の一般解は、

$$-v = A \cosh(kx) + B \sinh(kx) + C \cos(kx) + D \sin(kx) \quad (\text{A.41})$$

と表せる。

はりの曲げ振動の状態量は、たわみ v 、傾き角 ψ 、曲げモーメント M 、せん断力 V の4つである。たわみ v が求まると、他の3つも次のように決定される。

$$\psi = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.42})$$

$$M = EI \frac{\partial \psi}{\partial x} = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (\text{A.43})$$

$$V = \frac{\partial M}{\partial x} = -EI \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} \quad (\text{A.44})$$

従って状態ベクトルを

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} -v \\ \psi \\ M \\ V \end{pmatrix} \quad (\text{A.45})$$

ととると、一般解は

$$\begin{pmatrix} -v \\ \psi \\ M \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(kx) & \sinh(kx) & \cos(kx) & \sin(kx) \\ k \sinh(kx) & k \cosh(kx) & -k \sin(kx) & k \cos(kx) \\ EI k^2 \cosh(kx) & EI k^2 \sinh(kx) & -EI k^2 \cos(kx) & -EI k^2 \sin(kx) \\ EI k^3 \sinh(kx) & EI k^3 \cosh(kx) & EI k^3 \sin(kx) & -EI k^3 \cos(kx) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \quad (\text{A.46})$$

となる。

式 (A.35) を用いて伝達マトリックスを求めると、

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} c_0 & c_1/k & c_2/(EI k^2) & c_3/(EI k^3) \\ kc_3 & c_0 & c_1/(EI k) & c_2/(EI k^2) \\ EI k^2 c_2 & EI k c_3 & c_0 & c_1/k \\ EI k^3 c_1 & EI k^2 c_2 & kc_3 & c_0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

但し、

$$c_0 = \frac{\cosh(kl) + \cos(kl)}{2}$$

$$c_1 = \frac{\sinh(kl) + \sin(kl)}{2}$$

$$c_2 = \frac{\cosh(kl) - \cos(kl)}{2}$$
$$c_3 = \frac{\sinh(kl) - \sin(kl)}{2}$$

となる。

以上の知識を使って、二重振動子の伝達関数や、モードの形、換算質量などを求めることができる。

補遺 B

重力波

本章では、重力波の式の導出と、予想される重力波源、更にその検出方法をまとめる。

重力波は、Einstein の一般相対性理論によって予言される、光速で伝搬する時空の微小な歪みである。重力波の存在は、Taylor, Hulse による中性子星連星の公転周期の長期観測から、間接的に証明されている [35]。しかし、重力波は非常に微小であるため、直接検出にはいまだ成功していない。直接検出が行われれば、一般相対性理論の検証に役立つ。さらに、重力波は相互作用が小さいため、電磁波では見ることのできない星の内部の情報や、宇宙初期の情報を得られるようになると期待されている。

重力波検出器の開発は、Weber の共振型検出器に始まる [36]。共振型は改良を重ね、現在でも低温の検出器が稼働しているが [37]、近年は、帯域幅の広い干渉計を用いる検出器が主流となっている。90 年代に入ってから、アメリカの LIGO [38]、仏、伊の VIRGO [39]、英、独の GEO600 [40] など、各国で基線長 数 km クラスの大型干渉計の建設が相次いで始まっている。これらの検出器は、数年のうちに、これまでにない高い感度での観測をはじめると予定である。このため、近い将来、重力波が直接検出されるだろうという期待が高まっている。

日本では 1995 年から、国立天文台の三鷹キャンパスに 基線長 300m の干渉計型重力波検出器、TAMA300 の建設がすすめられている [1, 2]。TAMA300 は、基線長 300m と中規模であるが、これまで順調に開発がすすみ、1999 年夏から世界に先駆けて試験観測を開始している。

しかし、TAMA300 では、干渉計を構成する鏡の熱振動が検出器の感度を制限する深刻な雑音となることが予想されている。検出器の感度が向上してきた現在、熱雑音の研究と低減が重要な課題となっている。

本章では、一般相対論から重力波を導出する方法を復習し、その性質や、検出原理をまとめる。更に、予想される重力波源の強さ、TAMA300 の目標感度を掲げ、検出器の感度を制限する原理的な雑音について述べる。

B.1 重力波の導出

一般相対論では、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いて 2 点 x^μ 、 $x^\mu + dx^\mu$ 間の距離 ds を定める [34, 33]。

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.1})$$

重力波は、この計量 $g_{\mu\nu}$ の真空中での平坦時空からの摂動として表される。

時空の計量 $g_{\mu\nu}$ は、Einstein 方程式 (B.2) に従う。

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

ここで、左辺の $G_{\mu\nu}$ は、計量 $g_{\mu\nu}$ の関数で、重力場を表す。また、右辺の $T_{\mu\nu}$ は、運動量エネルギーテンソルで、物質の存在を示す。式 (B.2) は、物質が存在すると、重力場が存在する、ということを示している。しかし、物質の存在しない真空中でも、電磁波の場合と同じように、光速で伝播する重力場が存在する。

真空中では、 $T_{\mu\nu} = 0$ である。したがって、式 (B.2) は次のように書き直すことができる。

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \quad (\text{B.3})$$

平坦な時空

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{B.4})$$

はこの方程式の解である。そこで、 $\eta_{\mu\nu}$ からの摂動を考える。

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (\text{B.5})$$

式 (B.3) は、 $h_{\mu\nu}$ を用いると、

$$h_{\rho\nu, \mu}{}^\rho + h_{\rho\mu, \nu}{}^\rho - h_{\mu\nu, \rho}{}^\rho - h,{}^\rho{}_\nu + \eta_{\mu\nu}(h_{\rho\lambda, \rho}{}^\lambda - h,{}^\rho{}_\rho) = 0 \quad (\text{B.6})$$

となる。簡単のため、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \quad (\text{B.7})$$

$$h \equiv h^\rho{}_\rho \quad (\text{B.8})$$

を使って書き直し、

$$\bar{h}_{\rho\nu, \mu}{}^\rho + \bar{h}_{\rho\mu, \nu}{}^\rho - \bar{h}_{\mu\nu, \rho}{}^\rho + \eta_{\mu\nu} h_{\rho\lambda, \rho}{}^\lambda = 0 \quad (\text{B.9})$$

を得る。さらに、ローレンツゲージ条件

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{, \alpha} = 0 \quad (\text{B.10})$$

を課すと、式 (B.9) は波動方程式となる。

$$\bar{h}_{\mu\nu, \rho}{}^{\rho} = 0 \quad (\text{B.11})$$

この解が重力波である。

B.2 重力波の偏光

式 (B.11) の解として単色平面波

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} \exp(ik_{\alpha}x^{\alpha}) \quad (\text{B.12})$$

を考える。ローレンツ条件は、

$$k_{\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$A_{\mu\alpha}k^{\alpha} = 0 \quad (\text{B.14})$$

で表されるが、まだ座標の取り方に任意性が残っているので、次の条件を課す。

$$A_{\mu 0} = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$A^{\mu}{}_{\mu} = 0 \quad (\text{B.16})$$

式 (B.15), (B.16) は、摂動 $\bar{h}_{\mu\nu}$ の時間成分と、トレースを 0 にしている。これは T-T ゲージ (Transverse-Traceless gauge) と呼ばれ、この条件下では $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$ である。

波の進行方向を z とすると、

$$h_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_{+} & h_{\times} & 0 \\ 0 & h_{\times} & -h_{+} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \exp[-ik(ct - z)] \quad (\text{B.17})$$

となり、重力波は h_{+} と h_{\times} の 2 つの自由度を持った横波であることが分かる。

B.3 重力波源

重力波の放出は電磁場の場合と同じように、遅延ポテンシャルを使って表される。重力波源の運動速度が遅く、重力場のポテンシャルが小さい場合を考えると、波源からの距離を r として、 $h_{\mu\nu}$ は、

$$h_{\mu\nu} = \frac{2G}{c^4} \frac{1}{r} \ddot{D}_{\mu\nu} \quad (\text{B.18})$$

補遺 B. 重力波

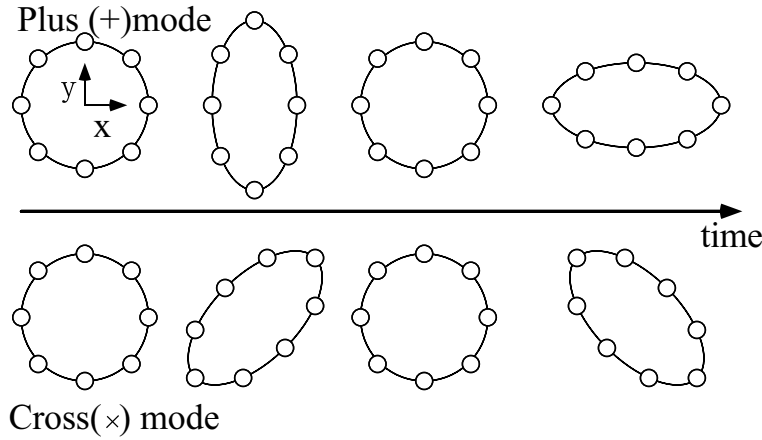


図 B.1: 重力波の偏光

波源	周波数	距離	h	発生率
中性子星の合体	10~1kHz	200Mpc	10^{-22}	~3/year
超新星爆発	~1000Hz	銀河系内	10^{-18}	~3/century
超新星爆発	~1000Hz	乙女座銀河団	10^{-21}	~ 数回/year
パルサー	10~1000Hz		10^{-25}	

表 B.1: 重力波源

と表される。但し、 $D_{\mu\nu}$ は 4 重極モーメントで、

$$D_{\mu\nu} = \int \rho \left(x_\mu x_\nu - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} r^2 \right) d^3x \quad (\text{B.19})$$

となっている。重力波は、4 重極放射のため、軸対称な系からは発生しない。

重力波の源には、表 B.1 のような天体が考えられている。

TAMA の観測帯域は 150Hz から 450Hz であり、目標感度は $h = 3 \times 10^{-21}$ である。この感度が達成されれば、銀河系内で起きる超新星爆発と、より遠くの中性子星連星の合体を検出できると考えられる。

B.4 検出

近年では、干渉計型と呼ばれる検出器が主流になっている。

干渉計型では、吊った鏡で構成した干渉計を用い、自由質点間の距離を測定する。基本的にはマイケルソン干渉計であり、光源から出た光をビームスプリッターで二つに分け、2

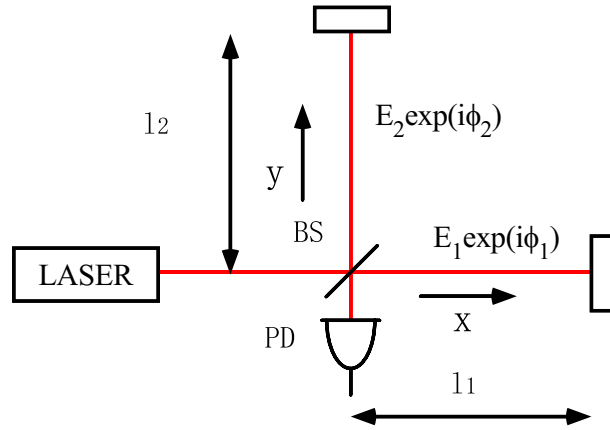


図 B.2: マイケルソン干渉計

本の腕を往復した光の光路長の差をフォトディテクタに入る光の強度変化として検出するものである。

図 B.2 の x 軸上を往復してきた光の振幅を E_1 、位相変化を ϕ_1 、 y 軸上を往復してきた光の振幅を E_2 、位相変化を ϕ_2 とすると、PD での光の強度 I は、

$$I = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \quad (\text{B.20})$$

となる。ここで、 $+$ モードの重力波が来た場合の光の位相変化を考える。重力波によって、計量 $g_{\mu\nu}$ は、次式のような変更を受ける。

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h_+ e^{-ik(ct-z)}) dx^2 + (1 - h_+ e^{-ik(ct-z)}) dy^2 + dz^2 \quad (\text{B.21})$$

$h_+ e^{-ik(ct-z)}$ は時間の関数として、 $h(t)$ と書く。光は

$$ds^2 = 0 \quad (\text{B.22})$$

であり、 x 軸を往復する光は、 $dy = dz = 0$ であるから、

$$c^2 dt^2 = \{1 + h(t)\} dx^2 \quad (\text{B.23})$$

これから、

$$\int_{t_1}^t \frac{dt'}{\sqrt{1 + h(t')}} = \frac{1}{c} \left(\int_0^{l_1} dx + \int_{l_1}^0 -dx \right) = \frac{2l_1}{c} \quad (\text{B.24})$$

左辺を $h \ll 1$ で近似すると、

$$\int_{t_1}^t \frac{dt'}{\sqrt{1 + h(t')}} \simeq \int_{t_1}^t \left(1 - \frac{1}{2} h(t') \right) dt' \quad (\text{B.25})$$

補遺 B. 重力波

となる。光が x 軸を往復する間におこる位相変化 ϕ_1 は、重力波が存在するために、 $2\Omega l_1/c$ から微小な変動を受ける。

$$\phi_1 = \Omega(t - t_1) = \frac{2l_1\Omega}{c} + \frac{\Omega}{2} \int_{t-\frac{2l_1}{c}}^t h(t') dt' \quad (\text{B.26})$$

y 軸に対しては重力波の影響が逆符合になるので、位相変化 $\Delta\phi$ は

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2 = -\frac{2\Omega(l_1 - l_2)}{c} - \Omega \int_{t-\frac{2l_1}{c}}^t h(t') dt' \quad (\text{B.27})$$

但し、 $l \simeq l_1 \simeq l_2$ 。このようにして、干渉計で重力波が検出される。

B.5 干渉計型重力波検出器の雑音

微弱な重力波を検出するには、雑音の低減が欠かせない。本章の最後に干渉計型重力波検出器で予想される雑音スペクトルを掲げる。干渉計型重力波検出器の感度を制限する原理的な雑音は、低周波から、地面振動、熱雑音、散射雑音であると予想されている。図 B.3 に TAMA300 で予想されているそれぞれの雑音スペクトルを示す。これらの雑音のう

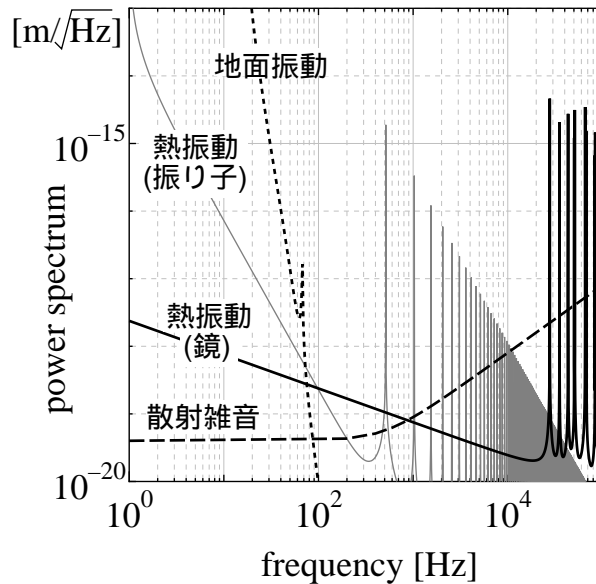


図 B.3: 干渉計型重力波検出器、TAMA300 で予想される雑音

ち、熱雑音だけがまだ直接観測されていない。干渉計の開発が進み、感度が向上するにつれ、この雑音が直接検出される可能性が高まっており、熱雑音の研究と低減は、今後の干渉計の開発の過程で、重要な課題となっている。

補遺 C

回路

実験で使用した回路図を示す。

フォトディテクタ

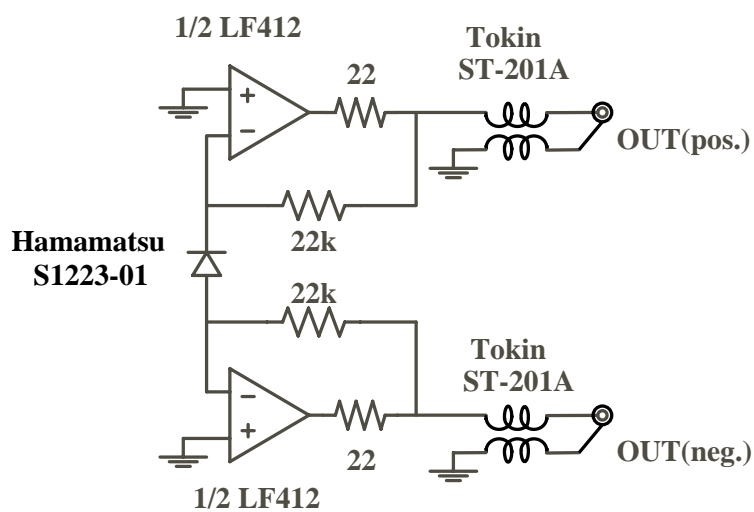


図 C.1: フォトディテクタ

コイルドライバ

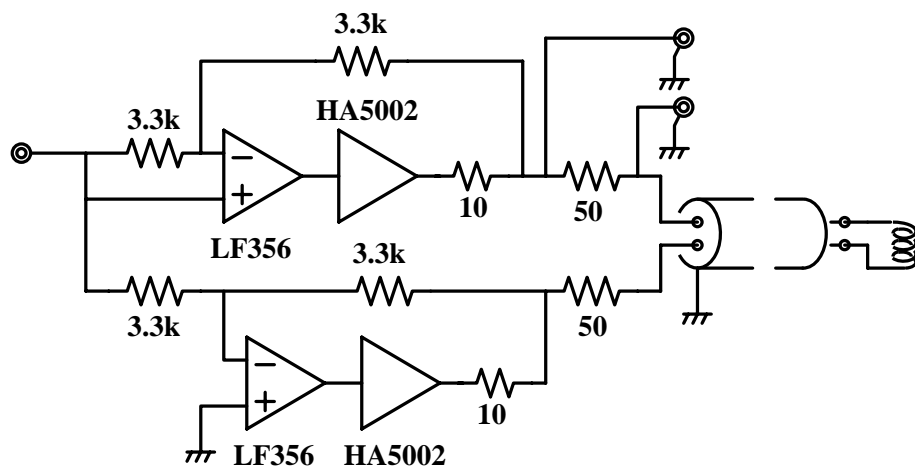


図 C.2: コイルドライバ

フィルタ

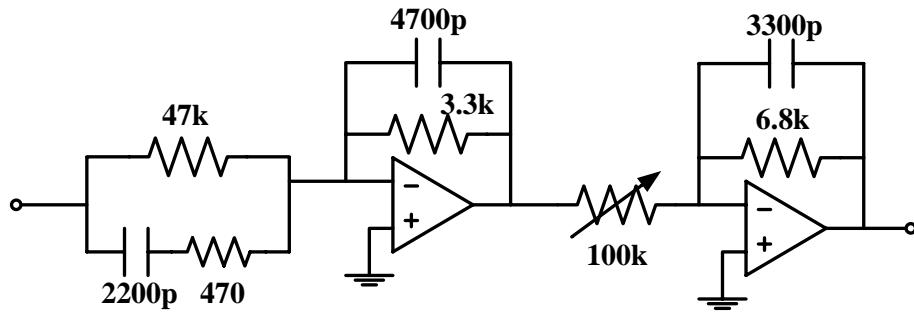


図 C.3: フィルタ

PZT 制御用フィルタ

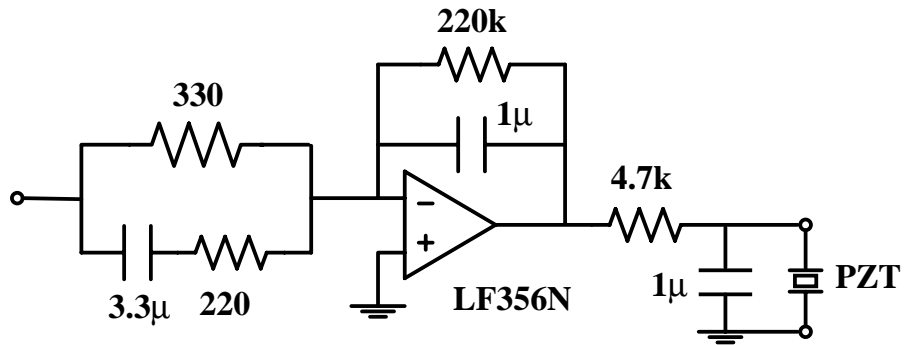


図 C.4: PZT 制御用フィルタ

振動子制御用フィルタ

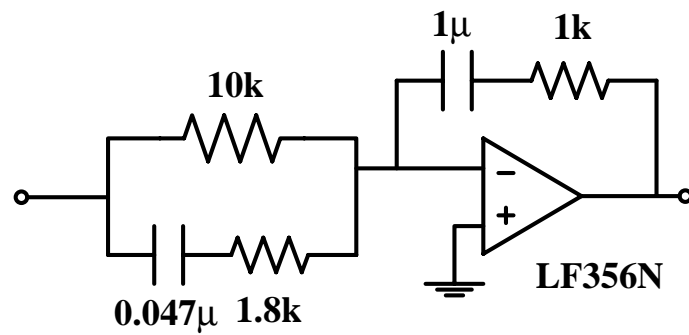


図 C.5: 振動子制御用フィルタ

参考文献

- [1] K. Tsubono, the TAMA collaboration, *Proc. TAMA Workshop on Gravitational Wave Detection*, Saitama, Nov. 1996 (Universal Academy Press, 1997) p.183.
- [2] K. Kuroda et al., *Proceedings of the international conference on Gravitational Waves: Sources and Detectors*, Edited by Ignazio Ciufolini and Francesco Fidecaro (World Scientific Publishing, 1997) p.100-107.
- [3] J. R. Hutchinson, *J. Appl. Mech.* 47 (1980) 901.
- [4] A. L. Kimball, D. E. Lovell, *Phys. Rev.* 30 (1927) 948.
- [5] 大石 奈緒子 修士論文 干渉計型重力波検出器に用いる石英鏡の Q 値測定 (1997).
- [6] Y. Levin, *Phys. Rev. D* 57 (1998) 659.
- [7] F. Bondu, P. Hello, J.-Y. Vinet, *Phys. Lett. A* 246 (1998) 227.
- [8] N. Nakagawa, B. A. Auld, E. Gustafson, M. M. Fejer *Rev. Sci. Instrum.* 68 (1997) 3553.
- [9] H. B. Callen, and R. F. Greene *Phys. Rev.* 86 (1952) 702.
- [10] G. I. González, P. R. Saulson, *Phys. Lett. A* 201 (1995) 12.
- [11] M. Kajima, N. Kusumi, S. Moriwaki, N. Mio, *Phys. Lett. A* 264 (1999) 251.
- [12] H. Nyquist *Phys. Rev.* 32 (1928) 110
- [13] A. Einstein, *Anna. der. Phys.* 17 (1905) 549
- [14] H. B. Callen, T. A. Welton, *Phys. Rev.* 83 (1951) 34.
- [15] R. F. Greene, and H. B. Callen *Phys. Rev.* 88 (1952) 1387.
- [16] R. F. Greene, and H. B. Callen *Phys. Rev.* 83 (1951) 1231.
- [17] ランダウ、リフシッツ、弾性理論、東京図書

参考文献

- [18] T. J. Quinn, C. C. Speake and L. M. Brown, *Philos. Mag. A.* 65 (1992) 261.
- [19] K. Yuki, M. A. Barton, N. Kanda, K. Kuroda, *Phys. Lett. A.* 223 (1996) 149.
- [20] P. R. Saulson R. T. Stebbins, F. D. Dumont and S. E. Mock, *Rev. Sci. Instrum.* 65 (1994) 182.
- [21] C. Zener, *Phys. Rev.* 52 (1937) 230.
- [22] J. Kovalik, P. R. Saulson, *Rev. Sci. Instrum.* 64 (1993) 2942.
- [23] S. Rowan, R. Hutchins, A. McLaren, N. A. Robertson, S. M. Twyford, J. Hough, *Phys. Lett. A* 227 (1997) 153.
- [24] G. Cagnoli, L. Gammaitoni, J. Kovalik, F. Marchenoni, M. Punturo, *Phys. Lett. A* 255 (1999) 230.
- [25] P. R. Saulson, *Phys. Rev. D* 42 (1990) 2437.
- [26] 信越石英 石英ガラス総合カタログ
- [27] 桜井 捷海、霜田光一 応用エレクトロニクス、裳華房
- [28] N. Ohishi, *Proc. TAMA Workshop on Gravitational Wave Detection*, Saitama, Nov. 1996 (Universal Academy Press, 1997) p.369.
- [29] A. Gillespie, F. Raab, *Phys. Rev. D* 52 (1995) 577.
- [30] A. Gillespie, Ph. D thesis (1995).
- [31] F. Bondu, J.-Y. Vinet, *Phys. Lett. A* 198 (1995) 74.
- [32] 振動工学ハンドブック (1976) 振動工学ハンドブック編集委員会編 養賢堂 p.202-p.239
- [33] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman and company (1970)
- [34] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press (1985)
- [35] J. H. Taylor, J. M. Weisberg, *Ap. J.* 345 (1989) 434.
- [36] J. Weber, *Phys. Rev. Lett.* 22 (1969) 1320.
- [37] *Proceedings of the fifth Marcel Grossmann Meeting on General Relativity* (World Science, Singapore, 1989)
- [38] A. Abramovici et al. *Science* 256 (1992) 325.

- [39] A. Brillet et al. The VIRGO project, final conceptual design (1992).
- [40] K. Danzmann et al. Proposal for a 600m Laser-Interferometric Gravitational Wave Antenna (1994).
- [41] 三尾典克、大橋正健、重力波アンテナ技術検討書 (1992)
- [42] 中村 卓史、三尾 典克、大橋 正健、重力波をとらえる (1998) 京都大学学術出版会

謝辞

本実験を行うにあたり、多くの方々にお世話になりました。

指導教官の坪野教授には、推定法を思い付いてから、実験の方針、解釈などに疑問が生じるたびに、快く相談にのって頂きました。試作室の大塚さんには、工作の基礎を教えて頂きました。また、振動子を設計する際に有益な助言を頂きました。同じく試作室の南条さんには、小さな振動子をたくさん作って頂きました。坪野研で非一様散逸の熱雑音の研究をしている山元氏と、サファイアやシリコン等低損失材質のQ値を測定している沼田氏とは、熱雑音に関して有益な議論ができました。

同じく坪野研の新井氏と高森氏には二人の労作である懸架系の試作機を快く貸して頂きました。助手の河辺氏には、電気、機械などさまざまな実験技術を教えて頂きました。三尾研の森脇氏にはまわりこみの低減等、電気回路についていろいろ教えて頂きました。小林研の植木さんには、鏡のコーティングをして頂きました。宇宙線研究所の黒田研究室の方々にはサファイアファイバーを提供して頂きました。また、熔融石英ファイバーの作成に必要な器具を貸して頂き、ファイバーの作り方を指導して頂きました。

その他多くの方がこの実験に興味をもって、励まして下さったことを感謝します。