Space-Time Theory

Takeda Hiroki

2018 年 8 月 10 日

目次

概要 iii

Notation v

第 1 章 Mathematical Logic 1

1.1 1 階述語論理 1

1.2 1 階述語論理における意味論 4

1.3 1 階述語論理における構文論 8

第 2 章 Mathematical Formulation 14

2.1 集合 14

2.1.1 公理的集合論 15

2.1.2 素朴集合論 16

2.1.3 対応、写像 17

2.2 群、環、体 18

2.3 ベクトル空間 19

2.4 複素関数論 22

2.5 Laplace 変換/Fourier 変換 31

2.6 位相空間 39

2.7 多様体 41

2.8 ファイバー束 51

2.9 スピノール 60

2.10 表現論 76

2.11 変分 97

第 3 章 General Relativity 99

3.1 時空 99

AppendixA Signal Theory 106

AppendixB Physical motivation of spinors 111

謝辞 113

参考文献 114

概要

このノートの主題は時空の物理学である。時空の物理学、中でも一般相対性理論に関する数学的側面、物理学的側面を徒然なるままにまとめた日本語のノートを作りたいなと思ったのが、本ノートを書くに至った理由である。一般相対性理論の数学的側面を厳密に表現し、かつ物理学的描像を与えることを目的としている。ところが、私が学部生のときから学んできた物理学を楽しむ上で汎用性があり重要そうだと感じた事項に関しては、時空の物理学という主題から離れてしまうかもしれないが、本ノートにまとめるように心がけた。そのため現在、内容は極めて雑多であり、落書き帳のような自由さを持つノートになってしまっている。また本書は未完成であるため章や節の途中で内容が中途半端に終わってしまっているところが多々あるのをご了承頂きたい。本ノートは随時更新していき、その構成や内容を改善していくつもりである。必要な知識としては、学部程度の数学・物理をある程度知っていれば読めるようにはなっていると思われる。本書の記法に関しては Notation のページを参考にして欲しい。

1 章では数理論理学について述べる。特に数学を形式化するための論理である一階述語論理を中心に意味論と構文論について述べる。

2 章では様々な数学的体系を述べる。ここでは物理学を学ぶ上で重要そうだと思われる事柄を中心に定義を明確に示しながら議論している。各節は独立しているので興味のあるところだけを読めるようになっている。

3 章では時空の物理学について述べる。特に現在広く受け入れられている時空の物理学として一般相対性理論を中心に述べる。

一般相対性理論に関する専門書として、Hawking, Ellis(1973) ”The large scale structure of space-time”や Wald(1984) ”General Relativity”などがある。本ノートもこれらの本の影響を

大きく受けている。数学的事項に関しては筆者が読ませて頂いた各分野の書籍の影響を大きく受けている。話の流れもそれらの書籍を参考にしており、定理の証明や詳しい解説はそれらの書籍を参照することで学ぶことができるだろう。参考にした専門書等については各章や各節の始めに挙げておいた。

本ノートは時間を見つけて随時更新していく予定である。しかし、物理にはキリがないので永久的に未完になってしまうだろう。何か意見、誤植の報告等がありましたら arrow7989 __ at __ gmail.com(__ at __→@) または Twitter アカウント (@tomatoha831) までよろしくお願いします。

Notation

本書で用いた記法についてまとめる。ここに掲載されていないものについては察して欲しい。または私に聞いてください。

・English

$\Rightarrow$	implication(semantics)
$\Leftrightarrow$	equivalence(semantics)
$\rightarrow$	implication(syntax)
$\leftrightarrow$	equivalence(syntax)
$\wedge$	logical conjunction(semantics and syntax)
$\vee$	logical disjunction(semantics and syntax)
$\neg$	negation(semantics and syntax)
$\forall$	universal quantifier(semantics and syntax)
$\exists$	existential quantifier(semantics and syntax)
$\in$	$p \in A$ denotes that p is an element of A
$\cup$	$A \cup B$ denotes the union of the set A and B
$\cap$	$A \cap B$ denotes the intersection of sets A and B
$\subset$	$A \subset B$ denotes tha A is subset of B
$-$	$B - A$ denotes the complement in B of the set A
{|}	$\{p \in A \| Q\}$ denotes the set consisting of those elements p of the set A which satisfy condition Q
$\times$	Cartesian product; $A \times B$ is the set $\{(a,b) \| a \in A \text{and} b \in B\}$
$\emptyset$	the empty set

$\mathbb{R}$	the set of real numbers
$\mathbb{R}^n$	the set of n-tuples of real numbers
$\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$	lower half $x^1 \leq 0$of $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{C}$	the set of complex numbers
$\mathbb{C}^n$	the set of n-tuples of complex numbers
$: \to$	$f : A \to B$ denotes that f is a map from the set A to the set B
$\circ$	$f \circ g$ denotes the composition of maps $g : A \to B$ and $f : B \to C$, i.e., for $p \in A$ we have $(f \circ g)(p) = f[g(p)]$
$[\ ]$	$f[A]$ denotes the image of the set A under the map f, i.e., the set $\{f(x)\|x \in A\}$
C^n	the set of n-times continuously differentiable functions
C^∞	the set of infinitely continuously differentiable (i.e., smooth) functions
i	imaginary number $i = \sqrt{-1}$
$x(t)$	the function of time, time series data
$X(s), X$	the function in s region(Laplace transformed function)
$X(f), X$	the function of frequency, frequency series data(Fourier transformed function)
f	Fourier frequency
$\mathcal{P}_x$	power spectral density of $x(t)$. When the dimension of x is U, the dimension of $\mathcal{P}_x$ is $\mathrm{U}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$

・日本語

$\Rightarrow$	論理包含 (implication)[意味論 (semantics)]
$\Leftrightarrow$	同値 (equivalence)[意味論 (syntax)]
$\to$	包含 (implication)[構文論]
$\leftrightarrow$	同値 (equivalence)[構文論]
$\wedge$	論理積 (logical conjunction)[意味論/構文論]
$\vee$	論理和 (logical disjunction)[意味論/構文論]
$\neg$	否定 (negation)[意味論/構文論]
$\forall$	全称量化 (universal quantifier)[意味論/構文論]
$\exists$	存在量化 (existential quantifier)[意味論/構文論]
$\in$	$p \in A \Leftrightarrow p$ は A の要素

$\cup$	$A \cup B \Leftrightarrow$ 集合 A と B の和集合 (union)
$\cap$	$A \cap B \Leftrightarrow$ 集合 A と B の共通部分 (intersection)
$\subset$	$A \subset B \Leftrightarrow A$ は B の部分集合 (subset)
$-$	$B - A \Leftrightarrow B$ における A の補集合 (complement)
$\{\vert\}$	$\{p \in A \vert Q\} \Leftrightarrow$ 条件 Q を満たす集合 A の要素 p からなる集合
$\times$	直積 (direct product); $A \times B$ は $\{(a, b) \vert a \in A \mathrm{and} b \in B\}$
$\emptyset$	空集合 (empty set)
$\mathbb{R}$	実数の集合
$\mathbb{R}^n$	実数の集合 n 個の直積
$\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}^n$ における $x^1 \leq 0$ を満たす集合
$\mathbb{C}$	複素数の集合
$\mathbb{C}^n$	複素数の集合 n 個の直積
$: \to$	$f : A \to B \Leftrightarrow$ 集合 A から集合 B への写像 (map)
$\circ$	$f \circ g \Leftrightarrow$ 写像 $g : A \to B$ と $f : B \to C$ の合成,
	i.e., $p \in A$ に対して $(f \circ g)(p) = f[g(p)]$
$[\ ]$	$f[A] \Leftrightarrow$ 写像 f による集合 A の像 (image), i.e., 集合 $\{f(x) \vert x \in A\}$
C^n	n 階微分可能関数の集合
C^∞	無限階微分可能、つまり滑らか (smooth) な関数の集合
i	虚数単位 $i = \sqrt{-1}$
$x(t)$	時間関数、時間領域データ
$X(s), X$	s 領域関数 (Laplace 変換)
$X(f), X$	周波数関数、周波数領域データ (Fourier 変換)
f	Fourier 周波数
$\mathcal{P}_x$	$x(t)$ のパワースペクトル密度、x の次元が U のとき、$\mathcal{P}_x$ の次元は $\mathrm{U}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$

本書では論理記号を用いる。論理記号は左から順に読むのがルールである。例えば、$\forall x \exists y \forall p(x, y)$ のような文は、$\forall x(\exists y(\forall p(x, y)))$ という文の括弧が省略されたものであり、「任意の x に対して $p(x, y)$ を満たすような y が存在する。」という意味である。同様に $\exists y \forall x \forall p(x, y)$ は、「ある y が存在して、その y と任意の x に対して $p(x, y)$ が成り立つ。」という意味である。

論理学については数理論理学、中でも一階述語論理について第 1 章で詳述する。

第 1 章
Mathematical Logic

本章では数理論理学 (Mathematical Logic) について述べる。本章を書くにあたって、Maehara(2005) [1], Hilbert(1974) [2] を参考にした。

形式体系とは well-defined な抽象思考体系である。数学における形式体系は以下の要素から構成される。

(1) 式の構成に用いる有限個の記号

(2) 意味をなす式 (well-formed formula, 整式, 論理式) を記号から構成するための文法。

(3) 公理群

(4) 論理式から他の論理式を導く規則である推論規則。

(5) 定理群

形式体系として表現される論理学を形式論理学という。数理論理学とは数学における論理を対象とする形式論理学である。ここでは特に現代数学で用いられている、数学を形式化するための論理である一階述語論理について述べる。数学、物理的事項にのみ興味のある読者は本章を読み飛ばしても問題ない。

1.1 1 階述語論理

数理論理学の基礎分野に、命題全体を一つの記号に置き換え、論理演算を表す記号を用いて命題間を関係づけたときの可能な推論を論ずる命題論理という一分野がある。命題論理を拡張し、変数の量化を導入し、命題そのものを論ずることができるのが述語論理である。特に、個体の量化のみが導入された述語論理が 1 階述語論理である。

言語とは論理学の形式体系を表現するのに必要最低限の記号のことである。

定義 1.1 (1 階述語論理の言語 (1 階の言語))

1 階述語論理の言語 (1 階の言語)$\mathfrak{L}$ は以下のものからなる。

論理記号 (logical symbol)

(1) 変数 (個体変数)

(2) 結合記号 $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

(3) 量化記号 $\forall, \exists$

(4) 補助記号 括弧 (,)

非論理記号 (non-logical symbol)

(5) 述語 (関係) 記号 各述語記号にはアリティという引数の個数である正整数が一つ対応する。

等号 $(=)$ は述語記号であり、等号の有無は言語による。

(6) 関数記号 各関数記号もアリティを持つ。

(7) 定数記号

一階の言語は等号を持つか、非論理記号に何を持つかを与えることで定まる。

いくつかの結合記号と量化記号は言語に含まれている記号ではなく、省略記法として定義によって導入されることがある。例えば、$\phi \vee \psi \leftrightarrow \neg\phi \rightarrow \psi$, $\phi \wedge \psi \leftrightarrow \neg\phi \rightarrow \neg\psi$, $\exists x_i \phi \leftrightarrow \neg(\forall x_i((\neg\phi)))$, $(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$ のように定義される。一階述語論理においては上記の関係式は公理として導入される。上の結合記号、量化記号を用いて定義される命題は $\neg, \vee, \exists$ や $\neg, \rightarrow, \forall$ のみを用いても表現できることが知られている。しかし、便利のためここでは以上の全ての記号を言語としてとる。公理系を用いればもちろんそれより少ない数の記号のみで 1 階の言語を表現できる。

何らかの対象を表す記号列である項という概念を定義する。

定義 1.2 (項 (term))

1 階述語論理における項を帰納的に次のように定義する。

(1) 変数と定数記号は全て項である。

(2) $t_1, \cdots, t_n$ が項で、f がアリティ n の関数ならば、$ft_1 \ldots t_n$ は項である。

(3) 上記の (1),(2) によって項と定義されるものだけが項である。

何らかの命題を表す論理式という概念を定義する。

定義 1.3 (原子論理式 (atomic formula))

アリティ n の述語記号 P と n 個の項 $t_1, \cdots, t_n$ を用いて $Pt_1 \ldots t_n$ と表される記号列を原子論理式と定義する。

原子論理式は論理式の基本となるものである。

定義 1.4 (論理式 (well-formed formula, wff))

原子論理式を用いて、論理式 (式) を帰納的に次のように定義する。

(1) 原子論理式は論理式である。

(2) ϕ, ψ が論理式ならば、$(\neg\phi), (\phi \wedge \psi), (\phi \vee \psi), (\phi \to \psi), (\phi \leftrightarrow \psi)$ は論理式である。

(3) ϕ が論理式で x が変数ならば、$\forall x\phi$, $\exists x\phi$ は論理式である。

(4) 上記の (1),(2),(3) によって論理式と定義されるものだけが論理式である。

定義 1.5 (文、自由変数)

論理式 ϕ に対して、ϕ における自由変数全体の集合 $\mathrm{fr}(\phi)$ を次のように再帰的に定義する。$\mathrm{fr}(\phi)$ を構成する変数を自由変数という。

(1) ϕ が原子論理式ならば、$\mathrm{fr}(\phi)$ は記号列 ϕ に現れる全ての変数からなる集合である。

(2) $\mathrm{fr}((\neg\phi)) = \mathrm{fr}(\phi)$

(3) $\mathrm{fr}((\phi \wedge \psi)) = \mathrm{fr}((\phi \vee \psi)) = \mathrm{fr}((\phi \to \psi)) = \mathrm{fr}((\phi \leftrightarrow \psi)) = \mathrm{fr}(\phi) \cup \mathrm{fr}(\psi)$

(4) $\mathrm{fr}(\forall x\phi) = \mathrm{fr}(\exists x\phi) = \mathrm{fr}(\phi) - \{x\}$

論理式が自由変数を持たない $\mathrm{fr}(\phi) = \emptyset$ のとき、ϕ は閉論理式または文という。

ここで所謂"集合論"はまだ定義・導入されていないのに、集合の用語を用いていることに違和感を覚えるだろうか。実際数理論理学を用いてこの後に公理的集合論から集合論を記述する。すると、数理論理学で集合論の諸概念を用いていて、それを用いて集合論を定義しては循環論法になっていないかと感じるかもしれない。これに対する答えは私自身数理論理学や集合論の専門家ではないのではっきりは分からないが、数理論理学の中で用いている集合の単語は説明、記述の便宜上用いているだけで、数学の集合論の概念を用いているわけではないと私は考える。例えば上の定義において「ϕ における自由変数全体の集合」という記述はいかにも集合論で現れてきそうな表現だが、ここでいう集合とは文字通り"自由変数を集めたもの"のことを集合論の言葉である"集合"というワードを使って表現しただけである。集合論でいう"集合"というものはまだ定義されていないが、そのようなものの集まりを集合と表記しているだけで、ここでいちゃもんをつけるのはナンセンスではないだろうか。"集合"という言葉に疑問を抱くことになると"自由変数

の集まり”と表現しても”集まり”とは何かという話になる。これはもう記号論理学の範疇を超える哲学的な問題になってくる。同様に「$\mathrm{fr}(\phi)$ を構成する変数」という表現を「$\mathrm{fr}(\phi)$ の元」としても何の問題もない。元は確かに集合論の言葉だが、自由変数を掻き集めたものの一つ一つを表現するのにより端的で明快な元という集合論のワードを援用しているだけである。このあたりが気にくわないのならば、一々集合論のワードを避け、「ϕ における自由変数を全て集めた集まり」、「$\mathrm{fr}(\phi)$ を構成する一つ一つの変数」などと表現すれば良いがわかりにくい上に助長になる。重要なのは集合論を用いて定義しているのではなく、集合論の言葉を借りて表現しているだけという点である。あまりこういうこと言ってるとモテませんよ。

定義 1.6 (公理系)

$\mathfrak{L}$ の文の集合を理論または (広義の) 公理系という。公理系の要素を公理という。

本文では厳密な区別はしていないが、数理論理学のような記号論理学には意味論 (semantics) と構文論 (syntax) の二つに分けられる。意味論は記号の意味の視点から論ずるもので、構文論は記号の配列の視点から論ずるものである。命題論理においては、真理値視点のものが意味論、公理と推論規則視点のものが構文論である。命題論理については詳述しないが、命題論理の拡張である述語論理においても、意味論と構造論の二つの視点が存在する。述語論理においては構造という概念視点のものが意味論、公理と推論規則視点のものが構文論である。以下では意味論、構文論の順番に 1 階述語論理を展開する。

1.2　1 階述語論理における意味論

まず、意味論を構成する。

定義 1.7 (構造 (structure))

$\mathfrak{L}$ の構造とは、空でない集合 D と非論理記号全体の集合を定義域とする関数 F の組み $M = (D, F)$ で次を満たすものである。

(1) P がアリティ n の述語記号ならば、$F(P) \subseteq D^n$、つまり $F(P)$ は D 上の n 項関係 (述語) である。

(2) f がアリティ n の関数記号ならば、$F(f) : D^n \to D$、つまり $F(f)$ は D 上の n 項関数である。

(3) c が定数記号ならば $F(c) \subset D$、つまり $F(c)$ は D のある要素である。

集合 D を M の領域 (universe, domain) といい、通常 $|M|$ で表し、$|M|$ の要素を個体

(individual) という。また $F(P), F(f), F(c)$ は P^M, f^M, c^M と表される。

(1) は $F(P)$ を True の領域と考えそれ以外を False の領域と考えると、$F(P) : D^n \to \Omega = \{0,1\} = \{\mathrm{True}, \mathrm{False}\}$ と真理値への写像とも考えられる。物によってはこのように定義しているものもあるが、充足の定義の (2) で同じ概念を正確に定義する。

構造を与えることによって自由変数を持たない論理式である文の真偽を定めることができる。構造 M を与えたとき、文 ϕ が正しい命題になっているならば、ϕ は解釈 M において真であるといい、正しくない場合 ϕ は解釈 M において偽であるという。真偽の正確な定義を与える。そのためにまず個体の割り当て関数を導入する。

定義 1.8 (個体の割り当て関数)

変数全体の集合 V から構造 M の領域 $|M|$ への写像を、変数に対する M の個体の割り当て関数と呼ぶ。変数に対する M の個体の割り当て関数を s として、それぞれの項 t に対して、t の値 $t^M(s)$ が再帰的に定義される。

(1) 変数 x に対しては、$x^M(s) = s(x)$

(2) 定数記号 c に対しては、$c^M(s) = c^M$

(3) $t_1, \cdots, t_n$ が項で、f がアリティ n の関数記号ならば、$(ft_1 \ldots t_n)^M(s) = f^M(t_1^M(s), \cdots, t_n^M(s))$.

定義 1.9 (充足)

M が 1 階の言語に対する構造であるとき、各論理式 ϕ と M の個体の割り当て関数 s に対して、$M(\phi, s) \in \{0,1\}$ を次のように再帰的に定義する。

(1) $M(t_1 = t_2, s) = 1 \Leftrightarrow t_1^M(s) = t_2^M(s)$

(2) P がアリティ n の非論理述語記号ならば、$M(Pt_1 \ldots t_n, s) = 1 \Leftrightarrow (t_1^M(s), \cdots, t_n^M(s)) \in P^M$

(3) $M((\neg\phi), s) = 1 \Leftrightarrow M(\phi, s) = 0$

(4) $M((\phi \wedge \psi), s) = 1 \Leftrightarrow M(\phi, s) = 1$ かつ $M(\psi, s) = 1$

(5) $M((\phi \vee \psi), s) = 1 \Leftrightarrow M(\phi, s) = 1$ または $M(\psi, s) = 1$

(6) $M((\phi \to \psi), s) = 1 \Leftrightarrow M(\phi, s) = 0$ または $M(\psi, s) = 1$

(7) $M((\phi \leftrightarrow \psi), s) = 1 \Leftrightarrow M(\phi, s) = M(\psi, s)$

(8) $M(\forall x\phi, s) = 1 \Leftrightarrow$ 全ての $m \in |M|$ に対して $M(\phi, s[x|m]) = 1$

(9) $M(\exists x\phi, s) = 1 \Leftrightarrow$ ある $m \in |M|$ に対して $M(\phi, s[x|m]) = 1$

ただし、$s[x|m]$ は変数 x には m を割り当て、x 以外の変数に対しては s と同じ個体を割り当て

る関数を表す。
$M(\phi, s) = 1$ であるとき M は s によって ϕ を充足するという。

充足の概念は命題論理における真偽の概念に対応している。ここでは偽、真に対して $\{0, 1\}$ を用いて表しているが、その代わりに異なる二つの記号を用いるならば何でも良い。初等的な命題論理においては真理表を用いて、(3) (7) の関係によって $\wedge$ などの記号を定義するが、この方法では述語論理を上手く扱うことができない。そこで構造等の諸概念を定義し、充足という概念によって真偽の概念を定義している。

本書では「 $\Rightarrow$ 」という記号を、$P \Rightarrow Q$ のように書いて、P が成り立つならば、Q が成り立つという意味で用いる。また、「 $\Leftrightarrow$ 」という記号を、$P \Leftrightarrow Q$ のように書いて、P が成り立つならば、またそのときに限り Q が成り立つという意味で用いる。 ここで、「 $\rightarrow$ 」と「 $\Rightarrow$ 」や、「 $\leftrightarrow$ 」と「 $\Leftrightarrow$ 」などの違いに関して述べる。結論から言うとこの両者は全くの別物である。この違いには対象言語とメタ言語が関連する。人によってこれらの記号の区別や記号の種類用法はまちまちだが、どの場合でもここでの議論を適用できる。例えば上の定義の"(1) $M(t_1 = t_2, s) = 1 \Leftrightarrow t_1^M(s) = t_2^M(s)$"において、"(1) $M(t_1 = t_2, s) = 1 \leftrightarrow t_1^M(s) = t_2^M(s)$" と表記するのは正しいだろうか？これは正しくない。なぜなら、「$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 」などは形式的体系である数理論理学を展開するために、我々が作り上げた言語 (1 階述語論理) の記号である。一方「 $\models, \vdash, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 」などは自然言語 (英語や日本語) の省略記号として便宜上導入した記号である。論理学で論理を表現する言語など、数理論理学の研究対象となる言語を対象言語という。メタ言語とはある言語について何らかの記述をするための言語である。対象言語について何らかの記述をする言語はメタ言語であり、自然言語 (英語や日本語など) が用いられている。メタ言語は対象言語の定義や性質などを記述するのに必要である。つまり、「$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 」などは対象言語、「 $\models, \vdash, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 」などはメタ言語 (の省略記号) であり、階層が違う記号である。このように $\Rightarrow$ などは論理記号ではなく、"(1) $M(t_1 = t_2, s) = 1 \Leftrightarrow t_1^M(s) = t_2^M(s)$" は"(1) $M(t_1 = t_2, s) = 1$ を $t_1^M(s) = t_2^M(s)$ と定義する"や、"(1) $M(t_1 = t_2, s) = 1$ ならば $t_1^M(s) = t_2^M(s)$ かつ $t_1^M(s) = t_2^M(s)$ ならば $M(t_1 = t_2, s) = 1$"を省略しているにすぎない。「$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ 」だけで論理、言語を構築できればかっこいいとは思うが、それは不可能である。「 $\models, \vdash, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ 」のような記号を排除することは自然言語つまり、メタ言語の排除を意味し、対象以外の言語の排除をしなければならない。しかし、メタ的に外側から対象を論じる言語 (自然言語など) なしではそもそも対象言語の定義や性質について言及できなくなってしまう。メタ言語における記号を排除しても、結局その部分は「ならば」などのメタ言語で置き換えられる。「なら

ば」などのメタ言語は本書で「 $\Rightarrow$ 」などの記号を使用するより前から使用されている。この「ならば」のようなメタ言語は数理論理の対象外である。哲学、文学の人に任せるべきである。この言語の階層による記号の区別、言語そのものの区別は重要であり、混同しないように注意されたい。

対象言語とメタ言語について言及したので自然言語と論理記号の差異について述べる。対象言語と自然言語 (日本語) の間には完全な対応はなくギャップが存在する。例えば「 $\to$ 」と「ならば」について述べる。「 $\to$ 」は確かに口述するときには「ならば」と読むが、$P \to Q$ と書いたときにはそもそもこの論理式自体が真であるか、偽であるかは P,Q の真偽なしでは決定されない。また、$P \to Q$ は P が偽ならば Q の真偽に関わらず真になる。日本語で可能な限り正確に表現しようとすると、「P が偽か、Q が真ならば $P \to Q$ は真である」となる。また P と Q に関連性がある必要はない。対象言語における記号はただの記号にすぎず、自然言語と完全に対応している必要はない。論理学におけるトートロジー等を日本語にそのまま置き換えると違和感を感じるのはこのためである。形式的体系の記号を扱う際は、形式的な思考に徹する必要がある。

ϕ が文である場合は全ての個体の割り当て関数 s に対して $M(\phi, s) = 1$ であるか、全ての個体の割り当て関数 s に対して $M(\phi, s) = 0$ であるかのいずれかであることが示される。したがって文の真偽を以下のように定義する。

定義 1.10 (真偽, モデル)

ϕ は M において真 (true)$\Leftrightarrow$ 任意の M の個体の割り当て関数 s に対して $M(\phi, s) = 1$

ϕ は M において偽 (false)$\Leftrightarrow$ 任意の M の個体の割り当て関数 s に対して $M(\phi, s) = 0$

ϕ が M において真であるとき、M は ϕ のモデルであるという。また、M が文の集合 Σ の全ての要素のモデルであるとき、単に M は Σ のモデルであるという。

定義 1.11 (論理的帰結、論理的同値)

Σ を論理式の集合とし、ϕ を論理式とする。Σ に属する全ての論理式 ψ に対して $M(\psi, s) = 1$ であるような任意の構造 M と M の個体の割り当て関数 s が $M(\phi, s) = 1$ を満たすとき、ϕ は Σ の論理的帰結であるといい、$\Sigma \models \phi$ と書く。また、$\{\phi\} \models \psi$ かつ $\{\psi\} \models \phi$ を満たすとき、ϕ と ψ は論理的同値であるという。

1.3　1 階述語論理における構文論

次に、構文論を構成する。

まず、証明とは何かを考える。証明とは公理と有限の推論から到達できる文に対して、その有限な操作のことである。一回述語論理においても、命題論理と同じように、適切に論理公理と推論規則を導入することで、論理公理から推論規則を使って導出される論理式全体と恒真理論式全体が一致するようにできる。形式的証明の定義は等価で様々な方法がある。ここで述べるのは Hilbert 流の形式的証明である。

定義 1.12 (論理的公理 A)

全ての数学理論に共通して成り立つと仮定されている理論式である。

・命題論理のトートロジー (恒真な論理式、恒真式) に含まれる全ての命題記号を任意の 1 階の論理式で置き換えて得られる全ての論理式

・量化記号に関する公理

(1) $\forall x\phi \to \phi[x|t]$

(2) $\phi[x|t] \to \exists x\phi$

・等号に関する公理 (言語が等号を持つ場合)

(3) $\forall x(x = x)$

(4) $x = y \to (Pt_1 \ldots t_n \to Pu_1 \ldots u_n)$ (P は n 変数述語記号で、u_i は t_i における x のいくつかを y で置き換えて得られる項)

$\phi[x|t]$ は変数 x を全て項 t で置き換えて得られる論理式を表す。この代入に関する定義は後に述べる。

論理的公理の「命題論理のトートロジー (恒真な論理式、恒真式) に含まれる全ての命題記号を任意の 1 階の論理式で置き換えて得られる全ての論理式」は命題論理で知られているトートロジーを形式的に (ただの記号の配列として) 公理として輸入しているということである。Hilbert 流の公理の選び方は一通りではない。様々な文献で調べてもそれぞれ違っていている。もう面倒だから命題論理の全てのトートロジーを公理にぶっこんでしまっているこの公理の定義が一番私にとっては馴染みやすい。これの都合がいいところは、馴染みあるトートロジーを「どうせ公理に入ってるっしょ？」っていう感じで飲み込めるところである。例えば「$A \to A$」を公理として採用しているものもあれば、公理には採用せず別の公理から定理として証明しているものもあ

る。しかしここでトートロジーと言っているのは命題論理の意味論におけるトートロジーのような”記号の配列”を意味しているだけで、構文論においては公理がトートロジーかどうかなんてどうでも良い。公理として選ばれる論理式は、実は恒真であること知られているが、これは公理等を選定した後に”示される”ことであって、公理を採用する段階では前提とする記号の配列が選ばれるだけなので恒真 (トートロジー) かどうかは形式的には問わない。重要なのは証明の途中で公理とトートロジーを混同しないようにしなければならないということである。また、実はトートロジーは定理になることが知られている。

意味論では充足による真偽という意味が重要であった、しかしここで展開している構文論は記号の配列であり、ϕ や $\neg$、$A \to B$ などの意味や真偽トートロジーなどはどうでも良い。形式的な記号の配列と形式的な演繹によって定理を導いていく。数理論理学 (記号論理学) では、こうして構築された独立な視点 (意味論と構文論) をメタ言語によってつなぎ合わせたときにどのようなことが言えるかを考えたいのである。構文論の構成において意味を考えるのはナンセンスである。しっかり区別されたい。

定義 1.13 (数学的公理 (公準))

取り扱う数学理論に固有な公理である。数学的公理の集合を、その数学理論に対する (狭義の) 公理系という。

定義 1.14 (推論規則 A)

(1) モーダス・ポーネンス (MP)

ϕ と $(\phi \to \psi)$ から ψ を導出できる規則である。

$\{\phi, (\phi \to \psi)\} \vdash \psi$

このとき、ψ は $\phi, (\phi \to \psi)$ からのモーダス・ポネンスによる導出であるという。

(2) 全称化

x が変数のとき、$(\phi \to \psi[x|a])$ から $(\phi \to \forall x\psi)$ を導出できる規則である。

$\{\phi \to \psi[x|a]\} \vdash (\phi \to \forall x\psi)$

このとき、$(\phi \to \forall x\psi)$ は $(\phi \to \psi[x|a])$ からの全称化による導出であるという。

(3) 特殊化

x が変数の時、$(\psi[x|t] \to \phi)$ から $(\exists x\psi \to \phi)$ を導出できる規則である。

$\{\psi[x|t] \to \phi\} \vdash (\exists x\psi \to \phi)$ このとき、$(\exists x\psi \to \phi)$ は $(\psi[x|t] \to \phi)$ からの特殊化による導出であるという。

記号 $\vdash$ は"導出できる"ということを表すメタ記号である。詳細については後述する形式的証明、定理の部分を参照して欲しい。

上記で述べた形式体系は以下の論理的公理 B と推論規則 B と同値であることが知られている。ただし、数学的公理は同じものを考えるか、簡単のために考えない。この場合、$(\phi \lor \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \to \psi)$, $(\phi \land \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \to \neg\psi)$, $\exists x\phi \Leftrightarrow \neg(\forall x((\neg\phi)))$, $(\phi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$ と定義する。

定義 1.15 (論理的公理 B)

(1) $\phi \to (\psi \to \phi)$

(2) $(\phi \to (\psi \to \theta) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$

(3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \phi)$

・量化記号に関する公理

(4) $\forall x\phi \to \phi[x|t]$

・等号に関する公理 (言語が等号を持つ場合)

(5) $\forall x(x = x)$

(6) $x = y \to (Pt_1 \dots t_n \to Pu_1 \dots u_n)$ (P は n 変数述語記号で、u_i は t_i における x のいくつかを y で置き換えて得られる項)

定義 1.16 (推論規則 B)

(1) モーダス・ポーネンス (MP)

ϕ と $(\phi \to \psi)$ から ψ を導出できる規則である。

$\{\phi, (\phi \to \psi)\} \vdash \psi$

このとき、ψ は $\phi, (\phi \to \psi)$ からのモーダス・ポネンスによる導出であるという。

(2) 全称化

x が変数のとき、$(\phi \to \psi[x|a])$ から $(\phi \to \forall x\psi)$ を導出できる規則である。

$\{\phi \to \psi[x|a]\} \vdash (\phi \to \forall x\psi)$

このとき、$(\phi \to \forall x\psi)$ は $(\phi \to \psi[x|a])$ からの全称化による導出であるという。

正確に言うと、「$(\phi \lor \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \to \psi)$, $(\phi \land \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \to \neg\psi)$, $\exists x\phi \Leftrightarrow \neg(\forall x((\neg\phi)))$, $(\phi \leftrightarrow \psi) \Leftrightarrow (\phi \to \psi) \land (\psi \to \phi)$ と定義する」のように、「 $\Leftrightarrow$ 」を用いて上記のように"定義する"と明言すると混乱を招く恐れがあるかもしれない。なぜなら上記の定義の $\Leftrightarrow$ を $\leftrightarrow$ で置き換えたものが命題論理におけるトートロジーであり、A の場合には論理的公理 A の一番最初の公

理中にこれらが含まれている。したがって、「$** \Leftrightarrow *$ と定義する」は「$** \Leftrightarrow *$ の $\Leftrightarrow$ を $\leftrightarrow$ にしたものである $** \leftrightarrow *$ を公理中に含める。」という意味である。このように考えないと、何故論理的公理 B では $(\phi \vee \psi) \Leftrightarrow (\neg\phi \to \psi)$ のように $\Leftrightarrow$ というメタ記号を用いているのに、論理的公理 A の最初の公理に含まれているこれらの公理は $(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \to \psi)$ のように対象言語の $\leftrightarrow$ で表されているのかということになってしまう。したがって厳密には論理的公理 B は論理的公理 B' のように書くべきである。

定義 1.17 (論理的公理 B')

(1) $\phi \to (\psi \to \phi)$

(2) $(\phi \to (\psi \to \theta) \to ((\phi \to \psi) \to (\phi \to \theta))$

(3) $(\neg\phi \to \neg\psi) \to ((\neg\phi \to \psi) \to \phi)$

(4) $(\phi \vee \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \to \psi)$

(5) $(\phi \wedge \psi) \leftrightarrow (\neg\phi \to \neg\psi)$

(6) $\exists x\phi \leftrightarrow \neg(\forall x((\neg\phi)))$

(7) $(\phi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow (\phi \to \psi) \wedge (\psi \to \phi)$

・量化記号に関する公理

(8) $\forall x\phi \to \phi[x|t]$

・等号に関する公理 (言語が等号を持つ場合)

(9) $\forall x(x = x)$

(10) $x = y \to (Pt_1 \ldots t_n \to Pu_1 \ldots u_n)$ (P は n 変数述語記号で、u_i は t_i における x のいくつかを y で置き換えて得られる項)

しかし、あんまこのように書いてしまうと A よりもスッキリしているようには見えないですね。

定義 1.18 (形式的証明、定理)

ϕ を論理式、Σ をある論理式の集合とする。Σ からの形式的証明 (formal proof) あるいは証明 (proof) とは、論理式の有限列 $(\phi_0, \cdots, \phi_n)$ で次を満たすものをいう。

(1) $\phi_n = \phi$

(2) n 以下の任意の自然数 k に対して、次のいずれかが成立する。

(i) $\phi_k \in \Sigma$

(ii) ϕ_k は論理公理である。

(iii) ある $i, j < k$ が存在し、ϕ_k は ϕ_i, ϕ_k からのモーダス・ポネンスによる導出である。

(iv) ある $i < k$ が存在し、ϕ_k は ϕ_i からの全称化による導出である。

(v) ある $i < k$ が存在し、ϕ_k は ϕ_i からの特殊化による導出である。(A の場合)

Σ からの ϕ の証明が存在するとき、ϕ は Σ から証明可能である、あるいは ϕ は Σ の定理 (theorem) であるといい、$\Sigma \vdash \phi$ と書く。

次に代入について厳密な定義を与える。

定義 1.19 (代入)

x を変数、t を項とする。項 u に対して、$u[x|t]$ を次のように再帰的に定義する。

(1) $x[x|t] = t$

(2) y が x と異なる変数ならば、$y[x|t] = y$

(3) c が定数記号ならば、$c[x|t] = c$

論理式 ϕ に対して、$\phi[x|t]$ を次のように再帰的に定義する。

(4) 原子論理式 $Pt_1 \ldots t_n$ に対しては、$(Pt_1 \ldots t_n)[x|t] = P(t_1)[x|t] \ldots (t_n)[x|t]$

(5) $(\neg\phi)[x|t] = (\neg\phi[x|t])$

(6) $(\phi \wedge \psi)[x|t] = (\phi[x|t] \wedge \psi[x|t])$

(7) $(\phi \vee \psi)[x|t] = (\phi[x|t] \vee \psi[x|t])$

(8) $(\phi \to \psi)[x|t] = (\phi[x|t] \to \psi[x|t])$

(9) $(\phi \leftrightarrow \psi)[x|t] = (\phi[x|t] \leftrightarrow \psi[x|t])$

(10) $(\forall x\phi)[x|t] = \forall x\phi$

(11) $(\exists x\phi)[x|t] = \exists x\phi$

(12) y が x と異なる変数ならば、$(\forall y\phi)[x|t] = \forall y\phi[x|t]$

(13) y と x が異なる変数ならば、$(\exists y\phi)[x|t] = \exists x\phi[x|t]$

次に ϕ が x について述べていることと、$\phi[x|t]$ が t について述べていることが同じであるということを意味する代入可能性について述べる。

定義 1.20 (代入可能性)

論理式 ϕ において項 t が変数 x に代入可能であるということを次のように再帰的に定義する。

(1) 原子式においては、常に t は x に代入可能である。

(2) $(\neg\phi)$ において t が x に代入可能 $\Leftrightarrow \phi$ において t が x に代入可能。

(3) $(\phi \wedge \psi)$ において t が x に代入可能 $\Leftrightarrow \phi$ と ψ において t が x に代入可能。

(4) $(\phi \vee \psi)$ において t が x に代入可能 $\Leftrightarrow \phi$ と ψ において t が x に代入可能。

(5) $(\phi \to \psi)$ において t が x に代入可能 $\Leftrightarrow \phi$ と ψ において t が x に代入可能。

(6) $(\phi \leftrightarrow \psi)$ において t が x に代入可能 $\Leftrightarrow \phi$ と ψ において t が x に代入可能。

(7) $\forall y \phi$ において t が x に代入可能 $\Leftrightarrow x \neq y$ または $x \notin \mathrm{fr}(\phi)$ または (ϕ において t が x に代入可能かつ t の中に y が現れない)。

(8) $\exists y \phi$ において t が x に代入可能 $\Leftrightarrow x \neq y$ または $x \notin \mathrm{fr}(\phi)$ または (ϕ において t が x に代入可能かつ t の中に y が現れない)。

最後に、意味論と構文論の関係を与える。文 ϕ が文の集合 Σ の論理的帰結であることと ($\Sigma \models \phi$)、ϕ が Σ の定理であること ($\Sigma \vdash \phi$) は意味論と構文論の二つの視点から全く別々に定義されてきた。両者を混同してはならない。しかし 1 階述語論理ではこの両者は一致する。つまり、論理的に正しいことは証明可能であり。証明可能なことは論理的に正しい。これは数学の論理を構成する上で嬉しいことである。

定義 1.21 (健全性、完全性)

文 ϕ と文の集合 Σ に対して、健全性とは、Σ の定理は全て Σ の論理的帰結であることである。

$\Sigma \vdash \phi \Rightarrow \Sigma \models \phi$

完全性とは 、Σ の論理的帰結は全て Σ の定理であることである。

$\Sigma \models \phi \Rightarrow \Sigma \vdash \phi$

1 階述語論理は健全かつ完全である。これは 1 階述語論理においては、証明可能である論理式は真であるということと、真である論理式は証明可能であるということである。

第 2 章
Mathematical Formulation

本章では数学的基礎について述べる。現代物理学で必要とされる数学的基礎をまとめたものである。公理的集合論、素朴集合論、代数構造、線形空間論、位相空間論、多様体論、微分幾何学、変分学の順に述べる。ただし、この章については書きたいことが多すぎるので随時更新していく。

2.1 集合

集合について述べる。本節を書くにあたって、Matsuzaka(1968) [3], Uchida(1986) [4], Kaneko(2010) [5], Nakahara(2000) [6] を参考にした。

素朴な定義では集合とは"ものの集まり"のことである。実際、数理論理学においても"ものの集まり"という概念はメタ言語的にすでに用いられている。しかし数理論理学における集合論の用語は形式的な体系を構成する上で便宜上用いたメタ用語であり、ここでいう集合論とは独立なものである。数理論理学は前章のように集合論なしで完全に形式化、定式化されている。しかしこの素朴な定義を単純に拡張し、所謂集合論とやらを構成することは、今日の公理的集合論に至るまでの数多くの問題や議論が起こる原因となる。ここではまず前章で述べた数理論理学を用いて集合論を形式的体系として構築する。しかし、本書の目的からすると公理的集合論によって種々の数学的な定式化をするのは非合理的なので、公理的集合論の体系を構成した後には、簡単のため素朴集合論の枠組みで記述していくことにする。

2.1.1　公理的集合論

定義 2.1 (集合 (公理的集合論))

集合とは、数学的対象 (Mathematical Object) のことである。

Cantor による「全ての数学的対象は集合によって定義される。」という集合一元論的な公理的観点を表現したものが上の定義である。以下では数理論理学 (1 階述語論理) によって公理的集合論を構築する。これによって上の定義の意味が理解される。

定義 2.2 (集合論の言語)

集合論の言語は以下のようになっている。

論理記号 (logical symbol)

(1) 変数 (個体変数): 適当に用意する。

(2) 結合記号: $\neg, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$

(3) 量化記号: $\forall, \exists$

(4) 補助記号: 括弧 (,)

非論理記号 (non-logical symbol)

(5) 述語 (関係) 記号: $\in, =$

(6) 関数記号: なし

(7) 定数記号: なし

公理的集合論では数学的公理 (公準) として次の ZFC 公理系を設ける。

公理 2.1 (ZFC 公理系)

ZF 公理系

(1) 外延性公理

$$\forall A \forall B (\forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B) \to A = B) \tag{2.1}$$

(2) 空集合の公理

$$\exists A \forall x (x \notin A) \tag{2.2}$$

(3) 対の公理

$$\forall x \forall y \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow (t = x \vee t = y)) \tag{2.3}$$

(4) 和集合の公理

$$\forall X \exists A \forall t (t \in A \leftrightarrow \exists x \in X (t \in x)) \tag{2.4}$$

(5) 無限公理

$$\exists A(\emptyset \in A \land \forall x \in A(x \cup \{x\} \in A)) \tag{2.5}$$

(6) 冪集合公理

$$\forall X \exists A \forall t(t \in A \leftrightarrow t \subseteq X)) \tag{2.6}$$

(7) 置換公理

$$\forall x \forall y \forall ((\psi(x,y) \land \psi(x,z)) \to y = z) \to \forall X \exists A \forall y(y \in A \leftrightarrow \exists x \in X \psi(x,y)) \tag{2.7}$$

(8) 正則性公理

$$\forall A(A \neq \emptyset \to \exists x \in A \forall t \in A(t \notin x)) \tag{2.8}$$

C 公理

(9) 選択公理

$$\forall X((\emptyset \in X \land \forall x \in X \forall y \in X(x \neq y \to x \cap y = \emptyset)) \to \exists A \forall x \in X \exists t(x \cap A = \{t\})) \tag{2.9}$$

この ZFC 公理系をもとに構文論的に議論を展開していくのが公理的集合論である。構文論的視点から議論を構築するため、上記の公理を満たす変数記号、つまり対象となる数学的対象全てが集合であるという形式的な立場をとっている。よって、$a \in b$ と書いたとき、素朴集合論的な立場からすると、b という何らかのものの集まり (集合) の中に要素 a が属していると解釈するが、公理的集合論では a も b も集合である。実際任意の数学的対象、例えば数字の 1 なども $\{\phi\}$ と解釈すれば集合と考えることができるのである。

2.1.2　素朴集合論

素朴集合論における集合の定義を述べる。

定義 2.3 (集合 (素朴集合論))

集合とは、対象の集まりのうち、以下の二つの条件を満たすものである。

(1) ある対象がその集合に入っているかが決定できる。

(2) その集合から二つの対象を取り出して、等しいか等しくないかを決定できる。

本ノートの性質上公理的集合論の言葉で記述していくのは不便であるし合理的でない。そこでここからは素朴集合論の言葉で述べていく。素朴集合論での結果は ZFC 公理系を公理系とする

公理的集合論から帰結されるので一般性は失われない。

定義 2.4 (冪集合)

X を任意の集合とする。その部分集合全体の作る集合系を X の冪集合といい、$\mathfrak{P}(X)$ と書く。

2.1.3　対応、写像

対応と写像について述べる。

まず対応の諸概念について述べる。

定義 2.5 (対応)

X, Y を集合とする。ある規則 Γ によって X の各元 x に対して 1 つの Y の部分集合 $\Gamma(x)$ が定められているとする。このとき、規則 Γ のことを X から Y への対応と呼ぶ。$\Gamma(x)$ を Γ による x の像と呼ぶ。また、X, Y をそれぞれ始集合、終集合と呼ぶ。Γ が X から Y への対応であることを $\Gamma : X \to Y$ と表す。

定義 2.6 (グラフ)

対応 $\Gamma : X \to Y$ について、直積 $X \times Y$ の部分集合 $\{(x, y) | x \in X, y \in Y\}$ を Γ のグラフといい、$G(\Gamma)$ と表す。$(x, y) \in G$ となる $y \in Y$ が少なくとも一つ存在するような $x \in X$ 全体の X の部分集合を Γ の定義域という。また、$(x, y) \in G$ となる $x \in X$ が少なくとも一つ存在するような $y \in Y$ 全体の Y の部分集合を Γ の値域という。

定義 2.7 (逆対応)

対応 $\Gamma : X \to Y$ について、$y \in \Gamma(x)$ であるような X の元 x 全体の X の部分集合を $\Gamma^{-1}(y)$ とすれば、Y から X への対応 Γ^{-1} が定まり、これを Γ の逆対応と呼ぶ。

次に写像の諸概念について述べる。

定義 2.8 (写像)

対応 $\Gamma : X \to Y$ は X の任意の元 x に対して、$\Gamma(x)$ が Y のただ一つの元からなる集合であるとき、特に写像という。

定義 2.9 (像)

$f(X) = \{y \in Y |$ ある $x \in X$ に対して $y = f(x)\} \subset Y$ を写像 f の像という。

定義 2.10 (逆像)

対応 $\Gamma : X \to Y$ が写像のとき、その逆対応を逆写像という。

定義 2.11 (単射、全射、全単射)

写像 $f: X \to Y$ が単射 $\leftrightarrow (x \neq x' \to f(x) \neq f(x'))$

写像 $f: X \to Y$ が全射 $\leftrightarrow (\forall y \in Y \exists x \in X(f(x) = y)$

(f が単射 $\wedge f$ が全射)$\leftrightarrow f$ が全単射

定義 2.12 (定数写像)

ある $p \in Y$ に対して $\forall x \in X, c: X \to Y, c(x) = p$ で定義される写像を定数写像という。

定義 2.13 (制限写像)

写像 $f: X \to Y$ が与えられたとき、定義域の部分集合 $A \subset X$ への制限が定義でき、$f|_A : X \to Y$ と表し、制限写像という。

定義 2.14 (合成写像)

二つの写像 $f: X \to Y, g: Y \to Z$ に対して $x \in X, (g \circ f)(x) = g(f(x)) \in Z$ で定まる写像 $g \circ f: X \to Z$ を f, g の合成写像という。また、写像の合成図式において、どの集合の間の写像も合成の仕方によらないとき、その図式を可換という。

定義 2.15 (包含写像、恒等写像)

$A \subset X$ とする。$\forall a \in A, i(a) = a$ で定義される写像 $i: A \to X$ を包含写像という。特に $A = X$ のときは、恒等写像といい、id_X などと書く。

定義 2.16 (逆写像)

写像 $f: X \to Y$ が全単射ならば、f^{-1} が定義でき、逆写像という。

定義により f^{-1} も全単射であり、$f \circ f^{-1} = id_Y$,$f^{-1} \circ f = id_X$ となる。

定義 2.17 (準同型写像、同型写像)

集合 X, Y に代数的演算が与えられているとする。もし写像 $f: X \to Y$ がこれらの演算を保つとき、f を準同型写像という。準同型写像が全単射のとき、写像 f を同型写像という。また、X, Y は同型であるといい、$X \cong Y$ と書く。

2.2　群、環、体

群、環、体について述べる。これらは集合に代数的演算を加えた代表的なものである。本節を書くにあたって、Nakahara(2000) [6], Hotta(1987) [7] を参考にした。

定義 2.18 (群の公理)

G を任意の集合とする。写像 $f : G \times G \to G$ が与えられ、次の 3 つの条件を満たすとき、(G, f) を群という。

(1) 結合法則 $\forall a, b, c (\in G (f(a, f(b, c)) = f(f(a, b), c)))$

(2) 単位元の存在 $\forall a \in G \exists e \in G (f(a, e) = f(e, a) = a)$ この e を単位元という。

(3) 逆元の存在 $\forall a \in G \exists a' \in G (f(a, a') = f(a', a) = e)$ この a' を a の逆元といい、a^{-1} と書く。

ここで写像 f を G の演算という。$\forall a, b \in G (f(a, b) = f(b, a))$ が成立するとき、G を Abel 群または可換群という。単位元と逆元の一意性は容易に証明される。

定義 2.19 (対称群)

集合 $I_n = \{1, \ldots, n\}$ に対して、I_n から I_n への全単射全体の集合であり、写像の合成を積とする群である。対称群の元を置換という。

定義 2.20 (環、体)

K を任意の集合とする。2 つの演算、和と積 (それぞれ $+$ と $\cdot$) が与えられ、次の 4 つの条件を満たすとき K を体という。

(1) K は和に関して可換群をなす。

(2) K は積に関して結合法則を満たす。

(3) $\forall a, b, c \in K (c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b)$

(4) 和に関する単位元を 0 と書くと、$K - \{0\}$ は積に関して群をなす。

また、(1) (3) を満たすとき集合 K を環という。環 K の積が可換なとき K を可換環といい、体 K が環として可換環であるとき可換体という。

2.3　ベクトル空間

ベクトル空間について述べる。本節を書くにあたって、Matsumoto(1988) [8], Nakahara(2000) [6], Saito(1966) [9] を参考にした。

定義 2.21 (ベクトル空間、線型空間)

体 K 上のベクトル空間 (線型空間)V とは、和とスカラー倍という 2 つの演算が定義された集合のことである。

V の元 (ベクトルという) は次の公理を満たす。

$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V, c, d \in K$, 1 は K の積に関する単位元.

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

(2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

(3) $\exists\mathbf{0}(\boldsymbol{u}+\mathbf{0}=\boldsymbol{u})$

(4) $\forall\boldsymbol{u}\exists(-\boldsymbol{u})(\mathbf{u}+(-\boldsymbol{u})=\mathbf{0})$

(5) $c(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=c\boldsymbol{u}+c\boldsymbol{v}$

(6) $(c+d)\boldsymbol{u}=c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{u}$

(7) $(cd)\boldsymbol{u}=c(d\boldsymbol{u})$

(8) $1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

定義 2.22 (一次従属、一次独立)

$\{\boldsymbol{v}_i\}(i=1,...,k)$ を k 個のベクトルからなる集合とする。等式

$$x_1\boldsymbol{v}_1+x_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+x_k\boldsymbol{v}_k=\mathbf{0} \tag{2.10}$$

が自明でない解、すなわちある i に対して $x_i\neq 0$ である解をもつとき $\{\boldsymbol{v}_i\}$ は一次従属であるという。また自明な解、すなわち任意の i に対して $x_i=0$ である解のみをもつとき $\{\boldsymbol{v}_i\}$ は一次独立であるという。

定義 2.23 (基底)

一次独立なベクトルの集合 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ が、ベクトル空間 V の基底であるとは、任意の元 $\boldsymbol{v}\in V$ が一意的に $\{\boldsymbol{e}_i\}$ の一次結合で、

$$\boldsymbol{v}=v^1\boldsymbol{e}_1+v^2\boldsymbol{e}_2+\cdots+v^n\boldsymbol{e}_n \tag{2.11}$$

と表されることである。スカラー $v^i\in K$ を基底 $\{\boldsymbol{e}_i\}$ に関する $\boldsymbol{v}$ の成分という。基底が n 個の元からなるとき、ベクトル空間 V の次元は n であるといい、$\mathrm{dim}V=n$ と書く。また、K 上の n 次元ベクトル空間を $V(n,K)$ と書く。

定義 2.24 (線型写像)

2 つのベクトル空間 V, W, a_1, $a_2\in K$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2\in V$ に対して、$f:V\to W$ が $f(a_1\boldsymbol{v}_1+a_2\boldsymbol{v}_2)=a_1f(\boldsymbol{v}_1)+a_2f(\boldsymbol{v}_2)$ を満たすとき、f を線型写像という。$W=K$ のとき線型写像を特に線型関数という。

線型写像はベクトルの和とスカラー倍を保つ準同型写像の例である。

定義 2.25 (像、核)

線型写像 f の像とは $f(V)\in W$, f の核とは $\{\boldsymbol{v}\in V|f(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}\}$ のことである。それぞれ

$\mathrm{Im}f, \mathrm{Ker}f$ と表す。

定義 2.26 (双対ベクトル)

ベクトル空間 $V(n, K)$ に対して、V 上の線型関数全体がなすベクトル空間を双対ベクトル空間といい、$V^*(n, K)$ と書く。双対ベクトル空間の元を双対ベクトルという。双対ベクトル空間内での二つの演算である和と積は、次式によって定義される。

$$(a_1 f_1 + a_2 f_2)(\boldsymbol{v}) = a_1 f_1(\boldsymbol{v}) + a_2 f_2(\boldsymbol{v}) \tag{2.12}$$

$\mathrm{dim}V^* = \mathrm{dim}V$ が成り立つ。

定義 2.27 (双対基底)

$$e^{*i}(\boldsymbol{e}_j) = \delta^i_j \tag{2.13}$$

によって定められる V^* の一つの基底 $\{e^{*i}\}$ を双対基底という。

定義 2.28 (引き戻し)

V, W をベクトル空間とする。線型写像 $f : V \to W$, 線型関数 $g \in w^* : W \to K$ に対して合成関数 $g \circ f$ は V 上の線型関数である。この $g \circ f$ を $f^* : g \mapsto f^*(g) = g \circ f$ による g の引き戻しという。

定義 2.29 (内積)

$V(m, K)$ をベクトル空間,$\{\boldsymbol{e}_i\}$ をその基底とする。$g : V \to V^*$ をベクトル空間の同型写像する。$\mathrm{dim}V^* = \mathrm{dim}V$ なので V と V^* の間には同型写像が存在するので、g は存在する。この同型写像によって 2 つのベクトルの間に次のように内積が定義される。

$$g(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) := \langle g\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle \tag{2.14}$$

ここで $\langle\rangle : V^* \times V \to K$ は V^*, V 間の内積であり、$V^* \ni f = f_i e^{*i}$, $V \ni \boldsymbol{v} = v^i \boldsymbol{e}_i$ に対して、

$$\langle f, \boldsymbol{v} \rangle = f(\boldsymbol{v}) := f_i e^{*i}(v^j \boldsymbol{e}_j) = f_i v^j e^{*i}(\boldsymbol{e}_j) = f_i v^i \tag{2.15}$$

と定義される。

定義 2.30 (テンソル)

p 個の双対ベクトルと q 個のベクトルを $\mathbb{R}$ へ写す多重線型写像

$$T : \overset{p}{\otimes} V^* \overset{q}{\otimes} V \to \mathbb{R} \tag{2.16}$$

を (p,q) 型テンソル T という。全ての (p,q) 型テンソルの集合は (p,q) 型テンソル空間といい、T^p_q と書く。

テンソル空間上の二つの演算を導入する。

定義 2.31 (テンソル積)

テンソル積は (p,q) 型、(p',q') 型の二つのテンソルから、$(p+p',q+q')$ 型のテンソルを導く演算で、次式で定義される。

$$\tau(\omega_1,\dots,\omega_p,\xi_1,\dots,\xi_{p'};u_1,\dots,u_q,v_1,\dots,v_{q'}) = \mu(\omega_1,\dots,\omega_p;u_1,\dots,u_q)v(\xi_1,\dots,\xi_{p'};v_1,\dots,v_{q'}) \tag{2.17}$$

定義 2.32 (縮約)

縮約は (p,q) 型のテンソルから、$(p-1,q-1)$ 型のテンソルを導く演算で、次式で定義される。$\{\boldsymbol{e}_i\},\{\boldsymbol{e}^{*i}\}$ はそれぞれベクトル空間の基底、双対基底である。

$$\tau(\dots,e^{*i},\dots;\dots,e_i,\dots) \tag{2.18}$$

2.4　複素関数論

複素関数論について述べる。当然この話も多様体論的視点から論じることができるが、ここでは初等的な複素関数論の視点からまとめる。特にラプラス変換、フーリエ変換に関する事項をまとめることを目指している。信号処理などの応用面で重要である。また星やブラックホールの準固有振動の解析においても役立つ。本節を書くにあたって、Imayoshi(1997) [10], Sugiura(1980) [11], Sugiura(1985) [12] を参考にした。

定義 2.33 (複素関数)

複素 1 次元数空間 $\mathbb{C}$ の開集合 $D\subset\mathbb{C}$ から、複素 1 次元数空間 $\mathbb{C}$ への写像

$$F: D\to\mathbb{C} \tag{2.19}$$

を複素関数という。

定義 2.34 (複素関数の実部と虚部)

複素関数 $F:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ は、$F: s\in\mathbb{C}\mapsto F(s)\in\mathbb{C}$ のように作用する。ここで $s=\sigma+i\omega\in\mathbb{C}$ と表し、

$$w = F(s) = u(\sigma,\omega)+iv(\sigma,\omega) \tag{2.20}$$

と表したとき、2 実変数実関数 u, v をそれぞれ $F(s)$ の実部、虚部という。

複素関数の極限、収束、連続性などは実関数と同じ形で定義される。複素関数の極限、収束に関しては次のように実関数の場合と同じ形で $\epsilon - \delta$ 論法によって定義される。

定義 2.35 (複素関数の極限、収束)
複素関数 $F(z)$ が $z \to a$ の極限で $t \in \mathbb{C}$ に収束することを次のように定義する。

$$\lim_{z \to a} F(z) = t \Leftrightarrow \forall \epsilon, \exists \delta (\forall z \in \mathbb{C}, 0 < |z - a| < \delta \Rightarrow |F(z) - t| < \epsilon) \tag{2.21}$$

(極限と収束の概念はセットなんですね。)
すると複素関数 $F(z)$ の連続性は次のように定義される。

定義 2.36 (複素関数の連続性)
複素関数 $F(z)$ が $z = a$ で連続であるとは、

$$\lim_{z \to a} F(z) = F(a) \tag{2.22}$$

を満たすことである。

実変数実数値関数における無限極限の議論を実変数複素数値関数に拡張するために実変数実数値関数の無限極限について復習する。

定義 2.37 (実変数実数値関数の無限極限における収束・発散)
(a, ∞) において定義される実変数実数値関数 $f(x)$ において、「x が限りなく大きくなると関数 $f(x)$ の値がある値 M に近づく」とき、「x が限りなく大きくなるとき $f(x)$ は M に収束する」といい、

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = M \Leftrightarrow \forall \epsilon \exists \delta > 0 (\forall x, x > \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \epsilon) \tag{2.23}$$

と定義する。
また「x が限りなく大きくなると関数 $f(x)$ の値も限りなく大きく (小さく) なる」とき、「x が限りなく大きくなるとき $f(x)$ は正 (負) の無限大に発散する」といい、

$$\forall K > (<) 0 \exists X > 0 (\forall x, x > X \Rightarrow f(x) > (<) K) \tag{2.24}$$

と定義する。
同様に $(-\infty, a)$ で定義される実変数実数値関数 $f(x)$ において、「x が限りなく小さくなると関数 $f(x)$ の値がある値 M に近づく」とき、「x が限りなく小さくなるとき $f(x)$ は M に収束す

る」といい、

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = M \Leftrightarrow \forall\epsilon\exists\delta < 0(\forall x, x < \delta \Rightarrow |f(x) - M| < \epsilon) \tag{2.25}$$

と定義する。

また「x が限りなく小さくなると関数 $f(X)$ の値も限りなく大きく (小さく) なる」とき、「x が限りなく小さくなるとき $f(x)$ は正 (負) の無限大に発散する」といい、

$$\forall K > (<)0\exists X < 0(\forall x, x < X \Rightarrow f(x) > (<)K) \tag{2.26}$$

と定義する。

実変数複素数値関数に対しても発散以外は同様に定義される。$||$ は複素関数の場合、複素数の絶対値を表している。

定義 2.38 (実変数複素数値関数の無限極限における収束)

(a, ∞) において定義される実変数複素数値関数 $F(x)$ において、「x が限りなく大きくなると関数 $F(x)$ の値がある値 M に近づく」とき、「x が限りなく大きくなるとき $F(x)$ は M に収束する」といい、

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = M \Leftrightarrow \forall\epsilon\exists\delta > 0(\forall x, x > \delta \Rightarrow |F(x) - M| < \epsilon) \tag{2.27}$$

と定義する。

同様に $(-\infty, a)$ で定義される実変数複素数値関数 $F(x)$ において、「x が限りなく小さくなると関数 $F(x)$ の値がある値 M に近づく」とき、「x が限りなく小さくなるとき $F(x)$ は M に収束する」といい、

$$\lim_{x\to -\infty} F(x) = M \Leftrightarrow \forall\epsilon\exists\delta < 0(\forall x, x < \delta \Rightarrow |F(x) - M| < \epsilon) \tag{2.28}$$

と定義する。

定義 2.39 (複素関数の微分)

$D \subset \mathbb{C}$ 上で定義された 1 価連続な関数 $F(z)$ を考える。$z_0 \in \mathbb{D}$ において h が任意の近づけ方で 0 に近づくとき、

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z_0 + h) - F(z_0)}{h} \neq \infty \tag{2.29}$$

が存在するとき、$F(z)$ は z_0 で微分可能であるという。これを

$$F'(z)|_{z_0}, \quad \left.\frac{dF(z)}{dz}\right|_{z_0} \tag{2.30}$$

のように表し、z_0 における微分係数という。z における微分係数を再び z の関数と考えれば導関数 $F'(z), dF/dz(z)$ が得られる。

定義 2.40 (正則関数)

$F(z)$ が D の各点で微分可能であるとき、$F(z)$ は D で正則であるといい、D で正則な関数を正則関数という。

定理 2.1

正則関数は無限階微分可能である。つまり、$F(z)$ が D 上で正則関数ならば $F'(z)$ も正則関数である。

つまり複素関数が正則であることを仮定すると、その関数は各点で何回でも微分することができるのである。すなわち、実変数関数とは違って微分可能な回数 C^n 級を考慮する必要がなく、複素関数においては正則であるかどうか、つまりある開集合の全ての点で 1 回微分可能であるかどうかのみが問題である。 このような 1 階微分可能ならば何階でも微分可能であるという性質は、複素関数のもつ大きな特徴である。

定義 2.41 (Cauchy-Riemann の方程式)

正則関数はその実部と虚部に対して次の Cauchy-Riemann の方程式を満たす。

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma} = \frac{\partial v}{\partial \omega} \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \sigma} = -\frac{\partial u}{\partial \omega} \tag{2.32}$$

つまり正則関数の実部と虚部は独立ではない。

定義 2.42 (複素関数の積分)

複素空間 $\mathbb{C}$ 上の曲線 (実変数複素数値関数)

$$c : [0, 1] \to D \subset \mathbb{C} \tag{2.33}$$

に対して複素関数 $F(z)$ の積分が次式のように定義される。

$$\int_c F(z)dz = \int_0^1 F(c(t))\frac{dc}{dt}dt. \tag{2.34}$$

ただし、

$$\frac{dc}{dt} = \frac{d(Re(c))}{dt} + i\frac{d(Im(c))}{dt} \tag{2.35}$$

である。

積分値はパラメータの取り方によらず、c の像のみで決まる。

定理 2.2

$c(t) = x(t) + iy(t), F(c(t)) = u(x, y) + iv(x, y)$ と表示すると、

$$\begin{aligned}\int_c F(z)dz &= \int_0^1 (u + iv)(\frac{dx}{dt} + i\frac{dy}{dt})dt \\ &= \int_0^1 u\frac{dx}{dt}dt - \int_0^1 v\frac{dy}{dt} + i\left(\int_0^1 v\frac{dx}{dt} + \int_0^1 u\frac{dy}{dt}dt\right) \\ &= \int_c udx - \int_c vdy + i\left(\int_c vdx + \int_c udy\right)\end{aligned} \tag{2.36}$$

のように線積分で表される。

定理 2.3

複素積分は以下の条件を満たす。

(1) 線型性

$$\int_c ((aF + bG)dz = a\int_c Fdz + b\int_c Gdz \tag{2.37}$$

(2) 加法性

$$\int_{c+c'} Fdz = \int_c Fdz + \int_{c'} Fdz \tag{2.38}$$

(3) 評価

$$\left|\int_c Fdz\right| \leq \sup_{z\in c}|F(z)| \times \mathrm{Length}(c) \tag{2.39}$$

定理 2.4

積分定理 $F(z)$ が $D \subset \mathbb{C}$ で正則であれば、D 内の (単純閉曲線)c に沿った $F(z)$ の積分はゼロになる。積分路は c によって囲まれる領域を左に見る正の向きにとるとする。

$$I = \int_c F(z)dz = 0 \tag{2.40}$$

実関数における Taylor 展開の拡張である Laurent 展開を定義する。

定理 2.5

$0 < r < R < \infty$ として円環領域 $D = \{s|r < |z - z_0| < R\}$ を考える。$F(z)$ が D で正則であれ

ば、$F(z)$ は一意的に、

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \tag{2.41}$$

のように展開できる。ここで、

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{F(s)}{(z-z_0)^{k+1}} dz, \quad k = 0, \pm 1, \dots \tag{2.42}$$

であり、c は D 内の z_0 を囲む閉曲線である。

定義 2.43 (Laurent 展開)

上述のように関数 $F(z)$ の展開

$$F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (z-z_0)^k \tag{2.43}$$

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{F(s)}{(z-z_0)^{k+1}} dz, \quad k = 0, \pm 1, \dots \tag{2.44}$$

を Laurent 展開という。

第二項は Taylor 展開の項で、第一項は主要部と呼ばれる。

Taylor 展開、Laurent 展開は一意に定まるので応用上は次式を用いて Laurent 展開を求めることが多い。

(1) $\frac{1}{1-z} = 1 + z + \cdots + z^n + \dots \quad (|z| < 1)$

(2) $\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - \cdots + (-1)^n z^n + \dots \quad (|z| < 1)$

(3) 既知の展開式の利用 (eg. $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n$ (e^z の展開式の利用))

ここで関数 $F(z)$ の無限遠における Laurent 展開を考える。$F(z)$ の無限遠点 $z_0 = \infty$ における Laurent 展開は、変換 $z = 1/w$ によって、$G(w) := F(1/w) = F(z)$ の原点周りの Laurent 展開として定義される。このように複素平面における無限遠点は、変換変換 $z = 1/w$ の原点によって導入される。複素関数 $F(z)$ が原点を中心とする円環領域 $0 \leq R \leq |z| \leq \infty$ で正則であるとき、$G(w)$ は $0 < |w| < 1/R$ で正則である。したがって、$G(w)$ の $z_0 = 0$ における Laurent 展開を考えて、

$$G(w) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k w^k, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{G(w)}{z^{n+1}} dw \tag{2.45}$$

が成り立つ。ここで積分路 c は $0 < |w| < 1/R$ を満たし、原点を囲む正の向きの単純閉曲線である。w を z に戻して次の無限遠における Laurent 展開が得られる。

定義 2.44 (無限遠における Laurent 展開)

円環領域 $0 \leq R \leq |z| \leq \infty$ で正則である複素関数 $F(z)$ に対して、無限遠点 $z_0 = \infty$ における Laurent 展開が次式のようになる。

$$F(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \tag{2.46}$$

展開係数は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{G(w)}{w^{n+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c_\infty} \frac{F(z)}{1/z^{n+1}} \frac{dw}{dz} dz \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{c_\infty} \frac{F(z)}{z^{-n+1}} dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c'} \frac{F(z)}{z^{-n+1}} dz \end{aligned} \tag{2.47}$$

ここで積分路 c は $0 < |w| < 1/R$ で、w 平面の原点を囲む正の向の単純閉曲線であり、積分路 c_∞ は $R < |z| < \infty$ で、原点を囲む単純閉曲線であり、無限遠点を左に見ながら進む向きである。積分路 c' は $R < |z| < \infty$ で、原点を囲む単純閉曲線であり、無限遠点を右に見ながら進む向きである。

定義 2.45 (孤立特異点)

$z_0 \neq \infty$ とする。$F(z)$ が $0 < |z - z_0| < R$ では正則であるが、$|z - z_0| < R$ では正則でないとき、$z = z_0$ を $F(z)$ の孤立特異点という。

定義 2.46 (除去可能特異点、極、孤立真性特異点)

孤立特異点 z_0 における Laurent 展開の形から孤立特異点は次の 3 つに分類される。(1) 除去可能特異点

$F(z)$ の z_0 における Laurent 展開に主要部がない。すなわち、

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2.48}$$

と展開されるとき、$F(z)$ は z_0 でも正則になるように拡張できるので、z_0 は見かけだけの特異点であり除去可能特異点という。

(2) 極

z_0 における Laurent 展開に、負のベキ項が有限個ある。すなわち、

$$F(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \tag{2.49}$$

と展開されるとき $(0 < k < \infty, c_{-k} \neq 0)$、$z_0$ で $F(z)$ は k 位の極を持つといい、k は $F(z)$ の z_0 における極の位数という。

$F(z)$ の z_0 における極の位数が k のとき、

$$\mathrm{ord}(F, z_0) = -k \tag{2.50}$$

と書く。

(3) 孤立真性特異点

z_0 における Laurent 展開に、負のベキ項が無限個あるとき、z_0 を孤立真性特異点という。

定義 2.47 (零点)

$z = z_0$ が $F(z)$ の零点 (zero) であるとは、

$$F(z_0) = 0 \tag{2.51}$$

を満たすことである。

零点 $z = z_0$ が $F(z)$ の n 位の零点 (zero) であるとは、$F(z)$ が $z = z_0$ の近傍 D で正則であり、D で正則な関数 $G(z)$ を用いて

$$F(z) = (z - z_0)^n G(z), G(z_0) \neq 0 \tag{2.52}$$

と表されることである。

定義 2.48 (有理関数)

$F(z)$ が多項式の比、

$$F(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_0}{z^n + a_{n-1} + \cdots + a_0}, \quad b_m \neq 0 \tag{2.53}$$

の形で表されるとき、$F(z)$ を有理関数 (rational function) という。

代数学の基本定理より、n 次多項式は n 個の零点を持つので、$F(z)$ は n 個の極と m 個の零点を持つ。

$$\lim_{z \to \infty} z^{n-m} F(z) = b_m \neq 0 \tag{2.54}$$

であるから、$n > m$ のとき $z = \infty$ は $F(z)$ の $n-m$ 位の零点であり、$m = n$ のときは正則点、$n < m$ のときは $m-n$ 位の極である。したがって無限遠点まで含めれば、$F(z)$ は $\max(m, n)$ 個の極と零点を持つ。

定義 2.49 (有理型関数)

D で有限個または可算無限個の極を除いて正則な関数を有理型 (meromorphic) 関数という。

定義 2.50 (留数)

$F(z)$ が $0 < |z - z_0| < R$ で正則であれば、z_0 の周りで Lauren 展開が可能である。このとき $(z-z_0)^{-1}$ の係数 a_{-1} を z_0 における $F(z)$ の留数 (residue) といい、$\mathrm{Res}[F(z), z_0]$ あるいは単に $\mathrm{Res}(z_0)$ と書く。

定理 2.6 (留数定理)

閉曲線 c によって囲まれる領域を D とする。$F(z)$ が D 内の有限個の孤立特異点 $z_1, \cdots, z_n$ を除いて正則であるとする。このとき、次式が成立する。

$$\frac{1}{2\pi i}\int_c F(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}[F(z), z_i] \tag{2.55}$$

これを留数定理という。

定理 2.7 (留数の求め方)

留数の求め方をいくつか紹介する。(1) 定義にしたがって計算

Laurent 展開の定義とその係数の定義より、

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_c F(s)dz \tag{2.56}$$

(2) Laurent 展開の一意性を利用して求める。

(i) $z = z_0$ が $F(z)$ の 1 位の極の場合:

$$\mathrm{Res}(z_0) = \lim_{z \to z_0} [(z - z_0)F(z)] \tag{2.57}$$

(ii) $z = z_0$ が $F(z)$ の n 位の極の場合:

$$\mathrm{Res}(z_0) = \frac{1}{(n-1)!}\lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}[(z - z_0)^n F(z)] \tag{2.58}$$

(i)(ii) は Laurent 展開の具体形を用いれば容易に示される。(1) によって留数を求めることは応用上は少なく、Laurent 展開の一意性を用いた (2) によって求めることが多い。

無限遠点における留数を定義する。

定義 2.51 (無限遠点の留数)

無限遠点 $z_0 = \infty$ における留数を、変換 $w = 1/z$ による w 平面の原点における留数と定義する。つまり $F(z)$ が $R < |z| < \infty$ で正則のとき、この領域内で無限遠点 $z_0 = \infty$ に対して正の向きに回る積分路 c' で $F(z)$ を積分したものを $2\pi i$ で割ったものを $z_0 = \infty$ における $F(z)$ の留数と定義する。よって原点に対して正の向きに回る積分路を c として、

$$\mathrm{Res}(\infty) = -\frac{1}{2\pi i}\int_c F(s)ds \tag{2.59}$$

定理 2.8 (無限遠点の留数の求め方)

(1) $F(z)$ が $z = \infty$ で 1 位の零点を持つとき、

$$\mathrm{Res}(\infty) = -\lim_{z\to\infty} zF(z) \tag{2.60}$$

となる。

(ここで注意したいのは、無限遠における Laurent 展開の係数を用いると、$\mathrm{Res}(\infty) = -a_1$ と留数が定義されている点に注意されたい。)

(2) $F(z)$ が $z = \infty$ で位数が 2 以上の零点を持つとき、

$$\mathrm{Res}(\infty) = 0 \tag{2.61}$$

(3) $F(z) = M(z)/N(z)$ が非プロパーな有理関数 $(m > n)$ のとき、

$$F(z) = Q(z) + \frac{R(z)}{N(z)} \tag{2.62}$$

と表される。ここで多項式 $Q(z), R(z)$ は $\mathrm{deg}Q(z) = m - n, \mathrm{deg}R(z) < n$ を満たす。したがって、

$$\mathrm{Res}(\infty) = -\lim_{z\to\infty}\frac{zR(z)}{N(z)} \tag{2.63}$$

となる。

2.5 Laplace 変換/Fourier 変換

ラプラス変換、フーリエ変換について述べる。本節を書くにあたって、Sugiura(1980) [11], Sugiura(1985) [12], Katayama(2002) [13] を参考にした。

定義 2.52 (片側 Laplace 変換)

$[0, \infty)$ で定義された区分的に連続な時間関数 $f(t)$ に対して、積分

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt \tag{2.64}$$

が、ある $s \in \mathbb{C}$ に対して収束するとき、

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2.65}$$

を $f(t)$ の Laplace 変換という。$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)],\ F(s) = \mathfrak{L}[f(t)](s)$ と略記する。

Laplace 変換を $F(s) = \mathfrak{L}[f(t)],\ F(s) = \mathfrak{L}[f(t)](s)$ と略記したり、$x(t)$ の Laplace 変換を単に $X(s), x(s)$ と表記したりする。

$t = 0$ で関数 $f(t)$ がインパルス $\delta(t)$ を含むような場合では、

$$\mathfrak{L}_+[f(t)](s) := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{+\epsilon}^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2.66}$$

$$\mathfrak{L}_-[f(t)](s) := \lim_{\epsilon\to 0}\int_{+\epsilon}^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2.67}$$

は一致しない。本書では L_- を片側 Laplace 変換の厳密な定義とする。

定義 2.53 (可積分)

実変数複素数値関数 $F(t)$ が区間 $[0, \infty)$ で可積分とは、

$$\int_0^\infty F(t)dt \tag{2.68}$$

が収束することである。実変数複素数値関数の無限遠における収束の定義を用いてより正確に言うと、

$$\exists M \in \mathbb{C}, \lim_{T\to\infty}[\int_0^T F(t)dt] = M \tag{2.69}$$

が成り立つことである (ここで、下限が 0 であることは本質ではなく一般には $a \in \mathbb{R}$ で良い)。

定義 2.54 (絶対可積分)

実変数複素数値関数 $F(t)$ が区間 $[0, \infty)$ で絶対可積分とは、

$$\int_0^\infty |F(t)|dt < \infty \tag{2.70}$$

を満たすこと、つまり考えている区間での絶対値の積分が有限になることである。極限の定義を用いてより正確に言うと、

$$\exists M, \lim_{T\to\infty}[\int_0^T |F(t)|]dt = M < \infty \tag{2.71}$$

が成り立つことである。

定理 2.9 (Cauchy の収束条件)

$\lim_{t\to\infty} F(t)$ が存在する。$\Leftrightarrow \forall\epsilon > 0, \exists K > 0, \forall t_1 > K, \forall t_2 > K, |F(t_1) - F(t_2)| < \epsilon$

proof) 文字打つのがしんどいので $\Rightarrow$ のみを証明する。存在する極限を $\lim_{t\to\infty} F(t) = M$ とする。極限と収束の定義より、$\epsilon/2$ に対して、$K > 0$ が存在して、任意の $t_1 > K$ に対して、

$$|F(t_1) - M| < \epsilon/2 \tag{2.72}$$

が成り立つ。同様に任意の $t_2 > K$ に対して、

$$|F(t_2) - M| < \epsilon/2 \tag{2.73}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} |F(t_1) - F(t_2)| &= |F(t_1) - M + M - F(t_2)| \\ &\leq |F(t_1) - M| + |M - F(t_2))| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon \end{aligned} \tag{2.74}$$

となる。ゆえに $\forall\epsilon > 0, \exists K > 0, \forall t_1 > K, \forall t_2 > K, |F(t_1) - F(t_2)| < \epsilon$ が導かれた。

定理 2.10 (絶対可積分と可積分の関係)

上述の実変数複素数値関数 $F(t)$ の広義積分について、絶対可積分 $\Rightarrow$ 可積分が成り立つ。

proof) 証明には Cauchy の条件を用いる。絶対可積分ならば、$\lim_{T\to\infty}\int_0^T |F(t)|dt$ が存在する。Cauchy の条件よりこれは次と同値である。

$$\forall\epsilon > 0, \exists K > 0, \forall t_1 > K, \forall t_2 > K, \left|\int_0^{t_1} |F(t)|dt - \int_0^{t_2} |F(t)|dt\right| < \epsilon \tag{2.75}$$

したがって、

$$\int_{t_1}^{t_2} |F(t)|dt < \epsilon \tag{2.76}$$

が成り立つ。ゆえに、

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |F(t)|dt < \epsilon \tag{2.77}$$

が成り立つ。したがって、$\int_{t_1}^{t_2} F(t)dt$ についても Cauchy の収束条件を満たすので収束する。よって命題が示された。

この定理によって絶対収束が示せれば収束することになるので非常に収束性の確認が楽になる。ただ十分条件なので、収束するからと言って絶対収束するとは限らない。しかし、実際に Laplace 変換等を求める際は絶対収束を示すだけで収束を確認できることがほとんどだと思う。Laplace 変換の際は、絶対値をとってしまうので絶対収束性は e^{-st} の s の実部のみに依存する。Laplace 変換の絶対収束を明示的に表しておくと、次式のようになる。

$$\exists M, \int_{0}^{\infty} |f(t)e^{-st}|dt = M < \infty \tag{2.78}$$

定理 2.11 (指数型関数)

定数 a、$M > 0$ に対して、実変数実数値関数 $f(t)$ が

$$|f(t)| \leq Me^{at}, t \geq 0 \tag{2.79}$$

を満たせば、$F(s)$ は半平面 $\mathrm{Re}[s] > a$ において絶対収束する。

この式を満足する関数を位数 a の指数型関数という。

proof) 自明

定理 2.12

$f(t), t \geq 0$ の Laplace 変換 $F(s)$ が $s = s_0$ で収束すれば、半平面 $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ において収束する。また、$F(s)$ が $s = s_0$ で絶対収束すれば、閉半面 $\mathrm{Re}(s) \geq \mathrm{Re}(s_0)$ において絶対収束する。

proof) 自明ではないが頑張ればできる。

定理 2.13

Laplace 変換 $F(s)$ が $s = s_0$ で絶対収束すれば、半平面 $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ において一様収束する。

proof) 上の定理の証明から証明される。

定義 2.55 (絶対収束座標/(条件) 収束座標)

$|f(t)e^{-st}|$ が可積分となる $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ の下限を σ_a とおくと、$F(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \sigma_a$ では絶対収束し、$\mathrm{Re}(s) < \sigma_a$ では絶対収束しない。このような σ_a を Laplace 変換の絶対収束座標という。

$\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ が収束する $\sigma = \mathrm{Re}(s)$ の下限を σ_c とおくと、$F(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$ では収束し、

$\mathrm{Re}(s) < \sigma_c$ では収束しない。このような σ_c を Laplace 変換の (条件) 収束座標という。

定理 2.14

絶対収束座標 σ_a と (条件) 収束座標 σ_c に対して、

$$\sigma_c \leq \sigma_a \tag{2.80}$$

という関係が成立する。

これは絶対収束性が収束性のための十分条件であることと合致している。経験上基本的な関数では $\sigma_c = \sigma_a$ が成り立つ。中には $\sigma_c \neq \sigma_a$ となる例ももちろんあります。

Laplace 変換 $F(s)$ は収束域において正則である。

定義 2.56 (Laplace 変換の正則性)

Laplace 変換 $F(s)$ の収束座標 σ_c に対して、$F(s)$ は $\mathrm{Re}(s) > \sigma_c$ において正則であり、次式が成り立つ。

$$\frac{d^k}{ds^k}F(s) = \int_0^\infty (-t)^k f(t) e^{-st} dt, \quad k \in \mathbb{N} \tag{2.81}$$

proof) 片山 (2002)”新版フィードバック制御の基礎”p19 参照

ここでいくらかの初等的な関数に対して、その Laplace 変換の結果を与えておく。

$$f(t) = \delta(t), \quad F(s) = 1 \tag{2.82}$$

$$f(t) = 1(t), \quad F(s) = \frac{1}{s} \tag{2.83}$$

$$f(t) = t, \quad F(s) = \frac{1}{s^2} \tag{2.84}$$

$$f(t) = t^n, \quad F(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \tag{2.85}$$

$$f(t)e^{-at}, \quad F(s) = \frac{1}{s+a} \tag{2.86}$$

$$f(t) = t^n e^{-at}, \quad F(s) = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}} \tag{2.87}$$

$$f(t) = \sin bt, \quad F(s) = \frac{b}{s^2+b^2} \tag{2.88}$$

$$f(t) = \cos bt, \quad F(s) = \frac{s}{s^2+b^2} \tag{2.89}$$

$$f(t) = e^{-at}\sin bt, \quad F(s) = \frac{b}{(s+a)^2+b^2} \tag{2.90}$$

$$f(t) = e^{-at}\cos bt, \quad F(s) = \frac{s}{(s+a)^2+b^2} \tag{2.91}$$

ここで Laplace 変換の重要な性質についてまとめる。

これらは具体的な Laplace 変換の形を求めるときにも便利である。上述した初等的な関数に対する Laplace 変換の具体形とここで挙げる Laplace 変換の性質を用いれば、多くの関数の Laplace 変換を容易に求めることができる。

定理 2.15 (Law 1 線型性)

$F_i(s) = \mathfrak{L}[f_i(t)](s), \mathrm{Re}[s] > \sigma_i (i = 1, 2)$ が存在すれば、$\forall c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ に対して、

$$\mathfrak{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)](s) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \tag{2.92}$$

定理 2.16 (Law 2 t 空間移動)

$f(t) = 0, t < 0$ と仮定すると、

$$\mathfrak{L}[f(t-a)1(t)](s) = e^{-as}F(s), \quad a > 0 \tag{2.93}$$

$$\mathfrak{L}[f(t+a)1(t)](s) = e^{as}F(s) - e^{as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt, \quad a > 0 \tag{2.94}$$

が成り立つ (収束域は元の関数の収束域と一緒)。

定理 2.17 (Law 3 s 空間移動)

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t}f(t)](s) = F(s-\alpha), \quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_f + \mathrm{Re}[\alpha] \tag{2.95}$$

ここで、σ_f は $F(s)$ の収束座標である。

定理 2.18 (Law 4 導関数)

$f(t)$ を位数 a の指数型関数であり、$f'(t)$ が $t \geq 0$ で区分的に連続な関数であるとする。このとき、

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right](s) = sF(s) - f(0-), \quad \mathrm{Re}(s) > a \tag{2.96}$$

が成り立つ。

定理 2.19 (Law 5 高階導関数)

$f(t)$ が n 階微分可能であり、$f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ が Laplace 変換可能であれば、

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0-) - \cdots - s f^{(n-2)}(0-) - f^{(n-1)}(0-) \tag{2.97}$$

が成り立つ。

定理 2.20 (Law 6 時間積分)

$f(t)$ を位数 a の指数型関数で区分的に連続な関数とする。このとき、

$$\mathfrak{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau) d\tau\right](s) = \frac{1}{s} F(s) \tag{2.98}$$

が成り立つ。ここで、収束域は $\mathrm{Re}[s] > \max(0, a)$ である。

定理 2.21 (Law 7 合成積)

$f(t), g(t)$ の合成積 (convolution) を、

$$h(t) = \int_{0}^{t} f(\tau) g(t-\tau) d\tau =: (f * g)(t) \tag{2.99}$$

と表す。$F(s), G(s)$ が $\mathrm{Re}[s] \geq \sigma_a$ で絶対収束すれば、$H(s)$ は $\mathrm{Re} \geq \sigma_a$ で絶対収束し、

$$H(s) = \mathfrak{L}[h(t)](s) = F(s)G(s) \tag{2.100}$$

が成り立つ。

これらの定理、性質によって t 領域における各種の演算が、s 領域では代数的四則演算に置き換わる。

定理 2.22 (Law 8 初期値定理)

$f(t)$ を指数型関数とする。このとき $\lim_{t\to 0+} f(t)$ が存在すれば、

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0+), \quad s \in \mathbb{R} \tag{2.101}$$

が成り立つ。

定理 2.23 (Law 9 最終値定理)

$f(t)$ が任意の区間 $[0, T], T > 0$ で積分可能で、かつ $f(\infty)$ が存在すれば、

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty), \quad s \in \mathbb{R} \tag{2.102}$$

が成り立つ。

ここからは逆 Laplace 変換について述べる。

定理 2.24

$[0,\infty)$ 上の区分的に連続か関数 $f_1(t), f_2(t)$ に対して、

$$\mathfrak{L}[f_1(t)] = \mathfrak{L}[f_2(t)], \mathrm{Re}[s] > \sigma_0 \tag{2.103}$$

が成り立つならば、$f_1(t), f_2(t)$ は不連続点を除いて一致する。

定理 2.25 (逆 Laplace 変換)

$f(t)$ の Laplace 変換 $F(s)$ が $\mathrm{Re}[s] > \sigma_a$ において絶対収束すれば、$c > \sigma_a$ に対して、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{-st}ds = \begin{cases} \frac{1}{2}\{f(t+0)+f(t-0)\}, & t>0 \\ \frac{1}{2}f(0+), & t=0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{2.104}$$

が成り立つ。この左辺を逆 Laplace 変換という。

上の定理は実は $F(s)$ が $\mathrm{Re}[s] > \sigma_c$ で (条件) 収束するとしても定理は成り立つらしい (布川 (1974)"制御と振動の数学")。

次に逆 Laplace 変換の複素積分を実行するための定理を与える。

定理 2.26

$F(s)$ は $\mathrm{Re}[s] > \sigma_c$ で収束し、$O(|s|^{-k}), k < 0$ であるとする。$\mathrm{Re}[s] < \sigma_c$ に存在する $F(s)$ の極を $s_i, i = 1, \cdots, n$ とすると、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{-st}ds = \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Res}[F(s)e^{st}, s=s_i], & t>0 \\ 0, & t<0 \end{cases} \tag{2.105}$$

が成り立つ。ここで、$c > \sigma_c$ である。

定理 2.27

上の定理の仮定のもとで、$s_i, i = 1, \cdots, n$ が $F(s)e^{st}$ の n_i 位の極ならば、

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n_i-1)!}\lim_{s\to s_i}\left\{(\frac{d}{ds})^{n_i-1}[(s-s_i)^{n_i}F(s)e^{st}]\right\}, \quad t>0 \tag{2.106}$$

が成り立つ。

これは n_i 位の極の留数計算から明らかである。

定理 2.28 (Heaviside の展開定理)

$F(s)$ を有理関数とする。

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}, \quad n > m \tag{2.107}$$

$N(s), D(s)$ は互いに素とする。(1) 分母多項式が $D(s) = (s - s_1)\ldots(s - s_n), \quad s_i \neq s_k, i \neq k$ のように因数分解できるとすると、

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{N(s_i)}{D'(s_i)} e^{s_i t}, \quad t > 0 \tag{2.108}$$

が成り立つ。

(2) $s = s_i$ が $F(s)$ の n_i 位の極、つまり $D(s) = (s-s_1)^{n_1}\ldots(s-s_r)^{n_r}, n = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ であるとすると、

$$f(t) = \left(C_{11} + C_{12}t + \cdots + \frac{C_{1n_1}}{(n_1-1)!}t^{n_1-1}\right)e^{s_1 t} + \ldots$$
$$\left(C_{r1} + C_{r2}t + \cdots + \frac{C_{rn_1}}{(n_r-1)!}t^{n_r-1}\right)e^{s_r t} \tag{2.109}$$

$$C_{ik} = \frac{1}{(n_i-k)!}\lim_{s\to s_i}\left\{\frac{d}{ds})^{n_i-k}[(s-s_i)^{n_i}F(s)]\right\} \tag{2.110}$$

が成り立つ。

2.6　位相空間

位相空間について述べる。本節を書くにあたって、Matsuzaka(1968) [3], Uchida(1986) [4] を参考にした。

定義 2.57 (位相)

S を 1 つの空でない集合とする。S の部分集合系 $\mathfrak{O}$ が次の 3 つの条件を満たすとき、$\mathfrak{O}$ は S に 1 つの位相構造を定める、または $\mathfrak{O}$ は S における 1 つの位相であるという。

(O1) $S \in \mathfrak{O} \wedge \emptyset \in \mathfrak{O}$

(O2) $O_1 \in \mathfrak{O}, O_2 \in \mathfrak{O} \to O_1 \cap O_2 \in \mathfrak{O}$

(O3) $\forall\lambda \in \Lambda(O_\lambda \in \mathfrak{O}) \to \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ ここで λ は任意の有限または無限集合で、添数集合という。

定義 2.58 (位相空間)

1 つの位相 $\mathfrak{O}$ が与えられた集合 S、つまり組み $(S, \mathfrak{O})$ を位相空間という。

位相空間の位相が明らかな場合は、省略することがある。また記述の簡便性のために位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ が与えられたときに、その位相 (ここでは $\mathfrak{O}$) を $\mathfrak{O}(S)$ と表記する。

定義 2.59 (密着位相、離散位相)

位相空間の定義から明らかなように、$\mathfrak{O}_* = \{\emptyset, S\}, \mathfrak{O}^* = \mathfrak{P}(S)$ は位相になる。それぞれ密着位相、離散位相といい、それらを位相とする位相空間をそれぞれ密着空間、位相空間という。

定義 2.60 (開集合)

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ に対して、$\mathfrak{O}$ に属す S の部分集合を開集合という。

定義 2.61 (内部 (開核)、内点)

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ と部分集合 $M \subset S$ に対して、M に含まれるような開集合全体の和集合 M^i を M の内部 (または開核) という。内部の元を内点という。

(O3) より、$M^i \in \mathfrak{O}$ であり、M^i は M に含まれる”最大の開集合”となる。

定義 2.62 (閉集合)

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ において、$A \in \mathfrak{P}(S)$ が $(S, \mathfrak{O})$ の閉集合 $\leftrightarrow A^c = S - A \in \mathfrak{O}$

定義 2.63 (閉包 (触集合、触点)

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$ と部分集合 $M \subset S$ に対して、M を含むような閉集合全体の共通部分 M^a を M の閉包 (または触集合) という。閉包の元を触点という。

開集合の定義と de Morgan の法則より、閉包は閉集合であり、M^a は M を含む”最小の閉集合”となる。

定義 2.64 (外部、外点)

M の補集合の内部 $M^e = (M^{ci} = M^{ac})$ を M の外部という。外部の元を外点という。

定義 2.65 (境界、境界点)

M の閉包と M の内部との差、$M^f = M^a - M^i$ を M の境界という。境界の元を境界点という。

定義 2.66 (集積点、孤立点)

$x \in S$ が、$M - \{x\}$ の触点であるとき、つまり $x \in (M - \{x\})^a$ の時、x は M の集積点であるという。

$x \in M$ かつ x が M の集積点でないとき、x は M の孤立点であるという。

定義 2.67 (近傍)

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$

S の部分集合 U が点 x の近傍 $\Leftrightarrow x$ が U の内点

定義 2.68 (開近傍)

位相空間 $(S, \mathfrak{O})$

S の部分集合 U が点 x の開近傍 $\Leftrightarrow U$ が x を含む開集合

x を含む開集合は全て x の近傍になるためこのように定義されている。

定義 2.69 (連続写像)

2 つの位相空間 $(S, \mathfrak{S}), (T, \mathfrak{T})$ 間の写像 $f : S \to T$ が連続写像 $\leftrightarrow \forall O \subset \mathfrak{T}(f^{-1}(O) \subset \mathfrak{S})$

定義 2.70 (同相写像 (homeomorphism))

2 つの位相空間 S, T 間の写像 $f : S \to T$ が連続かつ全単射、その逆写像も連続 $\leftrightarrow$ f を同相写像という。

定義 2.71 (Hausdorff 空間)

位相空間 S の異なる 2 点 x, y に対して、x の開近傍 U と y の開近傍 V で $U \cap V = \emptyset$ となるものが存在するとき、S を Hausdorff 空間という。

2.7　多様体

多様体の基礎について述べる。本節を書くにあたって、Matsumoto(1988) [8], Hawking(1973) [14], Wald(2010) [15] を参考にした。

定義 2.72 (多様体 (manifold))

C^r 級n 次元多様体 $\mathscr{M}$ は、位相空間 $(\mathscr{M}, \mathfrak{O}(\mathscr{M}))$ と C^r アトラス (atlas)$\{\mathfrak{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ の組み $((\mathscr{M}, \mathfrak{O}(\mathscr{M})), \{\mathfrak{U}_\alpha, \phi_\alpha\})$ である。アトラスはチャート (chart) の集合である。チャートとは $\mathfrak{U}_\alpha \in \mathfrak{O}(\mathscr{M})$ と、局所座標系と呼ばれる同相写像 $\phi_\alpha : \mathfrak{U}_\alpha \to \mathfrak{O}_\alpha \in \mathfrak{O}(\mathbb{R}^n)$ の組み $(\mathfrak{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ であり、次の二つの条件 (1),(2) を満足する。

(1)

$$\mathscr{M} = \bigcup_{\alpha} \mathfrak{U}_\alpha \tag{2.111}$$

(2) $\mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \neq \emptyset \rightarrow$

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : \phi_\beta(\mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta) \rightarrow \phi_\alpha(\mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta) \tag{2.112}$$

が $\phi_\beta(\mathfrak{U}_\beta) \in \mathfrak{O}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \phi_\alpha(\mathfrak{U}_\alpha) \in \mathfrak{O}(\mathbb{R}^n)$ の C^r 級写像になる。

定義 2.73 (局所座標近傍)

多様体 $(\mathscr{M}, \{\mathfrak{U}_\alpha, \phi_\alpha\})$ に対して、$\mathfrak{U}_\alpha$ を局所座標近傍 (または単に座標近傍) という。$p \in \mathfrak{U}_\alpha \rightarrow$ p の座標は $\phi_\alpha(p) \in \mathbb{R}^n$ である。

物理的には多様体とは、抽象的な位相空間 $\mathscr{M}$ に対して ϕ_α という写像によって座標が導入され、あたかも局所的には $\mathbb{R}^n$ と考えられるような空間である。

定義 2.74 (アトラスの両立 (compatible))

与えられた C^r アトラス $\{\mathfrak{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$ に対して、別のある C^r アトラス $\{\mathfrak{V}_\alpha, \theta_\alpha\}$ が両立できるとは、$\{\{\mathfrak{U}_\alpha, \phi_\alpha\} \cup \{\mathfrak{V}_\alpha, \theta_\alpha\}\}$ が C^r アトラスであることである。

両立性が同値関係を定めることは容易に証明できる。

定義 2.75 (微分構造)

同値関係である両立性の同値類を微分構造という。

定義 2.76 (極大アトラス (maximal atlas))

ある与えられたアトラスに対して両立できるアトラスを全て含むアトラスを極大アトラスという。

本書ではこれ以降、多様体のアトラスには全て極大アトラスを考える。

定義 2.77 (境界を持つ多様体)

境界を持つ C^r 級多様体の定義は、多様体の定義で $\mathbb{R}^n$ を $\frac{1}{2}\mathbb{R}^n$ としたものである。

定義 2.78 (境界)

境界を持つ多様体 $\mathscr{M}$ の境界 $\partial\mathscr{M} \subset \mathscr{M} \leftrightarrow (\forall x \in \partial\mathscr{M} \leftrightarrow \phi_\alpha(x) \in \partial(\frac{1}{2}\mathbb{R}^n))$

定義 2.79 (向き付け可能 (orientable))

多様体 $((\mathscr{M}, \mathfrak{O}(\mathscr{M})), \{\mathfrak{U}_\alpha, \phi_\alpha\})$ が向き付け可能 $\leftrightarrow \mathfrak{U}_\alpha \cap \mathfrak{U}_\beta \neq \emptyset \rightarrow |\partial x^\mu / x'^\nu| > 0$

ここで、$(x^1, \cdots, x^n), (x'^1, \cdots, x'^n)$ はそれぞれ $\mathfrak{U}_\alpha, \mathfrak{U}_\beta$ の局所座標である。

以降特に言及しない限り、本書では全ての多様体 $\mathscr{M}$ は、パラコンパクト、連結、C^∞、Hausrorff、境界なしの多様体とする。

定義 2.80 (C^0 級写像)

$\mathscr{M}, \mathscr{N}$ をそれぞれ m 次元、n 次元の C^r 級多様体とする。

$f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ が C^0 級写像 $\leftrightarrow$ f: 連続写像

定義 2.81 (C^s 級写像)

$\mathscr{M}, \mathscr{N}$ はそれぞれ m 次元、n 次元の C^r 級多様体、連続写像 $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$、$1 \leq s \leq r$ とする。$p \in \mathscr{M}, f(p) \in \mathscr{N}$ であり、$p \in \mathfrak{U}$ となる $\mathscr{M}$ のチャートを $(\mathfrak{U}, \phi), f(p) \in \mathfrak{V}$ となる $\mathscr{N}$ のチャートを $(\mathfrak{V}, \psi)$ とする。$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ が各成分について C^s 級であるとき、点 $p \in \mathscr{M}$ において f は C^s 級であるという。

$\mathscr{M}$ の各点で $f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ が C^s 級であるとき、f を C^s 級写像という。

定義 2.82 (C^s 級微分同相写像 (C^sdiffeomorphism))

$\mathscr{M}, \mathscr{N}$ を C^r 級多様体とする。$f : \mathscr{M} \to \mathscr{N}$ が C^s 級微分同相写像 $\leftrightarrow$(f は全単射)$\wedge$(f, f^{-1} はともに C^s 級写像)

定義から明らかなように C^0 級微分同相写像は同相写像である。

写像の特別なものとして関数と曲線について述べる。

定義 2.83 (C^s 級関数)

関数 $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^n$ が C^s 級写像であるとき C^s 級関数という $(0 \leq s \leq r)$。

以降、対象としている多様体の C^r 級関数全体の集合を $\mathfrak{F}^r$ と書き、C^∞ 関数全体の集合を $\mathfrak{F}^\infty = \mathfrak{F}$ と書くことにする。また、C^r 級の r の具体的な値が問題にならない場合は $r = \infty$ と簡単のためにするので、基本的には $\mathfrak{F}$ を考えることになる。

定義 2.84 (関数の和と定数倍)

$\mathfrak{F}^r$ において C^r 級関数の和と定数倍を次式で定義する。

$$\forall f, g \in \mathfrak{F}, p \in \mathscr{M}((f+g)(p) := f(p) + g(p)) \tag{2.113}$$

$$\forall f, a \in \mathbb{R}, p \in \mathscr{M}((af)(p) := a(f(p)) \tag{2.114}$$

定義 2.85 (曲線)

$\mathbb{R}$ の開区間 (a,b) から C^r 級多様体 $\mathscr{M}$ への C^s 級写像 $\lambda:(a,b)\to\mathscr{M}$ を C^s 級曲線という $(0\le s\le r)$。

定義 2.86 (方向微分)

点 $p\in\mathscr{M}$ における方向微分 $v:\mathfrak{F}^r\to\mathbb{R}$ とは次の 2 つの条件を満たす写像である。

$$\forall f,g\in\mathfrak{F},\forall a,b\in\mathbb{R}(v(af+bg)=av(f)+bv(g)) \tag{2.115}$$

$$\forall f,g\in\mathfrak{F}(v(fg)=f(p)v(g)+g(p)v(f)) \tag{2.116}$$

$p\in\mathscr{M}$ の $\mathfrak{F}^r$ に対する方向微分全体の集合を $D_p^r(\mathscr{M})$ と表す。

方向微分はその定義から、f,g が十分小さな開近傍上で一致すれば、$v(f)=v(g)$ が成立することが示される。

また、方向微分の定義によると、$h\in\mathfrak{F}$ が定数関数のとき、つまり $h(q)=c,\forall q\in\mathscr{M}$ であるとき、$v(h)=0$ である。なぜなら、方向微分の定義の条件の二つ目から $v(h^2)=2cv(h)$ だが、一つ目の条件から $v(h^2)=v(ch)=cv(h)$ となるからである。

定理 2.29

$D_p^r(\mathscr{M})$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間である。ここで、ベクトル空間 $D_p^r(\mathscr{M})$ 上の和と定数倍はそれぞれ、

$$\forall u,v\in D_p^r(\mathscr{M}),f\in\mathfrak{F}^r((u+v)(f):=u(f)+v(f)) \tag{2.117}$$

$$\forall u\in D_p^r(\mathscr{M}),a\in\mathbb{R},f\in\mathfrak{F}^r((av)(f):=a(v(f)) \tag{2.118}$$

と定義される。

定義 2.87 (座標基底)

$p\in\mathscr{M}$ を含む座標近傍 $(U;x_1,\dots,x_n)$ を一つ固定して考える。p のまわりで定義された C^r 級関数 f に、p における x_i 方向の偏微分係数

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\in\mathbb{R} \tag{2.119}$$

を対応させる写像を、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p:f\mapsto\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \tag{2.120}$$

と書く。これは方向微分の条件を満たしていることが確かめられ、この方向微分を座標基底という。

定義 2.88 (接ベクトル、接ベクトル空間)

座標基底

$$(\partial/\partial x^1)|_p, \ldots, (\partial/\partial x^n)|_p \tag{2.121}$$

によって張られる $D_p^r(\mathscr{M})$ の n 次元部分ベクトル空間を接ベクトル空間といい、$T_p(\mathscr{M})$ と表す。接ベクトル空間の元、すなわち座標基底の線形結合を接ベクトルという。

$(\partial/\partial x^j)|_p$ は線型独立であることが容易に示される。もし、これらが線型独立でないとすると、$V^j(\partial/\partial x^j)|_p = 0$ を満たす少なくとも一つが non-zero な V^j が存在することになる。しかし、この関係式を x^k に作用させると、

$$V^j \partial x^k/\partial x^j = V^k = 0 \tag{2.122}$$

が全ての k に対して成立してしまう。これは矛盾であるため、$(\partial/\partial x^1)|_p$ が線型独立であることが示された。

定義 2.89 (曲線に接するベクトル)

多様体 $\mathscr{M}$ 上の C^k 曲線を $\lambda(t)$ とする。点 $\lambda(t_0)$ で C^1 曲線 $\lambda(t)$ に接するベクトル $(\partial/\partial t)|_{t_0}$ とは、C^1 級関数 $f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$ を実数 $(\partial f/\partial t)_\lambda|_{t_0}$ に写す写像 (演算子) である。

曲線に接するベクトルは次式を満たす。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_\lambda\bigg|_t f = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_\lambda\bigg|_t = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}\{f(\lambda(t+s) - f(\lambda(t))\} \tag{2.123}$$

曲線に接するベクトルは接ベクトルの定義を満たすので (上のように座標基底の線型結合で表せるので)、接ベクトルである。曲線のパラメータ t は定義から明らかに $(\partial/\partial t)_\lambda t = 1$ を満たす。
逆に線型結合 $V^j(\partial/\partial x^j)|_p, V^j \in \mathbb{R}$ が p で与えられると、$\lambda(t)$ を $x^j(\lambda(t)) = x^j(p) + tV^j, t \in [-\epsilon, \epsilon]$ と定義することで、この曲線の p における接ベクトルは $V^j(\partial/\partial x^j)|_p$ となる。つまり、p における任意の接ベクトルが、その点での曲線に接するベクトルと一致するような曲線を構成することができる。
一般には $D_p^\infty(\mathscr{M}) \neq T_p(\mathscr{M})$ である。しかし”C^∞”多様体のときには $D_p^r(\mathscr{M}) = T_p()$ が成り立つ。すなわち任意の方向微分は接ベクトルであり、逆もまた成り立つ。

接ベクトルは p におけるあらゆる方向を表すものと考えることができる。なぜなら、上で述べたように与えられた接ベクトルが曲線に接するベクトルになるような曲線を考えることができるので、その接ベクトルはこの曲線の方向を指している矢印のようなものであるという描像を得る

ことができるのである。また $\boldsymbol{V} \in T_p(\mathscr{M})$ の' 長さ' は $\boldsymbol{V}(t) = 1$ となる曲線パラメータ t によって決められていると考えることができる。$V(t)$ は関数 t に $\boldsymbol{V} \in T_p(\mathscr{M})$ を作用させて得られた実数である。パラメータ t と言っているのは、関数 t のある値という意味である。

$\{\boldsymbol{E}_a\}$ が p における任意のある n 個の線型独立なベクトルであるとする。このとき任意のベクトル $\boldsymbol{V} \in T_p$ は $\boldsymbol{v} = V^a\boldsymbol{E}_a$ と表すことができる。ここで $\{V^a\}$ は p におけるベクトルの基底 $\{\boldsymbol{E}_a\}$ に関する $\boldsymbol{V}$ の成分である。特に $\{\boldsymbol{E}_a\}$ に座標基底 $(\partial/\partial x^i)|_p$ を選ぶと、成分 $V^i = V(x^i) = (dx^i/dt)|_p$ は $\boldsymbol{V}$ 方向の座標関数 x^i の微分になることがわかる。

次に 1 形式 (共変ベクトル) を導入する。

定義 2.90 (1 形式, 共変ベクトル (one-form, covariant vector))
p における 1 形式, 共変ベクトル (one-form, covariant vector)$\boldsymbol{\omega}$ とは、T_p 上の実数値線型関数である。$\boldsymbol{X} \in T_p$ であるとき、$\boldsymbol{\omega}$ の作用を $< \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} > \in \mathbb{R}$ と書く。ここで $\boldsymbol{\omega}$ の線型性は、$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{X}, Y \in T_p(\mathscr{M})$ に対して

$$< \boldsymbol{\omega}, \alpha\boldsymbol{X} + \beta\boldsymbol{Y} > = \alpha < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} > + \beta < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{Y} > \tag{2.124}$$

が成り立つことを意味する。

与えられた 1 形式 $\boldsymbol{\omega}$ に対して $< \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} > = \text{const.}$ となる T_p の部分空間は線型である。したがって p における 1 形式を T_p における平面のペアと考えることができる。もし $< \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} > = 0$ ならば $\boldsymbol{X}$ は一つ目の平面内にあると考え、$< \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} > = 1$ ならば $\boldsymbol{X}$ は二つ目の平面に接触しているといった具合に考えるのである。

p でベクトルの基底 $\{\boldsymbol{E}_a\}$ が与えられると、任意のベクトル $\boldsymbol{X}$ をその i 成分 X^i に移す 1 形式 $\boldsymbol{E}^i$ を考えることで一意な n 個の 1 形式の集合 $\{\boldsymbol{E}_a\}$ が得られる。特に $< \boldsymbol{E}^a, \boldsymbol{E}_b > = \delta^a{}_b$ であり、これを $\{\boldsymbol{E}_a\}$ の定義にしても良い。

1 形式の和と定数倍を、任意の 1 形式 $\boldsymbol{\omega}, \eta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1, \boldsymbol{X} \in T_p$ に対して

$$< \alpha\boldsymbol{\omega} + \beta\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{X} > = \alpha < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} > + \beta < \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{X} > \tag{2.125}$$

と定義する。p における任意の 1 形式 $\boldsymbol{\omega}$ は、$\omega_i = < \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{E}_i >$ とすることで $\boldsymbol{\omega} = \omega_i\boldsymbol{E}^i$ と表すことができる。したがって全ての 1 形式の集合は上で定義した和と定数倍について p における n 次元ベクトル空間をなす。

定義 2.91 (双対空間 (dual space))

p において全ての 1 形式がなす n 次元ベクトル空間を接空間 T_p の双対空間 (dual space)T_p^* と呼ぶ。

定義 2.92

1 形式の基底 $\{\boldsymbol{E}^a\}$ をベクトルの基底 $\{\boldsymbol{E}_a\}$ に対する双対基底 (dual basis) という。

任意の $\boldsymbol{\omega} \in T_p^*, \boldsymbol{X} \in T_p$ に対して、$< \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} >$ を次のように $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X}$ の成分で計算することができる。

定理 2.30

$$< \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{X} >=< \omega_i \boldsymbol{E}^i, X^i \boldsymbol{E}_j >= \omega_i X^i \tag{2.126}$$

定義 2.93

$\mathscr{M}$ 上の関数 f に対して p における 1 形式 df を次のように定義する。$\forall \boldsymbol{X}$ に対して、

$$< df, \boldsymbol{X} >= \boldsymbol{X}(f). \tag{2.127}$$

df を f の微分 (differential) という。

定理 2.31

$(x^1, \ldots, x^n)$ を局所座標とする。これらの微分 $(dx^1, \ldots, dx^n)$ は基底 $(\partial/\partial x^1, \ldots, \partial/\partial x^n)$ に双対な 1 形式の基底をなす。

証明は容易で関数の微分の定義より、

$$< dx^i, \partial/\partial x^j >= \partial x^i/\partial x^j = \delta^i{}_j \tag{2.128}$$

が成立するためである。

定理 2.32

基底 $(dx^1, \ldots, dx^n)$ を用いて任意の関数 df を表すと、

$$df = (\partial f/\partial x^i) dx^i \tag{2.129}$$

となる。

証明は両辺を任意のベクトルに作用させれば容易に行える。

もし df が non-zero ならば、$f = \text{const.}$ の表面は $(n-1)$ 次元 多様体になる。$< df, \boldsymbol{X} >= 0$ を満たす全てのベクトル $\boldsymbol{X}$ からなる T_p の部分空間は、p を通る $f = \text{const.}$ の曲面内における

全ての曲線に接するベクトルを含んでいることになる。

p におけるベクトルの空間 T_ps 個と 1 形式の空間 T_p^*r 個から、その直積集合を考えることができる。

$$\Pi_r^s = T_p^* \times T_p^* \times \cdots \times T_p^* \times Tp \times T_p \times \cdots \times T_p \tag{2.130}$$

つまりベクトルと 1 形式の順序付きの集まり $(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s)$ の集合である。ここで $\boldsymbol{Y}$ はそれぞれが任意のベクトルであり、$\boldsymbol{\eta}$ はそれぞれが任意の 1 形式である。

定義 2.94 (テンソル (tensor))

p における (r,s) 型のテンソル (tensor of type (r,s)) とは Π_r^s 上の多重線型性関数である。$\boldsymbol{T}$ を p における (r,s) 型のテンソルとすると、$(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s) \in \Pi_r^s$ への作用は、

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s) \in \mathbb{R} \tag{2.131}$$

である。多重線型性とは例えば次のように各スロットにおける線型性を意味する。$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \boldsymbol{X}, Y \in T_p$ に対して、

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \alpha\boldsymbol{X} + \beta\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_2 \ldots, \boldsymbol{Y}_s)\\ &\qquad \alpha\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}_2, \ldots, \boldsymbol{Y}_s) + \beta(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}, \boldsymbol{Y}_2, \ldots, \boldsymbol{Y}_s).\end{aligned} \tag{2.132}$$

定義 2.95 (テンソル空間)

p における (r,s) 型のテンソルの集合をテンソル空間といい、$T_s^r(p)$ と表す。

$$T_s^r(p) = \underbrace{T_p \otimes \cdots \otimes T_p}_{rfactors} \otimes \underbrace{T_p^* \otimes \cdots \otimes T_p^*}_{sfactors} \tag{2.133}$$

p における (r,s) 型のテンソルの和と定数倍をそれぞれ次式で定義する。$\forall \boldsymbol{T}, T' \in T_s^r(p), \boldsymbol{Y}_i \in T_p, \boldsymbol{\eta}^j \in T_p^*, \alpha \in \mathbb{R}$ に対して、

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}')(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s)\\ &\qquad = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s) + \boldsymbol{T}'(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s)\end{aligned} \tag{2.134}$$

$$(\alpha\boldsymbol{T})(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s) = \alpha\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^r, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_s) \tag{2.135}$$

この和と定数倍についてテンソル空間 $T_s^r(p)$ は $\mathbb{R}$ 上の n^{r+s} 次元ベクトル空間になる。

特に $T_0^1(p) = T_p, T_1^0(p) = T_p^*$ である。

定義 2.96 (テンソル積)

$\boldsymbol{S} \in T_s^r(p), \boldsymbol{T} \in T_q^p(p)$ に対して、テンソル積 $\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T} \in T_{s+q}^{r+p}(p)$ を次式で定義する。$(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{r+p}, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_{s+q}) \in \Pi_{r+p}^{s+q}$ に対して、

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{S} \otimes \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{r+p}, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_{s+q}) \in \Pi_{r+p}^{s+q} \\ &= \boldsymbol{S}(\boldsymbol{\eta}^1, \ldots, \boldsymbol{\eta}^s, \boldsymbol{Y}_1, \ldots, \boldsymbol{Y}_r)\boldsymbol{T}(\boldsymbol{\eta}^{s+1}, \ldots, \boldsymbol{\eta}^{s+q}, \boldsymbol{Y}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{Y}_{r+p}). \end{aligned} \tag{2.136}$$

定理 2.33

$\{\boldsymbol{E}_a\}, \{\boldsymbol{E}^a\}$ をそれぞれ T_p, T_p^* の双対な基底とする。 このとき、

$$\{\boldsymbol{E}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{E}_{a_r} \otimes \boldsymbol{E}^{b_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{E}^{b_s}\} \quad (a_i, b_j = 1\ n) \tag{2.137}$$

は $T_s^r(p)$ の基底になる。

定義 2.97 (テンソルの成分)

任意のテンソル $\boldsymbol{T} \in T_s^r(p)$ は基底 $\{\boldsymbol{E}_a\}, \{\boldsymbol{E}^a\}$ を用いて

$$\boldsymbol{T} = T^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} \boldsymbol{E}_{a_1} \otimes \cdots \otimes \boldsymbol{E}_{a_r} \otimes \boldsymbol{E}^{b_1} \otimes \boldsymbol{E}^{b_s} \tag{2.138}$$

と表現される。ここで、$\{T^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s}\}$ は、$\boldsymbol{T}$ の成分である。

$$T^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}^{a_1}, \ldots, \boldsymbol{E}^{a_r}, \boldsymbol{E}_{b_1}, \ldots, \boldsymbol{E}_{b_s}). \tag{2.139}$$

定理 2.34

p におけるテンソルの代数を成分で計算すると以下のようになる。

$$(\boldsymbol{T} + \boldsymbol{T}')^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} = \boldsymbol{T}^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} + \boldsymbol{T}'^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s}. \tag{2.140}$$

$$(\alpha \boldsymbol{T})^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} = \alpha \boldsymbol{T}^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} \tag{2.141}$$

$$(\boldsymbol{T} \otimes \boldsymbol{T}')^{a_1 \ldots a_{r+p}}{}_{b_1 \ldots b_{s+q}} = \boldsymbol{T}^{a_1 \ldots a_r}{}_{b_1 \ldots b_s} \boldsymbol{T}'^{a_{r+1} \ldots a_{r+p}}{}_{b_{s+1} \ldots b_{s+q}} \tag{2.142}$$

もし $\{\boldsymbol{E}_{a'}\}, \{\boldsymbol{E}_{a'}\}$ が別の T_p, T_p^* の双対な基底だとすると、それらは $\{\boldsymbol{E}_a\}, \{\boldsymbol{E}_a\}$ を用いて、

$$\boldsymbol{E}_{a'} = \Phi_{a'}{}^a \boldsymbol{E}_a \tag{2.143}$$

と表される。ここで $\Phi_{a'}{}^a$ は $n \times n$ の非正則行列である。同様に、

$$\boldsymbol{E}^{a'} = \Phi^{a'}{}_a \boldsymbol{E}^a \tag{2.144}$$

が成り立つ。ここで $\Phi^{a'}{}_a$ は別の非正則行列である。これらの関係式から次の定理がなりたつ。

定理 2.35

$$\delta^{b'}{}_{a'} =< \boldsymbol{E}^{b'}, \boldsymbol{E}_{a'} >=< \Phi^{b'}{}_b \boldsymbol{E}^b, \Phi_{a'}{}^a \boldsymbol{E}_a >= \Phi_{a'}{}^a \Phi^{b'}{}_b \delta_a{}^b = \Phi_{a'}{}^a \Phi^{b'}{}_a. \tag{2.145}$$

すなわち $\Phi_{a'}{}^a, \Phi^{a'}{}_a$ はそれぞれの逆行列である。また同様にして $\delta^a{}_b = \Phi^a{}_{b'} \Phi_b{}^{b'}$.

定理 2.36

基底 $\{\boldsymbol{E}_{a'}\}, \{\boldsymbol{E}_{a'}\}$ に関するテンソル $\boldsymbol{T}$ の成分

$$T^{a'_1 \dots a'_r}{}_{b'_1 \dots b'_s} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{E}^{a'_1}, \dots, \boldsymbol{E}^{a'_r}, \boldsymbol{E}_{b'_1}, \dots, \boldsymbol{E}_{b'_s}) \tag{2.146}$$

と基底 $\{\boldsymbol{E}_a\}, \{\boldsymbol{E}_a\}$ に関するテンソル $\boldsymbol{T}$ の成分は次式のような関係が成り立つ。

$$T^{a'_1 \dots a'_r}{}_{b'_1 \dots b'_s} = T^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s} \Phi^{a'_1}{}_{a_1} \dots \Phi^{a'_r}{}_{a_r} \Phi_{b'_1}{}^{b_1} \dots \Phi_{b's}{}^{b_s}. \tag{2.147}$$

定義 2.98 (縮約 (contraction))

基底 $\{\boldsymbol{E}_a\}, \{\boldsymbol{E}_a\}$ に関する成分が $T^{a_1 \dots a_r}{}_{b_1 \dots b_s}$ である (r,s) 型のテンソル $\boldsymbol{T}$ の縮約 (contraction) とは (r,s) 型のテンソル $\boldsymbol{T}$ から $(r-n, s-n)$ 型のテンソルへの写像 (操作) である。例えば 1 番目の反変成分と 1 番目の共変成分の縮約 $C^1_1(\boldsymbol{T}) \in T^{r-1}_{s-1}$ は次式で定義される。

$$C^1_1(\boldsymbol{T}) = T^{ab \dots d}{}_{af \dots g} \boldsymbol{E}_b \otimes \dots \otimes \boldsymbol{E}_d \otimes \boldsymbol{E}^f \otimes \dots \otimes \boldsymbol{E}^g. \tag{2.148}$$

その他の縮約についても同様に定義される。

定理 2.37

縮約は基底によらない操作である。別の基底 $\{\boldsymbol{E}_{a'}\}, \{\boldsymbol{E}_{a'}\}$ に関する (r,s) 型のテンソル $\boldsymbol{T}$ の縮約を考えると、

$$\begin{aligned} C'^1_1(\boldsymbol{T}) &= T^{a'b' \dots d'}{}_{a'f' \dots g'} \boldsymbol{E}_{b'} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{E}_{d'} \otimes \boldsymbol{E}^{f'} \otimes \dots \otimes \boldsymbol{E}^{g'} \\ &= \Phi^{a'}{}_a \Phi^a{}_{h'} T^{h'b' \dots d'}{}_{a'f' \dots g'} \Phi_{b'}{}^b \dots \Phi_{d'}{}^d \Phi^{f'}{}_f \dots \Phi^{g'}{}_g \boldsymbol{E}_b \otimes \dots \otimes \boldsymbol{E}_d \otimes \boldsymbol{E}^f \otimes \dots \otimes \boldsymbol{E}^g \\ &= T^{ab \dots d}{}_{af \dots g} \boldsymbol{E}_b \otimes \dots \otimes \boldsymbol{E}_d \otimes \boldsymbol{E}^f \otimes \dots \otimes \boldsymbol{E}^g \\ &= C^1_1(\boldsymbol{T}) \end{aligned} \tag{2.149}$$

となり、二つの基底で一致する。

定義 2.99 (対称テンソル)

定義 2.100 (反対称テンソル)

2.8　ファイバー束

ファイバー束という多様体を構成することで、多様体 $\mathscr{M}$ のいくらかの幾何学的な性質を調べることができる。本節では束、座標束、ファイバー束、主束、主束から同伴したファイバー束の順に構成し、理論物理学において主要だと思われる 4 つのファイバー束、接束 $T(\mathscr{M})$, テンソル束 $T^r_s(\mathscr{M})$, 基底の線型枠束 $L(\mathscr{M})$, 正規直交枠束 $O(\mathscr{M})$ を定義する。本節を書くにあたって、Nakahara(2001) [16],Hawking(1973) [14], Wald(2010) [15] を参考にした。

定義 2.101 (束 (bundle))

$C^s(s \geq k)$ 級多様体 $\mathscr{M}$ 上の C^k 級束 (bundle) とは、C^k 級多様体 $\mathscr{E}$ と C^k 級の全射 $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{M}$ の組 $(\mathscr{E}, \mathscr{M}, \pi)$ である。$\mathscr{E}$ は全空間 (total space)、$\mathscr{M}$ は底空間 (base space)、π は射影 (projection) という。

設定が明らかな場合、束を単に $\mathscr{E}$ とだけ表記することもある。一般的には $p, q \in \mathscr{M}$ に対して逆像 $\pi^{-1}(p)$ と $\pi^{-1}(q)$ は位相同型である必要はない。しかし、以下で導入するファイバー束ではこれらは同型になる。

束の最も簡単な例が次の積束である。

定義 2.102 (積束 (product bundle))

積束とは $(\mathscr{M} \times \mathscr{A}, \mathscr{M}, \pi)$ の形の束である。ここで $\mathscr{A}$ はある多様体で、射影 π は $(\forall p \in \mathscr{M})(\forall a \in \mathscr{M})\pi(p, a) = p$ で定義される。

座標束、ファイバー束とは局所的に積束である束である。これらの概念は多様体でなくても、位相空間上でも定義できる。多様体上で定義する場合には多様体上の変換や多様体間の写像に対して微分可能性 $C^n, n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ の条件をつければ良い。しかし話が複雑になるので本質を示すためにここからは全て $n = \infty$ の可微分多様体や可微分写像を考えることで簡単化する。

定義 2.103 (座標束)

座標束 (coordinate bundle) とは以下の条件を満たす組 $(\mathscr{E}, \mathscr{M}, \pi, \mathscr{F}, G, \{U_i, \psi_i\}_{i \in \Lambda})$ である。

(1) 全空間 (total space) と呼ばれる可微分多様体 $\mathscr{E}$

(2) アトラス $\{U_i, \psi_i\}_{i \in \Lambda}$ をとする底空間 (base space) と呼ばれる可微分多様体 $\mathscr{M}$

(3) ファイバー (fibre) と呼ばれる可微分多様体 $\mathscr{F}$

(4) 射影 (projection) と呼ばれる全射 $\pi : \mathscr{E} \to \mathscr{M}$

逆像 $\pi^{-1}(p) =: F_p (\cong F)$ は $p \in \mathscr{M}$ におけるファイバーと呼ばれる。

(5) 構造群と呼ばれる Lie 群 G. G は左から $\mathscr{F}$ に作用する。

(6) $\pi \circ \phi_i(p, f) = p$ つまり $\pi \circ \phi = pr_{U_i}$($pr_{U_i} : U_i \times \mathscr{F} \to U_i$ は U_i に対する自然な射影) を満たす微分同相写像 $\phi_i : U_i \times \mathscr{F} \to \pi^{-1}(U_i)$.

写像 ϕ_i は、ϕ_i^{-1} が $\pi^{-1}(U_i)$ を $U_i \times F$ 上に写すので局所自明化と呼ばれる。

(7) $\phi_i(p, f) = \phi_{i,p}(f)$ と書くとき、写像 $\phi_{i,p} : \mathscr{F} \to F_p$ は微分同相写像である。$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ 上では、$t_{ij} := \phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ が G の元であることを要請する。このとき、ϕ_i と ϕ_j は滑らかな写像 $t_{ij} : U_i \cap U_j \to G$ によって

$$\phi_j(p, f) = \phi_i(p, t_{ij}(p) f) \tag{2.150}$$

の関係にある。$\{t_{ij}\}$ は変換関数と呼ばれる。

座標束の定義から即座に導かれる性質について述べる。

(4) において逆像 $\pi^{-1}(p), p \in U_i$ がファイバーと微分同相であること、つまり $F_p \cong F$ は直接仮定 (定義) していない。なぜなら、(6),(7) での条件で自動的に成り立つからである。(7) で述べたように写像 $\phi_{i,p} : \mathscr{F} \to F_p$ は微分同相写像になるので、$F_p \cong F$ のように F_p と F は微分同相になる。

$p \in (U_i \cap U_j)$ に対して、写像 $\phi_{i,p} : \mathscr{F} \to F_p$ は微分同相写像なので $\phi_{i,p}^{-1} \circ \phi_{j,p} : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ は微分同相写像である。

ファイバー束とは $\mathscr{M}$ の被覆 $\{U_i\}$ によらないような座標束である。厳密に言うと座標束とファイバー束は異なる。2 つの座標束 $(\mathscr{E}, \mathscr{N}, \pi, \mathscr{F}, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ と $(\mathscr{E}, \mathscr{N}, \pi, \mathscr{F}, G, \{V_i\}, \{\psi_i\})$ は $(\mathscr{E}, \mathscr{N}, \pi, \mathscr{F}, G, \{U_i\} \cup \{V_i\}, \{\phi_i\} \cup \{\psi_i\})$ が座標束となるとき、同値であるといわれる。このように同値関係を定義し、ファイバー束は座標束の同値類として定義する。しかし、物理学における応用を考える上では、常にある特定の被覆を選ぶので座標束とファイバー束の間の本質的な差異はない。次でファイバー束の厳密な定義を与える。

定義 2.104 (ファイバー束 (fibre bundle))

アトラスの異なる座標束間の同値関係を、2 つの座標束 $(\mathscr{E}, \mathscr{N}, \pi, \mathscr{F}, G, \{U_i\}, \{\phi_i\})$ と $(\mathscr{E}, \mathscr{N}, \pi, \mathscr{F}, G, \{V_i\}, \{\psi_i\})$ は $(\mathscr{E}, \mathscr{N}, \pi, \mathscr{F}, G, \{U_i\} \cup \{V_i\}, \{\phi_i\} \cup \{\psi_i\})$ が再び座標束となることと定義する。この同値関係による同値類をファイバー束と定義する。

上述したように、物理学においては座標束とファイバー束の差異がほとんどないため、特に区別する必要がない場合は座標束もファイバー束と呼ぶことにする。

次に主ファイバー束を定義する。

定義 2.105 (主ファイバー束)

多様体 $\mathscr{M}$ 上の Lie 群 $\mathscr{G}$ を構造群とする主ファイバー束 $\mathscr{P}$ を以下のように定義する。

(1) $\mathscr{P}$ は多様体。

(2) Lie 群 $\mathscr{G}$ は $\mathscr{P}$ の上に作用する (右側から書くことにする)。つまり微分可能写像

$$(u,a)\in\mathscr{P}\times\mathscr{G}\to ua\in\mathscr{P} \tag{2.151}$$

が存在し、$\forall a\in\mathscr{G}$ に対して

$$R_a:\quad u\in\mathscr{P}\to ua\in\mathscr{P} \tag{2.152}$$

は微分同相写像であり、

$$(ua)b=u(ab)\Leftrightarrow R_{ab}=R_bR_a \tag{2.153}$$

である。さらに $a\in\mathscr{G}, a\neq e$ ならば R_a は不動点を持たない、つまり $\mathscr{G}$ は $\mathscr{P}$ の上に自由に (freely) 作用するとする。

(3) $\mathscr{P}$ から $\mathscr{M}$ の上への微分可能写像 π があり、$u,v\in\mathscr{P}$ に対して $\pi(u)=\pi(v)$ となるのは、ある $a\in\mathscr{G}$ が存在して $v=ua$ となるとき、かつそのときに限る。π を射影 (projection) という。

(4) $\mathscr{P}$ は局所的に直積である。すなわち $x\in\mathscr{M}$ に対してある近傍 U があり、微分同相写像

$$u\in\pi^{-1}(U)\to(\pi(u),\phi(u))\in U\times\mathscr{G} \tag{2.154}$$

が存在し、$\forall u\in\pi^{-1}(U)\forall a\in\mathscr{G},\phi(ua)=\phi(u)a$ が成立するという意味で、$\pi^{-1}(U)$ は $U\times\mathscr{G}$ と同型である。

$x\in\mathscr{M}$ として、$\pi(u)=x$ となる $u\in\mathscr{P}$ をとると、(3) より

$$\pi^{-1}(x)=\{ua;a\in\mathscr{G}\} \tag{2.155}$$

となる。(2) より、$ua=ub\Rightarrow u(ab^{-1})=u\Rightarrow ab^{-1}\Rightarrow a=b$ なので、u を固定すると

$$a\in\mathscr{G}\to ua\in\pi^{-1}(x) \tag{2.156}$$

は $\mathscr{G}$ から $\pi^{-1}(x)$ の上への微分同相写像である。$\pi^{-1}(x)$ を x の上へのファイバー (fibre) という。

次に主ファイバー束から同伴したファイバー束を構成する。

定義 2.106 (同伴したファイバー束)

(標準) ファイバー $\mathscr{F}$、構造群 $\mathscr{G}$ をもつ、主ファイバー束 $\mathscr{P}(\mathscr{M},\mathscr{G})$ に同伴したファイバー束 (fibre bundle associated to $\mathscr{P}(\mathscr{M},\mathscr{G}))\mathscr{E}$ を以下のように定義する。(1) ある多様体 $\mathscr{F}$ があり、$\mathscr{G}$ がその上に作用しているとする (左側から書くことにする)。

$$(a,\xi) \in \mathscr{G} \times \mathscr{F} \to a\xi \in \mathscr{F} \tag{2.157}$$

よって $a,b \in \mathscr{G}, \xi \in \mathscr{F}, (ab)\xi = a(b\xi)$ が成り立つ。
このとき $\mathscr{F}$ をファイバー (fibre) という。(2) $\mathscr{G}$ の $\mathscr{P} \times \mathscr{F}$ への右側作用を $a \in \mathscr{G}$ に対して

$$(u,\xi) \in \mathscr{P} \times \mathscr{F} \to (u,\xi)a = (ua, a^{-1}\xi) \in \mathscr{P} \times \mathscr{F} \tag{2.158}$$

と定義する。この作用によって $\mathscr{P} \times \mathscr{F}$ に同値関係、

$$(u,\xi) \sim (v,\eta) \Leftrightarrow \exists a \in \mathscr{G}, v = ua, \eta = a^{-1}\xi \tag{2.159}$$

を定義する。同値類全体の集合に商位相をいれた空間を $\mathscr{E} = \mathscr{P} \times \mathscr{F}/\mathscr{G}$ とし、(u,ξ) の同値類を $\pi(u) \in \mathscr{M}$ に写す写像 $\pi_E : \mathscr{E} \to \mathscr{M}$ を射影として定義する。$\pi_E^{-1}(x)$ を $x \in \mathscr{M}$ 上のファイバーという。
(3) $\mathscr{P}$ は局所直積なので、$x \in \mathscr{M}$ にはその近傍 $\mathscr{U}$ が存在し、$\pi^{-1}(U)$ が $\mathscr{U} \times \mathscr{G}$ と同型になる。よって $\pi_E^{-1}(U)$ は $U \times \mathscr{F}$ と同相になる。したがって $\pi_E^{-1}(U)$ が $U \times \mathscr{F}$ と微分同相であるような開部分多様体になるという条件で $\mathscr{E}$ の多様体構造を定義する。これによって $\pi_E : \mathscr{E} \to \mathscr{M}$ は微分可能になる。

上の定義でいくらかの補足をする。
$x \in \mathscr{M}$ 上のファイバー $\pi_E^{-1}(x)$ は、$\pi(u) = x$ となる $u \in \mathscr{P}$ と任意の $\xi \in \mathscr{F}$ の組み (u,ξ) の同値類全体である。なぜなら、$\pi(v) = x$ となる v を一つ決めると、他の $\pi_E^{-1}(x)$ の元の $\mathscr{P}$ 部分は π_E の定義より $u = va(a \in \mathscr{G})$ であるが、(v,ξ) は $(u, a^{-1}\xi)$ と同値なので結局 $\pi_E^{-1}(x)$ は $(v,\xi), (\xi \in \mathscr{F})$ の同値類全体だけを考えるので十分だからである。

$\pi_E^{-1}(U)$ は $U\times\mathscr{F}$ と同相になることを示す。$(\pi,\phi):\pi^{-1}(U)\to U\times\mathscr{G}$ を主束の局所自明化とする。$\overline{\phi}:\pi_E^{-1}(U)\to\mathscr{F}$ を $\overline{\phi}[x,\xi]=\phi(x)\xi$ で定義する。実は $(\pi_E,\overline{\phi})$ が $\pi_E^{-1}(U)$、$U\times\mathscr{F}$ 間の局所自明化になり、すなわち $\pi_E^{-1}(U)$ は $U\times\mathscr{F}$ と同相になる。実際、$s:U\to\pi^{-1}(U)$ を $s(x)=(\pi,\phi)^{-1}(x,e)$ で定義すると、$f(x,\xi)=[s(x),\xi]$ で定義される $f:U\times\mathscr{F}\to\pi_E^{-1}(U)$ は $(\pi_E,\overline{\phi})$ の逆写像になる。なぜなら、

$$(\pi_E,\overline{\phi})\circ f(x,\xi)=(\pi_E,\overline{\phi})[s(x),\xi]=(\pi(s(x)),\phi(s(x))\xi)=(x,\xi) \tag{2.160}$$

と

$$\begin{aligned} f\circ(\pi_E,\overline{\phi})[x,\xi]&=f(\pi(x),\phi(x)\xi)\\ &=[s(\pi(x)),\phi(x)\xi]\\ &=[x\phi(x)^{-1},\phi(x)\xi]\\ &=[x,\xi] \end{aligned} \tag{2.161}$$

が成り立つからである。よって、$(\pi_E,\overline{\phi})$、f は全単射である。

次にこれらが連続写像であることを示す。連続写像であることの証明のやり方の例として丁寧に証明する。

(i) 商空間への射影 (商写像) $\mathscr{P}\times\mathscr{F}\to\mathscr{P}\times\mathscr{F}/\mathscr{G}$ は開写像であるので、その開集合への制限である $\pi^{-1}(U)\times\mathscr{F}\to\pi_E^{-1}(U)$ もまた開写像である。商写像は連続でありその開集合への制限である先の写像も連続である。よって全射連続開写像は商写像なので、先の射影の開集合への制限は商写像となる。

(ii) 一般に集合の間の全射 $f:X\to Y$ と写像 $g:X\to Z$ があるとき、$f(x)=f(x')\Rightarrow g(x)=g(x')$ が成り立てば、$h:Y\to Z$ で $h\circ f=g$ となるものがただ一つ存在する。この h を g から f により誘導される写像という。ここで X,Y,Z が位相空間で f が商写像であり、g が連続であるときは、誘導される写像 h は自動的に連続になることが商位相の定義から示される。これらのことから、$(\pi_E,\overline{\phi}):\pi_E^{-1}(U)\to U\times\mathscr{F}$ は連続写像 $\pi^{-1}(U)\times\mathscr{F}\to U\times\mathscr{F},((\pi,\phi)^{-1}\{(x,a)\},\xi)\mapsto(x,a\xi)$(連続写像であることは $(\pi,\phi)^{-1}$ の逆写像が連続であることと、$\mathscr{G}$ の作用の連続性から確かめられる) から (i) の商写像により誘導されるから連続となる。ここで $(\pi,\phi)^{-1}:U\times\mathscr{G}\to\pi^{-1}(U)$ は同型写像である。

(iii) また (ii) の逆 $U\times\mathscr{F}\to\pi_E^{-1}(U)$ は $(x,\xi)\mapsto[(\pi,\phi)^{-1}\{(x,e)\},\xi]$ なので連続である。なぜなら、これは連続写像の合成の形に書けるからである。具体的には、$(x,\xi)\mapsto(x,e,\xi),(x,a,\xi)\mapsto((\pi,\phi)^{-1}\{(x,a)\},\xi),(p,\xi)\mapsto[(p,\xi)]$ の合成である。1 つ目については連続写像であることは容

易に示される。3 つ目についても (i) での議論のようにして商空間への射影なので商写像であり、したがって連続である。2 つ目の写像が連続であることは次のようにしてわかる。X, Y, Z が位相空間、$h : Z \to X \times Y$ が $z \mapsto (f(z), g(z))$ という写像のとき、f, g が連続 $\Leftrightarrow$ h が連続であることを用いれば、$(x, a, \xi) \mapsto (\pi, \phi)^{-1}\{(x, a)\}, (x, a, \xi) \mapsto \xi$ の連続性に帰着され、結局 2 つ目の写像が連続であることが示される。
(i)∼(iii) であることから $(\pi_E, \overline{\phi})$、f が連続であることが示された。よって、これらは同相写像であるということが示された。ゆえに $\pi_E^{-1}(U)$ は $U \times \mathscr{F}$ と同相である。

ここからは物理学において特に重要だと思われる 4 つのファイバー束について述べる。

定義 2.107 (接束 (tangent bundle))

接束 (tangent bundle)$T(\mathscr{M})$ は $\mathscr{E} = \underset{p\in\mathscr{M}}{\cup} T_p$ に自然な多様体構造と自然な射影 $\pi : x \in T_p \mapsto p$ を与えることで得られる多様体 $\mathscr{M}$ 上のファイバー束である。$\mathscr{E}$ における多様体構造は局所座標 $\{z^a\}$ によって次のように与えられる。$\{x_i\}$ を開集合 $\mathfrak{U} \subset \mathscr{M}$ の局所座標とすると、$p \in \mathfrak{U}$ に対して任意の $\boldsymbol{V} \in T_p$ は $\boldsymbol{V} = V^i(\partial/\partial x^i)|_p$ と表される。座標 $\{z^a\}$ が $\pi^{-1}(\mathfrak{U})$ において $\{z^a\} = \{x^i, V^i\}$ として定義される。

ファイバー $\pi^{-1}(p)$ は n 次元ベクトル空間の T_p である。このベクトル空間の構造は $\phi_{i,p}(u) = V^a(u), p \in \mathscr{M}, u \in \mathscr{E} = \underset{p\in\mathscr{M}}{\cup} T_p$、つまり $T_p(\mathscr{M})$ におけるベクトルを座標 $\{x_i^k\}$ における成分に写す写像 $\phi_{i,p} : T_p \to \mathbb{R}^n$ によって保存される。$\{x_j^k\}$ を別の局所座標系とすると、$(\phi_{i,p}) \circ (\phi_{j,p}^{-1})$ は $\mathbb{R}^n$ からそれ自身への線形写像である。したがってそれは一般線型群 $GL(n, \mathbb{R})$ の要素である。ファイバー束の定義で述べた構造群が接束という特別な場合はこれになる。

ベクトル束と同様に以下のようにテンソル束が定義される。

定義 2.108 (テンソル束 (tensor bundle))

多様体 $\mathscr{M}$ 上のテンソル束 $T^r{}_s(\mathscr{M})$ は、全空間を $\mathscr{E} = \underset{p\in\mathscr{M}}{T}{}^r{}_s(p)$、射影 π を $T_s^r(p)$ の元を p に写す写像、任意の座標近傍 $\mathfrak{U} \subset \mathscr{M}$ に対して $\pi^{-1}(\mathfrak{U})$ に局所座標系 $\{z^a\} = \{x^i, T^{a\ldots b}{}_{c\ldots d}\}$ を与えることで得られるファイバー束である。ここで $\{x^i\}$ は $p \in \mathfrak{U}$ の座標、$\{T^{a\ldots b}{}_{c\ldots d}\}$ はテンソル $T = T^{a\ldots b}_{c\ldots d}\partial/\partial x^a \otimes \cdots \otimes dx^d|_p$ の成分である。

次に線型枠束を定義する。

定義 2.109 (線型枠束)

線型枠束 (bundle of linear frames)$L(\mathscr{M})$ は、全空間 $\mathscr{E}$ を $\mathscr{M}$ の全ての点における全ての基底か

らなる集合、つまり $p \in \mathscr{M}$ における non-zero で線型独立な n 個のベクトル $\{E_a\}, E^a \in T_p$ 全ての集合とし、射影 π を点 p の基底に対してその点 p を与える自然な写像とし、開集合 $\mathfrak{U} \subset \mathscr{M}$ とその座標 $\{x^i\}$ に対して、$\pi^{-1}(\mathfrak{U})$ の座標を $\{z^i\} = \{x^a, {E_1}^j, \ldots, {E_n}^k\}$ としたファイバー束である。ここで ${E_a}^j$ は座標基底 $\partial/\partial x^i$ に関する E_a の j 成分である。一般線型群 $GL(n, \mathbb{R})$ は $L(\mathscr{M})$ に以下のように作用するとする。$A \in GL(n, \mathbb{R})$, $u = \{p, E_a\}$ とすると、$A(u) = \{p, A_{ab}E_b\}$ となる。

$\mathscr{M}$ において signature$s$ の計量 g が与えられているときには、$L(\mathscr{M})$ の部分束である正規直交枠束 $O(\mathscr{M})$ を定義できる。

定義 2.110 (正規直交枠束)

正規直交枠束 (bundle of orthonormal frames)$O(\mathscr{M})$ は、全空間 $\mathscr{E}$ を $\mathscr{M}$ の全ての点における計量 g に関する正規直交基底からなる集合としたファイバー束である。射影 π 等は線型枠束と同様に定義される。構造群に関しては、$O(\mathscr{M})$ は $GL(n, \mathbb{R})$ の部分群 $O(\frac{1}{2}(n+s), \frac{1}{2}(n-s))$ の作用を受ける。$O(\frac{1}{2}(n+s), \frac{1}{2}(n-s))$ は、非正則な実行列 A_{ab} で $A_{ab}G_{bc}A_{dc} = G_{ad}$ を満たすものからなる部分群である。ここで、G_{bc} は $\mathrm{diag}(+1, +1, \ldots, +1, -1, -1, \ldots, -1)$ であり、$+1$ が $\frac{1}{2}(n+s)$ 個、-1 が $\frac{1}{2}(n-s)$ 個ある。この A_{ab} によって、$(p, E_a) \in O()$ は $(p, A_{ab}E_b) \in O(\mathscr{M})$ に写される。

特に Lorentz 計量 $(s = n-2)$ の場合、群 $O(n-1, 1)$ は n 次元 Lorentz 群と呼ばれる。

定義 2.111 (切断)

束の C^r 級切断 (cross-section) とは、$\pi \circ \Phi = id_{\mathscr{M}}$ となる C^r 級写像 $\Phi : \mathscr{M} \to \mathscr{E}$ である。

したがって定義から切断は $\mathscr{M}$ の各点にファイバー $\pi^{-1}(p)$ の一つの元 $\Phi(p)$ を割り当てていることに相当する。接束 $T(\mathscr{M})$ の切断が $\mathscr{M}$ 上のベクトル場、テンソル束 $T^r_s(\mathscr{M})$ の切断が $\mathscr{M}$ 上の (r, s) のテンソル場、線型枠束 $L(\mathscr{M})$ の切断が $\mathscr{M}$ の各点線型独立な n 個の non-zero なベクトル場、正規直交枠束 $O(\mathscr{M})$ の切断が $\mathscr{M}$ 上での正規直交なベクトル場の集合である。

ゼロベクトルやゼロテンソルは $T(\mathscr{M})$ や $T^r_s(\mathscr{M})$ における切断を定義するので、これらのファイバー束はいつでも切断を考えることができる。$\mathscr{M}$ が向き付可能で非コンパクト、あるいはコンパクトで Euler 数がゼロでないときは至る所でゼロでないベクトル場が存在することが知られている。したがって、$T(\mathscr{M})$ の至る所でゼロでない切断が存在することになる。一方で $L(\mathscr{M}), O(\mathscr{M})$ は切断があってもなくても良い。例えば $L(S^2)$ には許されないが、$L(\mathbb{R}^n)$ には許される。

定義 2.112 (平行化可能)

$L(\mathscr{M})$ に切断が存在するとき、$\mathscr{M}$ は平行化可能 (parallelizable) と呼ばれる。

R.P.Geroch によって非コンパクトな 4 次元 Lorentz 多様体 $\mathscr{M}$ がスピン構造を持つ必要十分条件が $\mathscr{M}$ が parallelizable であることが示されている (1968)。

$\mathscr{M}$ 上の接続をファイバー束 $L(\mathscr{M})$ を用いて幾何学的に描写することができる。ここではその要点をまとめる。詳しくは主束上の接続や Ehresmann 接続等を参照してほしい。$\mathscr{M}$ における接続は $\mathscr{M}$ における任意の曲線 $\gamma(t)$ に沿ったベクトルの平行移動に対する規則と考えることができる。したがって、$\{E_a\}$ を $p = \gamma(t_0)$ における基底ベクトルとすると (つまり、$u = \{p, E_a\} \in L(\mathscr{M})$)、他の任意の点 $\gamma(t)$ での一意な基底ベクトルを得ることができる。すなわち、ファイバー $\pi^{-1}(\gamma(t))$ における一意な点 $\overline{\gamma}(t)$ が得られるのである。したがって、$\gamma(t)$ のリフト (lift) と呼ばれる、$L(\mathscr{M})$ における次の条件を満たす一意な曲線 $\overline{\gamma}(t)$ が存在すると言える。

(1) $\overline{\gamma}(t) = u$

(2) $\pi(\overline{\gamma}(t)) = \gamma(t)$

(3) $\overline{\gamma}(t)$ によって表される基底ベクトルは $\mathscr{M}$ における曲線 $\gamma(t)$ に沿って平行移動されている。

局所座標 $\{z^a\}$ を用いると、曲線 $\overline{\gamma}(t)$ は以下の条件を満たす $\{x^a(\gamma(t)), E^i_m(t)\}$ によって与えられる。

$$\frac{dE^i_m(t)}{dt} + E^j_m \Gamma^i{}_{aj} \frac{dx^a(\gamma(t))}{dt} = 0 \tag{2.162}$$

ファイバー束 $L(\mathscr{M})$ に対する点 u での接空間 $T_u(L(\mathscr{M}))$ を考える。この座標基底は $\{\partial/\partial z^a|_u\}$ である。p を通る全ての曲線 $\gamma(t)$ のリフトに対する接ベクトル $\{(\partial/\partial t)_{\overline{\gamma}(t)}|_u\}$ によって張られる n 次元接ベクトル部分空間を $T_u(L(\mathscr{M})$ の水平部分空間 (horizontal subspae)H_u と呼ぶ。局所座標をとると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_{\overline{\gamma}} &= \frac{dx^a(\gamma(t))}{dt}\frac{\partial}{\partial x^a} + \frac{dE^i_m}{dt}\frac{\partial}{\partial E^i_m} \\ &= \frac{dx^a(\gamma(t))}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^a} - E^j_m \Gamma^i{}_{aj}\frac{\partial}{\partial E^i_m}\right) \end{aligned} \tag{2.163}$$

よって、H_u の座標基底は $\{\partial/\partial x^a - E^j_m \Gamma^i{}_{aj}\partial/\partial E^i_m\}$ となる。したがって $\mathscr{M}$ における接続は $L(\mathscr{M})$ の各点での接空間内での水平部分空間を規定する。逆に、$\mathscr{M}$ における接続を、次の条件を満たすような $T_u(L(\mathscr{M}))$ の n 次元部分空間を各点 $u \in L(\mathscr{M})$ に対して与えることで定義しても良い。

(1) $A \in GL(n,\mathbb{R}^1)$ ならば、写像 $A_*: T_u(L(\mathscr{M})) \to T_{A(u)}(L(\mathscr{M}))$ は水平部分空間 H_u を $H_{A(u)}$ に写す。

(2) H_u は垂直部分空間 V_u に属す non-zero なベクトルを含まない。

ここで、垂直部分空間 V_u はファイバー $\pi^{-1}(\pi(u))$ における曲線に接するベクトルによって張られる $T_u(L(\mathscr{M}))$ の n^2 次元部分空間と定義される。局所座標では V_u はベクトル $\{\partial/\partial E^i_m\}$ によって張られる。条件 (2) によると、

$$T_u = H_u \oplus V_u \tag{2.164}$$

となる。

射影 $\pi : L(\mathscr{M}) \to \mathscr{M}$ は $\pi_*(V_u) = 0$, かつ H_u に制限された π_* は $T_{\pi(u)}$ への 1 対 1 かつ全射になるような全射線形写像 $\pi_*: T_u(L(\mathscr{M})) \to T_{\pi(u)}(\mathscr{M})$ を誘起する。よって逆写像 π_*^{-1} は $T_{\pi(u)}(\mathscr{M})$ の H_u への線形写像になる。したがって任意のベクトル $\boldsymbol{X} \in T_p(\mathscr{M})$ と点 $u \in \pi^{-1}(p)$ に対して、$\boldsymbol{X}$ の水平リフトと呼ばれる $\pi_*(\overline{\boldsymbol{X}}) = \boldsymbol{X}$ を満たす一意なベクトル $\overline{\boldsymbol{X}} \in H_u$ が存在する。$\mathscr{M}$ の曲線 $\gamma(t)$ と初期の点 $u \in \pi^{-1}(\gamma(t_0))$ が与えられると、$L(\mathscr{M})$ における一意な曲線 $\overline{\gamma}(t)$ を構成できる。ここで、$\overline{\gamma}(t)$ は、接ベクトルが $\mathscr{M}$ における $\gamma(t)$ の接ベクトルの水平リフトであるような u を通る曲線である。したがって、$L(\mathscr{M})$ の各点における水平部分空間がわかれば、任意の曲線 $\gamma(t)$ に沿った基底の平行移動を定義できる。そして、平行移動された基底に対するテンソル場 T の成分の t についての常微分をとることで、T の $\gamma(t)$ に沿った共変微分を定義できる。

$\mathscr{M}$ 上にその共変微分がゼロになるような計量があるとすると、正規直交枠は正規直交枠に平行移動される。したがって水平部分空間は $L(\mathscr{M})$ において $O(\mathscr{M})$ に接し、$O(\mathscr{M})$ における接続を決定する。これはどういうことかと言うと、$O(\mathscr{M})$ は $L(\mathscr{M})$ の部分束なので、$O(\mathscr{M}) \subset L(\mathscr{M})$ と考えられる。正規直交 frame が平行移動によっても正規直交 frame に移されるので、上で述べた $L(\mathscr{M})$ における議論が、$L(\mathscr{M})$ 中の $O(\mathscr{M})$ においても言えると言うことである。

同様に $\mathscr{M}$ 上の接続は、ベクトルやテンソルの平行移動によって束 $T(\mathscr{M})$ と $T^r_s(\mathscr{M})$ に対する接空間における n 次元水平部分空間を決める。これらの水平部分空間の座標基底はそれぞれ、

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^a} - V^e \Gamma^j_{ae} \frac{\partial}{\partial V^f} \right\} \tag{2.165}$$

$$\begin{aligned} \{ \frac{\partial}{\partial x^e} - (&T^{f\ldots b}{}_{c\ldots d}\Gamma^a{}_{ef} + (\text{all upper indices}) \\ &- T^{a\ldots b}{}_{f\ldots d}\Gamma^f{}_{ec} - (\text{all lower indices}))\frac{\partial}{\partial T^{a\ldots b}{}_{c\ldots d}} \} \end{aligned} \tag{2.166}$$

となる。$L(\mathscr{M})$ と同様に、π_* はこれらの水平部分空間を 1 対 1、かつ上へ $T_{\pi(u)}(\mathscr{M})$ に写す。よってここでもまた、π_* の逆写像は任意のベクトル $\boldsymbol{X} \in T_{\pi(u)}$ の一意な水平リフト $\overline{\boldsymbol{X}} \in T_u$ を与える。特に $T(\mathscr{M})$ の場合、u 自身が特定のベクトル $\boldsymbol{W} \in T_{\pi(u)}(\mathscr{M})$ に対応し、接続によって $T(\mathscr{M})$ 上に定義される固有の水平ベクトル場 $\overline{\boldsymbol{W}}$ が存在する。局所座標 $\{x^a, V^b\}$ に関して、

$$\overline{\boldsymbol{W}} = V^a \left(\frac{\partial}{\partial x^a} - V^e \Gamma^f{}_{ae} \frac{\partial}{\partial V^f} \right) \tag{2.167}$$

である。このベクトル場は以下のように解釈できる。$u = (p, \boldsymbol{X}) \in T(\mathscr{M})$ を通る $\overline{\boldsymbol{X}}$ の積分曲線は p において接ベクトルが $\boldsymbol{X}$ である $\mathscr{M}$ の測地線の水平リフトである。したがってベクトル場 $\overline{\boldsymbol{W}}$ は $\mathscr{M}$ における全ての測地線を表す。特に、$p \in \mathscr{M}$ を通る全ての測地線の族は、ファイバー $\pi^{-1}(p) \subset T(\mathscr{M})$ を通る $\overline{\boldsymbol{W}}$ の積分曲線の族である。$\mathscr{M}$ における曲線は少なくとも p で自己交差を持つが、$T(\mathscr{M})$ における曲線は至る所で自己交差を持たない。これは積分曲線の一意性によるものである。

2.9　スピノール

ここではスピノールについて述べる。物理学における数学的対象としてスピノールはテンソルよりもより一般的な概念である。イメージとしてはベクトルの"平方根"に相当するような量である。本節を書くにあたって、Penrose(1987) [17], Uchiyama(1978) [18], Wald(2010) [15] を参考にした。

始めに Minkowski 空間におけるスピノールについて定義し、その性質について述べる。

定義 2.113 (2 次元複素ベクトル空間)

W を複素空間 $\mathbb{C}$ 上の 2 次元複素ベクトル空間とする。実ベクトル空間のときと同じようにして W から $\mathbb{C}$ への写像からなる、W の双対空間 W^* が定義される。W^* も $\mathbb{C}$ 上の 2 次元複素ベクトル空間になる。

notation としては W の元を、ξ^A と上付きの大文字のアルファベットで表し、そのある基底に関する成分を ξ^Ω のように上付きの大文字のギリシャ字で表す。W^* の元を、ξ_A と下付きの大文字のアルファベットで表し、そのある基底に関する成分を ξ_Ω のように下付きの大文字のギリシャ字で表す。

定義 2.114 (複素共役双対空間)

$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 W に対して、W から $\mathbb{C}$ への反線形写像からなる複素共役双対空間 $\overline{W}^*$ が定義される。$\overline{W}^*$ も $\mathbb{C}$ 上の 2 次元複素ベクトル空間になる。

ここで反線形写像 f とは、写像 $f: W \to \mathbb{C}$ が、$\xi_1^A, \xi_2^A, \xi^A \in W, c \in \mathbb{C}$ に対して

$$f(\xi_1^A + \xi_2^A) = f(\xi_1^A) + f(\xi_2^A) \tag{2.168}$$

かつ

$$f(c\xi^A) = \bar{c} f(\xi^A) \tag{2.169}$$

を満たすことである。

notation としては、$\overline{W}^*$ の元を、$\xi_{A'}$ とプライムをつけた下付きの大文字アルファベット添え字で表す。成分についても同様にプライムをつける。

定義 2.115 (複素共役空間)

W の複素共役空間 (complex conjugate space)$\overline{W}$ とは $\overline{W}^*$ の双対空間である。

notation としては、$\overline{W}$ の元を、$\xi^{A'}$ とプライムをつけた上付きの大文字アルファベット添え字で表す。成分についても同様にプライムをつける。

定義 2.116 (複素共役)

W と $\overline{W}$ の間には、条件 $\forall \psi \in \overline{W}^*, \psi(\xi) = \phi(\psi)$ によって $\xi \in W, \phi \in \overline{W}$ が自然に一対一対応になる。この W から $\overline{W}$ への写像 (同様に $\overline{W}$ から W への写像) を複素共役 (complex conjugaton) という。複素共役による $\xi^A \in W$ の像を $\bar{\xi}^{A'} \in \overline{W}$ と書く。同様に複素共役による $\phi^{A'} \in \overline{W}$ の像を $\bar{\phi}^A \in W$ と書く。

定義 2.117 (W 上のテンソル)

W 上のタイプ $(k, l; k', l')$ のテンソルを多重線形写像

$$T: \underbrace{W^* \times \cdots \times W^*}_{k\ factors} \times \underbrace{W \times \cdots \times W}_{l\ factors} \times \underbrace{\overline{W}^* \times \cdots \times \overline{W}^*}_{k'\ factors} \times \underbrace{\overline{W} \times \cdots \times \overline{W}}_{l'\ factors} \to \mathbb{C} \tag{2.170}$$

と定義する。

W 上のテンソルを表すのに、実ベクトル空間上のテンソルの表式を一般化する。すなわち、テンソル $T^{AB}{}_C{}^D$ のタイプは $(2,1;1,0)$ である。また、プライムとプライムがついていない添字の相対的な位置は問題ではない。すなわち $T^{AD'B}{}_C$ は $T^{AB}{}_C{}^{D'}$ と同じテンソルである。しかし、プライム間、アンプライム間の相対的な位置は実ベクトル空間上のテンソルと同様に意味がある。

ベクトルの複素共役はテンソルの複素共役に拡張される。

定義 2.118 (テンソルの複素共役)
タイプ $(k,l;k',l')$ のテンソル T は複素共役によってタイプ $(k',l';k,l)$ のテンソル $\overline{T}$ に写される。

$\overline{\overline{T}} = T$ が成り立つ。

次に二つの異なる縮約を定義する。

定義 2.119 (縮約)
アンプライム添字上の縮約はタイプ $(k,l;k',l')$ のテンソルをタイプ $(k-1,l-1;k',l')$ のテンソルに写す。またプライム添字上の縮約はタイプ $(k,l;k',l')$ のテンソルをタイプ $(k,l;k'-1,l'-1)$ のテンソルに写す。

しかし、アンプライム、プライム間の縮約は定義されない。notation としては縮約を示すのに実ベクトル空間上のテンソルの場合と同様に同じ文字を二度添字として使うことを採用する。

定義 2.120 (スピノール空間 (spinor space))
$\mathbb{C}$ 上の 2 次元複素ベクトル空間 W に対して、タイプ $(0,2;0,0)$ の反対称テンソルのベクトル空間は一次元になる。

$$\epsilon_{AB} = -\epsilon_{BA} \tag{2.171}$$

となるこの反対称ベクトル空間のある特定の元 ϵ_{AB} と W の組 (W,ϵ_{AB}) をスピノール空間 (spinor space) と定義する。W の元をスピノール (spnor) と呼ぶ。また、W 上のテンソルをスピノールテンソル (spinorial tensor) と呼ぶ。

ϵ_{AB} によってスピノール空間から双対スピノール空間へ $\xi^A \to \epsilon_{AB}\xi^A$ のように写像することができる。W 上の計量によってベクトル空間、双対ベクトル空間間の同型写像が得られてベクトル空間の元に計量を作用させることで双対ベクトル空間の元を得られるように、ϵ_{AB} は非縮退なので (つまり $\xi^A = 0$ でない限り $\epsilon_{AB}\xi^A \neq 0$)、$\epsilon_{AB}$ によって W, W^* 間の同型写像が得られる。便利のため多様体上のテンソル解析における類似の記法をここでも採用する。双対ベクトル $\epsilon_{AB}\xi^A$ を単に ξ_B と書き、テンソルについても ϵ_{AB} をアンプライムの添字を下げるのに用いることとする。注意すべきことは ϵ_{AB} は反対称テンソルなので A, B のどちらと縮約をとるかでその結果が変わる。そこで、次式のように最初の添字である A について添字の下げを定義する。

$$\xi_B = \epsilon_{AB}\xi^A = -\epsilon_{BA}\xi^A. \tag{2.172}$$

標準的な慣習として、ϵ^{AB} を ϵ_{AB} の逆写像の負号と定義する。すなわち

定義 2.121

ϵ^{AB} はタイプ $(2,0;0,0)$ の反対称テンソルで、次式を満たす。

$$\epsilon^{AB}\epsilon_{BC} = -\delta^A{}_C \tag{2.173}$$

ここで $\delta^A{}_C$ は W 上の恒等写像である。

上の定義の負号のため、添字の上げに関しては、ϵ^{AB} の二番目の添字について定義する。つまり、

$$\forall\mu_A \in W^*,\ \mu^A = \epsilon^{AB}\mu_B = -\epsilon^{BA}\mu_B \tag{2.174}$$

である。ここまで見てきたように実ベクトル空間上のテンソルのときと違って、符号の変化に気をつけなければならない。例えば、

$$\begin{aligned}\xi_A\phi^A &= (\epsilon_{BA}\xi^B)\phi^A \\ &= -\epsilon_{AB}\xi^B\phi^A \\ &= -\xi^B\phi_B\end{aligned} \tag{2.175}$$

となる。したがって、任意の ξ^A に対して $\xi^A\xi_A = 0$ が成り立つ。
また、$\delta^A{}_C$ についても注意をしておく。$\delta^A{}_C$ を W 上の恒等写像とし、$\delta_A{}^C$ を W^* 上の恒等写像とする (添字を上げている位置が違う)。これらは互いに負号分だけ異なっている ($\delta^A{}_C = -\delta_A{}^C$)。これからは W, W^* のどちらの空間でもこの恒等写像を $\epsilon_C{}^A$ と書くこととする。
最後に $\epsilon_{AB}, \epsilon^{AB}$ の複素共役によって得られるテンソルを $\overline{\epsilon}_{A'B'}, \overline{\epsilon}^{A'B'}$ とし、これによってプライム付きの添字の上げ下げを上述したアンプライムの添字の上げ下げの規則と全く同様にして定義する。例えば、添字の下げについては $\overline{\epsilon}_{A'B'}$ の一つ目の添字について、添字の上げについては $\overline{\epsilon}^{A'B'}$ の二つ目の添字について縮約をとることによって定義するといった具合である。

定義 2.122 (線形写像)

線形写像 $L : W \to W$ はテンソル $L^A{}_B$ のように表される。L の行列式 (determinant) が次式のように定義される。

$$\det(L) = \frac{1}{2}\epsilon^{AB}\epsilon_{CD}L^A{}_CL^B{}_D \tag{2.176}$$

線形写像に関して次の定理が知られている。

定理 2.38

det が非 0$\Leftrightarrow L^A{}_B$ が全単射つまり可逆

そこで $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ を次のように定義する。

定義 2.123

SL$(2,\mathbb{C})$ は、$\det(f)=1$ の線形写像 $f:W\to W$ 全体の群である。ここで群の積は composition、つまり

$$(LM)^A{}_B = L^A{}_C M^C{}_B \tag{2.177}$$

で定義する (行列の積)。また、逆元はその線形写像の逆写像である。

$L^A{}_B$ の 4 つの複素要素に対して、det が 1 であるという一つの方程式があるので、独立な実数 6 つによって $SL(2,\mathbb{C})$ の元は決定される。実際 SL$(2,\mathbb{C})$ は $S^2\times\mathbb{R}$ の自然な多様体構造を持つことが、極分解定理から示される。詳細は述べないが、これらをまとめておく。

定理 2.39 (極分解定理 (polar decomposition theorem))

W における任意の内積について、全ての SL$(2,\mathbb{C})$ の元は det が 1 のユニタリーな写像つまり SU(2) の元、かつ正値 (positive)、self-adjoint(自己随伴) な写像の composition(積、行列の積) として一意に表される。

定理 2.40

SL$(2,\mathbb{C})$ は $S^2\times\mathbb{R}$ の自然な多様体構造を持つ。

定理 2.41

群操作はこの多様体構造について滑らかなので、SL$(2,\mathbb{C})$ は 6 次元 Lie 群をなす。

定理 2.42

S^3 も $\mathbb{R}$ も単連結なので、SL$(2,\mathbb{C})$ も単連結である。

$L^A{}_B$ の det が 1 であることは次式と等価である。

$$L^A{}_C L^B{}_D \epsilon_{AB} = \epsilon_{CD} \tag{2.178}$$

つまり ϵ_{AB} は $L^A{}_B$ の作用の元で保存される。

次に SL$(2,\mathbb{C})$ と Lorentz 群の関係を考える。タイプ $(1,0;1,0)$ のテンソルは 4 次元複素ベクトル空間 Y からなる。 Y の基底は慣習的に以下のように選ばれる。$ø^A,\iota^A$ を W の次式を満たす基底とする。

$$ø_A\iota^A = \epsilon_{AB}ø^A\iota^B = 1 \tag{2.179}$$

すると、Y の基底は、

$$t^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ø^A\bar{ø}^{A'} + \iota^A\bar{\iota}^{A'}) \tag{2.180}$$

$$x^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ø^A \bar{\iota}^{A'} + \iota^A \bar{ø}^{A'}) \tag{2.181}$$

$$y^{AA'} = \frac{i}{\sqrt{2}}(ø^A \bar{\iota}^{A'} - \iota^A \bar{ø}^{A'}) \tag{2.182}$$

$$z^{AA'} = \frac{1}{\sqrt{2}}(ø^A \bar{ø}^{A'} - \iota^A \bar{\iota}^{A'}) \tag{2.183}$$

からなる。
複素共役について $\overline{\phi}^{A'A} = \phi^{AA'}$ が成り立つ場合、このような Y の元を実 (real) という。容易に確かめられるように上の 4 つの基底は全て実であり、Y の実な元はこれらの基底の実係数による線形結合で表される。したがって Y の実な元は $\mathbb{R}$ 上の 4 次元ベクトル空間をなす。このベクトル空間を V と書くことにする。

テンソル

$$g_{AA'BB'} = \epsilon_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'} \tag{2.184}$$

は $V \times V \to \mathbb{R}$ の多重線形写像となる。これは $\forall \phi^{AA'}, \psi^{BB'} \in V(g_{AA'BB'}\phi^{AA'}\psi^{BB'} \in \mathbb{R})$ が容易に示されるためである。さらに $g_{AA'BB'}$ は signature が $+\ -\ -\ -$ の非縮退で、したがって故に V 上の Lorentz 計量になる。これは上の 4 つの基底ベクトルが $g_{AA'BB'}$ について直交すること、$g_{AA'BB'}t^{AA'}t^{BB'} = 1$ と $x^{AA'}, y^{AA'}, z^{AA'}$ に対してはこのノルムが -1 になることを確かめることで示される。

ここで $L^A{}_B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ に対して、写像 $\lambda : V \to V$ を次式で定義する。

$$\lambda^{AA'}{}_{BB'} = L^A{}_B L^{A'}{}_{B'} \tag{2.185}$$

上で述べたように $L^A{}_B$ は ϵ_{AB} を保存するため、$\lambda^{AA'}{}_{BB'}$ は $g_{AA'BB'}$ を保存する。すなわち、

$$\lambda^{AA'}{}_{CC'}\lambda^{BB'}{}_{DD'}g_{AA'BB'} = g_{CC'DD'} \tag{2.186}$$

定義によると拡張された Lorentz 群 $O(3,1)$ は Lorentz signature 計量の 4 次元実ベクトル空間上の計量を保存する線形写像からなる。したがって、$\lambda^{AA'}{}_{BB'}$ は V 上の Lorentz 変換である。実際、このように構成される Lorentz 変換は proper Lorentz 群 Λ をなす (これは後に成分を用いて明確に示される)。以上のようにして、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の全ての元 $L^A{}_B$ が proper Lorentz 変換 $\lambda^{AA'}_{BB'}$ と関連していることが確かめられた。さらに、$L^A{}_B, M^A{}_B$ が同じ Lorentz 群の元を与える必要

十分条件は、$M^A{}_B = \pm L^A{}_B$ である。実際写像 $f : \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}) \to \Lambda$ が $\lambda^{AA'}{}_{BB'} = L^A{}_B L^{A'}{}_{B'}$ によって得られる。この f は普遍被覆群の条件を全て満たす。すなわち単連結 Lie 群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ から Λ への準同型となり、任意の単連結開集合 $U \subset \Lambda$ に対して f は $f^{-1}(U)$ のそれぞれの連結成分と U 間の微分同相写像である。したがって、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ は Lorentz 群の普遍被覆群であると結論づけられる。同様に、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の要素で、W の 2 複素次元変換群の要素からなる群 $\mathrm{ISL}(2,\mathbb{C})$ は proper Poincare 群の普遍被覆群と見ることができる。

ここで普遍被覆多様体や普遍被覆群の定義を与える。

定義 2.124 (homotopic)

$\mathscr{M}$ を連結な多様体とし、$p, q \in \mathscr{M}$ に対して $\gamma : [0,1] \to \mathscr{M}$ と $\gamma' : [0,1] \to \mathscr{M}$ を $\gamma(0) = \gamma'(0) = p, \gamma(1) = \gamma(1)' = q$ の連続曲線とする。γ と γ' が homotopic であるとは、端点を固定した連続的な変形が可能であること、すなわち $\forall t \in [0,1](F(0,t) = \gamma(t), F(1,t) = \gamma'(t))$ と $\forall s \in [0,1](F(s,0) = p, F(s,1) = q)$ を満たす連続関数 $F : [0,1] \times [0,1] \to \mathscr{M}$ が存在することである。

homotopy は p, q 間の曲線の同値関係を定める。

定義 2.125 (単連結)

連結な多様体 $\mathscr{M}$ が単連結であるとは、$\mathscr{M}$ 上の全ての閉じた曲線 ($\gamma(0) = \gamma(1)$ を満たす曲線) が自明な曲線 $\forall t \in [0,1], \gamma(t) = \gamma(0)$ と homotopic であることと定義する。

定理 2.43

$\mathscr{M}$ が単連結であることは、次と同値である。$\forall p, q \in \mathscr{M}$ に対して p, q を結ぶ全ての曲線が homotopic である。

定理 2.44

$p, q \in \mathscr{M}$ 間の曲線の homotopy 同値類の数は p, q の選び方によらない。

定義 2.126 (基本群)

p を通る閉じた曲線の homotopy 同値類の集合は以下のように自然に群の構造が入る。この群を $\mathscr{M}$ の基本群 (fundamental group) といい、$\pi_1(\mathscr{M})$ と書く。

Γ_1 を γ_1 の同値類とし、Γ_2 を γ_2 の同値類とする。積 $\Gamma_1\Gamma_2$ を曲線 γ の同値類 Γ と定義する。ここで γ は次のように定義される。

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & (0 \le t \le \frac{1}{2}) \\ \gamma_2(2t-1) & (\frac{1}{2} \le t \le 1) \end{cases} \tag{2.187}$$

この積は Γ_1, Γ_2 における代表元 γ_1, γ_2 の選び方によらないことが示されるため well-defined である。単位元は自明な閉曲線の同値類である。

単連結をこの基本群の言葉で述べると、$\pi_1(\mathscr{M})$ がただ単位元からのみなる $\mathscr{M}$ が単連結である。

定義 2.127 (普遍被覆多様体)

$p \in \mathscr{M}$ を固定する。$\mathscr{M}'_p$ を固定した p と任意の $q \in \mathscr{M}$ 間の曲線の同値類とする。$q' \in \mathscr{M}'_p$ を曲線の同値類 q' の終点 $q \in \mathscr{M}$ に写す自然な写像 $f : \mathscr{M}'_p \to \mathscr{M}$ を考える。この写像が一対一になる必要十分条件は $\mathscr{M}$ が単連結であることである。しかし $\mathscr{M}$ が単連結でないときでも、$q \in \mathscr{M}$ の単連結な近傍 U を選び出し、p を始点とし終点を q とする曲線 (q' に分類される曲線)γ と、U 内の q を始点とする曲線をつなぐことで得られる曲線の同値類 $< U, \gamma > \subset \mathscr{M}'_p$ を考えることができる (もちろん容易に確かめられるが $\mathscr{M}'_p$ の全ての元はある開集合 $V \subset \mathscr{M}$ と $\mathscr{M}$ 上の p を始点とする曲線 τ を適当に選ぶことで $< V, \tau >$ の形の $\mathscr{M}'_p$ の部分集合に含まれるし、その逆も成り立つ。$< V, \tau >$ の形の $\mathscr{M}'_p$ の部分集合とその和集合を $\mathscr{M}'_p$ の開集合と定めることで位相を定義できる)。この構成によって $< U, \gamma > \subset \mathscr{M}'_p$ から U への全単射が得られる。さらに全てのこのような写像が微分同相であることを要求すると $\mathscr{M}'_p$ に多様体構造を定義でできる (U は多様体の開集合であり $\mathbb{R}^n$ に微分同相である。したがって結果的に $< U, \gamma >$ を $\mathbb{R}^n$ と同一視でき、$\mathscr{M}'_p$ に多様体構造が定義される)。$\mathscr{M}'_p$ は $p \in \mathscr{M}$ の選び方によらない。つまり、異なる点 p を選んでも互いに微分同相な多様体が得られる。したがって $\mathscr{M}'_p$ を $\mathscr{M}'$ と単に表記する。この多様体 $\mathscr{M}'$ を普遍被覆多様体 (universal covering manifold) という。

定義 2.128 (被覆写像)

$\mathscr{M}'$ の構成から、被覆写像 (covering map)$f : \mathscr{M}' \to \mathscr{M}$ は全ての単連結な開集合 $U \subset \mathscr{M}$ に対して、$f^{-1}(U)$ のそれぞれの連結成分と U 間の微分同相写像である。

さらに f が $\mathscr{M}'$ の全ての閉曲線を $\mathscr{M}$ の homotopy 的に自明な閉曲線に写すので、$\mathscr{M}'$ は単連結である。[*1]上記の被覆写像の制限が $f^{-1}(U)$ の連結成分と U 間の微分同相写像であることや、

[*1] より詳細を述べると、$\mathscr{M}'$ 内の閉曲線 γ' を、被覆写像によって $\mathscr{M}$ に移すと、これも $\mathscr{M}$ 上の閉曲線 $\gamma = f \circ \gamma'$ になる。一般的に、$\mathscr{M}$ 上の曲線 λ が与えられているとき、$\lambda = f \circ \lambda'$ を満たす $\mathscr{M}'$ 上の曲線 λ' が一意に存在することが知られており、この曲線を λ のリフトという。ここでは定義から、γ のリフトは γ' である。この γ を途中 $u \in [0,1]$ までで切って得られる曲線 $\gamma_u = \gamma(ut), t \in [0,1]$($t$ がこの曲線のパラメータ、u は切り取る位置を指定) の同値類は $\mathscr{M}'$ 上の点となるので、この u を変化させることで $\mathscr{M}'$ 上の曲線が得られる。この曲線も被覆写像で γ に写るのでリフトの一意性から γ' と同一である。したがって γ_0 と γ_1 は $\mathscr{M}'$ 上の同じ元 (同値類) を代表するため互いにホモトピーである。γ_0 は自明な閉曲線なので、$\gamma_1 = \gamma$ は自明な閉曲線とホモトピーである。ホモトピーであるということは自明な閉曲線から γ への連続な変形が存在することになる。その変形途中の閉曲線を $\mathscr{M}'$ 上にリフトすると、γ_0 のリフト ($\mathscr{M}'$ 上の自明な閉曲線) から、γ のリフト γ' への連続な変形が得られる。したがって γ' は自明な閉曲線とホモトピーなので、こうして $\mathscr{M}'$ が単連結であることがわかる。

$\mathscr{M}'$ が単連結であることは例えば Koch(2006)(恐らく web 上のノート) を参照されたい。

定義 2.129 (普遍被覆群)

Lie 群 G は多様体であるので、上記の議論が適用でき、普遍被覆多様体 G' が構成される。さらに G' には以下のようにして群構造が定義できる。まず、G' の構成において固定された点 p として G の単位元 e を選ぶ。e を始点とする曲線の同値類 $g'_1, g'_2 \in G'$ の代表元、G の曲線をそれぞれ γ_1, γ_2 とする。積 $g'_1 g'_2$ を曲線 $\gamma(t) = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$ の同値類と定義する。ここで $\gamma_1\gamma_2$ は G における群の積である。この定義は代表元の選び方によらないので well-defined である。上の積によって G' は Lie 群になり、被覆写像 $f : G' \to G$ が群準同型となる。この G' を G の普遍被覆群 (universal covering group) という。

G' は G の普遍被覆多様体であることと被覆写像 f は準同型であることによって特徴づけられる。

話をスピノールに戻す。$g_{AA'BB'}$ は V 上の計量なので、逆計量 $g^{AA'BB'}$ を定義することができる。

定義 2.130 (逆計量)

$g_{AA'BB'}$ の定義から、

$$g^{AA'BB'} = \epsilon^{AB}\bar{\epsilon}^{A'B'} \tag{2.188}$$

が逆計量となる。

T を V 上のタイプ (k,l) のテンソルとする。W 上のテンソルとして見ると、T はタイプ $(k,l;k,l)$ である。すなわち T は k 個の上付きプライム、アンプライム添字のペアと、l 個の下付きプライム、アンプライム添字のペアを持つ。 T を V 上のテンソルと見ると、V の添字 (プライム、アンプライムの添字のペア) の上げ下げは $g_{AA'BB'}, g^{AA'BB'}$ を用いるのが自然である。一方で、T を W 上のテンソルと見ると、$\epsilon_{AB}, \epsilon^{AB}, \bar{\epsilon}_{A'B'}, \bar{\epsilon}^{A'B'}$ を用いて添字の上げ下げをすでに定義した。実はこの V 上のテンソルの添字の上げ下げに関する二つの方法は常に同じ結果をもたらす。このわけは本章では計量の signature に $(+\ -\ -\ -)$ を選んだからである。計量の signature$(-\ +\ +\ +)$ に移行するには、$g_{AA'BB'}$ を $-\epsilon_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'}$ で定義すれば良い。しかし、V の添字の上げ下げに関する先の二つの方法では符号が異なってしまい、それぞれの計算でどちらの上げ下げの方法をとっているかを一々特定する必要が出てしまう。そのために本節では計量の

signature に $(+\ -\ -\ -)$ を選んだわけである。

スピノールの成分について考える。実ベクトル上のテンソルの場合と同様に、加法、テンソル積、縮約などのスピノールの演算は成分をとることと交換することが確かめられる。また、複素共役も成分をとることと交換する。つまり、$W^*, W, \overline{W}^*, \overline{W}$ のある元の複素共役をとってある基底についての成分を求めても、その元の成分をとって通常の複素数の意味でその成分の複素共役をとっても同じ結果になるのである。

各関係式を座標成分形式で表しておく。式 (2.179) を満たす基底 o^A, ι^A をとると、

$$\epsilon_{AB} = o_A \iota_B - \iota_A o_B \tag{2.189}$$

が成り立つことが、両辺を基底 o^A, ι^A に作用させても同じ結果になることから示される。したがって、ϵ_{AB} の成分 $\epsilon_{\Sigma\Omega}$ を行列で表現すると、

$$\epsilon_{\Sigma\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.190}$$

となる。同様に、

$$\epsilon^{AB} = o^A \iota^B - \iota^A o^B \tag{2.191}$$

であり、成分表示すると、

$$\epsilon^{\Sigma\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.192}$$

となる。

$SL(2,\mathbb{C})$ 変換 $L^A{}_B$ の成分は、

$$L^\Sigma{}_\Omega = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \tag{2.193}$$

となる。ここで a, b, c, d は

$$ad - bc = 1 \tag{2.194}$$

を満たす複素数である。

V の基底元の成分は、

$$t^{\Sigma\Sigma'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.195}$$

$$x^{\Sigma\Sigma'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \tag{2.196}$$

$$y^{\Sigma\Sigma'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix} \tag{2.197}$$

$$z^{\Sigma\Sigma'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix} \tag{2.198}$$

となる。Pauli spin 行列とそっくりですね。

任意のベクトル $v^{AA'} \in V$ は、

$$v^{AA'} = ttAA' + xx^{AA'} + yy^{AA'} + zz^{AA'} \tag{2.199}$$

と表され、V の基底 o^A, ι^A に関して成分表示すると、

$$v^{\Sigma\Sigma'} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}t+z & x+iy\\x-iy & t-z\end{bmatrix} \tag{2.200}$$

となる。

ここで一つ注意を与える。例えば W とその複素共役 $\overline{W}$ は全く別の空間である。上の例で言うと ϵ_{AB} の成分表示は、$o_A^1 := o_A, o_A^2 := \iota_A$ と定義すると、$\epsilon_{AB} = \epsilon_{11}o_A^1 o_B^1 + \epsilon_{12}o_A^1 o_B^2 + \epsilon_{21}o_A^2 o_B^1 + \epsilon_{22}o_A^2 o_B^2$ と表したときの各係数 ϵ_{11} 等を行列表示したものである。一方で、$t^{AA'}$ の成分表示は、当然だが $o_1^A := o^A, o_2^A := \iota^A$ と定義したとき、$t^{AA'} = t^{11}o_1^A o_1^B + t^{12}o_1^A o_2^B + t^{21}o_2^A o_1^B + t^{22}o_2^A o_2^B$ と表したときの各係数 t^{11} 等という意味ではない。$t^{AA'} : W^* \times \overline{W}^* \to \mathbb{C}$ であり、$o_2^A := \iota^A$ は $\overline{W}$ の元ではない。W の基底 o^A, ι^A が定まれば ϵ によって o_A, ι_A が W^* の基底として定まる。さらに、W の基底 o^A, ι^A に対応して $\overline{o}^{A'}, \overline{\iota}^{A'}$ が $\overline{W}$ の基底として定まる。最後に $\overline{\epsilon}$ によって $\overline{o}_{A'}, \overline{\iota}_{A'}$ が $\overline{W}^*$ の基底として定まる。基底 $o_1^A := o^A, o_2^A := \iota^A$ に関する $t^{AA'}$ の成分表示とは、$t^{AA'} = t^{11}o_1^A\overline{o_1}^{B'} + t^{12}o_1^A\overline{o_2}^{B'} + t^{21}o_2^A\overline{o_1}^{B'} + t^{22}o_2^A\overline{o_2}^{B'}$ と表したときの各係数 t^{11} 等という意味である。つまり、テンソルのタイプに応じて、そのタイプに対応する $W^*, W, \overline{W}^*, \overline{W}$ のそれぞれの基底 $(o_A, \iota_A), (o^A, \iota^A), (\overline{o}_{A'}, \overline{\iota}_{A'}), (\overline{o}^{A'}, \overline{\iota}^{A'})$ に関する成分を行列表示するというわけである。この辺りの議論は Penrose-Rindler(1984)Spinors and space-time,p110 114 参照。この本では成分を太字のアルファベット大文字で表している。スピノールの成分の計算を真面目にするときはこの Penrose の記法がわかりやすく便利である。詳細は次の例の最後に述べる。

$v^{AA'}$ の成分を $\lambda^{AA'}{}_{BB'} = L^A{}_B L^{A'}{}_{B'}$ で変換することを考えると次式のようになる。ここで $L^A{}_B \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ である。

$$\begin{bmatrix} t'+z' & x'+iy' \\ x'-iy' & t'-z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t+z & x+iy \\ x-iy & t-z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c}\overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} \tag{2.201}$$

この式の導出でも、成分をとることとスピノールの複素共役をとることが交換することを用いている。また、例として Penrose の記法による証明の仕方を紹介しておくと、W の基底を $\epsilon_1^A, \epsilon_2^A$ ととり、これらを $\epsilon_{\boldsymbol{A}}{}^A, (A=1,2)$ と書く。同様にして、$\overline{W}$ の基底はこれらの複素共役 $\overline{\epsilon}_{\boldsymbol{A'}}{}^{A'}, (A'=1,2)$ となるが、記号を簡略化するためにここでは単に $\epsilon_{\boldsymbol{A'}}{}^{A'}, (A'=1,2)$ とする。全く同様にして W^* の基底についても $\epsilon^{\boldsymbol{A}}{}_A, (A=1,2)$、$\overline{W}^*$ の基底についても $\epsilon^{\boldsymbol{A'}}{}_{A'}, (A'=1,2)$ と表記する。すると $v^{BB'} = v^{\boldsymbol{AB'}}\epsilon_{\boldsymbol{A}}{}^B \epsilon_{\boldsymbol{B'}}{}^{B'},\ L^A{}_B = L^{\boldsymbol{C}}{}_{\boldsymbol{D}}\epsilon_{\boldsymbol{C}}{}^A \epsilon^{\boldsymbol{D}}{}_B,\ \overline{L}^{A'}{}_{B'} = L^{\boldsymbol{A'}}{}_{\boldsymbol{B'}}\epsilon_{\boldsymbol{A'}}{}^{A'}\epsilon^{\boldsymbol{B'}}{}_{B'}$ と成分を用いてそれぞれの W 上のテンソルが表現されるので、あとは、$\epsilon^{\boldsymbol{A}}{}_C \epsilon_{\boldsymbol{B}}{}^C = \epsilon^{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{B}} = \delta^{\boldsymbol{A}}_{\boldsymbol{B}},\ \epsilon^{\boldsymbol{A'}}{}_{C'}\epsilon_{\boldsymbol{B'}}{}^{C'} = \epsilon^{\boldsymbol{A'}}_{\boldsymbol{B'}} = \delta^{\boldsymbol{A'}}_{\boldsymbol{B'}}$ 等を用いれば良い。
上式を $x^\mu = (t,x,y,z)$ とし、次の形で表すことができる。

$$x'^\mu = \sum_\nu \lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2.202}$$

こうして、$\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の元 (2×2 の複素行列 $L^\Sigma{}_\Omega$) から Λ の元 (4×4 の実行列 λ^μ_ν) を導く写像 f の成分表現が得られた。

スピノール $\psi^A \in W$ に対して、ベクトル $k^{AA'} \in V$ を

$$k^{AA'} = \psi^A \overline{\psi}^{A'} \tag{2.203}$$

で定める。

$$g_{AA'BB'} = k^{AA'}k^{BB'} = (\epsilon_{AB}\psi^A\psi^B)(\overline{\epsilon}_{A'B'}\overline{\psi}^{A'}\overline{\psi}^{B'}) = 0 \tag{2.204}$$

となるので、$k^{AA'}$ は V 上の Lorentz 計量に関してヌルベクトルになる。したがって ψ^A をヌルベクトル $k^{AA'}$ の"平方根"として捉えることができる。任意の二つのスピノール ψ^A, ϕ^A に対して、

$$g_{AA'BB'}\psi^A\overline{\psi}^{A'}\phi^B\overline{\phi}^{B'} = (\psi_B\phi^B)(\overline{\psi}_{B'}\overline{\phi}^{B'}) = |\psi_B\phi^B|^2 \tag{2.205}$$

したがって任意の二つのスピノールによってこのように構成された二つのヌルベクトルは非負の内積を持つ。これはこれらのヌルベクトルが light cone の同じ半分上に存在することを意味する。便利のためこれを future light cone と呼ぶことにする。したがってベクトル空間 V は自然

に時間の向きを持つ。さらに、実スピノールテンソル

$$\epsilon_{AA'BB'CC'DD'} = i\epsilon_{AB}\epsilon_{CD}\overline{\epsilon}_{A'C'}\overline{\epsilon}_{B'D'} - \overline{\epsilon}_{A'B'}\overline{\epsilon}_{C'D'}\epsilon_{AC}\epsilon_{BD} \tag{2.206}$$

は V 上のタイプ $(0,4)$ の完全反対称テンソルを定義し、V の向きを生ずる。

ϕ^A が ψ^A と位相因子だけ異なるとき ($\phi^A = c\psi^A, |c| = 1$)、$\phi^A$ は ψ^A と同じベクトル $k^{AA'}$ を定義するので、$k^{AA'}$ はスピノールの 1 パラメーター ($c, |c| = 1$) の族と関連している。

定義 2.131 (null flag)

実テンソル $F^{AA'BB'}$ を

$$F^{AA'BB'} = \psi^A\psi^B\overline{\epsilon}^{A'B'} + \overline{\psi}^{A'}\overline{\psi}^{B'}\epsilon^{AB} \tag{2.207}$$

と定義し、スピノール ψ^A に関連する null flag という。V 上のタイプ $(2,0)$ のテンソルと見ると $F^{AA'BB'}$ は反対称である。

null flag は、

$$F^{AA'BB'} = -F^{BB'AA'} \tag{2.208}$$

さらに、

$$F^{AA'BB'}F_{AA'BB'} = 0 \tag{2.209}$$

$$F^{AA'BB'}k_{BB'} = 0 \tag{2.210}$$

を満たす。ここで $k^{AA'} = \psi^A\overline{\psi}^{A'}$ である。したがって V 上のテンソルと見ると、$F^{AA'BB'}$ はヌルベクトル $k^{AA'}$ と null bi-vector になる。すなわち $F^{AA'BB'}$ は

$$F^{AA'BB'} = k^{AA'}m^{BB'} - k^{BB'}m^{AA'} \tag{2.211}$$

の形になる。ここで $k^{AA'}$ はヌル、$m^{AA'}$ は $k^{AA'}$ と直交する V 上のベクトルである。二つのスピノール ψ^A, ϕ^A が同じ null flag を与える必要十分条件は $\phi^A = \pm\psi^A$ が成り立つことである。$\psi^A, -\psi^A$ を区別する V 上のテンソルは ψ^A から構築することができない。

定義 2.132 (スピノール場)

Minkowski 空間 $(\mathbb{R}, \eta_{ab})$ 上のスピノール場を時空からスピノール空間 W への写像と定義する。

定義 2.133 (スピノールテンソル場)

ある特定のタイプのスピノールテンソル場を時空からそのタイプの W 上のテンソル空間への写

像と定義する。

スピノール場と通常のベクトル場の関係を述べる。先に述べたように W 上のタイプ $(1,0;1,0)$ の実テンソルは、Lorentz 計量が定義された 4 次元実ベクトル空間 V を形成する。t^a, x^a, y^a, z^a を Minkowski 時空上の正規直交基底ベクトル場とする。o^A, ι^A を W の式 (2.179) を満たす基底とする。Minkowski 時空上の点 x に対して、x で t^a, x^a, y^a, z^a を V の基底 $t^{AA'}, x^{AA'}, y^{AA'}, z^{AA'}$ と同一視することによって、V のベクトルを接空間形 V_x のベクットルへ写す線形写像 σ を定義する。別の言い方をすると、ハイブリッドなベクトル-スピノールテンソル場、

$$\sigma^a{}_{AA'} = t^a t_{AA'} - x^a x_{AA'} - y^a y_{AA'} - z^a z_{AA'} \tag{2.212}$$

と定義するわけである。x で $\sigma^a{}_{AA'}$ は V, V_x 間のこれらの空間の Lorentz 計量を保存する同型写像になる。すなわち、

$$\eta_{ab} = \sigma_a{}^{AA'} \sigma_b{}^{BB'} g_{AA'BB'} \tag{2.213}$$

を得る。ここで注意を与えておくと、小文字の添字の上げ下げは η^{ab}, η_{ab} を用いて、大文字の添字の上げ下げは $\epsilon^{AB}, \epsilon_{AB}$ とその複素共役を用いて行う。さらに $v^{AA'}$ に由来するベクトル場を $\sigma^a{}_{AA'} v^{AA'}$ と書かずに単に $v^{AA'}$ と表現することにする。Penrose-Rindler(1984) 流の記法では、ラベルにおいて $a = AA', b = BB' \cdots$ と同一視する。これによって例えば $\eta_{ab} = \epsilon_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'}$ のような表記が出来る。これも便利な記法の一つである。

ここからはスピノールの計算で便利な幾らかの恒等式を与える。

T_{ab} をスピノールテンソル $T_{AA'BB'}$ に対応するタイプ $(0,2)$ の実テンソルとする。通常のテンソルの場合と同じように、

$$\frac{1}{2}(T_{AA'BB'} - T_{BB'AA'}) = T_{(AB)[A'B']} + T_{[AB](A'B')} \tag{2.214}$$

が成り立つ。タイプ $(0,0;0,2)$ の反対称スピノール空間は 1 次元ベクトル空間であり、$\bar{\epsilon}_{A'B'}$ により張られるので、

$$T_{(AB)[A'B']} = \phi_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'} \tag{2.215}$$

と書ける。ここで ϕ_{AB} は対称である。この式の両辺と $\bar{\epsilon}^{A'B'}$ と縮約をとることで、

$$\phi_{AB} = \frac{1}{2} T_{(AB)A'}{}^{A'} \tag{2.216}$$

を得る。同様に、

$$T_{[AB](A'B')} = \epsilon_{AB}\psi_{A'B'} \tag{2.217}$$

と書けるが、T は実なので $\overline{\psi}_{AB} = \phi_{AB}$ が成り立つ。したがって、

$$\frac{1}{2}(T_{AA'BB'} - T_{BB'AA'}) = \phi_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'} + \overline{\phi}_{A'B'}\epsilon_{AB} \tag{2.218}$$

が成り立つ。特に全ての反対称テンソル $T_{ab} = T_{[ab]}$ は右辺の形で表すことができる。同様に、

$$\frac{1}{2}(T_{AA'BB'} - T_{BB'AA'}) = T_{(AB)(A'B')} + T_{[AB][A'B']} = T_{(AB)(A'B')} + \frac{1}{4}\epsilon_{AB}\bar{\epsilon}_{A'B'}T \tag{2.219}$$

が成り立つ。ここで、$T = T_A{}^A{}_{A'}{}^{A'} = T_a{}^a$ である。特に全ての対称テンソル $T_{ab} = T_{(ab)}$ は右辺の形で表すことができる。上式の両辺と $\bar{\epsilon}^{A'B'}$ と縮約をとることで、

$$T_{[AB]A}{}^{A'} = \frac{1}{2}\epsilon_{AB}T \tag{2.220}$$

を得る。

Minkowski 時空上のスピノール場の微分を次のように定義する。スピノール場 ψ^A は時空の点から W 上への写像なので、Minkowski 時空のグローバルな慣性座標に関する通常の偏微分をとれる。

定義 2.134 (スピノールの微分)
スピノールの微分 $\partial_{BB'}\psi^A$ をその成分が基底 o^A, ι^A に関して

$$\partial_{\Lambda\Lambda'}\psi^\Gamma = \sum_\mu \sigma^\mu{}_{\Lambda\Lambda'}\frac{\partial\psi^\Gamma}{\partial x^\mu} \tag{2.221}$$

となるようなタイプ $(1,1;0,1)$ のスピノールテンソル場と定義する。

与えられた $\sigma^a{}_{AA'}$ を固定することで、このように定義されたスピノールテンソル場 $\partial_{BB'}\psi^A$ はグローバルな慣性系 x^μ、スピノール基底 o^A, ι^A のとり方によらず well-defined である。任意のタイプのスピノールテンソル場の微分もグローバルな慣性系についての成分の偏微分に $\sigma^a{}_{AA'}$ を作用させることで同じように定義される。$\partial_{AA'}$ の線型であり、Leibnitz 則を満たすこと、縮約と交換することは容易に示すことができる。また、$\partial_{AA'}$ は次式を満たす。

$$\partial_{AA'}\epsilon_{BC} = 0 \tag{2.222}$$

さらにベクトル場 $V^{BB'}$ に対して、

$$\partial_{AA'} v^{BB'} \sigma^{a}{}_{AA'} \sigma_b{}^{BB'} \partial_a v^b \tag{2.223}$$

が成立する。より一般的に任意の階数の通常のテンソル場に対して、$\partial_{AA'}$ の作用は通常の微分演算子 ∂_a の作用と一致する。したがって $\partial_{AA'}$ は Minkowski 時空での通常の微分演算子 ∂_a のスピノールテンソル場への一般化と見ることができる。

Minkowski 時空では任意のスピノールテンソル場への作用を考えたとき微分演算は交換する。

$$\partial_{AA'} \partial_{BB'} = \partial_{BB'} \partial_{AA'} \tag{2.224}$$

結果的に式 (**??**) の導出ど同様にして、

$$\partial_{AA'} \partial_B{}^{A'} = \frac{1}{2} \epsilon_{AB} \Box, \ \Box = \partial_{AA'} \partial^{AA'} \tag{2.225}$$

が得られる。

次に曲がった時空上でのスピノールを導入する。曲がった時空上でのスピノールを定義するための厳密な数学的枠組みがファイバー束である。

曲がった時空 $(\mathscr{M}, g_{ab})$ におけるスピノール場を構築するのに、まず向き付られた、時間向き付された基底の主ファイバー束から始める。それぞれのファイバーは proper Lorentz 群と微分同相である。そして $\mathscr{M}$ 上の主 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ 束を作るためにそれぞれのファイバーを開封する。するとスピノール束はファイバーが $\mathscr{F} = \mathbb{C}^2$ のこの主束に関するファイバー束として定義される。ここで χ は $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^2$ 上への自然な作用にとっている。$x \in \mathscr{M}$ でのスピノールがスピノール束の x 上のファイバー内の点として定義される。

$\pi_1(\mathscr{B}) = Z_2$ ならば以下のように $\mathscr{M}$ 上にスピノールを定義する。$\mathscr{B}$ の普遍被覆多様体 $\mathscr{B}'$ はファイバー群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の主ファイバー束の自然な構造を持つ。スピノール束 $S(\mathscr{M}$ を $(\mathscr{B}', \mathrm{SL}(2,\mathbb{C}), \mathscr{M}, \phi')$ に関する、ファイバー多様体 $\mathbb{C}$ と $L \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ の $c \in \mathbb{C}$ への作用が

$$(\chi_L(c))^{\Sigma} = \sum_{\Gamma=1}^{2} L^{\Sigma}{}_{\Gamma} c^{\Gamma} \tag{2.226}$$

で定義される χ_L のファイバー束と定義する。$x \in \mathscr{M}$ でのスピノールは x 上のファイバー内の

$S(\mathscr{M})$ の点と定義される。同様に、タイプ $(k,l;k',l')$ のスピノールテンソルの束 $S_{k,l,;k',l'}(\mathscr{M})$ は $\mathscr{F}$ に $\mathscr{C}^2$ を k 個、その双対空間 $\mathbb{C}^{2*}$ を l 個、その複素共役空間 $\overline{\mathbb{C}^2}$ を k' 個、さらにその複素共役双対空間 $\overline{\mathbb{C}^2}^*$ のテンソル積にとることで定義される。χ の

$$c^{\Sigma_1\dots\Sigma_k}{}_{\Lambda_1\dots\Lambda_l}{}^{\Sigma'_1\dots\Sigma'_{k'}}{}_{\Lambda'_1\dots\Lambda'_{l'}} \in \mathscr{F} \tag{2.227}$$

への作用は、

$$\chi_L(c)^{\Sigma_1\cdots}{}_{\dots\Lambda'_{l'}} = \sum_{\Gamma_1\dots\Delta'_{l'}} L^{\Sigma_1}{}_{\Gamma_1}\dots(\overline{L}^{-1})^{\Delta'_{l'}}{}_{\Lambda'_{l'}}c^{\Gamma\cdots}{}_{\dots\Delta'_{l'}} \tag{2.228}$$

で与えられる。同値だが、スピノールの概念が与えられると、スピノールテンソルを通常のベクトルの場合と同様にスピノールの線形 (と反線形) 写像として定義することもできる。スピノールテンソルを表すのに大文字のラテン添字を用いる。

2.10　表現論

ここでは表現論について述べる。まず表現論の基礎的な事項についてまとめる。既約テンソルへの分解を目指す。本節を書くにあたって、Yoshikawa(1996) [19], Iwahori(1978) [20], Ueda(2015) [21] を参考にした。

定義 2.135 (表現)

体 K 上のベクトル空間 V を表現空間とする表現 (ρ, V) とは、G からベクトル空間 V 上の一般線形群 $GL(V)$ への群準同型である。つまり表現とは、

$$\rho(g_1g_2) = \rho(g_1)\rho(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G \tag{2.229}$$

を満たす写像

$$\rho : G \to GL(V) \tag{2.230}$$

である。

表現の次元は、表現空間 V の次元 n として定義する。

群 G の元 g ごとに表現 $\rho(g)$ が対応する (表現 ρ による $g \in G$ の像 $\rho(g)$ を簡単に g の表現という)。V を特に $\mathscr{C}$ 上の n 次元ベクトル空間とすると、$\rho(g)$ は n 行 n 列の正則行列で表される線形演算子 (表現行列とも呼ぶ) となる。表現の定義から以下の性質が成り立つ。

・G の二つの元 g, g' の積 gg' の表現 $\rho(gg')$ はそれぞれの表現の積に等しい (表現の準同型写像の

要請による)。:$\rho(gg') = \rho(g)\rho(g')$ ・G の単位元 e には単位行列 $\rho(e) = 1$ が対応する。
・G の元 g の逆元 g^{-1} には逆行列が対応する。:$\rho(g^{-1}) = \rho^{-1}(g)$。

表現による群の元から表現行列への写像は準同型だから、一般には全射でも単射でもない。ここで特に群の全ての元に単位行列を対応させる表現を恒等表現、写像が同型 (準同型かつ全単射) の表現は忠実な表現という。

定義 2.136 (表現の同値)

群 G の二つの表現 $(\rho_1, V), (\rho_2, W)$ が与えられたとき、ある線形同型 $S : V \to W$ が存在し、二つの表現が任意の元 g に対して相似変換

$$S\rho_1(g)S^{-1} = \rho_2(g) \tag{2.231}$$

によって表されるとき、表現 T_1, T_2 は同値であるという。

同値な表現は本質的には同じ表現である。何故なら相似変換は表現空間 (ベクトル空間 V) において基底を変換したことによる行列の変換だからである (その時の基底の変換行列が上の S である)。
ここで混乱するかもしれないので注意しておく。表現は一意的なものでなく表現空間をどのようにとるかによって変わってくる。よって一般には一つのある群 G に対して異なる複数の表現を考えることができる。群の表現は一通りではない。例えば一つの群 G に対して恒等表現を考えたり、下の正則表現を考えたりすることもできる。

定義 2.137 (正則表現)

群の元が基底を構成するベクトル空間を表現空間とする線形表現を正則表現という。

このとき群の位数 (集合の濃度、元の数)n と同じ個数の基底が存在するので、表現の次元は群の位数 n に等しくなる。群 G の元 $g_i(i = 1, \ldots, n)$ から構成される表現空間の基底を $|g_i >$ と書く。線形表現 $\rho(g_i)$ は基底 $|g_j >$ を基底 $|g_i g_j >$ へと変換する (線形表現の定義)。よって、

$$\rho(g_i)|g_j >= |g_i g_j > \tag{2.232}$$

もちろん、任意の表現空間の元 $a^k|g_k >\in V$ と任意の $g_i, g_j \in G$ に対して、

$$\rho(g_i g_j)a^k|g_k >= a^k|g_i g_j g_k >= \rho(g_i)\rho(g_j)a^k|g_k > \tag{2.233}$$

なので、

$$\rho(g_i g_j) = \rho(g_i)\rho(g_j) \tag{2.234}$$

が成り立ち、線形表現は準同型になっており表現の定義である準同型の性質を持っていることが確認される。表現空間はベクトル空間なので

$$< g_i|g_j >= \delta_{ij} \tag{2.235}$$

であり、この基底 $|g_i>$ $(i = 1, \ldots, n)$ に対して $\rho(g)$ を行列表示すると、

$$[\rho(g)]_{ij} =< g_i|\rho(g)|g_j >=< g_i|gg_j > \tag{2.236}$$

となるので、$D(g)$ は行と列がそれぞれ 1 を 1 つだけ含み、他は 0 の行列であることがわかる (何故なら固定された $g \in G$ に対して $g_i g = g_j g (g_i \neq g_j)$ とすると右から g^{-1} をかけると $g_i = g_j$ となって矛盾。つまり、ある元にその位数 n の群を構成する元をそれぞれかけると異なる n 個の元、つまりその群の全ての元が得られるからである)。

定義 2.138 (表現の和/表現の直和)

$\rho_1 : G \to GL(V_1)$ と $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ をそれぞれ群 G の K 上の表現とする。V_1, V_2 の直和 $V_1 \oplus V_2$ を考える。$V_1 \oplus V_2$ の任意の元 v は、

$$v = v_1 + v_2, \quad v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \tag{2.237}$$

の形に一意的に表すことができる。このとき、

$$(\rho(g))(v) = (\rho_1(g))(v_1) + (\rho_2(g))(v_2) \tag{2.238}$$

と定義することによって G の K 上の表現 $\rho : G \to GL(V_1 \oplus V_2)$ が得られる。このようにして得られる表現 ρ を ρ_1, ρ_2 の表現の和あるいは直和といい、$\rho_1 \oplus \rho_2$ と表す。

定義 2.139 (表現の積)

$\rho_1 : G \to GL(V_1)$ と $\rho_2 : G \to GL(V_2)$ を群 G の二つの表現とする。このとき G の表現 ρ をテンソル積のベクトル空間 $V_1 \otimes V_2$ を表現ベクトルとし、

$$\rho(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g) \tag{2.239}$$

のように $g \in G$ に作用する表現と定義する。このようにして得られる表現 $\rho : G \to GL(V_1 \otimes V_2)$ を ρ_1, ρ_2 の表現の積といい、$\rho_1 \otimes \rho_2$ と表す。

定義 2.140 (表現のテンソル積)

G_1, G_2 を群とし、K を体とする。$\rho_1 : G_1 \to GL(V_1)$ と $\rho_2 : G_2 \to GL(V_2)$ をそれぞれ G_1, G_2 の K 上の表現とする。$V_1 \otimes V_2$ を線形空間の K 上のテンソル積とする。$(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ に対して、$\rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2)$ を線形写像のテンソル積とするとき、

$$\rho(g_1, g_2) = \rho_1(g_1) \otimes \rho_2(g_2) \tag{2.240}$$

とおくことで、群の直積 $G_1 \times G_2$ の K 上の表現 $\rho : G_1 \times G_2 \to GL(V_1 \otimes V_2)$ が得られる。このようにして得られる $G_1 \times G_2$ の表現 ρ を ρ_1, ρ_2 のテンソル積といい、$\rho_1 \otimes \rho_2$ と表す。[*2]

定義 2.141 (G 不変/部分表現)

V の線形部分空間 W が G 不変であるとは、$\forall g \in G, \forall w \in W$ に対して、$\rho(g)w \in W$ が成り立つことと定義する。表現 ρ を G 不変部分空間 W へ制限したものを部分表現という。

定義 2.142 (既約表現)

表現 $\rho(g)$ が既約であるとは、それが自明でない部分表現を持たないことと定義する。

任意の表現は自明な G 不変部分空間、つまり全体 V と $\{0\}$ を部分表現として含む。既約表現はこれらの自明な部分表現以外の部分表現を持たない表現のことである。

定義 2.143 (可約表現)

表現 $\rho(g)$ は真の非自明な不変部分空間を持つとき可約 (reducible) であるという。

定義 2.144 (完全可約)

群 G の表現 $\rho : G \to GL(V)$ は、任意の ρ 不変部分空間 W に対して、W の ρ 不変補空間 (すなわち $V = W \oplus W^c$ であり、W_c もまた ρ の不変部分空間となるような部分空間) が存在するとき完全可約であるという。

　行列表現の形で言い直すと、可約表現は適当な相似変換 (すなわち座標変換)$\rho \to S\rho S^{-1}$ によって三角行列に変換されるような表現のことをいい、完全可約は適当な相似変換によってブロック対角化される、つまり行列の直和に分解されるような表現のことをいう。ある表現がブロック対角に変換されたとき、それぞれのブロックは積で閉じている。したがってそのブロックだけ取り出しても元の群の表現になっている。既約表現はこのように小さな行列に分解されない表現である (注意しておくがブロック対角化された各ブロックが既約であるとは限らない。その

[*2] この表現のテンソル積の定義はかなり一般的なものであるが、物理においてはむしろ表現の積の方をよく用い、こちらを表現のテンソル積と呼ぶことが多い。また $V_1 = V_2 =: V$ のように個々の表現空間として同じものを考えることが多い。

ブロックについてさらに細かいブロック対角化を行えるかもしれない)。全ての群の元に関して、ブロックに分かれているということは、群の作用によってそのブロックに対応した部分空間から出ることはないということである。これが不変部分空間である。可約な表現はこのような不変部分空間を一つでもいいので持つような表現であり、完全可約な表現はこのような複数の不変部分空間に完全に分解できるような表現である。したがって完全可約ならば可約であるが、可約だからといって完全可約であるとは限らない。

定義 2.145 (既約分解)
表現を既約表現の直和に分解することを既約分解という

$$\rho = \rho_1 \oplus \rho_2 \oplus \cdots \rho_n \tag{2.241}$$

ここで、ρ_i は既約表現である。

一般の表現は既約表現の直和になっていることが多いので、既約表現を挙げておくことは重要である。非同値な既約表現の次元の二乗和は群の位数に一致することが知られている (証明は省略する)。

群の表現論において重要な Schur の補題について述べる。

補題 2.1 (Schur の補題 I)
群 G の二つの既約表現を D_1, D_2 とし、その表現空間をそれぞれ V_1, V_2 とする。一次変換 $A : V_1 \to V_2$ が全ての $g \in G$ に対して $AD_1(g) = D_2(g)A$ を満たすならば、A は同型写像か $A = 0$ である。

proof) A の核 $\mathrm{KerA} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{V_1} | \mathrm{Ax} = 0\}$ と A の像 $\mathrm{ImA} = \{\mathrm{f(x)} \in \mathrm{V_2} | \forall \mathrm{x} \in \mathrm{V_1}\}$ を考える。$x \in \mathrm{KerA}$, $AD_1(g)x = D_2(g)Ax = 0$ なので任意の g に対して $D_1(g)x \in \mathrm{KerA}$ となる。よって KerA は不変部分空間であるが、D_1 は既約なので、$\mathrm{KerA} = \mathrm{V_1}$ か $\mathrm{KerA} = \{0\}$ である。次元定理 $\mathrm{dimV_1} = \mathrm{dim\{KerA\}} + \mathrm{dim\{ImA\}}$ よりこれはそれぞれ $\mathrm{ImA} = \{0\}$ と $\mathrm{dim\{ImA\}} = \mathrm{dimV_1}$ とならなければならないことを意味する。同様に、$y \in \mathrm{ImA}$ とすると $\exists v \in V_1 (Av = y)$ であり、任意の g に対して $D_2(g)Av = AD_1(g)v \in \mathrm{ImA}$ となる。よって ImA は不変部分空間であるが、D_2 は既約なので、$\mathrm{ImA} = \{0\}$ か $\mathrm{ImA} = \mathrm{V_2}$ である。したがって $\mathrm{KerA} = \mathrm{V_1}$, $\mathrm{ImA} = \{0\}$、または $\mathrm{KerA} = \{0\}$, $\mathrm{ImA} = \mathrm{V_2}$ かつ $\mathrm{dimV_1} = \mathrm{dimV_2}$ である。したがって前者は $A = 0$, 後者は A が同型写像であることを意味する。

補題 2.2 (Schur の補題 II)

群 G の表現 D が既約ならば、全ての $g \in G$ に対して

$$D(g)M = MD(g) \tag{2.242}$$

を満たす行列は

$$M = cE, c = const. \tag{2.243}$$

に限られる。ここで E は単位行列である。

proof) c を M の固有値の一つとして $A := M - cE$ とする。$\mathrm{detA} = 0$ であり、また全ての $g \in G$ に対して $AD(g) = D(g)A$ であるから Schur の補題 I より A は同型写像か 0 であるが、$\mathrm{detA} = 0$ なので同型写像ではなく、$A = 0$。したがって $M = cE$ が示された。

定義 2.146 (基本表現)

群 G そのものがあるベクトル空間 V に作用する行列からなる群 (またはそのような行列からなる群と同一視できるような群) である場合、定義通りの自然な表現 $\rho : G \to GL(V)$ が、G の行列をそのまま $GL(V)$ の元に対応させ ($\rho(g) = G, \quad G$ は g を表す行列自身)、表現空間を元のベクトル空間 V にとることで得られる。このようにして得られる表現を基本表現 (定義表現) と呼ぶことにする。

行列それ自身が表現となる n 次元ベクトル表現 (表現空間 $V = \mathbb{C}^n$) を基本表現という。少々説明がわかりにくいかもしれないので、もう少し直感的な説明を加えておくと、表現というのはある群 G を準同型でベクトル空間上の一般線形群 $GL(V)$ に写してもとの群 G の構造を $GL(V)$ の構造を調べることで明らかにしようというものである。群 G が例えば $GL(V)$ 自身だった場合、表現 $\rho : G \to GL(V)$、すなわち $\rho : GL(V) \to GL(V)$ は恒等写像にとれば明らかに表現になっている。このように群 G そのものがあるベクトル空間に作用する行列からなる群 (またはそれと同一視できるような群) の場合、自然に表現を導入することができる。この表現を基本表現というのである。[*3]

ここからは、テンソルを既約テンソルに分解するということの意味とその方法について考える。これが本節の目的である。ベクトル空間 $V(\mathrm{dim}V = n)$ の m 個のテンソル積 $T = T_m(V) =$

[*3] 基本ウェイトを最高ウェイトとする表現を基本表現ということがあるらしいので、定義表現などと別の言葉を使った方が良いかもしれない。本書では基本ウェイト等を筆者が執筆していないうちはこの意味で基本表現という言葉を使うことにする。

$V \otimes \cdots \otimes V$ を表現空間として、対照群 S_m と一般線形群 $GL(V)$ の表現が自然に定まる。これらをそれぞれ ρ_1, ρ_2 とするとき、$\rho_1(S_n)$ 及び $\rho_2(GL(V))$ の元の一次結合全体をそれぞれ R,S とすると、

$$\mathrm{End}_R(T) = S, \quad \mathrm{End}_S(T) = R \tag{2.244}$$

という関係が成り立つ。これを用いると、テンソル空間 T の S_m と $GL(V)$ の作用での既約成分への分解が明らかになる。これが H. Weyl の相互率 (テンソル解析の基本定理) として知られているものである。下記の事項に対しては特に、岩堀 (1978)"対照群と一般線形群の表現論"を参照した。また、$SO(n)$ などのより物理的な背景や計算等について詳しい Hamermesh(1964)"Group Theory and its Application to Physical Problems"を参照した。 H.Weyl(2004)"古典群-不変式と表現"や Boerner(1963)"Representations of Groups"も参考になるだろう。

一般線形群 $GL(n,\mathbb{C})$(またはその部分群 $SO(n), SU(n)$) の既約表現を置換群を用いて構成する。言い換えると、一般線形群やその部分群である回転群などのテンソル表現を既約表現に分解する。まず、既約分解の大まかな流れを見る。上で定義したように行列それ自身が表現となる n 次元ベクトル表現 (表現空間 $V = \mathbb{C}^n$) が基本表現であり、この組み合わせによって一般の表現を構成する。ここで $g \in GL(n,\mathbb{C}^n)$ とし、その成分 (表現行列の成分) を g^{ij} とする。表現空間の m 回の直積 $V \otimes \cdots \otimes V$ を考える。すると基本表現 (ρ, V) を用いて $V \otimes \cdots \otimes V$ 上のテンソル積表現 $(\rho \otimes \cdots \otimes \rho, V \otimes \cdots \otimes V)$ が得られる。よって直積空間 $V \otimes \cdots \otimes V$(次元は n^m) は $GL(n,\mathbb{C})$ の表現空間となる。しかし、この表現は一般に可約である。この空間に置換群 S_m を

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m)} \tag{2.245}$$

のように作用させると S_m の作用と $GL(n,\mathbb{C})$ の作用は可換である。[*4]

$$\sigma(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)) = g(\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)) = gv_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma(m)} \tag{2.247}$$

したがって、S_m の既約表現への射影演算子 (Young symmetrizer)e_B(B はある Young 盤を示す添字) をかけた $e_B(V \otimes \cdots \otimes V)$ は $GL(n,\mathbb{C})$ の不変部分空間となる。実はこれが $GL(n,\mathbb{C})$ の既約表現を与える。したがって $GL(n,\mathbb{C})$ の既約表現は Young 図により分類される (対称群 S_m の既約表現も Young 図により分類される)。一方で、$GL(n,\mathbb{C})$ の部分群である $SU(n)$ や

[*4]

$$\sigma(g(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m)) = \sigma(gv_1 \otimes \cdots \otimes gv_m) = \sigma(w_1 \otimes \cdots \otimes w_m) = w_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes w_{\sigma(m)} = gv_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes gv_{\sigma(m)} \tag{2.246}$$

ここで、$w_i := Mv_i$ と定義した。σ はあくまで $\cdots \otimes \cdots \otimes \cdots$ のスロットを置換する演算である。

$SO(n)$ の場合には $e_B(V\otimes\cdots\otimes V)$ は確かに不変部分空間であるが、実はこれはまだ可約であり、さらに小さい既約表現に分解することができるのである。いずれの場合でも、テンソルの既約分解は次の重要な定理を基本としている

定理 2.45

$GL(n)$ のテンソル積空間 $T_m(V), \mathrm{dimV}=\mathrm{n}$ 上の表現において、$\{\lambda_1,\dots,\lambda_n\},\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\geq 0,\lambda_1+\cdots+\lambda_n=m$ でラベル付けされる Young 図に対するそれぞれの標準 Young 盤に対応する Young 対称子をテンソル空間に作用させることで、既約な不変部分空間を構成することができる。

上の定理を証明することでテンソルの既約分解について詳述する。
まず証明に必要となる線形環などの事項についてまとめる。

定義 2.147 (線形環, 代数, 多元環)

集合 R が体 K 上の線形環 (代数, 多元環) とは次の条件を満たすことと定義する。
(1) R は K 上の有限ベクトル空間
(2) 乗法、すなわち双線形写像 $R\times R\to R((a,b)\mapsto ab)$ が与えられていて、結合率

$$(ab)c=a(bc) \tag{2.248}$$

を満たす。
(3) 乗法の単位元 1_R が存在する。すなわち任意の $a\in R$ に対して、

$$1_Ra=a1_R=a \tag{2.249}$$

を満たす元の存在。

定義 2.148 (群環)

有限群 G の体 K 上の群環 $K[G]$ とは、G の元を基底とする K 上のベクトル空間 $K[G]$ において、乗法を

$$\left(\sum_{\sigma\in G}\lambda_\sigma\sigma\right)\left(\sum_{\tau\in G}\mu_\tau\tau\right)=\sum_{\xi\in G}\nu_\xi\xi \tag{2.250}$$

で定義した線形環である。ただし、$\nu_\xi=\sum_{\sigma\in G}\lambda_\sigma\mu_{\sigma^{-1}\xi}$ である。

定義 2.149 (部分線形環, イデアル)

R を体 K 上の線形環とする。R の部分集合 S が R の部分線形環であるとは、S が R の部分線

形空間であって、かつ R の乗法に関して閉じていることである。すなわち、

$$xy, x+y, cx \in S(\forall x, y \in S, c \in K) \tag{2.251}$$

が成り立つことである。

R の部分集合 $\mathfrak{l}$ が R の左イデアルであるとは、$\mathfrak{l}$ が環 R の左イデアルとなること、すなわち、部分線形空間であって、$\mathfrak{l}$ の各元に R の任意の元を左から掛けて得られる元が常にその空間に属す空間を指す。すなわち、

$$x+y, cx, zx \in S(\forall x, y, z \in S, \forall c \in K) \tag{2.252}$$

が成り立つことである。

定義 2.150 (左 R 加群 (R 加群))

R を体 K 上の線形環とする。アーベル群 V が左 R 加群であるとは、

$$R \times V \to V, (a, v) \mapsto av \tag{2.253}$$

が与えられていて次の条件を満たすことと定義する。

(1)$\forall a, b \in R, \forall v, u \in V$

$$a(bv) = (ab)v, \tag{2.254}$$

$$(a+b)v = av + bv \tag{2.255}$$

$$a(v+u) = av + au \tag{2.256}$$

$$1_R v = u \tag{2.257}$$

(2) $K \subset R$ により V は K 上のベクトル空間となるが、V は K 上有限次元

もちろんベクトル空間は加法に対してアーベル群となるので、R 加群を考えられる。体 K 上の線形環 R に対して、$V = R$ とおき、写像 $R \times V \to V$ を R の乗法をそのまま用いて $(a, v) \mapsto av$ とすれば、$V = R$ は左 R 加群となる。R をこのように左 R 加群とみなしたものを左正則 R 加群という。

定義 2.151 (部分 R 加群)

一般に体 K 上の線形環 R の部分加群 T と R 加群 V の部分加群 U とに対して、$t_1u_1 + \cdots + t_ru_r, (\forall t_1, \ldots, t_r \in T, \forall u_1, \ldots, u_r \in U, r \in \mathbb{N})$ の形の元全体の集合を TU と書く。R 加群の部

分加群 U が $RU \subset U$ を満たすとき、U を V の部分 R 加群という。

一般に $v \in V$ に対し Tv は $\{tv|t \in T\}$ を表し、また $a \in R$ に対し aU は $\{au|u \in U\}$ を表すものとする。

定義 2.152 (線形環の表現)
体 K 上の線形環 R と、K 上のベクトル空間 V に対して、R の V 上の表現とは、線形環としての準同型写像

$$\rho : R \to \mathrm{End(V)} \tag{2.258}$$

であって、$\rho(1_R) = 1_V(1_V$ は $\mathrm{End}(V)$ の単位元) を満たすものである。$\mathrm{End}(V)$ は V から V への K 線形写像の全体であり、これは n^2 次元の線形環であり、$\mathrm{End}(V) \cong M_n(K)(M_n$ は n 次元行列全体) となる。ベクトル空間 V を表現 ρ の表現空間といい、$\mathrm{dim}V$ を表現 ρ の次数という。

End(V) の元で行列式が 0 でないもの全体が一般線形群 GL(V) である。

R の表現 (ρ, V) があれば、$\forall a \in R, \forall x \in V$ に対して、$ax \in V$ を

$$ax := \rho(a)x \tag{2.259}$$

とすることで V は R 加群になる。
逆に、R 加群 V があれば、$\forall a \in R, \forall x \in V$ に対し、$\rho(a) \in \mathrm{End}(V)$ を $\rho(a)x := ax$ で定義することで、$\rho : R \to \mathrm{End}(V)$ は R の表現になっている。
このように線形環 R の V における表現は、R 加群 V と本質的に同じである。これは非常に基本的で重要である。表現を加群の言葉に焼き直せるのである。後に述べるように群の意味での既約表現も R 加群 V が $0, V$ 以外の部分 R 加群 W を持たないことと言い換えられるのである。R 加群 V の定める表現を表現 V などと略称することもある。

また、群 G の表現 $\rho' : G \to GL(V)$ があれば、自然に群環の表現 $\rho : K[G] \to \mathrm{End}(V)$ も $\rho(\sum_{x \in G} \lambda_x x) = \sum \lambda_x \rho'(x)$ で定義することで定まる。上で述べたように線形環における表現は V に加群の構造を入れていることに相当するので、これは $K[G]$ 加群の構造を V に入れていることと同値である。また、逆に ρ を G に制限すると、G の表現が得られる。言い換えると、$K[G]$ 加群 V があると、$\phi(g)(v) := gv$ と定義することで G の表現 ϕ が定まる。したがって、有限群 G の体 K 上の表現を考えることは、群環 $K[G]$ の表現を考えることと本質的に同じである。

定義 2.153 (R 準同型写像)

R を K 上の線形環、V, U を R 加群とする。加群としての準同型写像 $\phi : V \to U$ が各 $a \in R$ に対して、

$$\phi(ax) = a\phi(x), \ (\forall x \in V) \tag{2.260}$$

を満たすとき、ϕ を V から U への R 準同型写像であるといい、その全体の集合を $\mathrm{Hom}_R(U, V)$ と書く。特に $U = V$ のとき、$\mathrm{End}_R(V) := \mathrm{Hom}_R(V, V)$ と書く。

V の定める R の表現を $\rho : R \to \mathrm{End}(V)$ とすれば、$u \in \mathrm{End}(V)$ に対して、

$$u \in \mathrm{End}_R(V) \Leftrightarrow u\rho(a) = \rho(a)u, \quad \forall a \in R \tag{2.261}$$

が成り立つ。つまり $\mathrm{End}_R(V)$ は表現と交換する表現空間への演算を表す集合である。

定義 2.154 (R 同型写像)

R 準同型写像 $\phi : V \to U$ が全単射のとき、ϕ を R 同型写像という。R 同型写像があるとき、V と U は R 同型、または同値であるといい、$V \cong_R U$ と書く。

定義 2.155 (線形環の表現の既約性)

体 K 状の線形環 R の表現 (ρ, V) が可約であるとは、0 と V 以外に V の部分 R 加群 W が存在することと定義する。そのとき、R 加群 $W, V/W$ を表現空間とする R の表現が生じる。これらをそれぞれ W による (ρ, V) の部分表現、W による (ρ, V) の商表現という。また、可約でない表現を既約表現という。

再び、群環を考えることで、群の意味での表現の既約性とここでの定義との関係を見ておく。線形環の表現のところで述べたが、有限群 G の体 K 上の表現を考えることは群環 $K[G]$ の表現を考えること同じであり、それは $K[G]$ 加群 V を考えることと同じであった。したがって、部分 $K[G]$ 加群 W で 0 と V 以外のものが存在すると、それは自明でない部分表現を持つこととなってしまい、群の表現のところで述べた群の意味での表現の既約性と一致する。したがって、ある群 G の既約性を論じることは、その群環 $K[G]$ の部分 $K[G]$ 加群の性質等を論じることと全く同じであることがわかる。つまり次の定義で詳しく述べるが、G の既約な表現は、それ以上小さい部分 R 加群を持たない部分 R 加群、すなわち既約な部分 R 加群に対応する。V として特に左性則 R 加群 R をとったときには、極小左イデアルに対応するのである。表現の既約分解は、表現を群環の加群とみる見方では、群環 $K[G]$ の加群 V を部分 $K[G]$ 加群の直和に分解することに対応するのである。また表現の同値はこの立場からすると、$K[G]$ 加群間の R 同型として理解される。すげえわかった。美しい。ここが平易でわかりやすい (https://ja.wikibooks.org/wiki/

表現論/群の表現論)。重要なのでもう一度まとめるが、一般に、線形環 R の V 上の表現がある $\Leftrightarrow$(対応) R 加群 V を作れる。また群環について一般に、群 G の表現 (G, ρ') がある $\Leftrightarrow$(対応) 群環 $K[G]$ の表現 $(K[G], \rho)$ がある。したがって、一般に、群 G の表現 (G, ρ') がある $\Leftrightarrow$(対応) $K[G]$ 加群 V を作れる。

定義 2.156 (極小 (既約) な部分加群 (イデアル))

R 加群 V の部分 R 加群 W に対し、

表現 W が既約 $\Leftrightarrow$

$W \neq 0$ かつ $V \supsetneq W_1 \supsetneq W$ なる部分加群 W_1 が存在しない

が成り立つ。このような W を V の極小な部分 R 加群、または既約な部分 R 加群という。特に V が左正則 R 加群 R 自身のときは、上のような W を R の極小イデアル、あるいは既約なイデアルという。

定義 2.157 (完全可約)

次の同値な 3 条件のいずれかを満たす表現 (ρ, V) を完全可約という。

(1) 既約 R 部分加群 $V_1, \ldots, Vr$ が存在して、

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r \tag{2.262}$$

と書ける。

(2) 無限個でもよい既約 R 部分加群 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が存在して,

$$V = \sum_{\lambda \in \Lambda} U_i \tag{2.263}$$

(3)V の任意の部分 R 加群 W に対して、

$$V = W \oplus U \tag{2.264}$$

となるような V の部分 R 加群 U が存在する。

定義 2.158 (半単純)

体 K 上の線形環 R が半単純であるとは、R の Jacobson 根基 $J(R)$ が 0 となることと定義する。Jacobson 根基とは、R の既約表現全体の集合 $\{(\rho_\lambda, V_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\}$ に対して、

$$J(R) := \cap_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{Ker} \rho_\lambda \tag{2.265}$$

と定義される。

いくつかの線形環に関する非常に一般的な定理等を証明なしで述べる。証明等の詳細は岩堀 (1978) を参照して欲しい。

定理 2.46 (半単純に関する定理)

体 K 上の線形環 R に対して、以下の条件は互いに同値である。

(1) R は半単純

(2) R の全ての有限次の表現は完全可約である。

定理 2.47 (標準分解、等質成分)

半単純に関する定理より、体 K 上の半単純線形環 R の表現 (ρ, V) に対し、既約な部分 R 加群の直和に分解して、

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r \tag{2.266}$$

とすることができる。この分解は一般には無限通りあるが､R の既約代表類全体を $\{W_1, \ldots, W_k\}$ とし、一つの W_i に対して $U_j \cong_R U_i$ であるような U_j だけの和として定義される V の部分 R 加群 $V(W_i)$,

$$V(W_i) = \sum_{U_j \cong_R U_i} U_j \tag{2.267}$$

を用いて、

$$V = V(W_1) \oplus \cdots \oplus V(W_k) \tag{2.268}$$

と直和分解することができる。そしてこの分解は始めの直和分解に依存しないことを示せる。$V(W_i)$ を W_i に対応する V の等質成分といい、この分解を標準分解 (等質成分への分解) という。

定理 2.48 (単純成分)

体 K 上の半単純線形環 R の極小イデアル (すなわち $\mathfrak{a} \neq 0$ なるイデアルであって、$\mathfrak{a} \supsetneq \mathfrak{a}_0 \supsetneq 0$ となる R のイデアル $\mathfrak{a}_0$ が存在しないもの) の個数は有限であり、それらを単純成分と呼び $\mathfrak{a}, \ldots, \mathfrak{a}_k$ とすれば、

(1)$R = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_k$

(2)$\mathfrak{a}_i \mathfrak{a}_j = 0 (i \neq j)$

(3) 各 $\mathfrak{a}_i$ は K 上の単純線形環 (体 K 上の線形環 R のイデアルが 0 と R に限るとき、R を単純線形環という) である。

(4)R のイデアルは全て $\mathfrak{a}_{i_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_{i_r}$,$(1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq k)$ の形になる。

先述したように R が群環 $K[G]$ のとき、極小左イデアルは群 G の表現空間を $K[G]$ とする既約表現に相当する。

定理 2.49 (既約表現類の個数と共役類の数)

体 (代数的閉体)K の標数が有限群 G の位数の約数でないならば、G の K 上の既約表現類の個数は G の共役類の個数と一致する。

証明は岩堀 (1978) 定理 1.21。

定理 2.50 (表現空間の標準分解と既約表現)

体 (代数的閉体)K 上の半単純線形環 R の表現 (ρ, V) に対し、表現空間 V の標準分解を

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t \tag{2.269}$$

とし、$S = \mathrm{End}_R(V) = \{b \in \mathrm{End}_R(V) | b\rho(a) = \rho(a)b(\forall a \in R)\}$ とする。すると以下が成り立つ。

(1) $\rho(R)$ は K 上の半単純線形環であって、その単純成分の個数は t である。そして、これらを適当な順序に並べて $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_t$ とすると、$V_i = \mathfrak{a}_i V$ となる。

(2) S は K 上の半単純線形環であって、その単純成分の個数は t である。そして上の V の分解は S 加群 V の標準分解である。

定理 2.51 (既約分解の構成)

K,R,(ρ, V),$S = \mathrm{End}_R(V)$,$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_t$, $\rho(R) = \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_t$ の定義は前の定理と同じものとする。このとき、$\mathfrak{a}_i$ の極小右イデアルへの直和分解を $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{r}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{r}_{n_i}$ とすれば、各 $\mathfrak{r}_i V$ は V の既約部分 S 加群であって、

$$V_i = \mathfrak{r}_1 V \oplus \cdots \oplus \mathfrak{r}_{n_i} V \tag{2.270}$$

は S 加群 V_i の直和分解を与える。そしてベキ等元 ($x \cdot x = x$ となる元)f_i により $\mathfrak{r}_i = f_i R$ とおけば、$\mathfrak{r}_i V = f_i V$ となる。

ここからはしばらく、対称群の既約表現について述べる。これらと上述の定理達とから、$GL(V)$ に対する既約表現が得られるのである。

定理 2.52 (対称群の共役類)

S_n は $p(n)$ 個、すなわち n の分割数個の共役類を持つ。

この定理と定理 2.49 より、n 次対称群 S_n は $\mathbb{C}$ 上で $p(n)$ 個の既約表現類を持つ。言い換えると、群環 $\mathbb{C}[S_n]$ の極小イデアルは R 同型を除いて $p(n)$ 個ある。

定義 2.159 (Young 図形、台と盤)

自然数 n の分割 $(n_1, \cdots, n_s)$ に対し、同じ大きさの正方形 n 個を、第 i 行に n_i 個ずつ左端を詰めて並べたものを、分割 $(n_1, \cdots, n_s)$ の定める n 次の台という。また、n 次の台の各正方形に、$\Omega = \{1, \cdots, n\}$ を一つずつ入れたものを台 D 上の盤という。さらに、台と盤を併せて Young 図形という。

盤 B の i 行目 j 列目の数を $B(i,j)$ と書くことにする。

定義 2.160 (Young 水平対称子、Young 垂直対称子)

n 次の盤 B の水平置換とは、S_n の元であって、各 i に対して盤 B の第 i 行の文字を全体として変化させないものをいう。つまり

$$\mathfrak{m}_i := \{B(i,1), B(i,2), \dots\} \tag{2.271}$$

に対して $\sigma(\mathfrak{m}_\mathrm{i}) = \mathfrak{m}_\mathrm{i}, \forall i$ となる $\sigma \in S_n$ のことである。水平置換全体の集合を盤 B に対する水平置換群といい、$S_{B,h}$ と表す。

同様に垂直置換と垂直置換群も定義され、これを $S_{B,v}$ と表す。これらから、盤 B に属す Young 水平対称子 a_B と Young 垂直対称子 b_B が次式のように定義される。

$$a_B := \frac{1}{|S_{B,h}|} \sum_{\sigma \in S_{B,h}} \sigma \tag{2.272}$$

$$b_B := \frac{1}{|S_{B,v}|} \sum_{\sigma \in S_{B,v}} \mathrm{sgn}(\sigma)\sigma \tag{2.273}$$

Young 水平対称子、Young 垂直対称子は $R = \mathbb{C}[S_n]$ の冪等元となる。詳しい性質や証明、それぞれの対称子の構成等は、岩堀 (1978)p48 や同本の定理 1.23, 定理 1.24,(定理 1.22), 定理 1.7 等を参照して欲しい。

定義 2.161 (Young 対称子)

$R = \mathbb{C}[S_n]$ とする。

$$c_B := |S_{B,h}||S_{B,v}|a_B b_B = \sum_{\sigma \in S_{B,h}} \sum_{\tau \in S_{B,v}} (\sigma)\sigma\tau \tag{2.274}$$

で定義される $c_B \in R$ を盤 B に属する Young 対称子という。

定理 2.53 (Young 対称子と極小左イデアル)

$R = \mathbb{C}[S_n]$ とする。n 次の盤 B に対して $\mathfrak{l}_B := Rc_B$ は R の極小左イデアルとなる (証明は岩堀 (1978) 定理 1.24)。$\mathfrak{l}_B$ を盤 B の定める極小左イデアルという。また、B, B' を n 次の盤とする。

B, B' の定める $R = \mathbb{C}[S_n]$ の極小イデアル $\mathfrak{l}_B, \mathfrak{l}'_B$ に対して、
$\mathfrak{l}_B \cong_R \mathfrak{l}'_B \Leftrightarrow B, B'$ の符号数が一致
が成り立つ (証明は岩堀 (1978) 定理 2.3)。

したがって、群環の極小イデアルは、その群の既約表現に対応する。したがって、この定理によって盤 B の符号数が対称群の既約表現を定めていることがわかる。ゆえに、異なる台上の盤が定める $R = \mathbb{C}[S_n]$ の極小イデアルは R 同型でないことがわかった。しかし、n 次の台の個数は n の分割数 $p(n)$ で、これは S_n の共役類の個数、つまり S_n の既約表現類の個数である。つまり、これらの異なる台 $D_1, \ldots, D_{p(n)}$ 上の盤を一つずつ指定し $B_1, \ldots, B_{p(n)}$、B_i が定める R の極小左イデアルを $\mathfrak{l}_i$ とすると、これらの表現は全ての S_n の既約表現類をカバーしている。したがって、S_n のどの既約表現 (ρ, V) も、ある $\mathfrak{l}_i$ による表現に同値となる。これを定理にまとめると、

定理 2.54 (対称群の既約表現と Young 図)
n 次対称群 S_n の $\mathbb{C}$ 上の既約表現類の全体と、n 次の台の全体との間には一対一の対応が存在する。つまり、S_n の任意の複素既約表現 (ρ, V) に対して、次の条件を満たす n 次の台が一意に存在する: D 上の任意の盤 B の定める $R = \mathbb{C}[S_n]$ の極小左イデアル $\mathfrak{l}_B = Rc_B$(c_B は B に属する Young 対称子) による表現が (ρ, V) と同値。$\mathfrak{l}_B$ を表現空間とする既約表現を、台 D に対する既約表現という。

これで、用意は整った。n 次元ベクトル空間 (ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$) を V とし、その m 個のテンソル積 $T_m(V) = V \otimes \cdots \otimes V$、すなわち m 次反変テンソル全体のなす集合を定義する。以下では $T_m(V)$ を T_m, T などと略記する。T は n^m 次元ベクトル空間をなす。ここで、m 次対称群 S_m の元 σ に対して線形写像

$$\rho_1(\sigma) : T \to T \tag{2.275}$$

を次のように定義する。

$$\sigma(v_1 \otimes \cdots \otimes v_m) = v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(m)} \tag{2.276}$$

ここで $v_1, \ldots, v_m \in V$ である。すると、$\rho_1(\tau\sigma) = \rho_1(\tau)\rho_1(\sigma)$ が成り立ち、ρ_1 は $S_m \to GL(T)$ の群準同型を定め、T を表現空間とする S_m の表現となる。したがって、自然に S_m の $\mathbb{C}$ 上の群環 $\mathbb{C}[S_m]$ の表現 $\rho_1 : \mathbb{C}[S_m] \to \mathrm{End}(T)$ が得られる。この表現も ρ_1 で表すとする。よって、$R := \rho_1(\mathbb{C}[S_n])$ は $\mathrm{End}(V)$ の部分線形環をなし、T は左 $\mathbb{C}[S_m]$ 加群となる。準同型写像 ρ_1 に

対して、準同型定理 $R \cong \mathbb{C}/\mathrm{Ker}\rho_1$ を用いると、

$$R = \rho_1(\mathbb{C}[S_m]) \cong \oplus_D \mathfrak{a}(D) \tag{2.277}$$

となることが示される (証明は岩堀 (1978)p107, 定理 4.1)。ここで和の D は深さ $\leq n = \mathrm{dim}V$ なる台上を動く。台 D の深さが k とは、k より大きい分割 n_k が全て 0 になることである。

$T = T_m(V)$ に対して、T を表現空間とする $\mathrm{GL}(V)$ の表現となる群準同型 $\rho_2 : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{GL}(T)$ を、

$$\rho_2(A) = A \otimes \cdots \otimes A \tag{2.278}$$

で定義する。

定理 2.55 (対称群と一般線形群の可換性)

$\forall \tau \in S_n$ と $\forall A \in \mathrm{GL}(V)$ に対して、

$$\rho_1(\tau)\rho_2(A) = \rho_2(A)\rho_1(\tau) \tag{2.279}$$

が成り立つ。

この定理から、$\mathrm{End}_R(T) \subset S$ と $\mathrm{End}_S(T) \subset R$ が成り立つが、実はこれは等号が成立する。すなわち、次の定理を得る。

定理 2.56

$$\mathrm{End}_R(T) = S, \quad \mathrm{End}_S(T) = R \tag{2.280}$$

証明は岩堀 (1978)p107, 補題 4.1, 4.2, 4.3, 定理 4.2 を参考にして欲しい。[*5]

さて、$R = \rho_1(\mathbb{C}[S_m])$ によって定理 2.47 から、R 加群 $T = T_m(V)$ の標準分解を作り、

$$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_t \tag{2.281}$$

とする。定理 2.56 より $\mathrm{End}_R(T) = S$ であって、式 (2.277) より $R = \oplus\mathfrak{a}(D)$($D$ は深さ $\leq n = \mathrm{dim}V$ なる台上を動く) であるから、定理 2.50 より、t は深さ $\leq n = \mathrm{dim}V$ なる台の個数

[*5] 岩堀 (1978)p107, 補題 4.1 の部分で、$\mathrm{Ker}\rho_1$ がいくつかの $\mathfrak{a}(D_i)$ の直和になるという記述があるが、これは Ker がイデアルで定理 2.48 より、イデアルは単純成分で分解できることを用いている。同本補題 4.1 の部分の理解は同本定理 1.26 の証明を参考にするとより深まると思う。

であり、$T_i = \rho_1(\mathfrak{a}(D_i))T = \mathfrak{a}(D_i)T$ とすることができ、上式は S 加群 T の標準分解にもなっている。[*6]各 T_i はもちろん $S = \mathrm{End}_R(T)$ で不変であり、これに含まれる既約な S 加群は S 同型を除いてただ一通りである (標準分解なので各 T_i は既約部分 $S(R)$ 加群とは限らない。T_i は代表元に同型な既約部分 $S(R)$ 加群の和でしかない。標準分解の定義で確認せよ)。

このような T_i が含む既約な S 加群を具体的に構成するのは定理 2.51 を用いて以下のようにすればよい。台 D_i 上の任意の盤 B_i をとり、B_i に属する Young 対称子 $c_{B_i} = a_{B_i}b_{B_i}$ を用いて、$U_i := \rho_1(c_{B_i})T$ を作れば、これは T_i 中の既約 S 加群 (の一つ) である (他のものもこれと同型)。したがって、U_i は $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現を与えている。また、$c'_{B_i} = b_{B_i}a_{B_i}$ を用いて $U'_i := \rho_1(c'_{B_i})T$ としてもこれは $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現を与えることが示される。これらを定理の形でまとめておくと、

定理 2.57 ($\mathrm{GL}(V)$ の既約表現)
$\mathrm{div}V = n, T = T_m(V)$ とする。深さが n 以下の台 D 上の任意の盤 B の定まる Young 対称子を c_B として、$U = \rho_1(c_B)T = c_BT$ とすれば、U は $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現を与える。

これを用いて次の $\mathrm{GL}(V)$ の既約分解に対する定理が得られる。定理 2.57 の証明で述べたように、群環 $\mathbb{C}[S_n]$ の T 上の表現 ρ_1 による $\mathbb{C}[S_n]$ の像 R は、深さが $\leq n$ の m 次の台の全体を $D_1, \ldots, D_f$ とするとき、ρ_1 によって $\mathfrak{a}(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}(D_f)$ と同型になり、この同型を用いて R と $\mathfrak{a}(D_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}(D_f)$ を同一視すると、$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_f$, $(\mathfrak{a}(D_i)T = T_i)$ となる。台 D_i 上の標準盤の全体を $B_{i,1}, \ldots, B_{u,d}$、$c_{B_{i,j}} = c_{i,j}$ とする。[*7]$\tilde{R} := \mathbb{C}[S_n]$ とすると、

$$\mathfrak{a}(D_i) = \tilde{R}c_{i,1} \oplus \cdots \oplus \tilde{R}c_{i,d} \tag{2.282}$$

であることが知られている (証明略、岩堀 (1978) 定理 3.16)。よって、$\tilde{R}$ の逆自己同型 $a = \sum \lambda_\sigma \sigma \mapsto \hat{a} = \sum \lambda_\sigma \sigma^{-1}$ を施せば、$\mathfrak{a}(D_i) = \hat{c}_{i,1}\tilde{R} \oplus \cdots \oplus \hat{c}_{i,d}\tilde{R}$ を得る。$\hat{c}_{i,j}\mathfrak{a}(D_k) = 0,\ (i \neq k)$ なので $\hat{c}_{i,j}\tilde{R} = \hat{c}_{i,j}R$ となる。よって、$\mathfrak{a}(D_i) = \hat{c}_{i,1}R \oplus \cdots \oplus \hat{c}_{i,d}R$ が成り立つ。したがって、定理 2.51 より、$T_i = \hat{c}_{i,1}T_i \oplus \cdots \oplus \hat{c}_{i,d}T_i$ が得られる。ゆえに、$T = \oplus_i T_i = \oplus_i(\hat{c}_{i,1}T_i \oplus \cdots \oplus \hat{c}_{i,d}T_i)$ が得られる。定理として以下にまとめると、

[*6] $R = \rho_1(\mathbb{C}[S_m]) \cong \oplus_D \mathfrak{a}(D)$ の同型を用いて R と $\oplus_D \mathfrak{a}(D)$ を同一視している。同型ならその集合の構造は同型写像によって保たれるためである。同一視すれば R の単純成分への分解が、$\oplus_D \mathfrak{a}(D)$ と同じ形になり、R の単純成分の数が $\mathfrak{a}(D)$ の数と一致するだろうことがわかる。また、定理 2.50 の (1) 中の、単純成分 $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_t$ は、$\rho(R)$ の単純成分だから、同型なだけの $\rho(R = \mathbb{C}[S_m]) \cong \oplus_D \mathfrak{a}(D)$ の $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_t$ 達とは違う気もしてしまう。しかし、定理 2.50 の $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_t$ は、$R = \rho_1(\mathbb{C}[S_m]) \cong \oplus_D \mathfrak{a}(D)$ 中の"同一視する"S_m の単純成分を指していることが、岩堀 (1978)p31 の定理 1.26 の証明を見ればわかる。

[*7] m 次の盤 B が標準盤とは、B の行、列のいずれについても、右、下に向かって単調増加になっている盤である。

定理 2.58 ($\mathrm{GL}(V)$ の既約分解)
深さが高々 $n = \mathrm{dim}V$ 以下の m 次の標準盤の全体を $B_1, \ldots, B_r$ とし、これらに対応する Young 対称子を $c_i = c_{B_i}$ $(i = 1 \leq i \leq r)$ とする。群環 $\mathbb{C}[S_n]$ の逆自己同型による c_i の像 $\hat{c}_i$ を用いると、$T = T_m(V)$ は

$$T = \hat{c}_1 T \oplus \cdots \oplus \hat{c}_r T \tag{2.283}$$

と直和分解される。各 $\hat{c}_i T$ は $\mathrm{GL}(V)$ のもとで不変で、$\mathrm{GL}(V)$ の既約表現を与える。

こうして当初の目標通り、一般線形群のテンソル空間上の既約表現が対称群のテンソル空間上の既約表現を用いて得られるという非常に一般的な結果を得た。よってあるテンソルが与えられていて、それを一般線形群の既約表現に分解、すなわち一般線形群の作用によってその空間から他の空間にはみ出ることなく元の空間に収まり、それ以上小さいそのような空間に分解することのできない空間への分解が得られたことになる。

それでは、一般線形群 $\mathrm{GL}(V)$ ではなく、その部分群である回転群 $O(N)$ や特殊ユニタリー群 $SU(N)$ に対するテンソル空間上の既約表現はどのようになるのだろか。一般線形群のときと同じで、ここでも Young 対称子による種々の対称性を持ったテンソル空間が重要な役割を果たすが、実はこれらの部分群の既約表現を数学的に求めるのは Lie 代数や Lie 群に関する事項を展開する必要があり、多くのページ数を必要とする。よって、ここではページの都合上、直感的な説明で結果だけを与えておく。

まず、実数上の一般線形群 $\mathrm{GL}'(V)$ の場合には、代数学の基本定理から $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現は $\mathrm{GL}'(V)$ の既約表現であることが示される。ユニモジュラー群 $\mathrm{SL}(n)$ の場合も、$\mathrm{GL}(V)$ の元 a と $\mathrm{SL}(n)$ の元 b の間には $a = (\mathrm{det}a)^{1/n} b$ の関係、言い換えると表現の行列要素の斉次多項式間の関係から、上と同じように $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現は $\mathrm{SL}(n)$ の既約表現であることが示される。これらは、部分群のリー代数を用いても証明できる事実である。ユニタリー群 $U(n)$ の場合にも同様に $U(n)$、$\mathrm{GL}(V)$ のリー代数が同じリー代数の基底によって、前者は実数係数、後者は複素係数の線形結合で表されることを用いて $\mathrm{GL}(V)$ の既約表現は $\mathrm{U}(n)$ の既約表現であることが示される。$SU(n)$ の場合も同様である。したがって、$\mathrm{GL}(V)$ の既約表現は $\mathrm{GL}'(V), \mathrm{SL}(n), \mathrm{U}(n), \mathrm{SU}(n)$ の既約表現となる。

一方で直交群 $\mathrm{O}(n), \mathrm{SO}(n)$ の場合は、対照群の操作と交換する操作はその一般線形群の部分群の元の他に縮約の操作も対称群の操作と交換する。これまでと同様に m 階のテンソルによる表現を考え、その成分を $T_{i_1 \cdots i_m}$ とする。$\mathrm{GL}(V)$ のときは、$\mathrm{GL}(V)$ の元の m 個の直積作用と交

換する操作は対称群の操作だけであった。しかし、直交群の元の m 個の直積作用と交換する操作には、その他にもテンソルの二つの成分間の縮約 (テンソルと不変テンソルであるデルタ記号 δ_{ij} との縮約とみても良い) がある。したがって、m 階のテンソル空間の中で、2 成分間の縮約をとると 0 になるようなテンソルからなる部分空間は $O(n)$ の作用で不変である。実際、全てのテンソルはトレースレステンソルと次の形のテンソルからなる部分空間に一意に分解することができる。

$$T_{i_1 \ldots i_r} = T^0_{i_1 \ldots i_r} + \Phi_{i_1 \ldots i_m} \tag{2.284}$$

ここで、

$$\Phi_{i_1 \ldots i_m} = \delta_{i_\alpha i_\beta} G^{(\alpha\beta)}_{i_1 \ldots i_{\alpha-1} i_{\alpha+1} \ldots i_{\beta-1} i_{\beta+1} \ldots i_m} \tag{2.285}$$

である。Φ のテンソルからなる部分集合はトレースレステンソルからなるテンソルと直交する。[*8] したがって、テンソルはトレースレステンソルとそれに直交する部分空間の元との直和として表される。トレースレステンソルからなる空間と、それに直交する Φ からなる部分空間はどちらも直交群の作用で不変であることが確かめられる。したがって上のテンソルの分解も不変である。対称操作はトレースレステンソルをトレースレステンソルに写す。よって m 回のトレースレステンソルからなる部分空間に Young 対称子を作用させて、与えられた対称性を持つトレースレステンソルを得ることを考える。このようにして $O(n)$ の既約表現を得ることができる。

最後にテンソルの既約成分への展開の意味を表現論を用いて概説する。Riemann テンソルや Weyl テンソル、Standard Model Extension における Lorentz-violating operator の議論など、テンソルの対称性に関する議論にはよくこの既約成分への展開という手法が用いられる。これにはここまでで述べてきた表現論に関する知識が応用されている。

まず、ある群 G と、その作用に関して典型的な n 次元ベクトル空間 V を考える。これは群 G が、(複素) 一般線形群 $GL(n, \mathbb{C})$ ならば複素ベクトル空間 $V = \mathbb{C}^n$、実一般線形群 $GL(n, \mathbb{R})$ ならば複素ベクトル空間 $V = \mathbb{R}^n$、Lorentz 群 (相対論) ならば接ベクトル空間、3 次元回転群 $SO(3)$ ならば $V = \mathbb{R}^3$ といった具合である。作用に関して典型的というのは、多くの群は、一般線形群 (何かしらの行列として表現される) の部分群 (またはそれに等価な群) とその一般線形群が作用するベクトル空間が与えられていることで定義されている。そこで自然に群 G からその一般線形群への恒等写像が一般線形群のベクトル空間を表現空間とする表現になる (基本表現)。この表現を (ρ, V) と表す。これらの m 個のテンソル積 $V \otimes \cdots \otimes V$ を考える。例えば 4 階のテンソル

[*8] むしろ、Φ のテンソルからなる部分集合とそれに直交する部分空間に分けると、その部分空間のテンソルはトレースレスでなければならない。これがトレースレステンソルが直交群で重要な役割を演じる理由である。直交群の場合は、上のような不変部分空間へのテンソルの分解がさらに可能になるのである。

を考えたいならば、$m=4$ とすればいい。すると、テンソル積表現 ($\tau=\rho\otimes\cdots\otimes\rho, V\otimes\cdots\otimes V$) が得られる。この表現は $\tau(g)(v_1\otimes\cdots\otimes v_m)=\rho(g)v_1\otimes\cdots\otimes\rho(g)v_m=gv_1\otimes\cdots\otimes gv_m$ のように作用する (基本表現 (恒等写像) の $\rho(g)=g$ を使った)。あるテンソルをその既約成分に分解するとはどういうことかというと、考えている群 G の作用を施す前後で保たれるようなテンソルの特定の成分を (ベクトル空間である $V\otimes\cdots\otimes V$ の部分空間である G の不変部分空間を) 求めることである。これはつまり上のテンソル積表現をブロック対角化していくらかの表現の直和に分解し、より小さい表現 (この議論だと一般にはこのブロック対角化された各ブロックに制限された表現は既約表現とは限らないが、後の議論のように対称群の既約表現をとれば実はこの表現は GL の既約表現にもなっていることが知られている) を求めることに相当する。ブロック対角化をし、より小さな表現を求めることは、元の座標系において適当な座標変換 (基底の変換) を施し、群 G の作用の前後で同じ部分空間にとどまり続けるような空間に分解しているのである。それでは、このテンソル積表現の既約表現をどのように求めればよいのだろうか。そこで対称群 S_m と一般線形群 $GL(V)$ との可換性を用いている。対称群の S_m の既約表現への射影演算子 (Young symmetrizer)e_B(B はある Young 盤を示す添字) をかけた $e_B(V\otimes\cdots\otimes V)$ を考えるとこれは S_m の不変部分空間であることが知られている。実はこの不変部分空間が $GL(V)$ の不変部分空間にもなっていて $GL(V)$ の既約表現を構成することが知られている。もちろん座標変換によって得られた対称性を持つ新しい基底は、元の表現空間の基底を構成しており表現空間は不変部分空間の直和で表されているので任意のテンソルはこれらの不変部分空間のテンソルの和として一意的に表される (分解される)。

例えば、GR でよく見られる Riemann テンソルの既約分解 (Ricci decomposition) は、Riemann テンソルと同じ対称性を持つすべてのテンソルからなる空間 (上の一般論でいうとこれは $V\otimes\cdots\otimes V$ の部分空間、一般のテンソルは $V\otimes\cdots\otimes V$ の元だが、リーマンテンソルは固有の対称性を持っているのでこの表現空間の部分空間になっている) を、直交群 (上の一般論でいうと群 G) の作用に対する既約表現に分解することと解釈できる。

$$R_{abcd}=S_{abcd}+E_{abcd}+C_{abcd} \tag{2.286}$$

ここで、S_{abcd} はスカラー部分、E_{abcd} は準トレースレス部分、C_{abcd} は完全トレースレス部分 (Weyl tensor) である。与えられたテンソルがどのような対称性を持つ部分に分解されるかを求めるのには上で述べた一般論のように Young symmetrizer や Young tableuax を用いるわけである。

2.11　変分

ここでは変分について述べる。変分に関する一般論についてまとめる。GR における変分の詳細は 3 章で述べる。本節を書くにあたって、Hawking(1973) [14], Wald(2010) [15] を参考にした。

定義 2.162 (作用)

多様体 $\mathscr{M}$ 上のテンソル場を考える。Ψ によってこれらのテンソル場を代表させて表記する。Ψ を単に場 (field) という。Ψ の関数 $S[\Psi]$ を考える。これは $\mathscr{M}$ 上の場から実数への写像であり、作用と呼ばれる。

本来 Ψ は ${\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}(i=1,2,\cdots,n)$ のように表記されるものである。複数のテンソル場のそれぞれを示すためのパラメータ i とテンソル場の添字を省略したものである。テンソル場 ${\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}(i=1,2,\cdots,n)$ の $x\in\mathscr{M}$ におけるテンソルを ${\Psi_{(i)}|_x}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}(i=1,2,\cdots,n)$ と書く。同様にテンソル場 Ψ の $x\in\mathscr{M}$ におけるテンソルを $\Psi|_x$ と表記する。

定義 2.163 (変分)

$\mathfrak{D}\subset\mathscr{M}$ を考え、$\Psi|_x(u)$, $u\in(-\epsilon,\epsilon)$, $x\in\mathscr{M}$ を以下の 2 つの境界条件を満たすテンソル場の 1-パラメータ族 $\Psi(u)$, $u\in(-\epsilon,\epsilon)$ の $x\in\mathscr{M}$ におけるテンソルとする。

$$(1)\ \Psi|_x(0)=\Psi \text{ in } \mathscr{M} \tag{2.287}$$

$$(2)\ \Psi|_x(u)=\Psi \text{ in } \mathscr{M}-\mathfrak{D} \tag{2.288}$$

このとき、

$$\delta\Psi := \left.\frac{d\Psi(u)}{du}\right|_{u=0} \tag{2.289}$$

を場の変分という。

$dS/d\lambda|_{u=0}$ の全ての 1-パラメータ族に対する存在を仮定する。

定義 2.164 (汎関数微分)

Ψ に対して双対で (Ψ が (k,l) のテンソル場ならば χ は (l,k) のテンソル場)smooth なテンソル場 χ で次式を満たすものが、全ての 1-パラメータ族に対して存在するとする。

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0}=\int_{\mathfrak{D}}\chi\delta\Psi \tag{2.290}$$

このとき、S は Ψ_0 で汎関数微分可能 (functionally differentiable) といい、χ を S の汎関数微分 (functional derivative) といい、次式で表記する[*9]。

$$\left.\frac{\delta S}{\delta \Psi}\right|_{\Psi_0} := \chi \tag{2.291}$$

定義 2.165 (Lagrangian)

$$S[\Psi] = \int_{\mathfrak{D}} L[\Psi] \tag{2.292}$$

の関数形を考える。ここで L は Lagrangian(Lagrangian density) と言われ、Ψ と有限個の Ψ の微分の関数である。

$$L|_x = L(\Psi(x), \nabla\Psi(x), \cdots, \nabla^k\Psi(x)) \tag{2.293}$$

定義 2.166 (変分原理)

汎関数微分可能な S に関して、S が極値をとること、つまり次式を要求する。

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = 0 \tag{2.294}$$

これを変分原理という。したがって変分学の基本原理により次式が成立する。

$$\left.\frac{\delta S}{\delta \Psi}\right|_{\Psi_0} = 0 \tag{2.295}$$

これが (テンソル) 場の方程式である。

補題 2.3 (変分学の基本補題)

$\mathfrak{D} \subset \mathscr{M}$、適当な境界条件を満たす任意の 1-パラメータ族 $\Psi|_x(u)$, $u \in (-\epsilon, \epsilon)$, $x \in \mathscr{M}$ に対して、

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = \int_{\mathfrak{D}} \chi\delta\Psi = 0 \rightarrow \chi = 0 \tag{2.296}$$

が成立する。これを変分学の基本補題という。

[*9] より一般には、$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = \chi[\delta\Psi]$ を満たす tensor distribution χ が存在するとき、S は汎関数微分可能といい、χ を $\Psi(0)$ における S の汎関数微分という (Wald(1984))。Wald(1984) の記述を引用すると、"More generally, if there exists a tensor distribution χ such that $dS/du|_{u=0} = \chi[\delta\Psi]$, we also say that S is functionally differentiable and refer to χ as the functional derivative of S at Ψ_0." tensor distribution はテンソル型の超関数を意味していると考えられる。distribution は (シュワルツ) 超関数の英語。右辺の意味は、超関数論でよく用いられるところのスカラー積 (汎関数) で、$\chi[\delta\Psi] =< \chi, \delta\Psi >= \int_{\mathfrak{D}} \chi\delta\Psi$ という意味だと考えられる。これは本文で述べた汎関数微分可能の定義と一致している。

第 3 章
General Relativity

本章では時空の理論の一つである一般相対性理論について述べる。本章を書くにあたって、Hawking(1973) [14], Wald(2010) [15] を参考にした。

3.1 時空

定義 3.1 (時空)
時空 (spacetime) は事象 (event) の集合である。一般相対性理論では時空のモデルを ($\mathscr{M}$, g) とする。ここで $\mathscr{M}$ は連結、四次元、Hausdorff, C^∞ 多様体 (connected four-dimensional Hausdorff C^∞ manifold) であり、g は signature +2 の $\mathscr{M}$ 上の Lorentz 計量である。

まず、第 2 章で定式化した変分法によって、基礎方程式を導く。本章からはテンソル場 Ψ を省略表記せずに ${\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}(i=1,2,\cdots,n)$ のように表記する。また、作用積分の形としては Lagrangian formalism を採用する。

場 ${\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}(i=1,2,\cdots,n)$ の変分を考える。このとき、

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0}=\sum_i\int_{\mathfrak{D}}\left(\frac{\partial L}{\partial {\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}}\delta{\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}-\frac{\partial L}{\partial {\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}}\delta({\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e})\right) \tag{3.1}$$

であるが、$\delta({\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e})=\delta({\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d})_{;e}$ であることを用いると、右辺第二項の積分は次のように表せる。

$$\sum_i\int_{\mathfrak{D}}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial {\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}}\delta{\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}\right)_{;e}-\left(\frac{\partial L}{\partial {\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}}\right)_{;e}\delta{\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}\right] \tag{3.2}$$

となる。

$$Q^e:=\sum_i\frac{\partial L}{\partial {\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}}\delta{\Psi_{(i)}}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d} \tag{3.3}$$

と定義すると、第一項は Stokes の定理より、

$$\int_{\mathfrak{D}} Q^a{}_{;a} = \int_{\partial\mathfrak{D}} Q^a d\sigma_a \tag{3.4}$$

となるがこれはゼロになる。なぜなら変分の条件 (2) より境界 $\partial\mathfrak{D}$ 上で $\delta\Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d} = 0$ だからである。したがって最終的に次式を得る。

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = \sum_i \int_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}} - \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}} \right)_{;e} \right) \delta\Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d} = 0 \tag{3.5}$$

したがって、$\chi = \frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}} - \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}} \right)_{;e} = 0$ より、次の Euler-Lagrange 方程式を得る。

$$\frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}} - \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}} \right)_{;e} = 0 \tag{3.6}$$

次にエネルギー運動量テンソルを計量の変分を考えることで得る。計量 $g_{ab}|_x(u)$ の変分によってテンソル場 $\Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}$ は変化しないとする。関数 f に対して、その積分が $\int f = \int f\boldsymbol{\epsilon}$ で定義されていることに注意すると、

$$\left.\frac{dS}{du}\right|_{u=0} = \int_{\mathfrak{D}} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}} \delta(\Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}) + \frac{\partial L}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} \right) + \int_{\mathfrak{D}} L \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial g_{ab}} \delta g_{ab} \tag{3.7}$$

最後の項は体積素が計量に依存することから生じている。$\boldsymbol{\epsilon} = (4!)^{-1}\boldsymbol{\eta}$、$\eta_{abcd} = (-g)^{1/2} 4! \delta_{[a}{}^1 \delta_b{}^2 \delta_c{}^3 \delta_{d]}{}^4$、$g := \det(g_{ab})$ であるから、

$$\frac{\partial \eta_{abcd}}{\partial g_{ef}} = -\frac{1}{2}(-g)^{-1/2} \frac{\partial g}{\partial g_{ef}} 4! \delta_{[a}{}^1 \delta_b{}^2 \delta_c{}^3 \delta_{d]}{}^4 \tag{3.8}$$

したがって、

$$\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial g_{ab}} = \frac{1}{2} g^{ab} \boldsymbol{\epsilon} \tag{3.9}$$

第一項は、共変微分が計量に依存することから、計量の変分の影響を受けることに起因する。二つの接続の差はテンソルになるので、変分前後での接続の差に相当する $\partial\Gamma^a{}_{bc}/\partial u = \delta\Gamma^a{}_{bc}$ はテンソルになる。計量の成分との関係を示すと次式のようになる。

$$\delta\Gamma^a{}_{bc} = \frac{1}{2} g^{ad} \{ (\delta g_{db})_{;c} + (\delta g_{dc})_{;b} - (\delta g_{bc})_{;d} \} \tag{3.10}$$

この関係式を導出する最も簡単な方法は、テンソルの等式なので、任意の座標系で上式は成立することに着目し、点 p における直交座標をとる方法である。直交座標においては、点 p で成分

$\Gamma^a{}_{bc}$ と成分 g_{ab} の座標微分がゼロになる。この性質を使って、容易に直交座標において上式の関係式を示すことができる。すると、この関係式はテンソル等式なので最終的に直交座標だけでなく任意の座標系について成立する等式であるということが言える。このように特殊な座標系をとっても、成立した関係式がテンソル等式ならば、その関係式は任意の座標系で成立する等式であると言える。この手法は種々の関係式を導く際に非常に便利で強力である。

上式を用いて $\delta\Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}$ を $(\delta g_{bc})_{;d}$ によって表し、そして部分積分を行うことによって $\partial S/\partial u$ を δg_{ab} を含む項のみの積分によって表すことができる。したがって、

$$\frac{\partial S}{\partial u} = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{D}} (T^{ab}\delta g_{ab}) \tag{3.11}$$

によって、場のエネルギー運動量テンソル (energy-momentum tensor)T^{ab} を定義する。エネルギー運動量テンソルは対称テンソルである。エネルギー運動量テンソルの具体形は気が向いたら書きます。

エネルギー運動量テンソルは保存方程式を満たす。微分同相写像 $\phi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ を考える。この写像は $\mathfrak{D}$ の内部以外では恒等写像であるとする。微分同相写像による変換の元で積分は不変なので、

$$S = \int_{\mathfrak{D}} L = \frac{1}{4!}\int_{\mathfrak{D}} L\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{4!}\int_{\phi(\mathfrak{D})} L\boldsymbol{\eta} = \frac{1}{4!}\int_{\mathfrak{D}} \phi^*(L\boldsymbol{\eta}) \tag{3.12}$$

が成立する。3 つ目の等号は、$\mathfrak{D}$ の内部以外で ϕ が恒等写像であることを用いており、4 つ目の等号では微分同相写像による変換の元で積分が不変であることを用いている。したがって、

$$\frac{1}{4!}\int_{\mathfrak{D}} (L\boldsymbol{\eta} - \phi^*(L\boldsymbol{\eta})) = 0 \tag{3.13}$$

となる。ϕ が $\mathfrak{D}$ の内部でのみゼロでないベクトル場 $\boldsymbol{X}$ による微分同相写像ならばリー微分の定義より

$$\frac{1}{4!}\int_{\mathfrak{D}} L_{\boldsymbol{X}}(L\boldsymbol{\eta}) = 0 \tag{3.14}$$

が成り立つ。ところが左辺の微分を実行すると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{4!}\int_{\mathfrak{D}} L_{\boldsymbol{X}}(L\boldsymbol{\eta}) =& \sum_i \int_{\mathfrak{D}} \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d}} - \left(\frac{\partial L}{\partial \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d;e}} \right)_{;e} \right) L_{\boldsymbol{X}} \Psi_{(i)}{}^{a\cdots b}{}_{c\cdots d} \\ &+ \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{D}} T^{ab} L_{\boldsymbol{X}} g_{ab}\end{aligned} \tag{3.15}$$

となる。第一項は場の方程式よりゼロ、また第二項には $L_{\boldsymbol{X}} g_{ab} = 2X_{(a;b)}$ を用いて、

$$\frac{1}{4!}\int_{\mathfrak{D}} L_{\boldsymbol{X}}(L\boldsymbol{\eta}) = \frac{1}{2}\int_{\mathfrak{D}} T^{ab} L_{\boldsymbol{X}} g_{ab} = \int_{\mathfrak{D}} ((T^{ab}X_a)_{;b} - T^{ab}{}_{;b}X_a) = 0 \tag{3.16}$$

第一項は $\mathfrak{D}$ の境界上での積分に変換されるが、境界で $\boldsymbol{X}$ はゼロなので第一項の寄与はゼロになる。第二項は任意のベクトル場 $\boldsymbol{X}$ について成立するので、次式のエネルギー保存則が成立することが示された。

$$T^{ab}{}_{b} = 0 \tag{3.17}$$

それでは、いくらかの重要な場に対する Lagrangian の例を与える。

(1) スカラー場 (A Scalar Field) ψ

Lagrangian$L$ は、

$$L = -\frac{1}{2}\psi_{;a}\psi_{;b}g^{ab} - \frac{1}{2}\frac{m^2}{\hbar^2}\psi^2 \tag{3.18}$$

で与えられる。$m, \hbar$ は定数である。スカラー場の Euler-Lagrange 方程式は、

$$\psi_{;ab}g^{ab} - \frac{m^2}{\hbar^2}\psi = 0 \tag{3.19}$$

であり、エネルギー運動量テンソルは、

$$T_{ab} = \psi_{;a}\psi_{;b} - \frac{1}{2}g_{ab}\left(\psi_{;c}\psi_{;d}g^{cd} + \frac{m^2}{\hbar^2}\psi^2\right) \tag{3.20}$$

となる。

(2) 電磁場 (The Electromagnetic Field) この場はポテンシャルと呼ばれる、任意のスカラー関数の勾配の和の不定性をもつ one-form$\boldsymbol{A}$ によって表現される。Lagrangian は、

$$L = -\frac{1}{16\pi}F_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd} \tag{3.21}$$

ここで、電磁場テンソル F は次式で定義される。

$$F_{ab} = 2A_{[b;a]} \tag{3.22}$$

A の変分を実行することで得られる電磁場の Euler-Lagrange 方程式は、

$$F_{ab;c}g^{bc} = 0 \tag{3.23}$$

また $d\boldsymbol{F} = d(d\boldsymbol{A}) = 0$ より、次式が成立する。

$$F_{[ab;c]} = 0 \tag{3.24}$$

この二式を source-free な電磁場の Maxwell 方程式という。エネルギー運動量テンソルは、

$$T_{ab} = \frac{1}{4\pi}(F_{ac}F_{bd}g^{cd} - \frac{1}{4}g_{ab}F_{ef}F_{gh}g^{eg}g^{fh}) \tag{3.25}$$

となる。

(3) 荷電スカラー場 (A Charged Scalar Field)

二つの実スカラー場 (ψ_1, ψ_2) の結合である複素スカラー場 $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ として表現される。Lagrangian は、

$$L = -\frac{1}{2}(\psi_{;a} + ieA_a\psi)g^{ab}(\overline{\psi}_{;b} - ieAb\overline{\psi}) - \frac{1}{2}\frac{m^2}{\hbar^2}\psi\overline{\psi}) - \frac{1}{16\pi}F_{ab}F_{cd}g^{ac}g^{bd} \tag{3.26}$$

ここで、e は定数であり、$\overline{\psi}$ は ψ の複素共役を表す。$\psi, \overline{\psi}, A_a$ の変分を独立に実行することで得られる荷電スカラー場の Euler-Lagrange 方程式は、

$$\psi_{;ab}g^{ab} - \frac{m^2}{\hbar^2}\psi + ieA_ag^{ab}(2\psi_{;b} + ieA_b\psi) + ieA_{a;b}g^{ab}\psi = 0 \tag{3.27}$$

とこの式の複素共役、そして、

$$\frac{1}{4\pi}F_{ab;c}g^{bc} - ie\psi(\overline{\psi}_{;a} - ieA_a\overline{\psi}) + ie\overline{\psi}(\psi_{;a} + ieA_a\psi) = 0 \tag{3.28}$$

の三式となる。エネルギー運動量テンソルは、

$$\begin{aligned} T_{ab} =& \frac{1}{2}(\psi_{;a}\overline{\psi}_{;b} + \overline{\psi}_{;a}\psi_{;b}) + \frac{1}{2}(-\psi_{;a}ieA_b\overline{\psi} + \overline{\psi}_{;b}ieA_a\psi + \overline{\psi}_{;a}ieA_b\psi - \psi_{;b}ieA_a\overline{\psi}) \\ &+ \frac{1}{4\pi}F_{ac}F_{bd}g^{cd} + e^2A_aA_b\psi\overline{\psi} + Lg_{ab} \end{aligned} \tag{3.29}$$

となる。

(4) 等エントロピー完全流体 (An Isentropic Perfect Fluid)

流体は密度と呼ばれる関数 ρ と時間的曲線の合同 (congruence) と呼ばれる flow line によって表現される。曲線の合同は、$\mathscr{M}$ の各点を通る曲線の族を表す。$\mathfrak{D}$ が十分に小さいコンパクト領域ならば、微分同相写像 $\gamma : [a,b] \times \mathscr{N} \to \mathfrak{D}$ によって合同を表すことができる。ここで $[a,b]$ は $\mathbb{R}^1$ の閉区間で $\mathscr{N}$ はある境界のある三次元多様体である。接ベクトル $\boldsymbol{W} = (\partial/\partial t)_\gamma, t \in [a,b]$ がいたるところで時間的であるとき、曲線は時間的であるという。また、接ベクトル $\boldsymbol{V}$ が

$g(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})=-1$ となるように $\boldsymbol{V}=(-g(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W}))^{-\frac{1}{2}}\boldsymbol{W}$ と定義される。そして流体の流れベクトルが次式で定義される。

$$\boldsymbol{j}=\rho\boldsymbol{V} \tag{3.30}$$

流れベクトルには次式の保存則を満たすことを要請する。

$$j^a{}_{;a}=0 \tag{3.31}$$

流体の振る舞いは ρ の関数である弾性ポテンシャル (elastic potential)、すなわち内部エネルギー (internal energy)ϵ によって決定される。Lagrangian を

$$L=-\rho(1+\epsilon) \tag{3.32}$$

のようにとる。flow line を変化させ、j^a が保存するように ρ を調節するとき、S が変動しないことを要請する。flow line の変分は 2 章で述べた変分法とは異なりテンソル場ではなく、次の条件を満たす微分同相写像 $\alpha:(-\delta,\delta)\times[a,b]\times\mathscr{N}\to\mathfrak{D}$ の変分を考えることで実行される。

$$\alpha(0,[a,b],\mathscr{N})=\gamma([a,b],\mathscr{N}) \tag{3.33}$$

Hawking-Ellis(1973) では α ではなく、γ という記号を用いているが、本来は別の写像なので区別すべきものである。そこでここでは α という記号を用いた。

ベクトル $\boldsymbol{K}=(\partial/\partial u)_\alpha$ に対して $\delta\boldsymbol{W}=L_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{W}$ が成立する。

(実は私はこの関係式を示せていない。ここで左辺は、$\delta\boldsymbol{W}:=(\partial/\partial u)\boldsymbol{W}|_{u=0}$ であると考えられる。成分で表示すると、$\delta W^i:=(\partial/\partial u)W^i|_{u=0}$ であり、2 章で述べた変分法における (テンソル) 場の変分の表式と同一であると考えられる。しかし、$\boldsymbol{W}=W^i(\partial/\partial x^i)=(\partial x^i/\partial t)(\partial/\partial x^i)$ や、$\boldsymbol{K}=K^i(\partial/\partial x^i)=(\partial x^i/\partial u)(\partial/\partial x^i)$ のように $W^i=(\partial x^i/\partial t), K^i=(\partial x^i/\partial u)$ であるから、右辺の成分を計算すると、

$$(L_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{W})^i=\frac{\partial W^i}{\partial x^j}K^j-\frac{\partial K^i}{\partial x^j}W^j=\frac{\partial W^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial u}-\frac{\partial K^i}{\partial x^j}\frac{\partial x^j}{\partial t}=\frac{\partial W^i}{\partial u}-\frac{\partial K^i}{\partial t} \tag{3.34}$$

となる。つまり $(l.h.s)=\delta W^i:=(\partial W^i/\partial u)\neq(r.h.s.)=(\partial W^i/\partial u)-(\partial K^i/\partial t)$ となり、$\frac{\partial K^i}{\partial t}$ という余計な項の分だけ $\delta\boldsymbol{W}=L_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{W}$ の両辺は一致していないような気がする。定義の勘違いなのか、計算の勘違いなのか、Lie 微分の勘違いなのか、変分の設定の勘違いなのかはわからないが、以降の種々の計算では $(\partial/\partial u)W^i=(L_{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{W})^i$ という関係式が用いられているので、とりあえずこの関係式を認めることとする。解決したら詳細を書きます。)

ベクトル $\boldsymbol{D}$ は変分による flow line 上の点の変位を表していると考えられる。この関係式から次式が示される。

$$\delta V^a = V^a{}_{;b}K^b - K^a{}_{;b}V^b - V^aV^bK_{b;c}V^c \tag{3.35}$$

そして、j^a の保存則 $j^a{}_a = 0$ より $\delta(j^a{}_{;a}) = (\delta j^a)_{;a} = 0$ が成り立つので、

$$(\delta\rho)_{;a}V^a + \delta\rho V^a{}_{;a} + \rho_{;a}\delta V^a + \rho(\delta V^a)_{;a} = 0 \tag{3.36}$$

が導かれる。

Appendix A
Signal Theory

本章では信号理論、中でも Laplace 変換、Fourier 変換とパワースペクトル密度について述べる。Laplace 変換、Fourier 変換については本文中でも述べたが、実験系の読者にも要点だけ摘めるように再掲する。ここでの内容は，Takahashi(1976) [22], Sugiura(1980) [11], Sugiura(1985) [12], Katayama(2002) [13] に詳しい。

定義 A.1 (片側 Laplace 変換)

$[0,\infty)$ で定義された区分的に連続な時間関数 $f(t)$ に対して、積分

$$\lim_{T\to\infty}\int_0^T f(t)e^{-st}dt \tag{A.1}$$

が、ある $s\in\mathbb{C}$ に対して収束するとき、[*1]

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{A.2}$$

を $f(t)$ の (片側)Laplace 変換という。

Laplace 変換を $F(s)=\mathfrak{L}[f(t)]$, $F(s)=\mathfrak{L}[f(t)](s)$ と略記したり、$x(t)$ の Laplace 変換を単に $X(s), x(s)$ と表記したりする。

Laplace 変換にはその定義からいくつかの性質が成り立つ。それらを列挙する。

定理 A.1 (線型性)

$F_i(s)=\mathfrak{L}[f_i(t)](s), \mathrm{Re}[s]>\sigma_i (i=1,2)$ が存在すれば、$\forall c_1, c_2\in\mathbb{C}$ に対して、

$$\mathfrak{L}[c_1f_1(t)+c_2f_2(t)](s)=c_1F_1(s)+c_2F_2(s) \tag{A.3}$$

[*1] 実変数複素関数の広義積分の収束性は複素数の絶対値を用いて実変数実関数の広義積分と同様に定義される。また、Cauchy の収束条件を用いると、ある実関数複素関数が絶対可積分ならば可積分であることが示される。したがって、実用的な計算の際には Laplace 変換の収束性はその絶対収束性を調べることでわかる。

定理 A.2 (t 空間移動)

$f(t) = 0, t < 0$ と仮定すると、

$$\mathfrak{L}[f(t-a)1(t)](s) = e^{-as}F(s), \quad a > 0 \tag{A.4}$$

$$\mathfrak{L}[f(t+a)1(t)](s) = e^{as}F(s) - e^{as}\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt, \quad a > 0 \tag{A.5}$$

が成り立つ (収束域は元の関数の収束域と一緒)。

定理 A.3 (s 空間移動)

$$\mathfrak{L}[e^{\alpha t}f(t)](s) = F(s-\alpha), \quad \mathrm{Re}[s] > \sigma_f + \mathrm{Re}[\alpha] \tag{A.6}$$

ここで、σ_f は $F(s)$ の収束座標である。

定理 A.4 (導関数)

$f(t)$ を位数 a の指数型関数であり、$f'(t)$ が $t \geq 0$ で区分的に連続な関数であるとする。このとき、

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right](s) = sF(s) - f(0-), \quad \mathrm{Re}(s) > a \tag{A.7}$$

が成り立つ。

定理 A.5 (高階導関数)

$f(t)$ が n 階微分可能であり、$f(t), f'(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ が Laplace 変換可能であれば、

$$\mathfrak{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right](s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0-) - \cdots - sf^{(n-2)}(0-) - f^{(n-1)}(0-) \tag{A.8}$$

が成り立つ。

定理 A.6 (時間積分)

$f(t)$ を位数 a の指数型関数で区分的に連続な関数とする。このとき、

$$\mathfrak{L}\left[\int_{0-}^{t} f(\tau)d\tau\right](s) = \frac{1}{s}F(s) \tag{A.9}$$

が成り立つ。ここで、収束域は $\mathrm{Re}[s] > \max(0, a)$ である。

定理 A.7 (合成積)

$f(t), g(t)$ の合成積 (convolution) を、

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau =: (f * g)(t) \tag{A.10}$$

と表す。$F(s), G(s)$ が $\mathrm{Re}[s] \geq \sigma_a$ で絶対収束すれば、$H(s)$ は $\mathrm{Re} \geq \sigma_a$ で絶対収束し、

$$H(s) = \mathfrak{L}[h(t)](s) = F(s)G(s) \tag{A.11}$$

が成り立つ。

これらの定理、性質によって t 領域における各種の演算が、s 領域では代数的四則演算に置き換わる。

定理 A.8 (初期値定理)

$f(t)$ を指数型関数とする。このとき $\lim_{t\to 0+} f(t)$ が存在すれば、

$$\lim_{s\to\infty} sF(s) = f(0+), \quad s \in \mathbb{R} \tag{A.12}$$

が成り立つ。

定理 A.9 (最終値定理)

$f(t)$ が任意の区間 $[0, T], T > 0$ で積分可能で、かつ $f(\infty)$ が存在すれば、

$$\lim_{s\to 0} sF(s) = f(\infty), \quad s \in \mathbb{R} \tag{A.13}$$

が成り立つ。

ここからは逆 Laplace 変換について述べる。

定理 A.10

$[0, \infty)$ 上の区分的に連続か関数 $f_1(t), f_2(t)$ に対して、

$$\mathfrak{L}[f_1(t)] = \mathfrak{L}[f_2(t)], \mathrm{Re}[s] > \sigma_0 \tag{A.14}$$

が成り立つならば、$f_1(t), f_2(t)$ は不連続点を除いて一致する。

定理 A.11 (逆 Laplace 変換)

$f(t)$ の Laplace 変換 $F(s)$ が $\mathrm{Re}[s] > \sigma_a$ において絶対収束すれば、$c > \sigma_a$ に対して、

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty}^{c+i\infty} F(s)e^{-st}ds = \begin{cases} \frac{1}{2}\{f(t+0) + f(t-0)\}, & t > 0 \\ \frac{1}{2}f(0+), & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{A.15}$$

が成り立つ。この左辺を逆 Laplace 変換という。

上述した (片側)Laplace 変換の議論は因果的 ($f(t)=0, t<0$) な関数に対する両側 Laplace 変換 (片側 Laplace 変換の定義において積分区間を $-\infty$ から ∞ にしたもの) に対する議論と同等である。区間 $(-\infty,\infty)$ で定義された区分的に連続な関数 $f(t)$ に対して、両側 Laplace 変換において $s=i\omega$ とした場合、Fourier 変換が得られる。

定義 A.2 (Fourie 変換)

$f(t)$ は $(-\infty,\infty)$ で絶対可積分、

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty \tag{A.16}$$

であるとする。積分

$$F(i\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt, \quad \omega\in\mathbb{R} \tag{A.17}$$

を Fourier 変換という。

$F(i\omega)$ を $F(\omega)$ や $F(f),(2\pi f=\omega)$ と表記することもある。

定義 A.3 (逆 Fourier 変換)

$f(t),(-\infty<t<\infty)$ が有界、連続、かつ絶対か積分であるとする。このとき $F(i\omega)$ が絶対可積分であれば、

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(i\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{A.18}$$

が成立し、これを逆 Laplace 変換という。

Laplace 変換と逆 Laplace 変換によって時間 t 領域と s 領域の間で関数を変換することができる。Fourier 変換と逆 Fourier 変換によって時間 t 領域と周波数 $\omega(f)$ 領域の間で関数を変換することができる。s 領域や周波数領域では関数の各種の演算が上述した Laplace 変換の性質によって四則演算に置き換わるので便利である。

ここまでの議論は $\forall t$ に対して定まった値をもつ確定信号を扱ってきたが、最後にある時刻での値が確率的に決定される不規則信号について考える。特に雑音のレベルを評価する上でよく使用されるパワースペクトル密度についてまとめる。

不規則信号の一つの標本関数 $x(t)$ を考える。$x(t)$ は無限に続くので一般に絶対可積分でなく Fourier 変換は存在しない。そこで、原点を挟んだ区間 $-T/2<t<T/2$ で $x(t)$ と一致し、その他の領域で 0 となる時間関数を $x_T(t)$ とする。この関数については Fourier 変換が存在するので、

$$\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(\omega)|^2}{T} \tag{A.19}$$

を考えることができる。この極限がそれぞれの標本関数に対して存在し、かつ同一であると仮定する。式 (A.19)、またはその平方根をパワースペクトル密度 (PSD) という。[*2]パワースペクトル密度に対して、

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{|X_T(\omega)|^2}{T}d\omega = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x^2(t)dt \tag{A.20}$$

が成り立つ。右辺は単位当たりのエネルギーを表しており、パワースペクトル密度は不規則信号の角周波数成分におけるパワーの分布を表していることがわかる。

[*2] 実際の時系列信号の解析では、時系列データを適当な区間ごとに分割し、分割の影響を抑えるための窓関数をかけてそれぞれに対して式 (A.19) を計算する (このそれぞれを periodgram 関数という)。これらの平均を出すことでパワースペクトル密度を求めている。

Appendix B
Physical motivation of spinors

本章では物理学におけるスピノールの動機づけについて述べる。本 Appendix は Wald(2010) [15],pp342-346 の翻訳である。

Minkowski 空間上の物理的な場を表す数学的な対象は何かという一般的な問題を調べる。始めに物理法則の特殊共変 (special covariance) が成り立つならば、時空の等長群は物理的な系の状態に自然に作用することを議論する。それによって Minkowski 空間上の量子論では、Poincare 群の位相を除いたユニタリー表現を得る。これらの表現の研究は群 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{C})$ という 2 次元複素ベクトル空間 W に作用する行列式が 1 の線形写像からなる群を導く。Minkowski 空間上のスピノール場の概念は適当な方法で時空の各点に W のベクトルを配分することで得られる。

時空 $(\mathscr{M}, g_{ab})$ 上で定義される物理理論の状態の集合 $\mathscr{S}$ 上の等長群の作用が存在するはずである。

$\mathscr{S}$ 内のそれぞれの状態の物理的な性質は一群の観測者によってそれぞれの事象でなされる局所的な測定によって特徴付けることができると仮定する。この条件を満たす $\mathscr{S}$ の良い例が、$\mathscr{M}$ 上のある特定のタイプのテンソル場によって表現される物理系の状態の集合である。この場合、これらの場の成分が局所的に物理的に測定可能な量に対応する。ここでの目的は $\mathscr{S}$ が何から構成されうるかを調べることなので、$\mathscr{S}$ は特定されていないものとする。

$\mathscr{M}$ 上の測定装置を備え付けた一群の観測者 O を考える。これらの観測者は $\mathscr{M}$ の各点における接空間の正規直交基底 $(e_\alpha)^a$ $(\alpha = 0,1,2,3)$ を指定することによって特徴付けられるとする。ここで、各点における最初の基底ベクトル $(e_0)^a$ はその事象の点で、その観測者の世界線に接するように選ばれているとし、残りの基底ベクトル $(e_\alpha)^a$ $(\alpha = 1,2,3)$ についてはその観測者が運んでいる装置がどのように向きを調整されているかを表す参照としての役割を果たす。物理における全ての観測はそれぞれの $s \in \mathscr{S}$ に関連した数を測定するので、これらの観測者によってなされた状態 s の測定の一式の結果に対応する数の集合が存在するはずである。そこで簡単のためにそれぞれの $x \in \mathscr{M}$ に対して有限の k 個の測定がなされる必要があると仮定する。すると与え

られた時空 $(\mathscr{M}, g_{ab})$ と与えられた一群の観測者 O に対して、一意にそれぞれの $s \in \mathscr{S}$ をこれらの観測者によってなされる測定の点から特徴付ける写像 $f_O : \mathscr{M} \times \mathscr{S} \to \mathbb{R}^k$ が得られる。一般的に異なる観測者の一群 $\tilde{O}$ は異なる写像 $f_{\tilde{O}}$ を得る。すなわち、s の測定の数値的な結果は、どのように観測者が移動し、どのように彼らの測定装置が向きづけられているかに依存する。そこで微分同相写像 $\phi : \mathscr{M} \to \mathscr{M}$ を考え、ϕ で基底の場を $(e_\alpha)^a$ から $\phi_*(e_\alpha)^a$ に写す。一般的に基底 $\phi_*(e_\alpha)^a$ はその点で正規直交ではない。したがって物理的に実現可能な一群の観測者に対応しない。しかし、ϕ が等長写像のとき、またそのときに限って、$\phi_*(e_\alpha)^a$ は再び正規直交基底をなす。このように ϕ を基底場 $(e_\alpha)^a$ に関連した物理的観測者 O から新しい $\phi_*(e_\alpha)^a$ に関連した物理的観測者 $\tilde{O}$ に写すのに用いることができる。

もし物理法則が $(\mathscr{M}, g_{ab})$ の等長写像のもとで特殊共変 (special covariant) ならば、O によってなされる一連の測定の物理的に可能な結果は $\tilde{O}$ による一連の測定に対する物理的に可能な結果と同じでなければならない。言い換えると、与えられた任意の $s \in \mathscr{S}$ に対して、$\tilde{O}$ による $\tilde{s}$ の測定の結果が O による s の測定結果と一致するような $\tilde{s} \in \mathscr{S}$ が存在しなければならない。すなわち、$\forall x \in \mathscr{M}, f_O(x, s) =$

謝辞

みんなありがとう！！

参考文献

[1] 前原昭二, **記号論理入門**日評数学選書 (日本評論社, 2005).

[2] D. Hilbert, W. AcKermann, 石本新, and 竹尾治一郎, **記号論理学の基礎** (大阪教育図書, 1974).

[3] 松坂和夫, **集合・位相入門** (岩波書店, 1968).

[4] 内田伏一, **集合と位相** *(***数学シリーズ***)* (裳華房, 1986).

[5] 金子晃, **数理基礎論講義—論理・集合・位相** (サイエンス社, 2010).

[6] 中原幹夫, **理論物理学のための幾何学とトポロジー** *I* (ピアソンエデュケーション, 2000).

[7] 堀田良之, **代数入門***:* **群と加群**数学シリーズ (裳華房, 1987).

[8] 松本幸夫, **多様体の基礎**基礎数学 (東京大学出版会, 1988).

[9] 斎藤正彦, **線型代数入門** *(***基礎数学** *1)* (東京図書, 1966).

[10] 今吉洋一, **複素関数概説**数学基礎コース (サイエンス社, 1997).

[11] 杉浦光夫, **解析入門** *(***基礎数学** *2)* (東京大学出版会, 1980).

[12] 杉浦光夫, **解析入門** *(***基礎数学** *3)* (東京大学出版会, 1985).

[13] 片山徹, **フィードバック制御の基礎** (朝倉書店, 2002).

[14] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1973).

[15] R. M. Wald, *General Relativity* (University of Chicago Press, 2010).

[16] 中原幹夫, **理論物理学のための幾何学とトポロジー** *II* (ピアソンエデュケーション, 2001).

[17] R. Penrose and W. Rindler, *Spinors and Space-Time: Volume 1, Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*Cambridge Monographs on Mathematical Physics (Cambridge University Press, 1987).

[18] 内山龍雄, **一般相対性理論** *(***物理学選書** *15)* (裳華房, 1978).

[19] 吉川圭二, **理工系の基礎数学** *9* **群と表現**理工系の基礎数学 (岩波書店, 1996).

[20] 岩堀長慶, **対称群と一般線型群の表現論***:* **既約指標・***Young* **図形とテンソル空間の分解**, 岩

波講座: 基礎数学 No. 第 9 巻 (岩波書店, 1978).

[21] 上田正仁, 物理数学 III 講義ノート, 2015.

[22] 高橋進一 and 中川正雄, **信号理論の基礎** (実出版, 1976).