

スペクトル解析基礎

2021年6月30日

スペクトル解析をするたびに忘れそうになるため、備忘録として書いておく。

目次

1	連続時間のスペクトル	3
1.1	スペクトルの導入	3
1.1.1	パワースペクトル	3
1.1.2	自己相関関数	4
1.2	2信号間の相関	5
1.2.1	相互相関関数	5
1.2.2	クロススペクトル	6
1.2.3	コヒーレンス	7
1.3	線形システム	7
1.3.1	インパルス応答	8
1.3.2	スペクトルの関係	8
1.3.3	クロススペクトルの関係	9
2	離散時間のスペクトル	10
2.1	標本化	10
2.1.1	標本化定理	10
2.1.2	エイリアシング	11
2.2	離散時間のフーリエ変換	12
2.2.1	DFDT	12
2.2.2	DFT	13
2.3	離散時間のスペクトル	14
2.3.1	スペクトル	14
2.3.2	単位を戻す	15
2.4	窓関数	16
2.4.1	パワーの変化	16
2.4.2	矩型窓	16

2.4.3	Hanning Window	17
A	計算の詳細	18
A.1	Parseval の定理	18
A.2	Wiener-Khinchin の定理	18
A.3	線形システムにおける入出力のスペクトルの関係	20
A.4	標本化定理	21
A.4.1	DFT の行列表示	23

1 連続時間のスペクトル

1.1 スペクトルの導入

1.1.1 パワースペクトル

ある定常確率過程 $x(t)$ の信号に対し、フーリエ変換を

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t)e^{-i\omega t} \quad (1.1)$$

で定義する。周波数 $f = \omega/2\pi$ を用いるならば

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t)e^{-2\pi ift} \quad (1.2)$$

である。区別のために、 ω が引数のときは大文字にして、 f が引数のときはチルダをつけることにする。定義から $X(2\pi f) = \tilde{x}(f)$ である。

Parseval の定理より*1

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |x(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |X(\omega)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} df |\tilde{x}(f)|^2 \quad (1.3)$$

であるから、 $t = -\infty$ から ∞ まで信号が続く場合積分は発散してしまう。そこで有限時間 T で区切って平均し、 $T \rightarrow \infty$ の極限をとる。

$$x_T(t) = \begin{cases} 0 & |t| > T/2 \\ x(t) & |t| < T/2 \end{cases} \quad (1.4)$$

とおくと

$$\overline{|x(t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt |x(t)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt |x_T(t)|^2 \quad (1.5)$$

は有限になる（可能性がある）。ただし $\overline{|x(t)|^2}$ は時間平均。これのフーリエ変換

$$X_T(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x_T(t)e^{-i\omega t} = \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t)e^{-i\omega t} \quad (1.6)$$

を式 (1.5) に代入すると、Parseval の定理を思い出せば

$$\overline{|x(t)|^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} dt |x_T(t)|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |X_T(\omega)|^2 \quad (1.7)$$

とかける。

次に、 $x(t)$ はランダムであるからアンサンブル平均 $\langle \cdot \rangle$ をとる。簡単のため $\langle x(t) \rangle = 0$ を仮定する。すると

$$\langle \overline{|x(t)|^2} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \langle |X_T(\omega)|^2 \rangle \quad (1.8)$$

*1 証明は A.1 参照

となる。ここで

$$S_{xx}(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle |X_T(\omega)|^2 \rangle \quad (1.9)$$

と定義すると、

$$\langle |x(t)|^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_{xx}(\omega) \quad (1.10)$$

と書ける。^{*2} この $S_{xx}(\omega)$ をパワースペクトル密度 (Power Spectrum Density) と呼ぶ。 $S_{xx}(\omega)$ は、信号強度 $\langle |x(t)|^2 \rangle$ の各周波数成分を表している。定義から明らかであるが $S_{xx}(\omega)$ は実数である。

$x(t)$ が実数の場合 (大体はそうだが), $\tilde{x}^*(\omega) = \tilde{x}(-\omega)$ であるから $S_{xx}(-\omega) = S_{xx}(\omega)$ である。また重力波業界では角周波数 ω ではなく周波数 f で考えることが多い。このため、引数を f にして積分区間を $[0, \infty]$ にしたパワースペクトルをよく用いる。区間 $[-\infty, \infty]$ のものを両側スペクトル S_{xx}^2 , $[0, \infty]$ のものを片側スペクトル $S_{xx}^1(f)$ と表すことにすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} df S_{xx}^2(f) = \int_0^{\infty} df S_{xx}^1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_{xx}(\omega) = \langle |x(t)|^2 \rangle \quad (1.12)$$

より

$$S_{xx}^2(f) = S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\tilde{x}_T(f)|^2 \quad (1.13)$$

$$S_{xx}^1(f) = 2S_{xx}(\omega) = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |\tilde{x}_T(f)|^2 \quad (1.14)$$

である。さらに、片側スペクトルの平方根をとった $\sqrt{S_{xx}^1(f)} =: S_x(f)$ を一般に「スペクトル」として表現している。 $S_x(f)$ の単位は $[\cdot/\sqrt{\text{Hz}}]$ である。 (\cdot には $x(t)$ の単位が入る。) 分母が $\sqrt{\text{Hz}}$ と妙なものはルートを取っているため、

1.1.2 自己相関関数

信号 $x(t)$ の自己相関関数 $C_{xx}(\tau)$ を

$$C_{xx}(\tau) := \langle x(t+\tau)x^*(t) \rangle \quad (1.15)$$

と定義する。^{*3} 一般に $x(t)$ は実数であるから、 $C_{xx}(\tau) = \langle x(t+\tau)x(t) \rangle$ である。

^{*2} 係数はフーリエ変換の定義によって変わり得る。なお、一般には $x(t)$ はエルゴード性が成り立っていると仮定することが多い。その場合 $\overline{x(t)} = \langle x(t) \rangle$ が成り立つから、単に

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |X_T(\omega)|^2 \quad (1.11)$$

となる。

^{*3} $x(t)$ がエルゴードである時はアンサンブル平均を時間平均に置き換えられて

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t+\tau)x^*(t) \quad (1.16)$$

と書ける。

$C_{xx}(\omega)$ と $S_{xx}(\omega)$ の関係は Wiener-Khinchin の定理で与えられ, *4

$$\begin{aligned} S_{xx}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ C_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_{xx}(\omega) e^{i\omega\tau} \end{aligned} \quad (1.17)$$

とフーリエ変換になっている。またこれを周波数 f で表せば, 式 (1.13) より

$$\begin{aligned} S_{xx}^2(f) &= \frac{1}{2} S_{xx}^1(f) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_{xx}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} \\ C_{xx}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} df S_{xx}^2(f) e^{2\pi i f \tau} = \int_{-\infty}^{\infty} df \frac{1}{2} S_{xx}^1(f) e^{2\pi i f \tau} \end{aligned} \quad (1.18)$$

となる。逆に, これらの関係からパワースペクトルを定義することもある。

フーリエ変換同士の相関は, (1.17) より

$$\langle X(\omega) X^*(\omega') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \langle x(t_1) x(t_2) \rangle e^{-i\omega t_1} e^{i\omega' t_2} \quad (1.19)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 C_{xx}(t_1 - t_2) e^{-i\omega(t_1 - t_2)} e^{i(\omega - \omega') t_2} \quad (1.20)$$

$$= 2\pi S_{xx}(\omega) \delta(\omega - \omega') \quad (1.21)$$

のようにパワースペクトルで特徴付けることもできる。周波数表示の場合は, $S_{xx}^2(f) = S_{xx}(\omega)$ と $\delta(\omega) = \delta(2\pi f) = \frac{1}{2\pi} \delta(f)$, $X(2\pi f) = \tilde{x}(f)$ から

$$\langle \tilde{x}(f) \tilde{x}^*(f') \rangle = S_{xx}^2(f) \delta(f - f') = \frac{1}{2} S_{xx}^1(f) \delta(f - f') \quad (1.22)$$

となる。

1.2 2 信号間の相関

次に, ある 2 つの信号が与えられたときにこれらの相関を評価する指標として, 相互相関関数とクロススペクトル, コヒーレンスを導入する。

1.2.1 相互相関関数

ある 2 つのランダム過程 $x(t), y(t)$ が与えられたとき, これらの相互相関関数 $C_{xy}(\tau)$ を

$$C_{xy}(\tau) := \langle x(t + \tau) y^*(t) \rangle \quad (1.23)$$

*4 証明は A.2 参照

と定義する。^{*5}定義より,

$$C_{xy}^*(\tau) = \langle x(t+\tau)y^*(t) \rangle^* = \langle x(t+\tau)^*y(t) \rangle \quad (1.25)$$

$$= \langle y(t-\tau)x^*(t) \rangle = C_{yx}(-\tau) \quad (1.26)$$

が成り立つ。^{*6}また, $|x(t+\tau) + ay(t)|^2$ (a は実数) のアンサンブル平均をとることにより

$$\begin{aligned} & \langle |x(t+\tau) + ay(t)|^2 \rangle \\ &= \langle |x(t+\tau)|^2 \rangle + a^2 \langle |y(t)|^2 \rangle + a(\langle x^*(t+\tau)y(t) \rangle + \langle x(t+\tau)y^*(t) \rangle) \geq 0 \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$C_{xx}(0) + a^2 C_{yy}(0) + 2a \operatorname{Re}[C_{xy}(\tau)] \geq 0 \quad (1.28)$$

である。これが任意の a について成り立つことから

$$\operatorname{Re}[C_{xy}(\tau)]^2 - C_{xx}(0)C_{yy}(0) \leq 0 \quad (1.29)$$

よって $0 \leq \operatorname{Re}(C_{xy}(\tau))^2 \leq |C_{xy}(\tau)|^2$ より

$$|C_{xy}(\tau)|^2 \leq C_{xx}(0)C_{yy}(0) \quad (1.30)$$

が任意の τ について成り立つ。また, (1.28) に $a = -1$ を代入すると,

$$\operatorname{Re}[C_{xy}(\tau)] \leq \frac{C_{xx}(0) + C_{yy}(0)}{2} \quad (1.31)$$

すなわち

$$|C_{xy}(\tau)| \leq \frac{\langle |x(t)|^2 \rangle + \langle |y(t)|^2 \rangle}{2} \quad (1.32)$$

と言える。これは, 相互相関がそれぞれの信号のパワーの平均を超えないことを意味している。

1.2.2 クロススペクトル

$x(t), y(t)$ のクロススペクトル $S_{xy}(\omega)$ を次のように定義する。

$$S_{xy}(\omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \langle X_T(\omega) Y_T^*(\omega) \rangle \quad (1.33)$$

$S_{xx}(\omega)$ が $C_{xx}(\tau)$ とフーリエ変換の関係にあったように, $S_{xy}(\omega)$ もまた $C_{xy}(\tau)$ と関係がある。

$$\begin{aligned} S_{xy}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ C_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} S_{xy}(\omega) e^{i\omega\tau} \end{aligned} \quad (1.34)$$

^{*5} $x(t), y(t)$ がともにエルゴード性を持つならば, アンサンブル平均を時間平均に置き換えることができ

$$C_{xy}(\tau) = \overline{x(t+\tau)y^*(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t+\tau)y^*(t) \quad (1.24)$$

となる。

^{*6} 古典的な場合のみ。 \hat{x}, \hat{y} が量子的な場合は一般に $[\hat{x}, \hat{y}] \neq 0$ であるから成り立たない。以下の議論も同様。

のように、フーリエ変換になっている。^{*7}これと $C_{xy}(\tau) = C_{yx}^*(-\tau)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{xy}(\omega)e^{i\omega\tau} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{yx}(\omega)e^{-i\omega\tau} \right)^* \quad (1.35)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{yx}^*(-\omega)e^{i\omega\tau} \quad (1.36)$$

よって

$$S_{xy}(\omega) = S_{yx}^*(-\omega) \quad (1.37)$$

が成り立つ。

1.2.3 コヒーレンス

2つの信号がどの程度線型性を持つかを端的に表す指標として、コヒーレンス $\gamma^2(\omega)$ を次のように定義する。

$$\gamma^2(\omega) := \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)} \quad (1.38)$$

ここで (1.30) に (1.18), (1.34) を代入して $\tau = 0$ とすると

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{xy}(\omega) \right|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{xx}(\omega) \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega S_{yy}(\omega) \right) \quad (1.39)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' S_{xy}(\omega)S_{xy}^*(\omega') \leq \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega') \quad (1.40)$$

したがって

$$S_{xy}(\omega)S_{xy}^*(\omega') \leq S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega') \quad (1.41)$$

$\omega = \omega'$ とすれば

$$|S_{xy}(\omega)|^2 \leq S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega) \quad (1.42)$$

が成り立つ。よって、 $\gamma^2(\omega)$ について

$$0 \leq \gamma^2(\omega) \leq 1 \quad (1.43)$$

が常に成り立つ。 $\gamma^2(\omega) = 1$ のとき $x(t)$ と $y(t)$ は完全に線型性を持ち、 $\gamma^2(\omega) = 0$ のとき $x(t)$ と $y(t)$ には相関がないと言える。 $\gamma^2(\omega)$ が 0 と 1 の間のときは

- 系にノイズが混入し、相関はあるが線形ではない
- $y(t)$ は $x(t)$ 以外からも影響を受けている

のどちらかが起きている。

1.3 線形システム

これまで導入した概念を用いて、線形システムの入力と出力の関係を解析する。

^{*7} 証明は A.2 参照。

1.3.1 インパルス応答

入力 $x(t)$, 出力 $y(t)$ のシステムを考える. デルタ関数 $\delta(t)$ を入力したときの出力をインパルス応答 $h(t)$ と呼び, これを用いて

$$\mathcal{S}[\delta(t)] = h(t) \quad (1.44)$$

とシステムの応答を表す演算子 \mathcal{S} を定義する. $x(t)$ をある時刻 τ で微小時間 $d\tau$ だけ入力したとすると, $d\tau \rightarrow 0$ の極限で $x(\tau)d\tau \rightarrow x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[x(\tau)d\tau] &\rightarrow \mathcal{S}[x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau] = \mathcal{S}[\delta(t-\tau)]x(\tau)d\tau \\ &= h(t-\tau)x(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$x(t)$ を入力したときの応答はこれを $[-\infty, t]$ で積分すればよくて

$$y(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \mathcal{S}[x(\tau)\delta(t-\tau)] \quad (1.45)$$

$$= \int_{-\infty}^t d\tau x(\tau)h(t-\tau) \quad (1.46)$$

となる. ここで因果律を考えれば, $\tau > t$ のときには応答 $x(\tau)h(t-\tau)$ は 0 のはずである. すなわち $t-\tau < 0$ のとき $h(t-\tau) = 0$ として良い. したがって積分の上限を ∞ にとることができて

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x(\tau)h(t-\tau) = x(t) * h(t) \quad (1.47)$$

と書ける. ただし $f * g$ は f と g の畳み込み積分.

次に, 周波数領域でシステムを考える. 上の式をフーリエ変換すると,

$$\mathcal{F}[y(t)] = \mathcal{F}[x(t) * h(t)] = \mathcal{F}[x(t)]\mathcal{F}[h(t)] \quad (1.48)$$

であるから, $x(t), y(t), h(t)$ のフーリエ変換をそれぞれ $X(\omega), Y(\omega), H(\omega)$ とすれば

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) \quad (1.49)$$

と積の形でかける. この

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \quad (1.50)$$

を系の伝達関数と呼ぶ. 伝達関数は系のインパルス応答のフーリエ変換でもある.

1.3.2 スペクトルの関係

$h(t)$ と自己相関関数 $C_{xx}(t), C_{yy}(\tau)$ の関係は

$$C_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta h(\xi)^* h(\eta) C_{xx}(\xi - \eta) \quad (1.51)$$

のように表される.*⁸これを周波数領域で考えれば

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega) \quad (1.52)$$

*⁸ 証明は A.3 参照

のようになり，線形システムの入力と出力のスペクトルの関係は系の伝達関数で表されることがわかる．これを $S_x(f), S_y(f)$ で表現すれば

$$S_y(f) = |H(f)|S_x(f) \quad (1.53)$$

のように簡単な積の形になる．

1.3.3 クロススペクトルの関係

同様に，入力と出力の相互相関関数 $C_{xy}(\tau)$ を $h(t)$ を使って表せば

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta C_{xx}(\eta)h(\tau - \eta) \quad (1.54)$$

と畳み込みでかける．これから，クロススペクトル $S_{xy}(\omega)$ は

$$S_{xy}(\omega) = H(\omega)S_{xx}(\omega) \quad (1.55)$$

と積の形になる．

システムが完全に線形であれば，(1.52)，(1.55) より

$$\gamma^2(\omega) = \frac{|H(\omega)S_{xx}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)|H(\omega)|^2S_{xx}(\omega)} = 1 \quad (1.56)$$

が成り立つ．

2 離散時間のスペクトル

2.1 標本化

今までは信号 $x(t)$ を連続にとっていたが、現実的には一定の時間間隔 T_s で測定を行い信号 $x[n] := x(nT_s)$ を取得している。この $x(t)$ から $x[n]$ を得ることを標本化という。 T_s をサンプリング時間といい、その逆数 $f_s = 1/T_s$ をサンプリング周波数 (サンプリングレートとも) という。この節では標本化に関して非常に重要となる、Nyquist の標本化定理とそれにまつわる概念を導入する。

2.1.1 標本化定理

標本化を行うと情報が失われそうだが、実際には一定の条件を満たすサンプリング周波数で標本化を行えば、元の信号を (原率的には) 完全に復号することができる。このことを保証するのが Nyquist の標本化定理である。

今、連続信号 $x(t)$ をサンプリング時間 T_s で標本化するとする。標本化をするには、元の信号に

$$\delta_{T_s}(t) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \quad (2.1)$$

をかければ良い。すなわち

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \delta(t - nT_s) \quad (2.2)$$

と表現できる。ここで δ_{T_s} は

$$\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n f_s t} \quad (2.3)$$

と展開できるから、*9このフーリエ変換 $\delta_{T_s}(f)$ は

$$\delta_{T_s}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{2\pi i n f_s t} \cdot e^{-2\pi i f t} = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - n f_s) \quad (2.4)$$

である。一方、元の信号のフーリエ変換を $\tilde{x}(f)$ とすると

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-2\pi i f t} \quad (2.5)$$

となる。これらよりサンプリングした信号 $x_s(t)$ をフーリエ変換すると、

$$\tilde{x}_s(f) = \tilde{x}(f) * \delta_{T_s}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{x}(f') \delta(f - f' - n f_s) \quad (2.6)$$

$$= f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f - n f_s) \quad (2.7)$$

*9 詳しくは付録

したがって、 $\tilde{x}_s(f)$ は周期 $f_s = 1/T_s$ で元の信号のフーリエ変換 $\tilde{x}(f)$ が繰り返していることがわかる。

$\tilde{x}_s(f)$ の周期を $[-f_s/2, f_s/2]$ にとるとする。 $\tilde{x}_s(f)$ の 1 周期が $\tilde{x}(f)$ と完全に一致していれば、 $\tilde{x}_s(f)$ から $\tilde{x}(f)$ を切り出してフーリエ変換をすることで元の信号 $x(t)$ を得ることができる。 そのようなことができる条件は、

「 $\tilde{x}(f)$ がある周波数 $f_0 < f_s/2$ より大きい周波数では常に 0 である」

ということである。これが Nyquist の標本化定理である。

より直感的には、以下のように解釈できる。 サンプルングレート f_s で標本化を行う時に、どの周波数の sin 波を波と認識できるかを考えると、図のように $f = f_s/2$ の波が限界である。 $f_s/2$ を越える周波数の波は、本来よりも低い周波数の波と区別がつかなくなる。

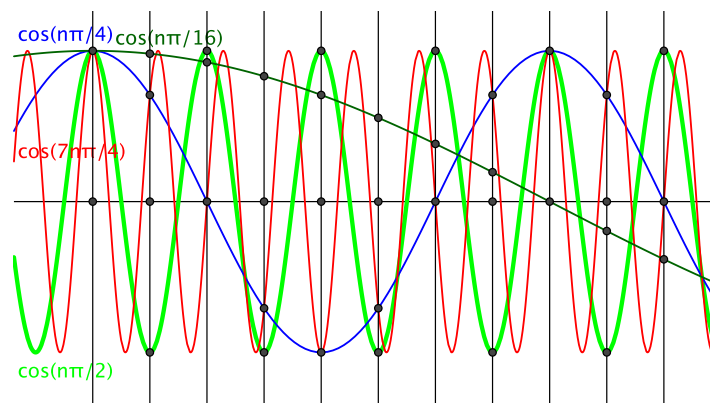


図1 標本化の例. $t_s = \frac{\pi}{16}, f_s = \frac{16}{\pi}$ として $f = \frac{1}{2\pi}, \frac{2}{\pi}, \frac{8}{\pi}, \frac{14}{\pi}$ をプロットした. $f = \frac{2}{\pi}$ と $f = \frac{14}{\pi}$ が同じ点でサンプリングされているため、 $f_s = \frac{16}{\pi}$ でサンプリングするとこれらの区別ができない。

2.1.2 エイリアシング

標本化定理によりサンプルングレートが f_s の場合 $f < f_s/2$ を満たす信号であれば復元できることがわかった。では $f > f_s/2$ の信号があった場合どのような影響が出るだろうか。それがエイリアシングである。

周波数が $f = f_s/2 + \Delta f$ ($\Delta f < f_s/2$) の時を考える。 \tilde{x}_s は周期が $f_s/2$ であるから

$$\tilde{x}_s(f_s/2 + \Delta f) = \tilde{x}_s(f_s - (f_s/2 - \Delta f)) = \tilde{x}_s(-(f_s/2 - \Delta f)) \quad (2.8)$$

となり、ちょうど $f_s/2$ を境に折り返した形になる。つまり、もし元の信号 $x(t)$ に $f_s/2$ より大きい周波数の信号があると、サンプリングした信号には低周波側に余計な信号が出ることになる。これをエイリアシングという。エイリアシングを避けるために、標本化をする前にあらかじめローパスフィルタを入れてサンプルングレートより高い周波数をカットするようにしている。これをアンチエイリアシングフィルタという。

2.2 離散時間のフーリエ変換

標本化によって時間領域を離散化できた。これに伴ってフーリエ変換がどのように拡張されるのを見えていく。

2.2.1 DFDT

サンプリングレート f_s で標本化した信号とそのフーリエ変換

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\delta(t - nT_s) \quad (2.9)$$

$$\tilde{x}_s(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi ifnT_s} \quad (2.10)$$

を改めて考える。式 (2.10) より、

$$\int_{-f_s/2}^{f_s/2} df \tilde{x}_s(f)e^{2\pi ifnT_s} = \int_{-f_s/2}^{f_s/2} df \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{2\pi if(n-m)T_s} \quad (2.11)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\delta_{nm}f_s = f_s x[n] \quad (2.12)$$

である。改めて $\tilde{x}_s(f)$ を $\tilde{x}(f)$ とすると

$$x[n] = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} df \tilde{x}(f)e^{2\pi ifnT_s} \quad (2.13)$$

$$\tilde{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi ifnT_s} \quad (2.14)$$

とかける。これは $x[n]$ と $\tilde{x}(f)$ が離散時間のフーリエ変換の関係にあることを示している。これを**離散時間フーリエ変換** (Discrete Time Fourier Transformation, DTFT) と呼ぶ。

今後、時間はサンプリング時間 T_s で規格化する。時間は $1 = T_s$ である。したがって、サンプリングレートは $f_s = 1/T_s = 1$ となる。すると、DTFT は

$$x[n] = \int_0^1 df \tilde{x}(f)e^{2\pi ifn} \quad (2.15)$$

$$\tilde{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-2\pi ifn} \quad (2.16)$$

と定義できる。ここで $\tilde{x}(f)$ が周期 $f_s = 1$ であることを利用して式 (2.15) の区間を変えた。

2.2.2 DFT

DTFT は時間を離散化した信号に対するフーリエ変換の一般化である。デジタルで扱うには一見これでよさそうに見えるが、まだ問題がある。一つは式 (2.16) 無限級数を使っていることである。しかしこれは、実際のデータは有限長であることを考えれば大した問題ではない。それよりも本質的な問題は、式 (2.15) で積分を使っていることである。これを避けるために、周波数領域も離散化する。そのためには、フーリエ級数が周波数領域では離散であったことを思い起こすと、元の信号が周期的であれば良い。

フーリエ級数の時に、周期 T の信号が周波数では $1/T$ ごとに離散化されたことを考えると、周期 N を持つ標本化された信号 $x[n]$ のフーリエ変換は $1/N$ で離散化されていることが予想される。そこで $\tilde{x}(f)$ を次のように書き換える。

$$\tilde{x}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}\left(\frac{k}{N}\right) \delta\left(f - \frac{k}{N}\right) \quad (2.17)$$

これを式 (2.15) に代入すると

$$x[n] = \int_0^1 df \sum_{k=-\infty}^{\infty} \tilde{x}\left(\frac{k}{N}\right) \delta\left(f - \frac{k}{N}\right) e^{2\pi i f n} \quad (2.18)$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}\left(\frac{k}{N}\right) e^{2\pi i n \frac{k}{N}} \quad (2.19)$$

と離散化させることができる。次に、この逆変換を考えると

$$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}\left(\frac{l}{N}\right) e^{2\pi i n \frac{l}{N}} e^{-2\pi i n \frac{k}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}\left(\frac{l}{N}\right) e^{2\pi i n \frac{l-k}{N}} \quad (2.20)$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}\left(\frac{l}{N}\right) \delta_{kl} = N \cdot \tilde{x}\left(\frac{k}{N}\right) \quad (2.21)$$

そこで

$$\tilde{x}\left(\frac{k}{N}\right) = \frac{1}{N} \tilde{x}[k] \quad (2.22)$$

とおくと、

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k] e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \quad (2.23)$$

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} \quad (2.24)$$

とかける。これで、どちらも離散化されたフーリエ変換を得た。これを**離散フーリエ変換** (Discrete Fourier Transformation, DFT) と呼ぶ。

DDT は行列を用いて表現すると見やすい.

$$x = \begin{pmatrix} x[0] \\ x[1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{pmatrix}, \tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x}[0] \\ \tilde{x}[1] \\ \vdots \\ \tilde{x}[N-1] \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

$$W = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i 0 \cdot 0} & e^{-2\pi i 0 \cdot 1} & \dots & e^{-2\pi i 0 \cdot (N-1)} \\ e^{-2\pi i 1 \cdot 0} & e^{-2\pi i 1 \cdot 1} & \dots & e^{-2\pi i 1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-2\pi i (N-1) \cdot 0} & e^{-2\pi i (N-1) \cdot 1} & \dots & e^{-2\pi i (N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

$$= \begin{pmatrix} \omega_N^{0 \cdot 0} & \omega_N^{0 \cdot 1} & \dots & \omega_N^{0 \cdot (N-1)} \\ \omega_N^{1 \cdot 0} & \omega_N^{1 \cdot 1} & \dots & \omega_N^{1 \cdot (N-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_N^{(N-1) \cdot 0} & \omega_N^{(N-1) \cdot 1} & \dots & \omega_N^{(N-1) \cdot (N-1)} \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

とおくと (ただし $\omega_N = e^{-2\pi i/N}$)

$$\tilde{x} = Wx \quad (2.28)$$

$$x = \frac{1}{N} W^\dagger \tilde{x} \quad (2.29)$$

のように非常にコンパクトにかける.*10

2.3 離散時間のスペクトル

離散化されたフーリエ変換 DFT において, スペクトル $S_{xx}(f)$ がどのように定義されるのを見えていく. また実際に計算している方法も述べる.

以下では, $x[n]$ を測定によって得られたデータのうち一部を切り出した長さ N のデータ長, $\tilde{x}[k]$ をその離散フーリエ変換とする. したがって $x[n]$ の次元は $x(t)$ と同じだが, $\tilde{x}[k]$ の次元は $\tilde{x}(f)$ と同じではなく $x(t)$ と同じになる.

2.3.1 スペクトル

パワースペクトル密度 $S_{xx}(\omega)$ を離散化する. そのためにまず $\overline{|x[n]|^2}$ を考えると,

$$\overline{|x[n]|^2} = \frac{1}{N} \|x\|^2 \quad (2.30)$$

であるが, Parseval の定理により $\|x\|^2 = \frac{1}{N} \|\tilde{x}\|^2$ である.*11 したがって

$$\overline{|x[n]|^2} = \frac{1}{N} \|\tilde{x}\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} |\tilde{x}[k]|^2 \quad (2.31)$$

*10 詳細は付録

*11 証明は A.1

となる。ここで連続のときと同じく

$$\overline{|x[n]|^2} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} S_{xx}[k] \quad (2.32)$$

で $S_{xx}[k]$ を定義すると、*12

$$S_{xx}[k] = \frac{1}{N} |\tilde{x}[k]|^2 \quad (2.33)$$

である。これが、離散化されたパワースペクトル密度である。

2.3.2 単位を戻す

$S_{xx}[k]$ はデータから直接計算されたものであるから単位が $S_{xx}(f)$ と一致していない。そこで、次元がわかるようこれを元に戻す。

まず $x[n], \tilde{x}[k]$ について考える。 $x[n] = x(nT_s)$ であり、 $\tilde{x}[k] \propto \tilde{x}\left(\frac{k}{N}f_s\right)$ である。積分とのアナロジーから次元を考えると、

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t) e^{-2\pi i f t} \quad (2.34)$$

であるから、 $dt \rightarrow T_s, \sum \rightarrow \int$ などと置き換えて

$$\tilde{x}\left(\frac{k}{N}f_s\right) = T_s \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_s) e^{-2\pi i \frac{kn}{N}} = T_s \tilde{x}[k] \quad (2.35)$$

と書ける。よって、

$$\tilde{x}[k] = \frac{1}{T_s} \tilde{x}\left(\frac{k}{N}f_s\right) = f_s \cdot \tilde{x}\left(\frac{k}{N}f_s\right) \quad (2.36)$$

となる。

次に $\overline{|x(nT_s)|^2}$ を考えると、まず Parseval の定理から

$$T_s \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_s)|^2 = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} \left| \tilde{x}\left(\frac{k}{N}f_s\right) \right|^2 \quad (2.37)$$

と書ける。よって、

$$\overline{|x(nT_s)|^2} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(nT_s)|^2 = \frac{\Delta f}{NT_s} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \tilde{x}\left(\frac{k}{N}f_s\right) \right|^2 \quad (2.38)$$

となる。一方、パワースペクトルの定義から

$$\overline{|x(nT_s)|^2} = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} S_{xx}\left(\frac{k}{N}f_s\right) \quad (2.39)$$

*12 和の前の $1/N$ は連続のときでいう df だと思えば良い。

であるから、これらを比較して

$$S_{xx}\left(\frac{k}{N}f_s\right) = \frac{1}{NT_s} \left| \tilde{x}\left(\frac{k}{N}f_s\right) \right|^2 \quad (2.40)$$

$$= \frac{1}{NT_s} |T_s \tilde{x}[k]|^2 = \frac{T_s}{N} |\tilde{x}[k]|^2 \quad (2.41)$$

$$= T_s S_{xx}[k] = \frac{1}{f_s} S_{xx}[k] \quad (2.42)$$

となる。しかし実際は標本化定理により $f_s/2$ を超える周波数には意味がなく、 $x[n]$ が実数であれば $S_{xx}(k/N f_s)$ は $f = f_s$ に関して対称になっている。したがって、連続のときと同様に片側スペクトルを

$$S_{xx}\left(\frac{k}{N}f_s\right) = \frac{2}{f_s} S_{xx}[k] = \frac{2}{N f_s} |\tilde{x}[k]|^2 \quad (2.43)$$

と定義する。これが、連続のときの $S_{xx}(f)$ を離散化したものである。

2.4 窓関数

上で見たように、DFT は入力信号 $x[n]$ が周期関数であることを暗に仮定している。しかしフーリエ変換をする前にデータ長を N だけ切り出しているためデータの頭とお尻の値は普通は揃っておらず、解析したいデータ $x[n]$ を周期的に並べるとつなぎ目で不連続な飛びができることになる。これは余計な高周波成分の混入にもなり、スペクトルの形が歪む原因となる。そこで、窓関数をかけて区間の両端が滑らかにつながるようにする。窓関数は時と場合に応じて適切に選ぶ必要があるが、実用上は Hanning Window を使うことがほとんどである。

2.4.1 パワーの変化

窓関数をかけたことでパワーがどの程度変化するかを求める。離散化して考えると面倒なので、以下では連続信号で考える。窓関数を $w(t)$ 、窓関数をかけて切り出した信号を $\tilde{x}(t)$ とすると、切り出した信号のパワー時間平均は

$$\overline{|\tilde{x}(t)|^2} = \overline{\langle x^*(t)w^*(t) \cdot x(t)w(t) \rangle} = \overline{\langle |x(t)|^2 \cdot w(t)^2 \rangle} \quad (2.44)$$

である。ここで、 $w(t)$ はアンサンブルとは独立であることと一般には実関数であることを用いた。 $x(t)$ が定常確率過程であれば、 $\langle |x(t)|^2 \rangle$ は t によらず $C_{xx}(\tau=0)$ に等しいから

$$\overline{|\tilde{x}(t)|^2} = \langle |x(t)|^2 \rangle \cdot \overline{w(t)^2} \quad (2.45)$$

とかける。つまり、窓関数のかかった信号の平均パワーは元の平均パワーから $P = \overline{w(t)^2}$ 倍されることがわかる。これより、窓関数を使ってスペクトルを計算する時には使用した窓関数に応じた P でわることで補正をする必要がある。

2.4.2 矩形窓

データ長 N をただ切り出すだけの操作は矩形窓をかける操作に対応する。矩形窓 $w_r(t)$ を

$$w_r(t) = \begin{cases} 1 & (|t| < \frac{NT_s}{2}) \\ 0 & (|t| > \frac{NT_s}{2}) \end{cases} \quad (2.46)$$

と定義すれば、フーリエ変換は

$$w_r(\omega) = T \operatorname{sinc} \frac{\omega NT_s}{2} \quad (2.47)$$

で与えられる.

特徴は

- メインローブはかなり狭い. 周波数分解能は窓関数としては最も良い.
- サイドローブがかなり遠くまで広がっている. 最悪.

窓関数の平均パワーを P_r とすると,

$$P_r = \frac{1}{NT_s} \int_{-NT_s/2}^{NT_s/2} dt w_r(t)^2 = 1 \quad (2.48)$$

これから、当たり前だが、矩型窓には補正が必要ないことがわかる.

2.4.3 Hanning Window

窓関数としてよく使われるのが Hanning Window である.

$$w_H(t) = \begin{cases} \cos^2 \frac{\pi t}{NT_s} & |t| < \frac{NT_s}{2} \\ 0 & |t| > \frac{NT_s}{2} \end{cases} \quad (2.49)$$

特徴としては

- サイドローブの振幅が矩型窓に比べてかなり小さい
- メインローブが矩型窓より広く、周波数分解能は落ちる

である.

平均パワーを計算すると

$$P_H = \frac{1}{NT_s} \int_{-NT_s/2}^{NT_s/2} dt w_H(t)^2 = \frac{1}{NT_s} \int_{-NT_s/2}^{NT_s/2} dt \cos^4 \frac{\pi t}{NT_s} \quad (2.50)$$

$$= \frac{1}{NT_s} \cdot \frac{NT_s}{\pi} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi = \frac{3}{8} \quad (2.51)$$

よって、Hanning Window を使ってパワースペクトル密度を計算するには、 S_{xx} に $1/P_H = \frac{8}{3}$ をかける必要がある.

付録A 計算の詳細

A.1 Parseval の定理

$x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega)$ を

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt x(t)e^{-i\omega t} \quad (\text{A.1})$$

とすると、逆変換は

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} X(\omega)e^{i\omega t} \quad (\text{A.2})$$

よって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt |x(t)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} X(\omega)e^{i\omega t} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} X(\omega')e^{i\omega' t} \right)^* \quad (\text{A.3})$$

$$= \int dt \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} X(\omega)\tilde{x}^*(\omega')e^{i(\omega-\omega')t} \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \int d\omega' X(\omega)X^*(\omega') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega-\omega')t} dt \right) \quad (\text{A.5})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\omega \int d\omega' X(\omega)\tilde{x}^*(\omega')\delta(\omega-\omega') \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int d\omega X(\omega)\tilde{x}^*(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |X(\omega)|^2 \quad (\text{A.7})$$

DFT の場合は

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k]e^{2\pi i \frac{kn}{N}} \right)^* \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}[l]e^{2\pi i \frac{ln}{N}} \right) \quad (\text{A.8})$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}^*[k]\tilde{x}[l]e^{2\pi i \frac{(l-k)n}{N}} \quad (\text{A.9})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{x}^*[k]\tilde{x}[l]\delta_{kl} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |\tilde{x}[k]|^2 \quad (\text{A.10})$$

A.2 Wiener-Khinchin の定理

確率過程 $x(t)$ ^{*13}の自己相関関数 $C_{xx}(\tau)$ は

$$C_{xx}(\tau) = \langle x(t+\tau)x^*(t) \rangle \quad (\text{A.11})$$

*13 古典的でも量子的でもよい

である。これを用いてパワースペクトル $S_{xx}(\omega)$ を書き直すと,

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 x_T(t_1) e^{-i\omega t_1} \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_2 x_T(t_2) e^{-i\omega t_2} \right)^* \right\rangle \quad (\text{A.12})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 \langle x(t_1) x^*(t_2) \rangle e^{-i\omega(t_1-t_2)} \quad (\text{A.13})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 C_{xx}(t_1 - t_2) e^{-i\omega(t_1-t_2)} \quad (\text{A.14})$$

ここで $\tau = t_1 - t_2$ と変数変換する。ヤコビアン J は

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial t_2} & \frac{\partial t_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial t_2}{\partial t_2} & \frac{\partial t_2}{\partial \tau} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

よって $dt_1 dt_2 = |\det(J)| dt_2 d\tau = dt_2 d\tau$ である。

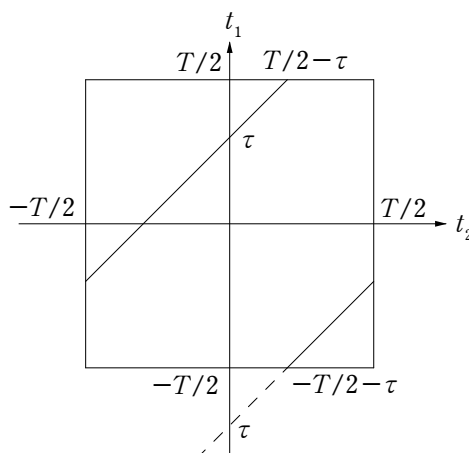


図2 座標変換: $dt_1 dt_2 \rightarrow dt_2 d\tau$

図2より $-T < \tau < 0$ のとき $t_2 \in [-T/2 - \tau, T/2]$, $0 < \tau < T$ のとき $t_2 \in [-T/2, T/2 - \tau]$ であるから

$$S_{xx}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^0 d\tau \int_{-T/2-\tau}^{T/2} dt_2 + \int_0^T d\tau \int_{-T/2}^{T/2-\tau} dt_2 \right) C_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (\text{A.16})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^T d\tau (T - |\tau|) C_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (\text{A.17})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (\text{A.18})$$

となる。ただし、 $\int d\tau |\tau| C_{xx}(\tau) e^{-i\omega\tau}$ が収束すると仮定している。

なお、ここまでの議論で $x(t_1)$ と $x(t_2)$ は交換していない。したがって、 $x(t_1)$ が量子力学的なオペレータで $[x(t_1), x(t_2)] \neq 0$ ($t_1 \neq t_2$) のであっても上の議論は成立する。

これと同様にして、 $C_{xy}(t)$ と $S_{xy}(\omega)$ の関係も導ける。

$$S_{xy}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt x(t) e^{-i\omega t} \right) \left(\int_{-T/2}^{T/2} dt y(t) e^{-i\omega t} \right)^* \right\rangle \quad (\text{A.19})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} dt_1 \int_{-T/2}^{T/2} dt_2 \langle x(t_1) y^*(t_2) \rangle e^{-i\omega(t_1 - t_2)} \quad (\text{A.20})$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^0 d\tau \int_{-T/2-\tau}^{T/2} dt_2 + \int_0^T d\tau \int_{-T/2}^{T/2-\tau} dt_2 \right) \langle x(t_2 + \tau) y^*(t_2) \rangle e^{-i\omega\tau} \quad (\text{A.21})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_{xy}(\tau) e^{-i\omega\tau} \quad (\text{A.22})$$

A.3 線形システムにおける入出力のスペクトルの関係

線形システムの入力を $x(t)$ 、出力を $y(t)$ 、インパルス応答を $h(t)$ とする。出力 $y(t)$ の自己相関関数 $C_{yy}(\tau)$ は

$$C_{yy}(\tau) = \langle y(t + \tau) y^*(t) \rangle \quad (\text{A.23})$$

$$= \left\langle \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_1 x(t_1) h(t + \tau - t_1) \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} dt_2 x(t_2) h(t - t_2) \right)^* \right\rangle \quad (\text{A.24})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{\infty} dt_2 \langle x(t_1) x^*(t_2) \rangle h(t + \tau - t_1) h^*(t - t_2) \quad (\text{A.25})$$

ここで $\xi = t + \tau - t_1, \eta = t - t_2$ とおくと、 $dt_1 dt_2 = (-d\xi)(-d\eta) = d\xi d\eta$ であるから

$$C_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \langle x(t + \tau - \xi) x^*(t - \eta) \rangle h(\xi) h^*(\eta) \quad (\text{A.26})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta h(\xi) h^*(\eta) C_{xx}(\tau - \xi + \eta) \quad (\text{A.27})$$

と $x(t)$ の自己相関関数 $C_{xx}(t)$ で書ける．これを周波数領域で考える．式 (1.17) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_{yy} e^{-i\omega\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta h(\xi) h^*(\eta) C_{xx}(\tau - \xi + \eta) e^{-i\omega\tau} \quad (\text{A.28})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} d\eta h(\xi) h^*(\eta) C_x(\tau - \xi + \eta) e^{-i\omega(\tau - \xi + \eta)} e^{-i\omega\xi} e^{i\omega\eta} \quad (\text{A.29})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\xi h(\xi) e^{-i\omega\xi} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta h^*(\eta) e^{i\omega\eta} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_{xx}(\tau - \xi + \eta) e^{-i\omega(\tau - \xi + \eta)} \quad (\text{A.30})$$

$$= H(\omega) H^*(\omega) S_{xx}(\omega) \quad (\text{A.31})$$

よって

$$S_{yy}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_{xx}(\omega). \quad (\text{A.32})$$

が成り立つ．

A.4 標本化定理

サンプル信号は

$$x_s(t) = x(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(T_s) \delta(t - nT_s) \quad (\text{A.33})$$

と表現できる．このフーリエ変換を考える． $\delta_{T_s}(t)$ は周期 T_s の関数であるからフーリエ級数展開できる．周期 T の周期関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i f_n t}, \quad (\text{A.34})$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt f(t) e^{-2\pi i f_n t} \quad (\text{A.35})$$

(ただし $f_n = n/T$) で与えられる． $\delta_{T_s}(t)$ の場合,

$$c_n = \frac{1}{T_s} \int_{-T/2}^{T/2} dt \sum_{n'=-\infty}^{\infty} \delta(t - n'T_s) e^{-2\pi i f_n t} \quad (\text{A.36})$$

$$= \frac{1}{T_s} \int_{-T/2}^{T/2} dt \delta(t) e^{-2\pi i f_n t} = \frac{1}{T} \quad (\text{A.37})$$

したがって,

$$\delta_{T_s}(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f_n t} \quad (\text{A.38})$$

と書ける．ただし $f_n = n f_s = n/T_s$ である．よって, δ_{T_s} のフーリエ変換 $\delta_{T_s}(f)$ は

$$\delta_{T_s}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{2\pi i f_n t} \cdot e^{-2\pi i f t} = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(f - f_n) \quad (\text{A.39})$$

となる.

一方, 元の信号のフーリエ変換を $\tilde{x}(f)$ とすると

$$\tilde{x}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} df x(t) e^{-2\pi i f t} \quad (\text{A.40})$$

である. サンプルングした信号 $x_s(t)$ をフーリエ変換すると,

$$\tilde{x}_s(f) = \mathcal{F}[x(t)\delta_{T_s}(t)] \quad (\text{A.41})$$

$$= \mathcal{F}[x(t)] * \mathcal{F}[\delta_{T_s}(t)] = \tilde{x}(f) * \delta_{T_s}(f) \quad (\text{A.42})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} df' \tilde{x}(f') \delta(f - f' - f_n) = f_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f - f_n) \quad (\text{A.43})$$

したがって, $\tilde{x}_s(f)$ は周期 $f_s = 1/T_s$ で元の信号のフーリエ変換 $\tilde{x}(f)$ が繰り返していることがわかる.

元の信号は一般には実数であるから, $\tilde{x}_s(-f) = \tilde{x}_s^*(f)$ が成り立つ. したがって $\text{Re}[\tilde{x}_s(f)]$ は f の偶関数, $\text{Im}[\tilde{x}_s(f)]$ は f の奇関数であるから, 繰り返しの周期は $[-f_s/2, f_s/2]$ にとるのが都合が良い. このとき, $\tilde{x}(f)$ が $f > f_s/2$ に有限の値を持つ場合は $\tilde{x}_s(f)$ にはもともと周波数 f の信号と繰り返して紛れ込んだ高周波の信号が混ざり, 正しい $\tilde{x}(f)$ を得ることができない. 逆に, $\tilde{x}(f)$ がある周波数 $f_0 < f_s/2$ より大きい周波数では常に 0 である時, $\tilde{x}_s(f)$ の 1 周期は $\tilde{x}(f)$ に完全に一致し, これを復号すれば元の信号 $x(t)$ を正しく得ることができる. これが Nyquist の標本化定理である.

さて, 次にサンプルングした信号のフーリエ変換 $\tilde{x}_s(f)$ から元の信号 $x(t)$ を復号することを考える. 以下では $\tilde{x}(f)$ は帯域が制限されており, サンプルングレート f_s は制限帯域より十分大きいとする. この時, $\tilde{x}_s(f)$ から $\tilde{x}(f)$ を得るには矩形窓

$$R(f) = \begin{cases} 1/f_s & (|f| < f_s/2) \\ 0 & (|f| > f_s/2) \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

をかければよく,

$$\tilde{x}(f) = \tilde{x}_s(f) \cdot R(f) \quad (\text{A.45})$$

である. $x(t)$ を得るにはフーリエ逆変換をすれば良いから

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{x}(f)] = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{x}_s(f)R(f)] \quad (\text{A.46})$$

$$= x_s(t) * \mathcal{F}^{-1}[R(f)] \quad (\text{A.47})$$

ここで矩形窓 $R(f)$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}^{-1}[R(f)] = \int_{-\infty}^{\infty} df R(f) e^{2\pi i f t} = \frac{1}{f_s} \int_{-f_s/2}^{f_s/2} df e^{2\pi i f t} \quad (\text{A.48})$$

$$= \frac{e^{\pi i f_s t} - e^{-\pi i f_s t}}{2\pi i f_s t} = \frac{\sin(\pi f_s t)}{\pi f_s t} = \text{sinc}(\pi f_s t) \quad (\text{A.49})$$

したがって,

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau x_s(\tau) \text{sinc}(\pi f_s(t - \tau)) \quad (\text{A.50})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - nT_s) \text{sinc}(\pi f_s(t - \tau)) \quad (\text{A.51})$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \text{sinc}(\pi t/T - n\pi) \quad (\text{A.52})$$

であるから, サンプリングした信号に sinc 関数をかけて和を取れば良い.

A.4.1 DFT の行列表示

$\omega_N = e^{-2\pi i/N}$ とすると, DFT は

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \omega_N^{kn} \quad (\text{A.53})$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{x}[k] (\omega_N^{kn})^* \quad (\text{A.54})$$

とかける. $N \times N$ 行列 W を $W_{ij} = \omega_N^{ij}$ で定義すると, これらは

$$\tilde{x}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} W_{kn} x[n] \quad (\text{A.55})$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_{kn}^* \tilde{x}[k] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W_{nk}^\dagger \tilde{x}[k] \quad (\text{A.56})$$

とコンパクトになる.

ここで W の性質を調べておく.

$$\sum_{k=0}^{N-1} W_{ik}^* W_{jk} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i \frac{(i-j)k}{N}} = N\delta_{ij} \quad (\text{A.57})$$

であるから, $\tilde{W} = W/\sqrt{N}$ とおけば \tilde{W} はユニタリー行列である. したがって $\tilde{W}^{-1} = \tilde{W}^\dagger$ になり,

$$W^{-1} = \left(\sqrt{N} \tilde{W} \right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{W}^{-1} \quad (\text{A.58})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{W}^\dagger = \frac{1}{N} W^\dagger \quad (\text{A.59})$$

となる. これは, (A.55) と (A.56) が互いに逆演算であることを表している.

参考文献

[1] スペクトル解析, 日野幹雄, 朝倉書店 (1977)

スペクトル解析の基本的なことはだいたい書いてある. 書かれたのが 1977 年であるからやや記述が古い. (データ処理のところは特に.)

[2] やる夫で学ぶデジタル信号処理,

<http://www.ic.is.tohoku.ac.jp/~swk/lecture/yaruodsp/main.html>

やる夫で学ぶシリーズの体裁を借りているが、中身は結構ちゃんとしている。デジタルの部分はかなり参考にした。