

2019年度 夏学期 特別実験 I
アクシオン暗黒物質探索のための
光リング共振器作成とレーザー周波数制御

東京大学理学部物理学科 4年
05-181512 大島由佳

共同実験者: 05-181568 渡邊泰平

2019年8月27日 第1版提出
2019年9月2日 最終版提出

目次

1	目的	4
2	概要	4
3	PDの較正	5
3.1	実験	5
3.1.1	PDの較正	5
4	RFPDの作成	8
4.1	原理	8
4.1.1	LC共鳴回路	8
4.2	実験	9
4.2.1	RFPDの作成	9
4.2.2	RFPDの性能評価	9
5	光学系1階部分(レーザー光源～ファイバ)	10
5.1	原理	10
5.1.1	Hermite-Gaussianモード	10
5.1.2	モードマッチング	12
5.1.3	偏光と波長板	12
5.2	実験	14
5.2.1	光学素子と光学系	14
5.2.2	ファイバのモードマッチング	14
6	光学系2階部分(ファイバ～光リング共振器)	18
6.1	原理	18
6.1.1	共振器の反射率と透過率	18
6.1.2	共振器のフィネス	21
6.2	実験	22
6.2.1	光学素子と光学系	22
6.2.2	ファイバによる偏光回転の測定	23
6.2.3	共振器のモードマッチング	25
6.2.4	レーザー周波数の振動とミラーのアラインメントによる共振	27
6.2.5	共振器の性能評価	29
7	PDH法による共振器のフィードバック制御	31
7.1	原理	31
7.1.1	PDH法	31
7.1.2	オープンループ伝達関数	34
7.2	実験	35
7.2.1	PDH法による共振器のフィードバック制御	35
7.2.2	オープンループ伝達関数とパワースペクトルの測定	36
8	アクシオン暗黒物質の探索の準備	39
8.1	実験	39
8.1.1	1/2波長板の回転角の測定	39
9	結論	40

略語一覽

BS	Beam Splitter
EOM	Electro Optic Modulator (電気光学変調器)
FSR	Free Spectral Range
FWHM	Full Width at Half Maximum (半値全幅)
HWHM	Half Width at Half Maximum (半値半幅)
HWP	Half-Wave Plate (1/2 波長板)
PBS	Polarizing Beam Splitter
PD	Photo Detector (光検出器)
PDH	Pound-Drever-Hall
PZT	Pb(Z _{rx} , Ti _{1-x})O ₃ (ピエゾ素子)
QWP	Quarter-Wave Plate (1/4 波長板)
RFPD	Resonance Frequency Photo Detector
RMS	Root Mean Square (二乗平均平方根)
UGF	Unity Gain Frequency

1 目的

暗黒物質の存在は、銀河の回転速度、弾丸銀河団の観測などにより 1970 年代頃から間接的に証明されてきた。しかし、暗黒物質の正体は何かという疑問に対する答えは未だに得られていない。暗黒物質の候補として、アクシオンなど複数のものが考えられている。

先行研究から、アクシオン光子相互作用-アクシオン質量のグラフに制限がつけられてきた。アクシオンが存在するならば、光子との相互作用により、直線偏光が回転することが知られている。本実験の目的は、光リング共振器作成とレーザー周波数制御、直線偏光の回転の観測によるアクシオン制限である。

Dark matter Axion search with riNg Cavity Experiment

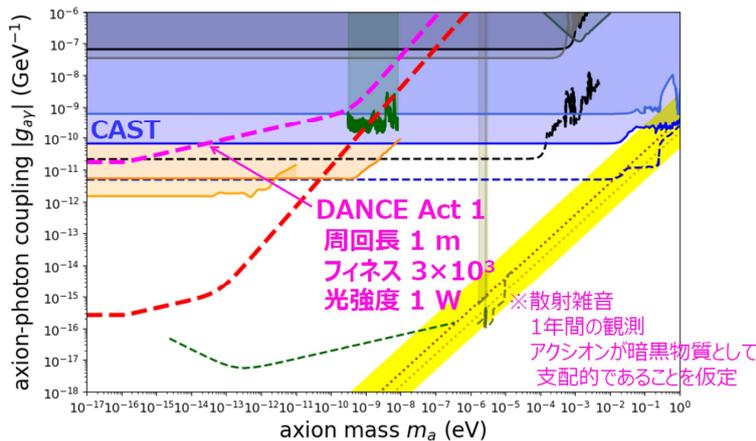


図 1.1: アクシオン光子相互作用-アクシオン質量のグラフ (本実験装置で 1 年間観測を行うと CAST の制限を超えられることを示している。参考文献 [8] より)

2 概要

実験装置の概略は図 2.1、実験装置の写真は図 2.2 である。

4 枚のミラーからなる光リング共振器を作成し、モードマッチングとミラーのアラインメントにより共振を実現した。光リング共振器の性能評価を行った。

PDH 法に使用する RFPD を作成し、性能評価を行った。PDH 法によるフィードバック制御を行い、共振状態が長時間保たれるようにレーザーの周波数を制御した。制御の安定性、外乱の評価を行った。共振器に p 偏光を入射して、透過光中の s 偏光の強度変化を測定する準備を行った。時間の関係から、観測によるアクシオン制限は行えなかった。

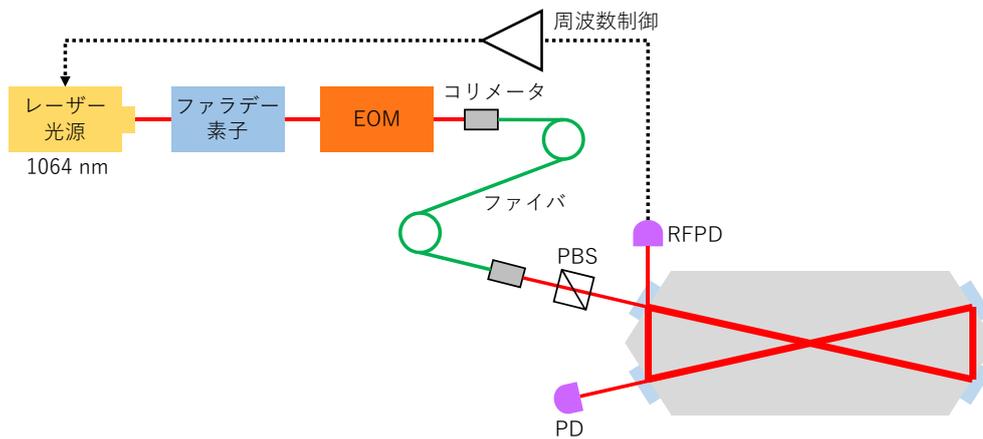


図 2.1: 実験装置の概略

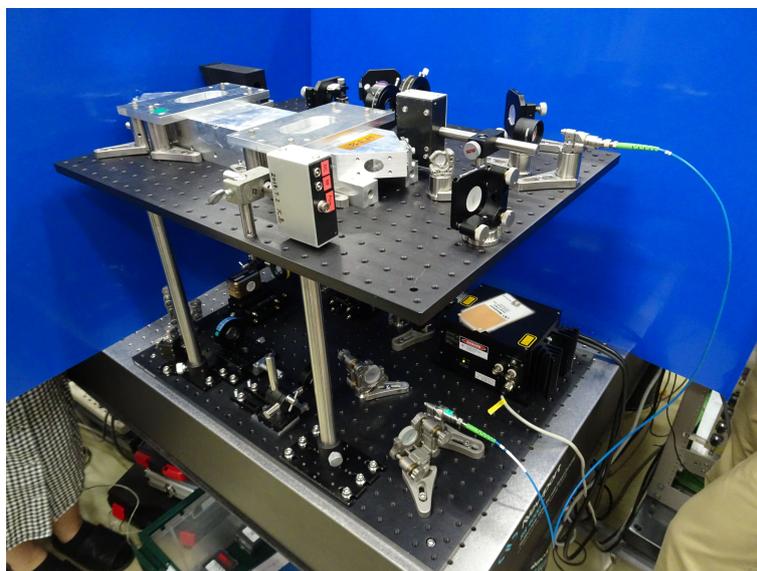


図 2.2: 実験装置の写真

3 PDの較正

3.1 実験

3.1.1 PDの較正

本実験でレーザーの強度を測定するために用いたPDのレーザー強度と出力電流の関係の較正を行った。まず、光量を絞るフィルターND1.0の較正を行った。レーザー強度はパワーメーターで測定したのだが、パワーメーターは5 mWまでしか測定できない仕様だったため、パワーメーターの直前にND1.0を置く必要があったからである。ND1.0を置かない状態とND1.0を置いた状態でレーザー強度をPDで測定した。レーザー光源機器のactual currentの部分でマイナスインプットで回してレーザー強度を変化させた。結果は図 3.1.1 のようになった。

$$\text{PD output [V]} = \frac{\text{PD output (ND1.0) [V]}}{N} \quad (3.1.1)$$

$$N = 9.035 \pm 0.079$$

と求まった。

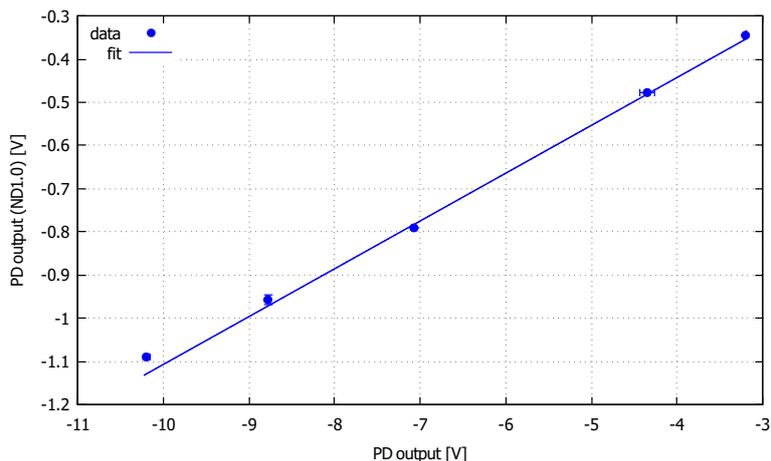


図 3.1.1: ND1.0 の較正

レーザー光源機器の actual current を変化させながら、直前に ND1.0 を置いてパワーメーターでレーザー強度を測定した。結果は図 3.1.2 のようになった。式 (3.1.1) を用いてレーザー強度を ND1.0 を置いていない状態の値に変換した。

$$\text{laser power [mW]} = a \times \text{actual current [A]} + b \quad (3.1.2)$$

$$a = 555 \pm 17 \text{ mW/A}$$

$$b = -325 \pm 11 \text{ mW}$$

と求まった。

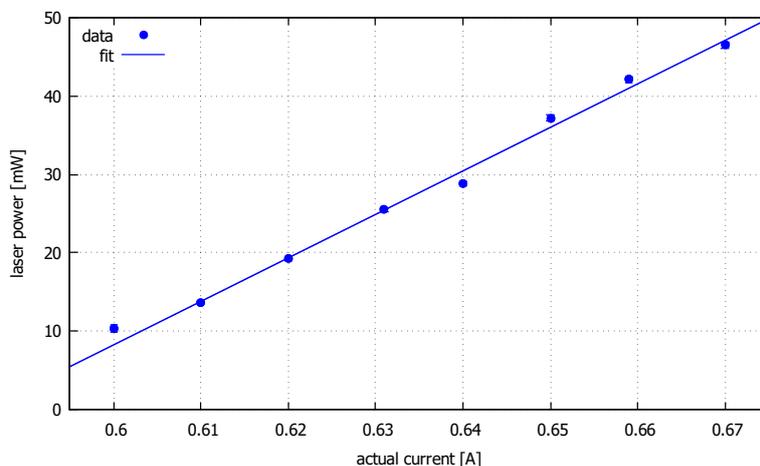


図 3.1.2: レーザー光源機器の actual current とレーザー強度の関係

レーザー光源機器の actual current を変化させながら、レーザー強度を PD で測定した。式 (3.1.2) を用いて actual current をレーザー強度に変換した。結果は図 3.1.3 のようになった。レーザー強度が 35 mW を超えた 2 点は PD の出力が上限に達していると判断し、フィッティングする際には取り除いた。

$$\text{PD output [V]} = a \times \text{laser power [mW]} \quad (3.1.3)$$

$$a = -0.42 \pm 0.03 \text{ V/mW}$$

と求まった。

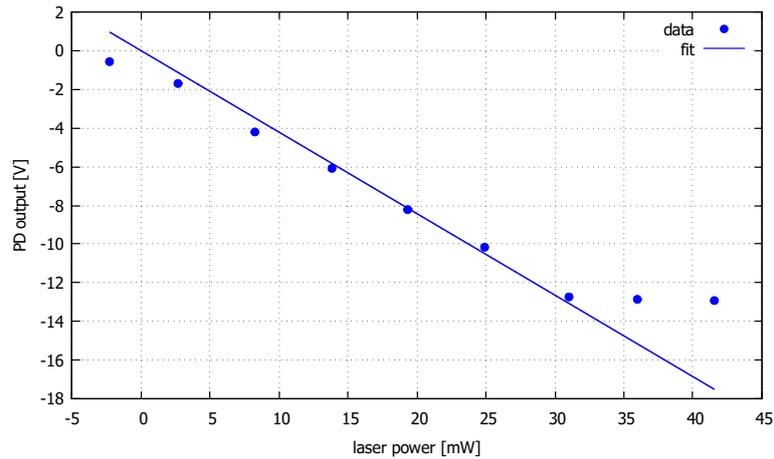


図 3.1.3: レーザー強度と PD の出力の関係

今回使用した PD の回路は図 3.1.4 のようになっており、抵抗の値は $n = 2$ で $10^3 \Omega$ 、すなわち、ゲインは 1000 であった。よって、式 (3.1.3) は

$$\begin{aligned} \text{PD output [mA]} &= a \times \text{laser power [mW]} \\ c &= -0.42 \pm 0.03 \text{ mA/mW} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

と書き直せる。

以上より、PD の較正值は $0.42 \pm 0.03 \text{ A/W}$ となった。

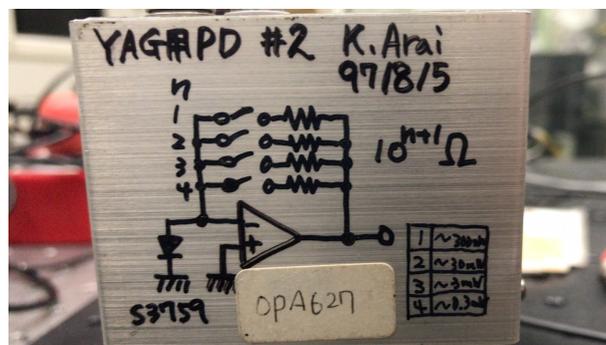


図 3.1.4: PD の回路図

フォトダイオードの分光感度特性は図 3.1.5 である。波長 1064 nm での受光感度は 0.38 A/W であるから、測定値は誤差の範囲で一致しなかった。この原因として、PD の回路内の抵抗の値を実際に測定していないことが考えられる。

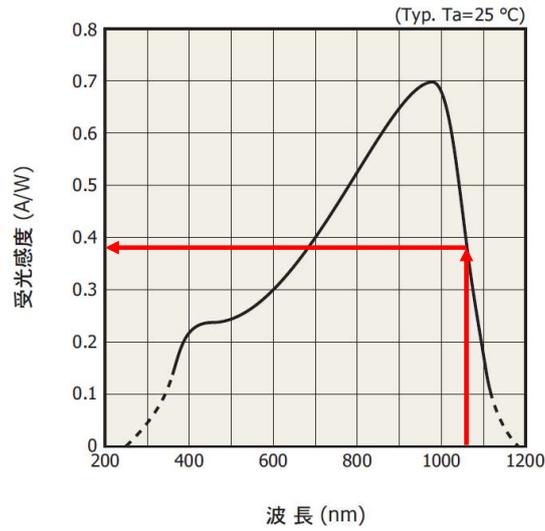


図 3.1.5: フォトダイオードの分光感度特性 (参考文献 [15] より)

4 RFPD の作成

4.1 原理

4.1.1 LC 共鳴回路

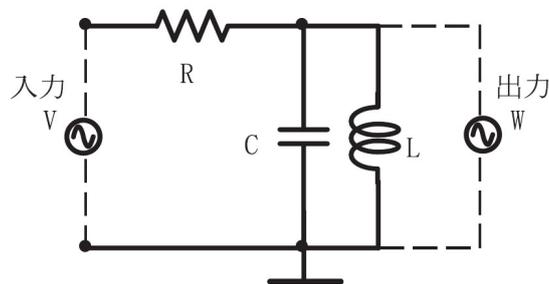


図 4.1.1: LC 共鳴回路 (参考文献 [18] より)

図 4.1.1 のような回路を考える。入力信号の角周波数を ω とする。インピーダンスの比例配分則により、

$$w : v = \frac{1}{i\omega C} : R + \frac{1}{i\omega C} \quad (4.1.1)$$

となる。周波数の次元を持つ 2 つの定数 $\Gamma \equiv 1/RC$ と $\omega_0 \equiv 1/\sqrt{LC}$ を用いて、

$$F(\omega) = \frac{w}{v} = \frac{\frac{i\omega}{RC}}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + \frac{i\omega}{RC}} = \frac{i\Gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \quad (4.1.2)$$

となる。実際にはこの絶対値

$$|F(\omega)| = \frac{\Gamma\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2\omega^2}} \quad (4.1.3)$$

が周波数特性となる。

4.2 実験

4.2.1 RFPD の作成

第7章のPDH法のために、RFPDを2つ作成した。図4.2.1のように素子をプリント基板RFPD ver2にはんだ付けで付けた。プリント基板には可変コンデンサ用の足が4つ用意されていたが、使用した可変コンデンサの足は2本だった。C1'は可変コンデンサ用の残りの2本の足を利用し、L1、C1と並列になるように付けた。

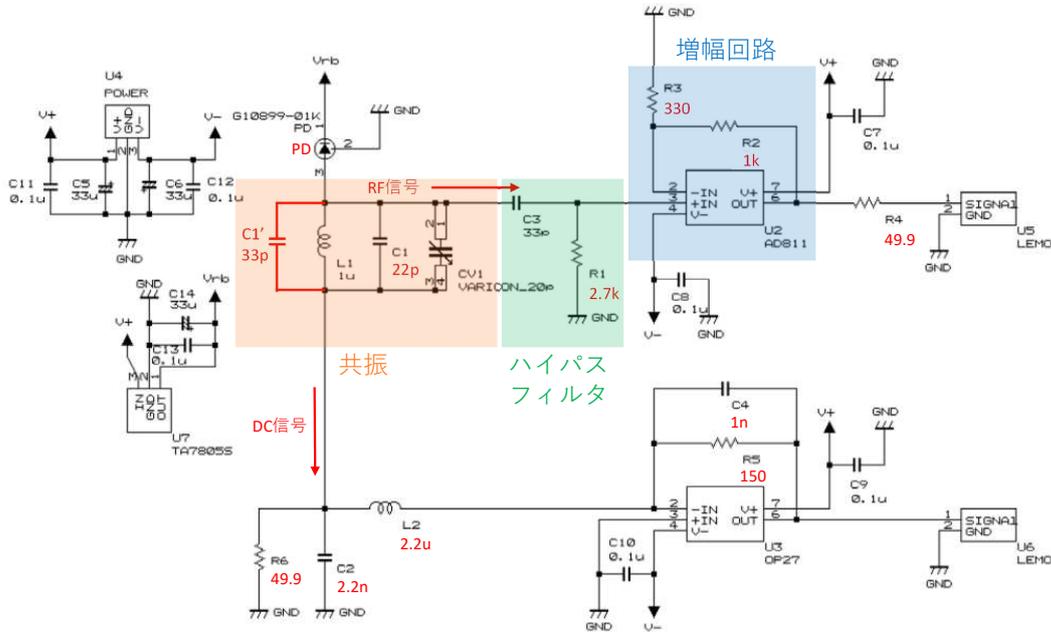


図 4.2.1: RFPD の回路図 (赤字は書き加えたところ。参考文献 [17] より)

4.2.2 RFPD の性能評価

作成したRFPDの共振周波数とQ値を測定した。ファンクションジェネレータから $V_{p-p} = 2.0\text{V}$ の正弦波を赤外LEDに入力し、赤外LEDからの光をRFPDに入射して、RF信号の V_{p-p} を測定した。結果は図4.2.2のようになった。

式(4.1.3)に定数倍の自由度を与えた関数

$$V_{p-p} [\text{V}] = a \times \frac{\text{frequency} [\text{MHz}]}{\sqrt{(\text{frequency} [\text{MHz}] - f_0)^2 + b^2 \times (\text{frequency} [\text{MHz}])^2}} \quad (4.2.1)$$

でデータをフィッティングし、Wolfram Alphaを用いて

$$\frac{\text{frequency} [\text{MHz}]}{\sqrt{(\text{frequency} [\text{MHz}] - f_0)^2 + b^2 \times (\text{frequency} [\text{MHz}])^2}} = \frac{1}{2} \quad (4.2.2)$$

となる f_1, f_2 ($f_1 < f_2$)を数値計算し、Q値

$$Q = \frac{f_0}{f_2 - f_1} \quad (4.2.3)$$

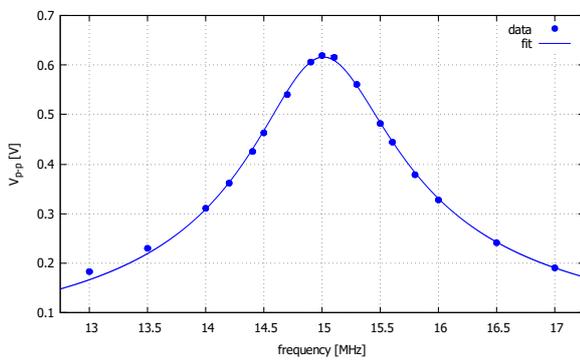
を求めた。

(a) 大島 RFPD

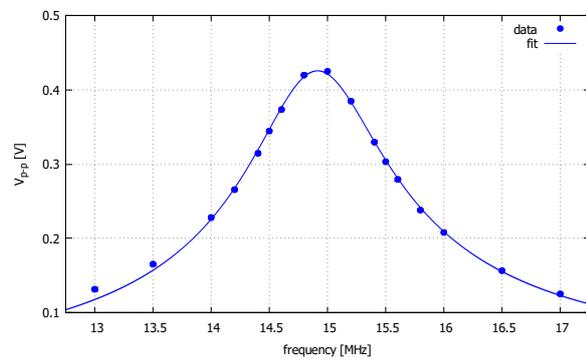
$$\begin{cases} a = 0.750 \pm 0.008 \text{ V} \\ b = 1.22 \pm 0.02 \\ f_0 = 15.011 \pm 0.006 \text{ MHz} \\ Q = 9.45 \pm 0.15 \end{cases}$$

(b) 渡邊 RFPD

$$\begin{cases} a = 0.504 \pm 0.005 \text{ V} \\ b = 1.18 \pm 0.02 \\ f_0 = 14.913 \pm 0.005 \text{ MHz} \\ Q = 9.25 \pm 0.16 \end{cases}$$



(a) 大島 RFPD



(b) 渡邊 RFPD

図 4.2.2: RFPD の周波数依存性

5 光学系 1 階部分 (レーザー光源～ファイバ)

5.1 原理

5.1.1 Hermite-Gaussian モード

レーザーによる電場は Gaussian ビームと呼ばれる電場分布を持っている。共振器にレーザーを入射する際には、ビームと共振器の空間モードを考える必要がある。

電場の波動方程式

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla^2 E = 0 \quad (5.1.1)$$

の解として

$$E(t, x, y, z) = \psi(x, y, z) E_0 e^{i\omega t} \quad (5.1.2)$$

という解を考え、 ψ の z 方向の変化が十分小さい、すなわち

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \frac{\omega}{c} \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \quad (5.1.3)$$

が成り立つとすると、波動方程式 (5.1.1) は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2i \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(x) = 0 \quad (5.1.4)$$

となる。このような近似を近軸近似と呼ぶ。近軸近似された波動方程式 (5.1.4) の解の組 $\{\psi_{lm}\}$ として Hermite-Gaussian モード

$$\begin{aligned} \psi_{lm}(x, y, z) = & \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \\ & \times \exp \left[-ikz - \left(\frac{1}{w^2(z)} + i \frac{k}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + i(l+m+1)\zeta(z) \right] \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

がある。ただし、

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad (5.1.6)$$

は Hermite 多項式である。また、 $k = \omega/c$ は波数、 w_0 はビームウエスト半径であり、その他の記号は以下の通りである。

$$z_0 = \frac{kw_0^2}{2} : \text{Rayleigh レンジ} \quad (5.1.7)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2} : \text{ビーム半径} \quad (5.1.8)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z}{z_0} \right)^2 \right] : \text{波面の曲率半径} \quad (5.1.9)$$

$$\zeta(z) = \arctan \frac{z}{z_0} : \text{Gouy 位相} \quad (5.1.10)$$

ψ_{lm} を TEM lm モード、あるいは単に lm モードと呼ぶ。

TEM 00 モードを基本モードと呼ぶ。理想的なレーザーはこの基本モードとなっており、式 (5.1.5) で $l = m = 0$ として

$$\psi_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \exp \left[-i(kz - \zeta(z)) - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) \right] \quad (5.1.11)$$

となる。式 (5.1.11) を見るとわかるように、基本モードでは xy 平面で z 軸対称に電場振幅が Gauss 分布している。 z 軸上の電場振幅が最も大きく、中心からビーム半径 w だけずれると電場振幅は $1/e$ になる。また、Gouy 位相 $\zeta(z)$ は平面波と基本モードの位相差を表していることもわかる。

式 (5.1.5) で $(l, m) \neq (0, 0)$ となる空間モードを高次モードと呼ぶ。式 (5.1.5) と式 (5.1.11) より、高次モードを基本モード $\psi_{00}(x, y, z)$ を用いて書き直すと

$$\psi_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp[i(l+m)\zeta(z)] \psi_{00}(x, y, z) \quad (5.1.12)$$

となる。式 (5.1.12) から、Gouy 位相 $\zeta(z)$ は高次モードと基本モードの位相差を表していることがわかる。基本モードと $(l+m)$ 次の高次モードの位相差は $(l+m)\zeta$ である。

レーザーは理想的には基本モードだけが含まれるが、実際には高次モードも含まれる。共振器のミスアライメントも高次モード混入の原因となる。

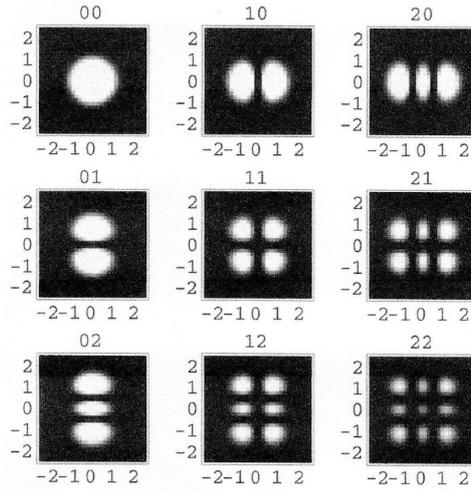


図 5.1.1: Hermite-Gaussian モードのウエストにおける断面の強度分布 (座標はビーム半径で規格化している。参考文献 [1] より)

5.1.2 モードマッチング

ファイバや共振器には、固有モードと呼ばれる特定の空間分布を持つ Gaussian ビームを入射する必要がある。固有モードを求めるために、レンズやミラーによって Gaussian ビームがどのように変換されるのかを追跡する。式 (5.1.7) から式 (5.1.10) を見るとわかるように、Gaussian ビームの空間分布と空間発展はウエストからの位置 z と Rayleigh レンジ z_0 ですべて決定される。したがって、

$$q = z + iz_0 \quad (5.1.13)$$

とにおいて q の変換を考えればよい。

q の変換は光線伝播行列 (ray transfer matrix または ABCD 行列) によって計算される。ある光学素子によって q_1 から q_2 変換されるとき、適当な規格化定数 a を用いて

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (5.1.14)$$

となる。式 (5.1.14) を解くと、

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (5.1.15)$$

となる。各光学素子における光線伝播行列は以下の通りである。

$$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{距離 } d \text{ の伝搬} \quad (5.1.16)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} : \text{焦点距離 } f \text{ の薄レンズ} \quad (5.1.17)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} : \text{曲率半径 } R \text{ のミラー} \quad (5.1.18)$$

5.1.3 偏光と波長板

波長板とは、複屈折結晶を利用して、直交する 2 つの光学軸の間に位相差を生じさせることで偏光状態を変換する光学素子である。1/2 波長板は 1/2 波長に相当する π 、1/4 波長板は 1/4 波長に相当する

$\pi/2$ だけ位相差を生じさせる。2つの光学軸は速軸 (fast 軸)、遅軸 (slow 軸) と呼ばれ、速軸に対して遅軸が決まった位相だけ遅れる。

波長板によって偏光がどのように変換されるのかを Jones 計算法で考える。波長板に入射する光の電場振幅を s 偏光成分 E^s と p 偏光成分 E^p を用いて

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \begin{pmatrix} E^s \\ E^p \end{pmatrix} \quad (5.1.19)$$

とおく。ここで座標 s, p はそれぞれ電磁波の入射面に対して垂直、平行な方向の直交座標である。波長板の遅軸と s 軸が θ だけ回転しているとすると、s, p 軸から速, 遅軸への変換 $R(\theta)$ は

$$\begin{pmatrix} E^{\text{fast}} \\ E^{\text{slow}} \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} E^s \\ E^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E^s \\ E^p \end{pmatrix} \quad (5.1.20)$$

と書ける。

1/2 波長板は速軸と遅軸の間に π だけ位相差を生じさせるので、1/2 波長板の働きを表す変換行列は s, p 座標基底で

$$\begin{aligned} W_H(\theta_H) &= R^{-1}(\theta_H) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi} \end{pmatrix} R(\theta_H) \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2\theta_H & \sin 2\theta_H \\ -\sin 2\theta_H & \cos 2\theta_H \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.21)$$

となる。図 5.1.2(a) のように、1/2 波長板は直線偏光を速軸に対して対称に折り返した偏光に変換する。1/2 波長板の速軸を回転させることで、直線偏光の偏光方向を変えることができる。

1/4 波長板は速軸と遅軸の間に $\pi/2$ だけ位相差を生じさせるので、1/4 波長板の働きを表す変換行列は s, p 座標基底で

$$\begin{aligned} W_Q(\theta_Q) &= R^{-1}(\theta_Q) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\pi/2} \end{pmatrix} R(\theta_Q) \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \theta_Q - i \sin^2 \theta_Q & \sin \theta_Q \cos \theta_Q (1 + i) \\ \sin \theta_Q \cos \theta_Q (1 + i) & \sin^2 \theta_Q - i \cos^2 \theta_Q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.22)$$

となる。図 5.1.2(b) のように、1/4 波長板は入射した直線偏光の速軸成分と遅軸成分の長短軸とする楕円偏光に変換する。

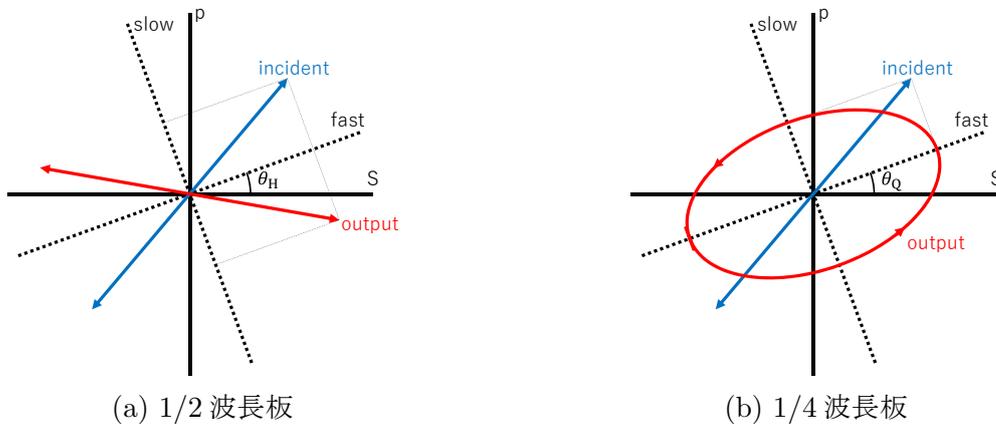


図 5.1.2: 波長板による偏光の変換

5.2 実験

5.2.1 光学素子と光学系

本実験では、スペースの都合上、光学系を2段に分けて組んだ。光学系1階部分は図5.2.1の通りである。

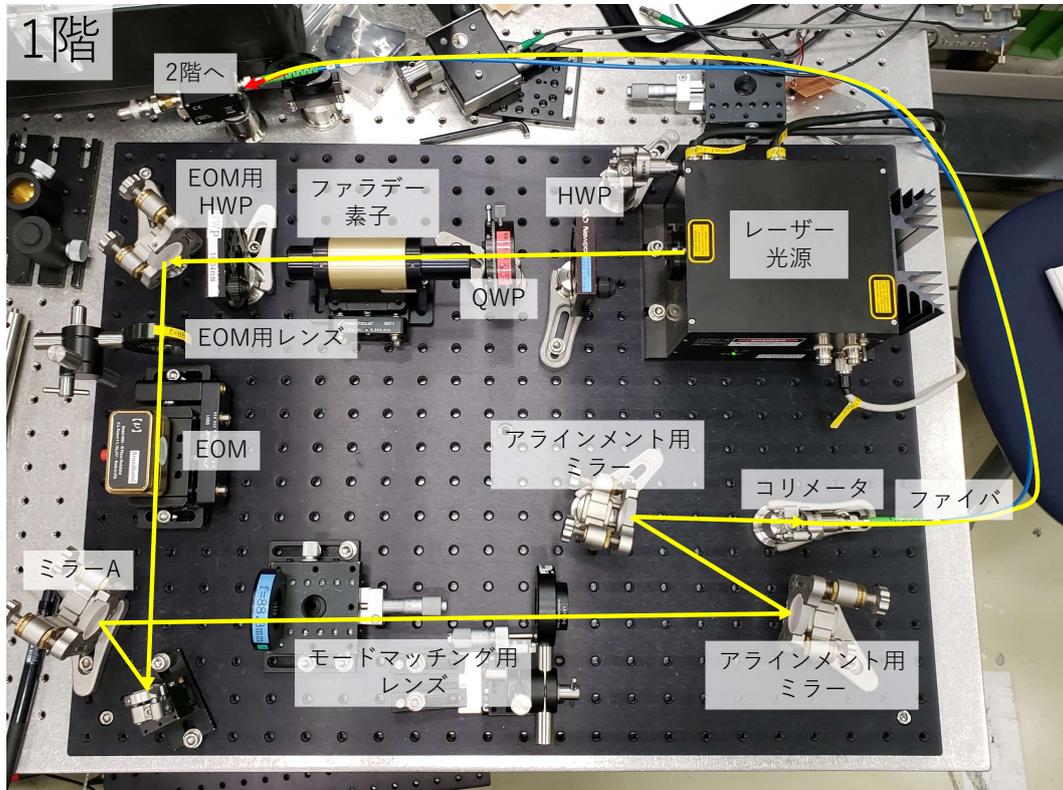


図 5.2.1: 光学系 1 階部分

レーザーがミラーなどで反射して光源機器に戻ってくると、光源機器が壊れてしまう可能性がある。ファラデー素子を置くことで反射光が捨てられるようにした。

EOMの口径は直径2mmであった。これに対し、レンズを置かなかった場合のEOMへの入射光のビーム径をビームプロファイラで測定したところ、直径1.6mmであった。レーザーがEOM内部の壁面に当たってしまっている可能性があると考え、EOMの直前に焦点距離88.3mmのレンズを置いてビームを絞った。

EOMは第7章のPDH法において、レーザーの周波数を変調するとき用いた。

5.2.2 ファイバのモードマッチング

ファイバにコリメータを通してレーザーを入射する際、ファイバの透過率を上げるにはファイバの固有モードに入射光のモードを合わせる必要があるため、モードマッチングを行った。

まず、入射光のモードを知るために、モードマッチング用のレンズを置かずにビーム半径をビームプロファイラで測定した。結果は図5.2.2のようになった。式(5.1.8)にビームウエストの位置の自由度を加えた式でデータをフィッティングし、ウエストの位置とRayleighレンジを求めると、表5.2.1のようになった。

表 5.2.1: ファイバへ入射するレーザーのウエストの位置と Rayleigh レンジ (図 5.2.1 のミラー A の位置を 0 cm とし、右向きを正とした)

	ウエストの位置	Rayleigh レンジ
x 方向	-16.1 ± 0.3 cm	0.83 ± 0.01 cm
y 方向	-18.8 ± 1.2 cm	1.00 ± 0.06 cm

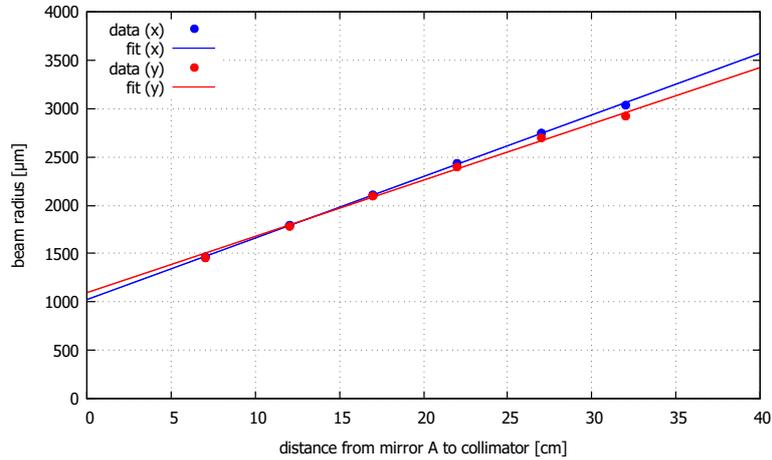


図 5.2.2: ファイバへ入射するレーザーのビーム半径 (図 5.2.1 のミラー A の位置を 0 cm とし、右向きを正とした)

次に、ファイバの固有モードを知るために、ファイバにレーザーを入射し、出射光のビーム半径をビームプロファイラで測定した。ファイバは、どのようなモードのビームを入射した場合でも、固有モードのビームを出射するからである。結果は図 5.2.3 のようになった。式 (5.1.8) にビームウエストの位置の自由度を加えた式でデータをフィッティングし、ウエストの位置と Rayleigh レンジを求めると、表 5.2.2 のようになった。

表 5.2.2: ファイバから出射したレーザーのウエストの位置と Rayleigh レンジ (他との対応のため、図 5.2.1 のミラー A の位置を 0 cm とし、右向きを正とした)

	ウエストの位置	Rayleigh レンジ
x	71.2 ± 0.4 cm	52.9 ± 0.4 cm
y	72.3 ± 0.6 cm	52.1 ± 0.6 cm

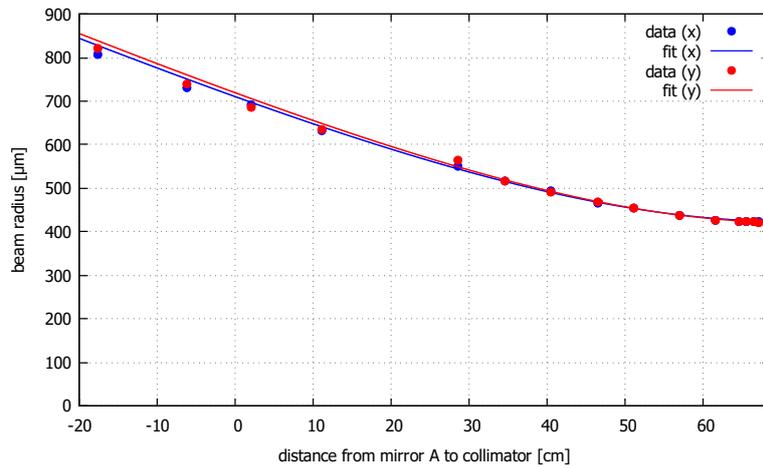


図 5.2.3: ファイバから出射したレーザーのビーム半径 (他との対応のため、図 5.2.1 のミラー A の位置を 0 cm とし、右向きを正とした)

参考文献 [1] より、 x 方向、 y 方向のウエストの位置をそれぞれ d_x , d_y とし、 x 方向、 y 方向の Rayleigh レンジをそれぞれ z_x , z_y とすると、楕円形のビームを円形のビームに近似したときのウエストの位置 d' と Rayleigh レンジ z' は

$$d' = \frac{z_x d_y + z_y d_x}{z_x + z_y} \quad (5.2.1)$$

$$z' = \sqrt{z_x z_y} \sqrt{1 + \left(\frac{d_x - d_y}{z_x + z_y} \right)^2} \quad (5.2.2)$$

となる。表 5.1.1 と表 5.2.2 の値を式 (5.2.1) と式 (5.2.2) に代入し、実際の入射光と理想の入射光のウエストの位置と Rayleigh レンジを求めると、表 5.2.3 のようになった。

表 5.2.3: ウエストの位置と Rayleigh レンジ (図 5.2.1 のミラー A の位置を 0 cm とし、右向きを正とした)

	ウエストの位置	Rayleigh レンジ
実際の入射光	-17.3 cm	1.64 cm
理想の入射光	71.8 cm	52.5 cm

実際の入射光を理想の入射光にするために、Python による数値計算でモードマッチングの計算を行った。図 5.2.4 のように焦点距離 88.3 mm と 50 mm のレンズを配置することで理想的なモードの入射光を実現できることが分かった。

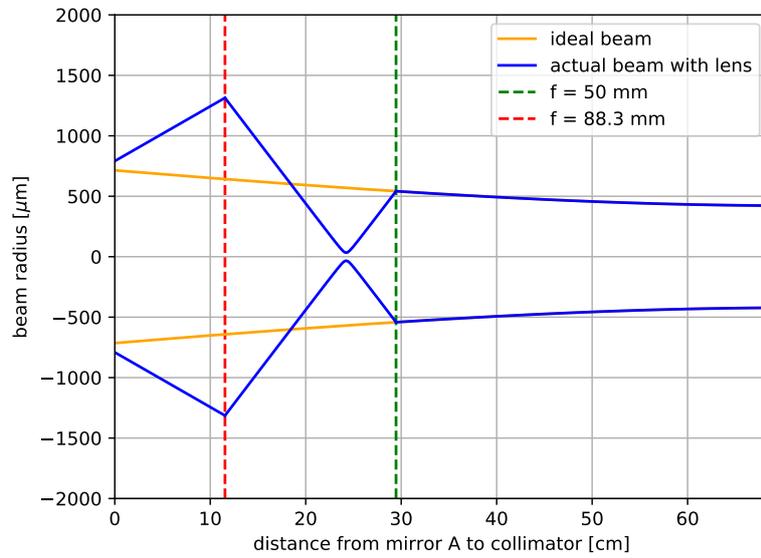


図 5.2.4: ファイバのモードマッチングの計算 (図 5.2.1 のミラー A の位置を 0 cm とし、右向きを正とした)

図 5.2.4 をもとに図 5.2.1 のように光学系を組み、ミラー 2 つでアラインメントを調整したところ、レーザーの強度は表 5.2.4 のようになり、光学系 1 階部分のレーザーの透過率は 48% であった。

表 5.2.4: レーザー強度

	レーザー強度	相対値
レーザー光源直後	20.4 mW	100 %
ファイバ直前	14.9 mW	73 %
ファイバ直後	9.9 mW	48 %

6 光学系 2 階部分 (ファイバ~光リング共振器)

6.1 原理

6.1.1 共振器の反射率と透過率

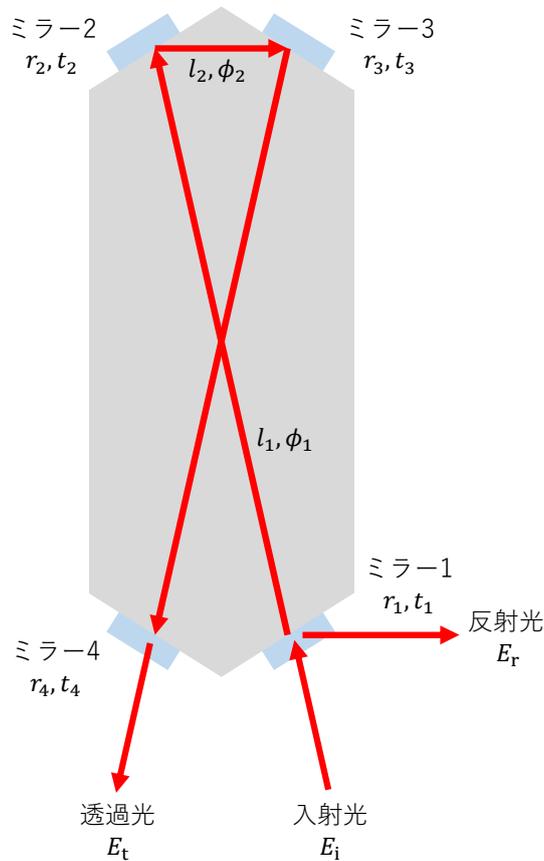


図 6.1.1: 光リング共振器

図 6.1.1 のような光リング共振器を考える。共振器の周回長を

$$2l_1 + 2l_2 = L \quad (6.1.1)$$

とおく。ミラー i ($i = 1, 2, 3, 4$) の振幅反射率、振幅透過率をそれぞれ r_i, t_i とおく。反射率の符号は共振器の内側で正、外側で負とする。

$$r_i^2 + t_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4) \quad (6.1.2)$$

が成り立つ。レーザーが共振器内を l_1 進んだときの位相変化を ϕ_1 、 l_2 進んだときの位相変化を ϕ_2 とし、

$$\phi = 2\phi_1 + 2\phi_2 \quad (6.1.3)$$

$$\phi' = 2\phi_1 + \phi_2 \quad (6.1.4)$$

とおく。 ϕ はレーザーが共振器を 1 周するときの位相変化であるから、レーザーの角周波数を ω とすると、

$$\phi = \frac{L\omega}{c} \quad (6.1.5)$$

である。

ミラー 1 に入射するレーザーの電場振幅を E_i とすると、反射光の振幅 E_r は、共振器内での光の周回を考えて、

$$\begin{aligned}
E_r &= E_i(-r_1) + E_i t_1 r_2 r_3 r_4 t_1 e^{-i\phi} + E_i t_1 r_2 r_3 r_4 r_1 r_2 r_3 r_4 t_1 e^{-2i\phi} \\
&\quad + E_i t_1 r_2 r_3 r_4 r_1 r_2 r_3 r_4 r_1 r_2 r_3 r_4 t_1 e^{-3i\phi} + \dots \\
&= E_i(-r_1) + E_i t_1^2 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi} + E_i t_1^2 r_1 r_2^2 r_3^2 r_4^2 e^{-2i\phi} + E_i t_1^2 r_1^2 r_2^3 r_3^3 r_4^3 e^{-3i\phi} + \dots \\
&= E_i(-r_1) + E_i t_1^2 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi})^n \\
&= E_i \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}} \right)
\end{aligned} \tag{6.1.6}$$

となる。同様に透過光の振幅 E_t は、

$$\begin{aligned}
E_t &= E_i t_1 r_2 r_3 t_4 e^{-i\phi'} + E_i t_1 r_2 r_3 r_4 r_1 r_2 r_3 t_4 e^{-i(\phi+\phi')} \\
&\quad + E_i t_1 r_2 r_3 r_4 r_1 r_2 r_3 r_4 r_1 r_2 r_3 t_4 e^{-i(\phi+2\phi')} + \dots \\
&= E_i t_1 r_2 r_3 t_4 e^{-i\phi'} + E_i t_1 r_1 r_2^2 r_3^2 r_4 t_4 e^{-i(\phi+\phi')} + E_i t_1 r_1^2 r_2^3 r_3^3 r_4 t_4 e^{-i(\phi+2\phi')} + \dots \\
&= E_i t_1 r_2 r_3 t_4 e^{-i\phi'} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi})^n \\
&= E_i \frac{t_1 r_2 r_3 t_4 e^{-i\phi'}}{1 - r_1 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}}
\end{aligned} \tag{6.1.7}$$

となる。

したがって、振幅反射率と振幅透過率 r_{cav} , t_{cav} は、それぞれ次のようになる。

$$r_{\text{cav}}(\phi) \equiv \frac{E_r}{E_i} = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}} \tag{6.1.8}$$

$$t_{\text{cav}}(\phi) \equiv \frac{E_t}{E_i} = \frac{t_1 r_2 r_3 t_4 e^{-i\phi'}}{1 - r_1 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}} \tag{6.1.9}$$

式 (6.1.8) を用いて、共振付近における振幅反射率 r_{cav} の絶対値と位相の変化をプロットしたものが図 6.1.2 である。共振付近では ϕ のわずかな変化に対して反射光の位相が大きく変化することがわかる。

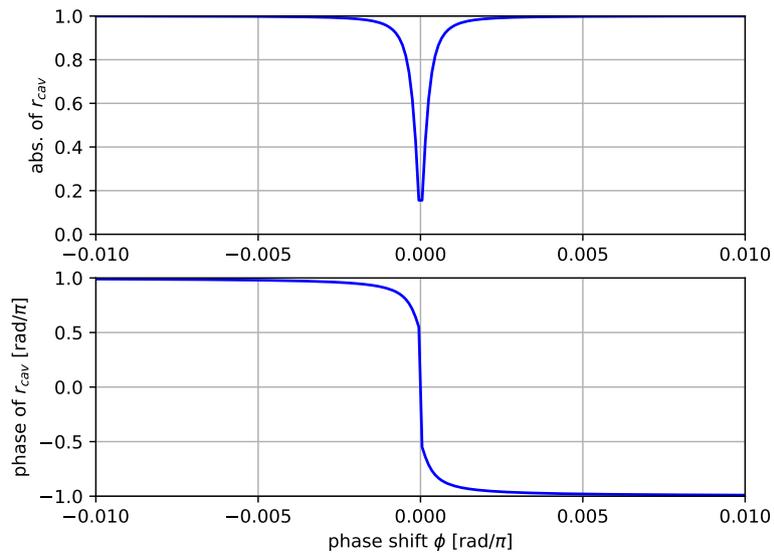


図 6.1.2: 光リング共振器の振幅反射率の絶対値と位相 ($r_1 = r_4 = \sqrt{0.999}$, $r_2 = r_3 = 1$ の場合)

強度反射率と強度透過率 $R_{\text{cav}}(\phi)$, $T_{\text{cav}}(\phi)$ は、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} R_{\text{cav}}(\phi) &= |r_{\text{cav}}(\phi)|^2 \\ &= \frac{(r_1^2 r_2 r_3 r_4 + t_1^2 r_2 r_3 r_4 - r_1)^2 + 4r_1(r_1^2 r_2 r_3 r_4 + t_1^2 r_2 r_3 r_4) \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_1 r_2 r_3 r_4)^2 + 4r_1 r_2 r_3 r_4 \sin^2(\phi/2)} \\ &= \frac{(r_2 r_3 r_4 - r_1)^2 + 4r_1 r_2 r_3 r_4 \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_1 r_2 r_3 r_4)^2 + 4r_1 r_2 r_3 r_4 \sin^2(\phi/2)} \quad (\because \text{式 (6.1.2)}) \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

$$\begin{aligned} T_{\text{cav}}(\phi) &= |t_{\text{cav}}(\phi)|^2 \\ &= \frac{(t_1 r_2 r_3 t_4)^2}{(1 - r_1 r_2 r_3 r_4)^2 + 4r_1 r_2 r_3 r_4 \sin^2(\phi/2)} \end{aligned} \quad (6.1.11)$$

ミラー 2、ミラー 3 からレーザーが透過することによるロスが無いと仮定して、 $r_2 = r_3 = 1$ とすると、エネルギー保存則

$$R_{\text{cav}} + T_{\text{cav}} = 1 \quad (6.1.12)$$

が成り立つことも確認できる。

強度透過率 T_{cav} が最大になるとき、レーザーが共振器内で共振しているという。このとき、強度透過率 T_{cav} は最大値

$$T_{\text{cav}}^{\text{max}} = T_{\text{cav}}(2m\pi) = \frac{(t_1 r_2 r_3 t_4)^2}{(1 - r_1 r_2 r_3 r_4)^2} \quad (6.1.13)$$

をとる。共振条件は

$$\phi = 2\pi m \quad (m \text{ は整数}) \quad (6.1.14)$$

である。この条件は、光の周波数と波長の関係

$$c = \nu\lambda = \frac{\omega}{2\pi}\lambda \quad (6.1.15)$$

と式 (6.1.5) を用いれば

$$L = m\lambda \quad (6.1.16)$$

と書き直すことができる。共振条件は共振器の周回長 L がレーザーの波長 λ の整数倍になっていることであるといえる。

6.1.2 共振器のフィネス

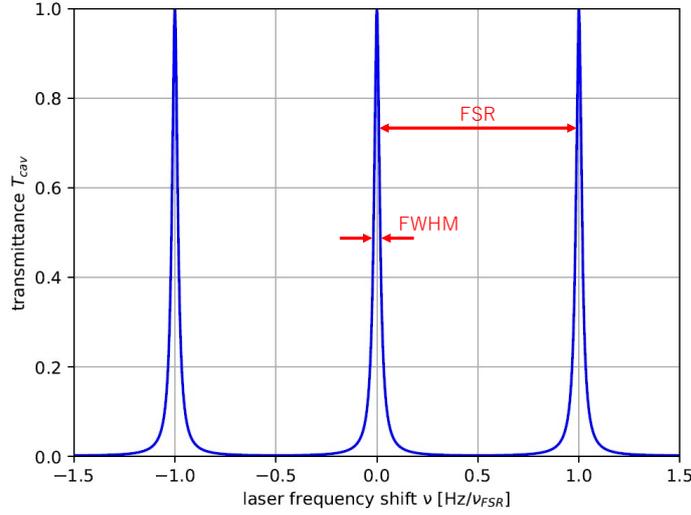


図 6.1.3: レーザー周波数の変化に対する光リング共振器の強度透過率
($r_1 = r_4 = \sqrt{0.9}$, $r_2 = r_3 = 1$ の場合)

式 (6.1.11) を用いて、レーザーの周波数 ω に対する強度透過率 T_{cav} の変化をプロットしたものが図 6.1.3 である。共振器の周回長 L を固定してレーザーの周波数 ω を変化させると、強度透過率 T_{cav} は周期的に変化する。この周期をフリースペクトラルレンジ (FSR) といい、式 (6.1.5) と式 (6.1.14) より

$$\Delta\phi = \frac{L\omega_{\text{FSR}}}{c} = 2\pi \quad (6.1.17)$$

なので、

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{\omega_{\text{FSR}}}{2\pi} = \frac{c}{L} \quad (6.1.18)$$

となる。

次に、各共振ピークの幅を求める。位相の半値半幅を ϕ_{HWHM} とすると、

$$T_{\text{cav}}(2m\pi + \phi_{\text{HWHM}}) = \frac{1}{2}T_{\text{cav}}^{\text{max}} \quad (6.1.19)$$

が成り立つ。これに式 (6.1.11) と式 (6.1.13) を代入する。ここで、 $\phi_{\text{HWHM}} \ll 1$ と仮定し

$$\sin(\phi_{\text{HWHM}}) \approx \phi_{\text{HWHM}} \quad (6.1.20)$$

と近似すると、

$$\phi_{\text{HWHM}} = \frac{1 - r_1 r_2 r_3 r_4}{\sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}} \quad (6.1.21)$$

と求まる。これを位相からレーザー周波数に直し、2倍して半値全幅を計算すると、

$$\nu_{\text{FWHM}} = 2 \cdot \frac{c}{2\pi L} \cdot \phi_{\text{HWHM}} = \frac{c(1 - r_1 r_2 r_3 r_4)}{\pi L \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}} \quad (6.1.22)$$

となる。

ν_{FSR} と ν_{FWHM} の比は共振の鋭さを表し、フィネスという。フィネス \mathcal{F} を計算すると、

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\nu_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2 r_3 r_4}}{1 - r_1 r_2 r_3 r_4} \quad (6.1.23)$$

となる。ミラーの反射率の積を1に近づけるほどフィネスは大きくなり、共振は鋭くなる。

通常、フィネス \mathcal{F} が1より十分大きいことから、 $\phi_{\text{HWHM}} = \frac{\pi}{\mathcal{F}} \ll 1$ が成り立ち、式(6.1.21)を導く際に用いた近似式(6.1.20)は妥当であるといえる。

また、 $t_i \ll 1$ のときには、

$$r_i = \sqrt{1 - t_i^2} \approx 1 - \frac{t_i^2}{2} \quad (6.1.24)$$

と近似でき、

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &\approx \frac{\pi}{1 - (1 - \frac{t_1^2}{2})(1 - \frac{t_2^2}{2})(1 - \frac{t_3^2}{2})(1 - \frac{t_4^2}{2})} \\ &\approx \frac{2\pi}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2} \end{aligned} \quad (6.1.25)$$

が成り立つ。

ここまでは、共振器内で、ミラーの透過成分以外に光が損失しない理想的な場合を考えたが、共振器内を光が周回する間に l^2 の損失があるとすると、フィネスは

$$\mathcal{F} \approx \frac{2\pi}{t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2 + l^2} \quad (6.1.26)$$

と表される。

式(6.1.13)と近似式(6.1.24)(6.1.25)より、強度透過率の最大値 $T_{\text{cav}}^{\text{max}}$ は、

$$\begin{aligned} T_{\text{cav}}^{\text{max}} &= \frac{(t_1 r_2 r_3 t_4)^2}{(1 - r_1 r_2 r_3 r_4)^2} \\ &= \frac{t_1^2 (1 - t_2^2)(1 - t_3^2) t_4^2}{\{1 - (1 - \frac{t_1^2}{2})(1 - \frac{t_2^2}{2})(1 - \frac{t_3^2}{2})(1 - \frac{t_4^2}{2})\}^2} \\ &\approx \frac{4t_1^2 (1 - t_2^2)(1 - t_3^2) t_4^2}{(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2)^2} \\ &= \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 (t_1^2 t_4^2 - t_1^2 t_4^2 (t_2^2 + t_3^2) + t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4^2) \\ &\approx \left(\frac{\mathcal{F}}{\pi}\right)^2 t_1^2 t_4^2 \end{aligned} \quad (6.1.27)$$

をとなる。(Fabry-Pérot 共振器の場合には、cavity decay rate を用いて強度透過率の最大値を議論することが多いが、光リング共振器の場合の cavity decay rate の定義がわからなかったため、近似式から直接強度透過率の最大値とフィネスの関係式を導いた。)

6.2 実験

6.2.1 光学素子と光学系

光学系2階部分は図6.2.1の通りである。PBS①とPBS②を図6.2.1のように配置することでp偏光のみが共振器に入射するようにした。この理由については6.2.2節で詳しく説明する。1/2波長板と1/4波長板を適切に回転させ、入射光量が最大になるように調整した。

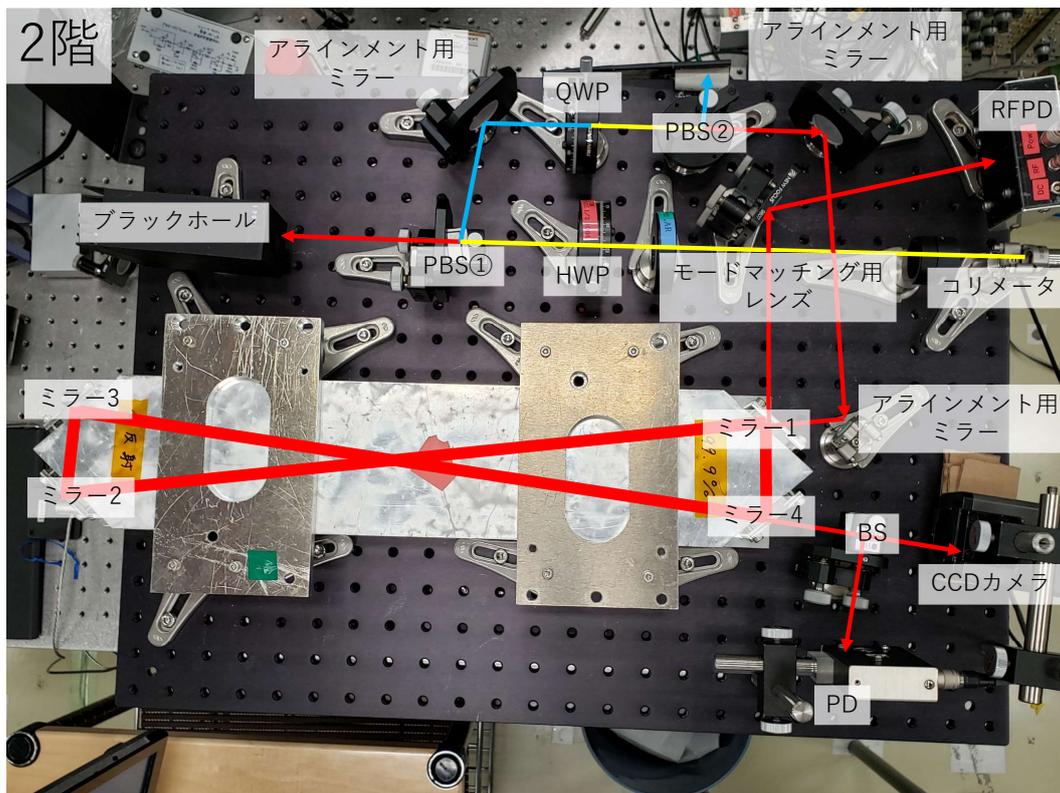


図 6.2.1: 光学系 2 階部分 (赤が p 偏光、青が s 偏光、黄色が p 偏光と s 偏光の混合を表す)

6.2.2 ファイバによる偏光回転の測定

第 6 章、第 7 章の実験の際に、図 6.2.1 の PBS①を透過した p 偏光、反射した s 偏光の光量が約 10 分程度のタイムスケールで変化することに気がついた。s 偏光が最大になるように 1/2 波長板を回しても、10 分後には光量が約半分になるということが頻繁に起きた。ファイバが偏光を回すことが原因であると考へ、定量的に調べるために、図 6.2.2 のように PBS①の直後に PD を 2 つ置いて p 偏光と s 偏光の強度を測定した。

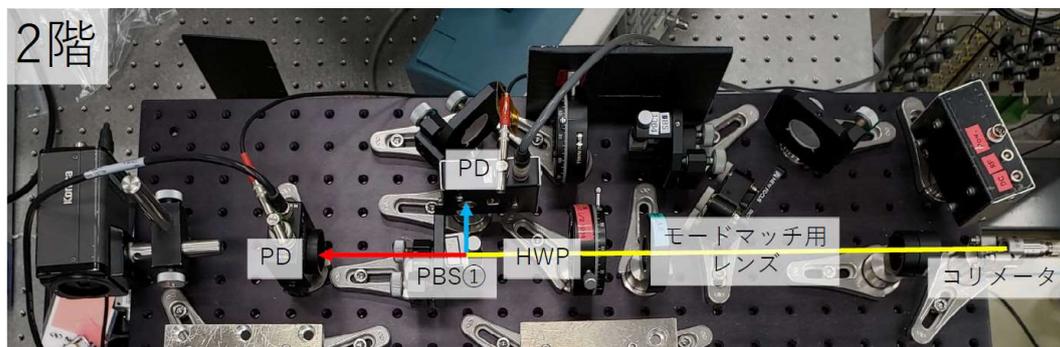


図 6.2.2: ファイバによる偏光回転を測定するセットアップ (赤が p 偏光、青が s 偏光、黄色が p 偏光と s 偏光の混合を表す)

s 偏光が最大になるように 1/2 波長板を回し、オシロスコープの横軸を 1 目盛り 200 秒にして、約 30 分間測定を行った。s 偏光を測定した PD は第 3 章で較正した PD であり、実験結果に基づいて出力電圧

をレーザー強度に較正した。p 偏光を測定した PD は Thorlabs 製であり、参考文献 [16] に基づいて出力電圧をレーザー強度に較正した。結果は図 6.2.3 のようになった。

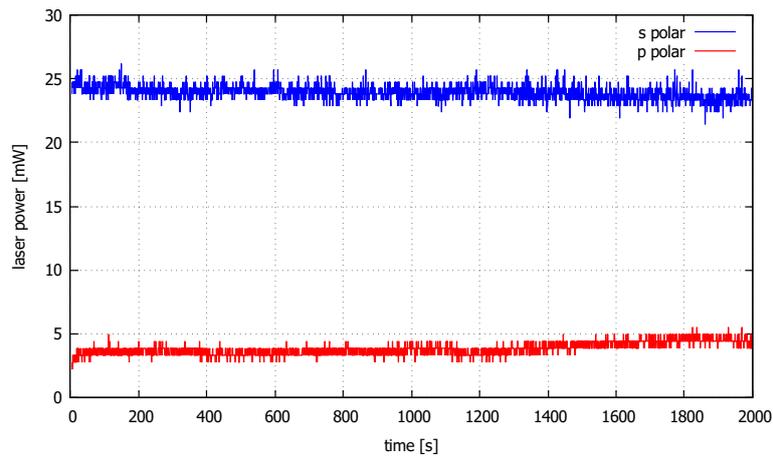


図 6.2.3: PBS①直後の p 偏光と s 偏光の強度の変化

図 6.2.3 より、ファイバは 30 分間ほとんど偏光を回転させなかった。これは予想に反する結果である。そこで、ファイバを手で揺らしてみると、図 6.2.4 のように、p 偏光と s 偏光の強度が大きく変化することがわかった。

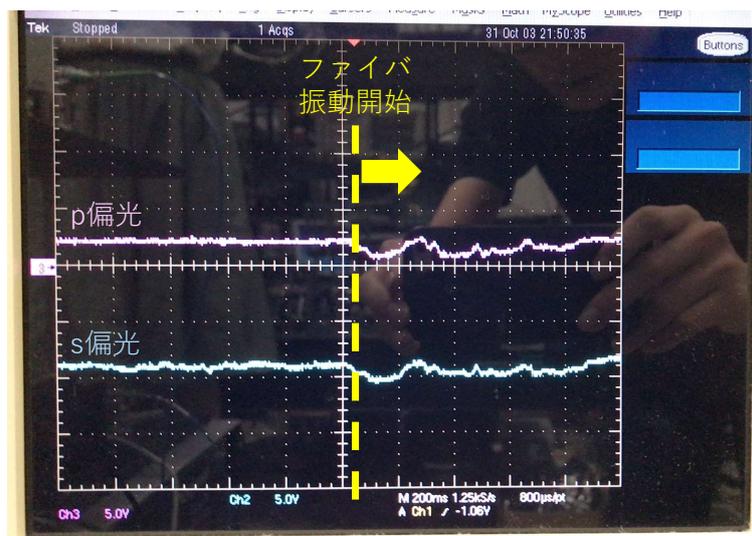


図 6.2.4: ファイバに振動を加えたときの PBS①直後の p 偏光と s 偏光の強度の変化

以上より、ファイバを静置させておくと偏光は回転しないが、ファイバに振動を加えると偏光が大きく回転することが分かった。実験操作中に偏光が大きく回転してしまっていた理由は、ファイバに触れていたことであった。

当初は共振器に円偏光を入射する予定であったが、ファイバに全く触らずに実験し、円偏光 (p 偏光と s 偏光が 1 対 1) を保つことは不可能であると考えた。したがって、図 6.2.1 のように PBS②を配置し、共振器に p 偏光のみを入射することにした。

6.2.3 共振器のモードマッチング

共振条件は式 (6.1.14) で表される位相の条件だけではない。レーザーが共振器を1周する間に空間モードが変わってしまうと光は共振することができない。レーザーが共振器の固有モードをとるようにモードマッチングを行った。

共振器に入射したレーザーがミラー1 → ミラー2 → ミラー3 → ミラー4 → ミラー1 と1周する間に空間モードが変化しない条件は、

$$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} : \text{ミラー1} \rightarrow \text{ミラー2 の光線} \quad (6.2.1)$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 1 & l_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{距離 } l_1 \text{ の伝搬 } (l_1 = 45 \text{ cm}) \quad (6.2.2)$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & l_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : \text{距離 } l_2 \text{ の伝搬 } (l_2 = 4.7 \text{ cm}) \quad (6.2.3)$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2/R & 1 \end{pmatrix} : \text{曲率半径 } R \text{ のミラー } (R = 1 \text{ m}) \quad (6.2.4)$$

として

$$\begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} = L_1 M L_2 M L_1 M L_2 M \begin{pmatrix} q \\ 1 \end{pmatrix} \quad (6.2.5)$$

が成り立つことである。Python による数値計算でこれを解いて、共振器の固有モードを得た。

Rayleigh レンジ $z_0 = 26.2 \text{ cm}$

ビームウエスト半径 $w_0 = 0.298 \text{ mm}$

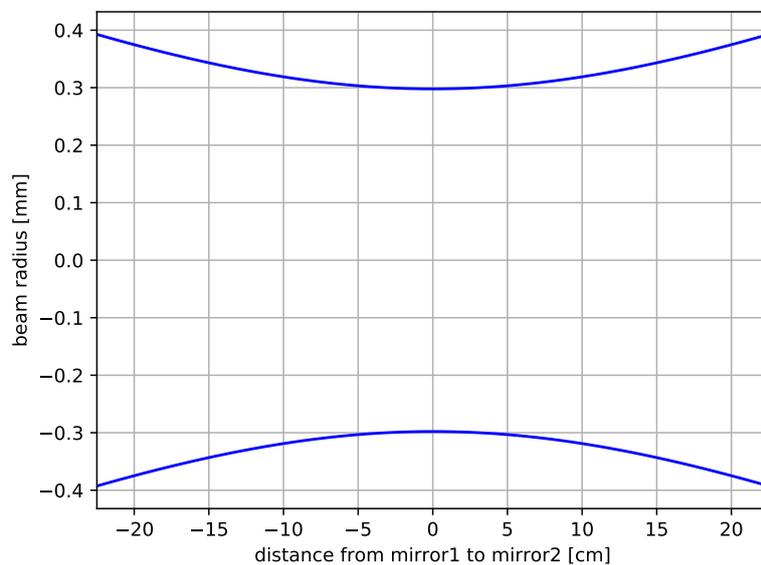


図 6.2.5: 共振器の固有モード (横軸は -23.5 cm がミラー1、 23.5 cm がミラー2を表す)

次に、ファイバからの出射光のビーム半径をビームプロファイラで測定した。結果は図 6.2.6 のようになった。式 (5.1.8) にビームウエストの位置の自由度を加えた式でデータをフィッティングし、ウエストの位置と Rayleigh レンジを求め、それらの値を式 (5.2.1) と式 (5.2.2) に代入すると、表 6.2.1 のようになった。

表 6.2.1: ファイバから出射したレーザーのウエストの位置と Rayleigh レンジ (図 6.2.1 のコリメータの位置を 0 cm とし、左向きを正とした)

	ウエストの位置	Rayleigh レンジ
x 方向	9.4 ± 0.2 cm	49.1 ± 0.2 cm
y 方向	3.1 ± 0.2 cm	54.4 ± 0.2 cm
円形近似	72.3 ± 0.6 cm	52.1 ± 0.6 cm

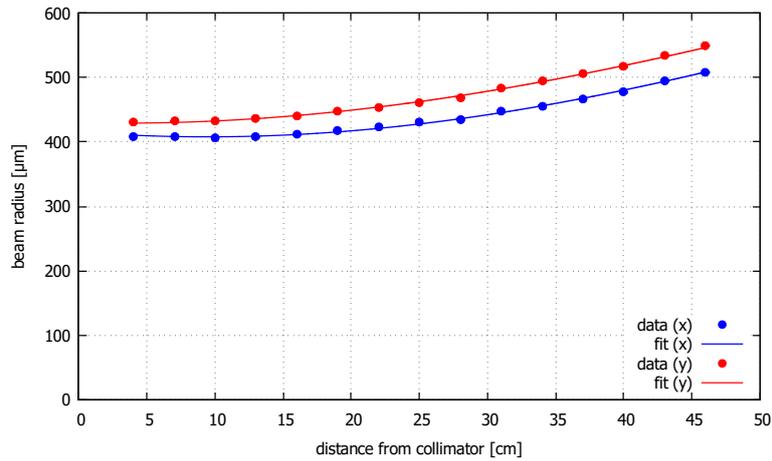


図 6.2.6: ファイバから出射したレーザーのビーム半径 (図 6.2.1 のコリメータの位置を 0 cm とし、左向きを正とした)

実際の入射光を共振器の固有モードするために、Python による数値計算でモードマッチングの計算を行った。図 6.2.7 のように焦点距離 -100 mm と 200 mm のレンズを配置することで理想的なモードの入射光を実現できることが分かった。

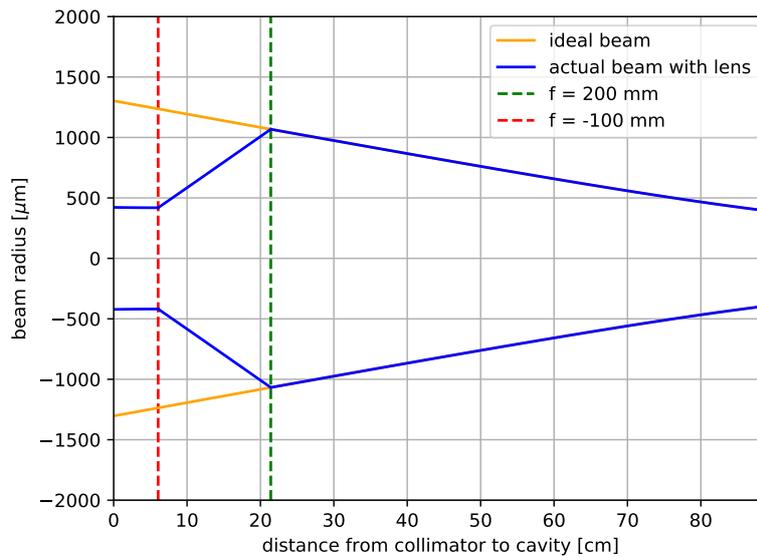


図 6.2.7: Python による共振器のモードマッチの計算

図 6.2.7 をもとに図 6.2.1 のように光学系を組んだ。PBS①とブラックホールの間にビームプロファイ

ラを置いてビーム半径を測定した。結果は図 6.2.8 のようになった。

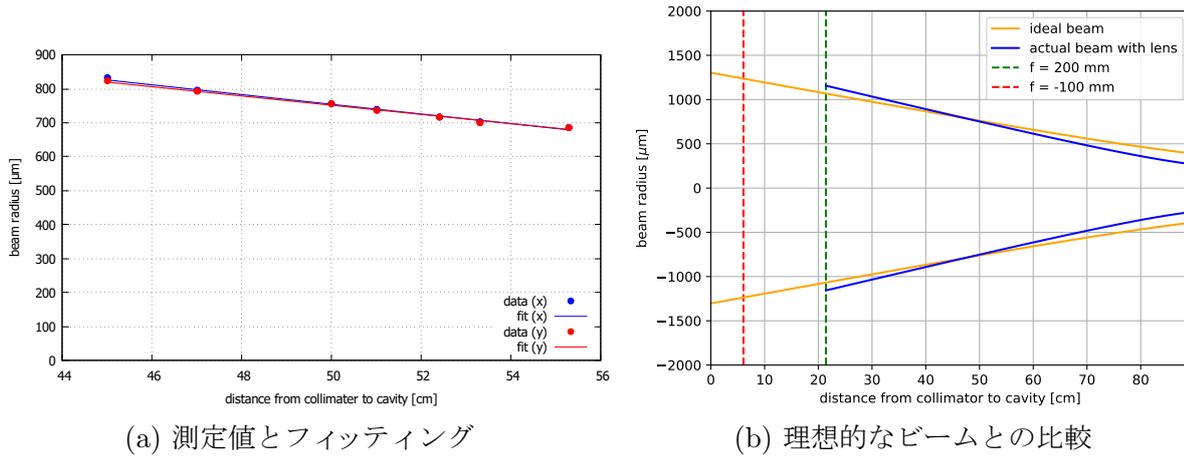


図 6.2.8: 光学系 2 階部分のレーザー光のビーム半径

参考文献 [1] より、モードマッチング率は、理想的なウエストの位置を d_0 、理想的な Rayleigh レンジを z_0 とし、 x 方向、 y 方向のウエストの位置をそれぞれ d_x 、 d_y 、 x 方向、 y 方向の Rayleigh レンジをそれぞれ z_x 、 z_y とすると、

$$4 \sqrt{\frac{z_0^2 z_x z_y}{\{(z_0 + z_x)^2 + (d_0 - d_x)^2\} \{(z_0 + z_y)^2 + (d_0 - d_y)^2\}}} \quad (6.2.6)$$

で求められる。光学系 2 階部分のモードマッチング率は $86 \pm 2\%$ であった。

6.2.4 レーザー周波数の振動とミラーのアライメントによる共振

周波数 80 mHz、 $V_{p-p} = 8 V$ の三角波をファンクションジェネレータからレーザー光源機器の Temperature Controller の Modulation に入力し、結晶の温度を変化させてレーザーの周波数を振動させた。マイケルソン干渉計を作成し、レーザーの周波数が振動していることを確認した。

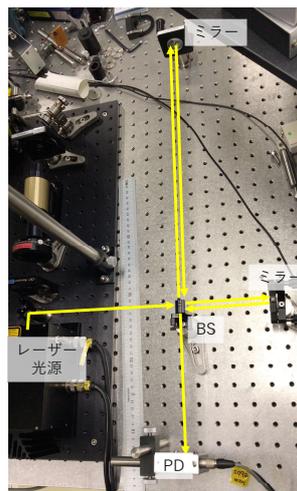


図 6.2.9: マイケルソン干渉計

PD で透過光を見ながらミラーでアライメントを調整し、共振させた。

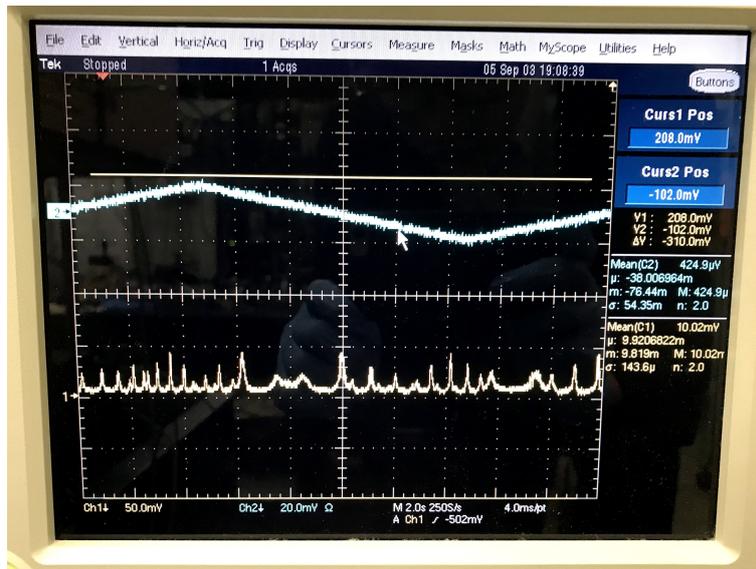


図 6.2.10: キャビティスキャン(初期段階)

PD と CCD カメラで透過光を見ながら 00 モードが支配的に共振するようにミラーでアラインメントを調整した。

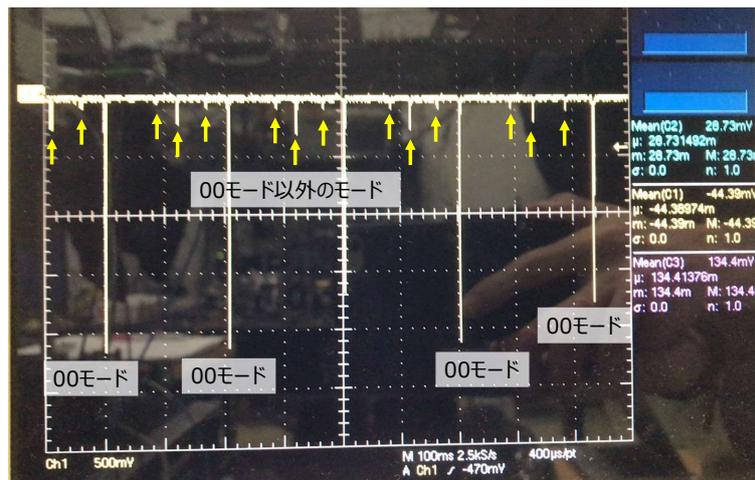


図 6.2.11: キャビティスキャン(最終段階)



(a) 00 モード



(b) 10 モード



(c) 12 モード



(d) 30 モード

図 6.2.12: CCD カメラで見た透過光の様々なモード

6.2.5 共振器の性能評価

p 偏光でのフィネスを測定した。キャビティスキャンのデータを取得し、00 モードのピークを図 6.2.13 のようにローレンチアン

$$\text{voltage[V]} = A \times \frac{d^2}{(\text{time [s]} - t_0)^2 + d^2} + \text{offset} \quad (6.2.7)$$

でフィッティングした。オシロスコープの横軸は時間を表すが、三角波でレーザー周波数を振動させていることを考えると、横軸を周波数に比例する量とみなしてよい。隣の 00 モードのピークとの t_0 の差が ν_{FSR} 、ピークの半値全幅 $2d$ が ν_{FWHM} に対応し、式 (6.1.23) よりフィネスが計算できる。データを 3 回取得してフィネスを求めた。

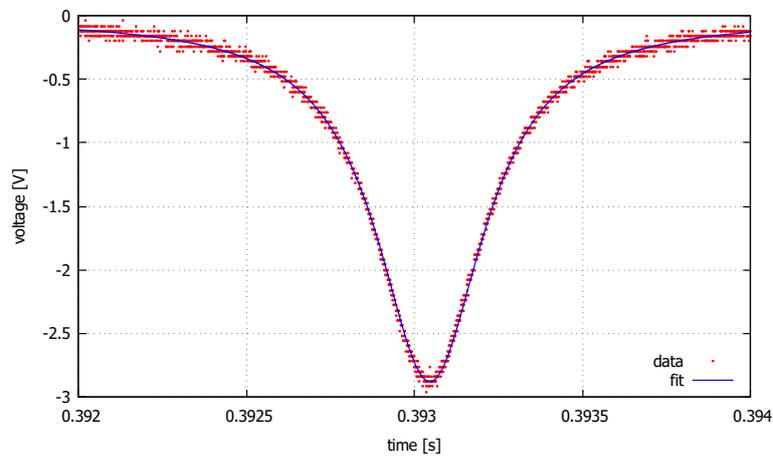


図 6.2.13: 00 モードの共振ピークをローレンチアンでフィッティングする様子

p 偏光でのフィネスは表 6.2.2 のようになった。

表 6.2.2: p 偏光での共振器のフィネス

設計値	測定値
3140	515 ± 6

表 6.2.2 より、フィネスの測定値は設計値と比べて著しく小さな値となった。この原因として、ミラーの反射率が設計値よりも小さいことが考えられる。

ミラーに p 偏光を入射角 45° で入射し、入射光と反射光の強度を PD で測定して反射率を求めた。結果は表 6.2.3 のようになった。

表 6.2.3: p 偏光でのミラーの反射率 (ミラー番号は図 6.2.1 を参照)

	設計値	測定値
ミラー 1	99.9 %	99.9 %
ミラー 2	100 %	99.95 %
ミラー 3	100 %	99.95 %
ミラー 4	99.9 %	99.9 %

測定したミラーの反射率を用いてフィネスを計算すると 2093 となり、515 よりはるかに大きくなった。したがって、他にもフィネスを小さくする原因があると考えられる。測定値 $\mathcal{F} = 515 \pm 6$ 、 $t_1^2 = t_4^2 = 0.1\%$ 、 $t_2^2 = t_3^2 = 0.05\%$ を式 (6.1.26) に代入し、共振器内の光の損失 l^2 を求めると、 $0.92 \pm 0.01\%$ となった。ミラーの透過成分より 1桁大きい損失であり、無視できないほど大きい。フィネスが設計値より小さくなった主要因は、共振器内の光の損失だといえる。

入射光と透過光の強度を PD で測定し、共振時の透過率 (強度透過率の最大値) を求めた。また、測定値 $\mathcal{F} = 515 \pm 6$ 、 $t_1^2 = t_4^2 = 0.1\%$ 、 $t_2^2 = t_3^2 = 0.05\%$ を式 (6.1.27) に代入し、強度透過率の最大値を計算で求めた。結果は表 6.2.4 のようになり、誤差の範囲で値が一致した。

表 6.2.4: 強度透過率の最大値

測定値	他の測定値からの計算値
$2.9 \pm 0.3\%$	$2.6 \pm 0.06\%$

p 偏光でのモードマッチング率を式 (6.2.6) とは異なる方法で測定した。モードマッチング率は、全モード中に含まれる 00 モードの割合だと考えることができ、

$$\frac{\text{00 モードのピークの強度}}{\text{全モードのピークの強度の和}} \quad (6.2.8)$$

で計算することができる。ピークの強度はピークの高さ、すなわち、式 (6.2.7) の A に比例する。全モードのピークをローレンチアンでフィッティングし、式 (6.2.8) を用いてモードマッチング率を計算した。

p 偏光でのモードマッチング率は表 6.2.5 のようになった。

表 6.2.5: p 偏光での共振器のモードマッチング率

ビーム径より	キャビティスキャンより
$86 \pm 2\%$	$87.1 \pm 0.1\%$

2つの方法で求めたモードマッチング率は誤差の範囲で一致した。また、十分に良い精度でモードマッチングが行えているといえる。

7 PDH法による共振器のフィードバック制御

7.1 原理

7.1.1 PDH法

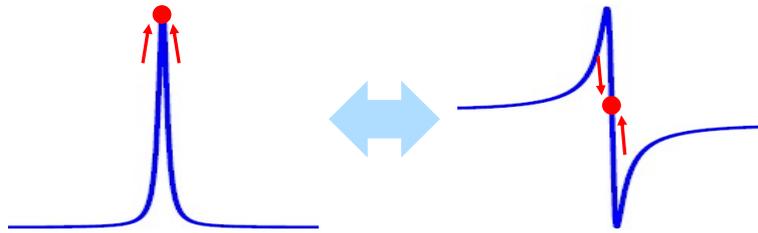


図 7.1.1: PDH 法の概念図

共振器はわずかな振動によって共振状態からずれてしまうため、共振器を共振状態に保つ工夫が必要である。共振器を共振状態に保つ方法として、共振器の周回長を動かす、レーザーの周波数を動かす、という2通りの方法が考えられる。前者にはMid-fringe ロックなどが挙げられる。本実験では、後者のPDH(Pound-Drever-Hall)法を用いて、レーザーの周波数を共振器の共振周波数に制御した。図7.1.1のように、共振周波数からのずれに比例するエラー信号を得て、エラー信号が0になるようにフィードバック制御を行う。

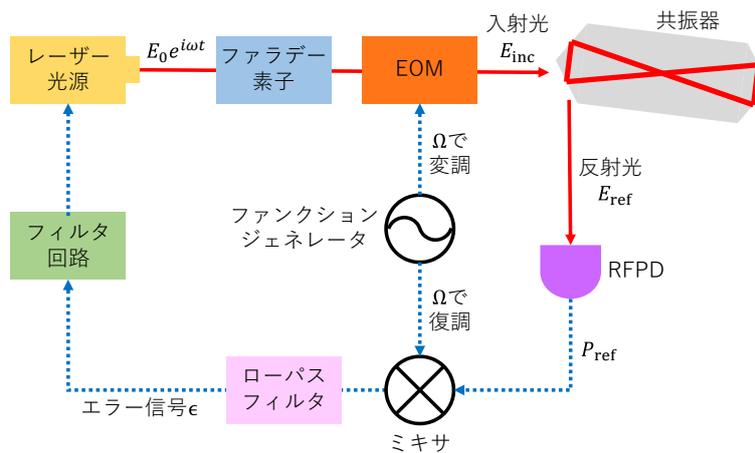


図 7.1.2: PDH 法実験系 (赤実線は光路、青点線は電気信号を表す)

PDH法は図7.1.2のような実験系で行う。レーザーの電場を $E_0 e^{i\omega t}$ とおく。EOMで周波数 Ω の位相変調をかけるとき、EOM通過後の電場 E_{inc} は

$$\begin{aligned} E_{inc} &= E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin \Omega t)} \\ &= E_0 e^{i\omega t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{in\Omega t} \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

と書ける。ただし、 $J_n(\beta)$ は Bessel 関数である。変調の振幅が小さく、 $\beta \ll 1$ のとき、

$$E_{inc} \approx E_0 [J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega+\Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega-\Omega)t}] \quad (7.1.2)$$

となる。式(7.1.2)には3つの周波数成分が含まれている。元の光の周波数 ω の成分をキャリアと呼ぶ。 $\omega \pm \Omega$ の成分はそれぞれ ± 1 次のサイドバンドと呼ばれる。6.1.1節で述べた振幅反射率 t_{cav} はレーザー

の周波数 ω に依存する。周波数 ω の光が共振器に入射したときの振幅反射率 $F(\omega)$ は、式 (6.1.8) より

$$F(\omega) = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}} \quad (7.1.3)$$

となる。 E_{inc} が振幅反射率 $F(\omega)$ の共振器で反射されたとき、その電場 E_{ref} は

$$E_{\text{ref}} = E_0 [F(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + F(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - F(\omega - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}] \quad (7.1.4)$$

となる。この光を PD で検出すると、その出力 P_{ref} は

$$\begin{aligned} P_{\text{ref}} &= |E_{\text{ref}}|^2 \\ &= P_c |F(\omega)|^2 + P_s \{|F(\omega + \Omega)|^2 + |F(\omega - \Omega)|^2\} \\ &\quad + 2\sqrt{P_c P_s} \{\text{Re}[F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \cos \Omega t \\ &\quad + \text{Im}[F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \sin \Omega t\} + (2\Omega \text{ terms}) \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

となる。ただし、 $P_c = J_0^2(\beta) |E_0|^2$ 、 $P_s = J_1^2(\beta) |E_0|^2$ である。

変調周波数 Ω が共鳴周波数のピーク幅に対して十分大きい場合 ($\Omega \ll \nu_{\text{FSR}}/\mathcal{F}$) を考える。このとき、 $\omega + \Omega$ の周波数の光は共振器でほとんど反射されるため、 $F(\omega + \Omega) \approx -1$ が成り立ち、

$$F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega) \approx -F(\omega) + F^*(\omega) = -2i \text{Im}[F(\omega)] \quad (7.1.6)$$

となるから、

$$P_{\text{ref}} \approx 2P_s - 4\sqrt{P_c P_s} \text{Im}[F(\omega)] \sin \Omega t + (2\Omega \text{ terms}) \quad (7.1.7)$$

となる。

図 7.1.2 のようにミキサの RF 端子に P_{ref} 、LO 端子に $\sin \Omega t$ を入力したときの IF 端子の出力を、さらにローパスフィルタに通して DC 成分を取り出すことで、エラー信号 ϵ が得られる。

$$A \sin \Omega t \times \sin \Omega t = (A - A \cos 2\Omega t)/2 \quad (7.1.8)$$

より、式 (7.1.7) の \sin の項の係数は半分になり、

$$\epsilon = 2\sqrt{P_c P_s} \text{Im}[F(\omega)] \quad (7.1.9)$$

となる。式 (7.1.3) を代入し、キャリアの共振付近 $\phi = n\pi + \delta\phi$ ($\delta\phi \ll 1$) を考えると、

$$\begin{aligned} \epsilon &= 2|E_0|^2 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Im}\left[-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}}{1 - r_1 r_2 r_3 r_4 e^{-i\phi}}\right] \\ &= -\frac{2|E_0|^2 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2 r_3 r_4 \sin \phi}{1 + r_1^2 r_2^2 r_3^2 r_4^2 - 2r_1 r_2 r_3 r_4 \cos \phi} \\ &= -\frac{2|E_0|^2 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2 r_3 r_4}{(1 - r_1 r_2 r_3 r_4)^2} \delta\phi \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

となり、エラー信号は共振付近で $\delta\phi$ に比例した信号となっている。したがって、エラー信号を増幅してレーザー光源にフィードバックをかければ、レーザーの周波数を共振周波数に制御することができる。

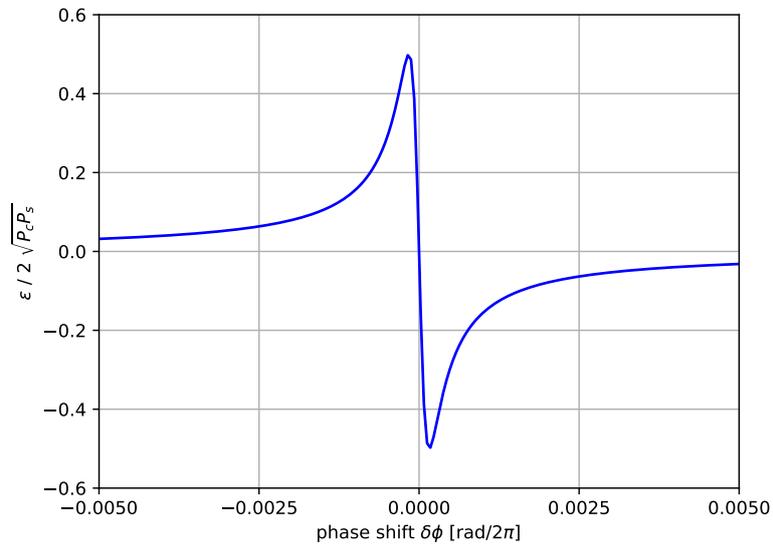


図 7.1.3: 共振周波数からのずれに対するエラー信号 (近似あり。 $r_1 = r_4 = \sqrt{0.999}$, $r_2 = r_3 = 1$ の場合)

エラー信号が共振周波数からのずれに比例することを示すために上記のような近似を用いたが、近似を用いずにエラー信号をプロットすると図 7.1.4 のようになる。

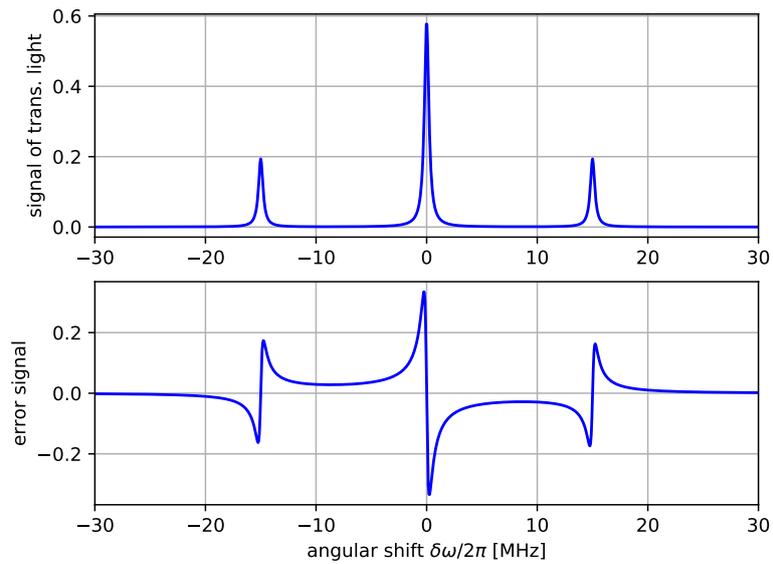


図 7.1.4: 共振周波数からのずれに対するエラー信号 (近似なし。 $r_1 = r_4 = \sqrt{0.999}$, $r_2 = r_3 = 1$ の場合)

7.1.2 オープンループ伝達関数

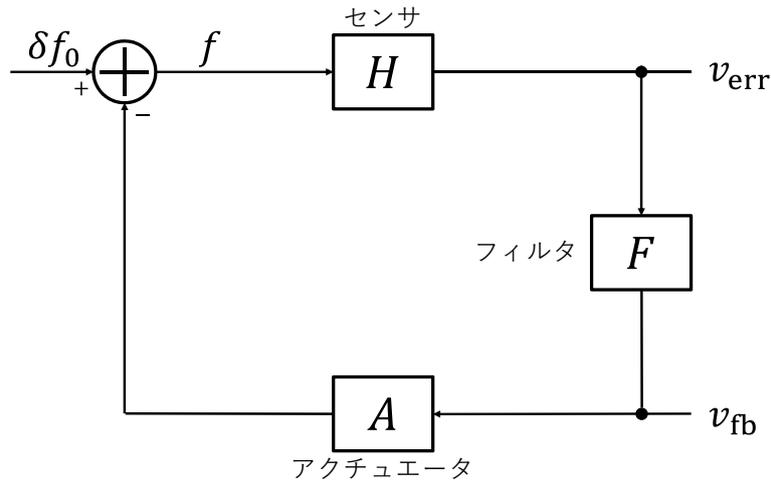


図 7.1.5: フィードバック制御系のブロックダイアグラム

フィードバック制御は、図 7.1.5 のように表される。制御対象となる信号 δf_0 をセンサ H で検出し、このエラー信号をフィルタ F 、アクチュエータ A を通してフィードバックすることにより、残留変動 δf を元の変動量 δf_0 より小さく抑えられる。

残差変動 δf をブロックダイアグラムにより計算すると、

$$\delta f = \delta f_0 - HFA\delta f \quad (7.1.11)$$

であり、オープンループ伝達関数 $G = AFH$ として

$$\delta f = \frac{1}{1+G}\delta f_0 \quad (7.1.12)$$

となる。したがって、オープンループゲイン $|G|$ を十分大きくすることで残留変動を小さく抑えることが可能になる。

フィードバック制御が安定であるかを判定する方法の 1 つに、Nyquist 判定法がある。オープンループ伝達関数 G のゲインが 1、すなわち $|G| = 1$ となる周波数を UGF と呼ぶ。UGF での位相 $\arg G$ の -180° からの差を位相余裕と呼ぶ。経験的に、位相余裕が 30° 程度以上となると、十分安定なフィードバック制御を行うことができる。

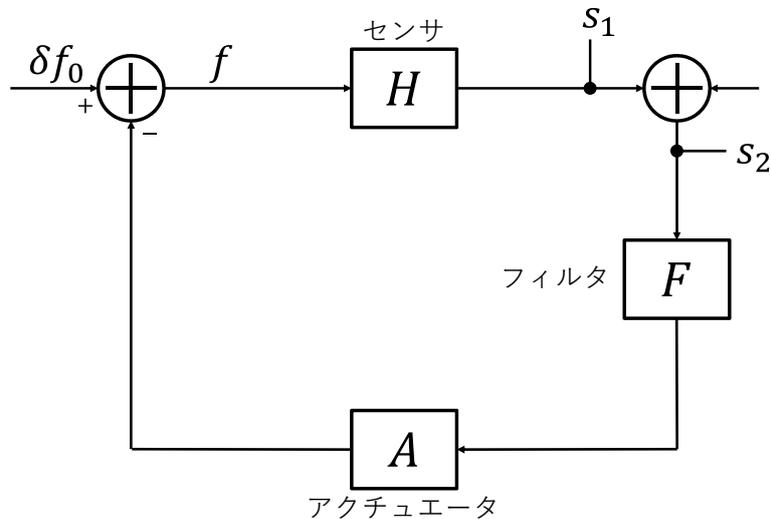


図 7.1.6: オープンループ伝達関数の測定方法

フィードバック中に信号を注入して、その前後の信号の比をとり、オープンループ伝達関数を測定する。図 7.1.6 のようなフィードバックループを考え、センサとフィルタの間に信号 s_{in} を注入する。このとき、ループ内の信号 δf は、

$$\delta f = \delta f_0 - AF(H\delta f + s_{in}) \quad (7.1.13)$$

を満たすので

$$\delta f = \frac{\delta f_0 - As_{in}}{1 + G} \quad (7.1.14)$$

である。したがって、信号を注入した前後の信号はそれぞれ

$$s_1 = \frac{HF\delta f_0 - Gs_{in}}{1 + G} \quad (7.1.15)$$

$$s_2 = \frac{HF\delta f_0 + s_{in}}{1 + G} \quad (7.1.16)$$

となる。注入する信号が十分大きく、 $s_{in} \gg HF\delta f_0$ が成り立つとき、

$$\frac{s_1}{s_2} = \frac{HF\delta f_0 - Gs_{in}}{HF\delta f_0 + s_{in}} \approx -G \quad (7.1.17)$$

であり、信号を注入した前後の信号の比を取ることで、オープンループ伝達関数を測定することができる。

7.2 実験

7.2.1 PDH 法による共振器のフィードバック制御

図 7.1.2 にしたがって PDH 法によるフィードバック制御の回路を組み立てた。ファンクションジェネレータから周波数 15 MHz、 $V_{p-p} = 1V$ の正弦波を出力し、EOM とミキサに入力した。これら 2 つの信号の位相差は、エラー信号が最大になるように設定した。また、エラー信号がない状態で 0 V になるように、図 5.2.1 の EOM 用 1/2 波長板を回した。ミキサからの出力信号を、カットオフ周波数 0.03 Hz のローパスフィルタ、ゲイン 5000 の増幅回路、出力が 0-100 V の PZT アンプに通し、レーザー光源機器の PZT に入力した。エラー信号を取得することができ、約 1 分間制御を行うことができた。

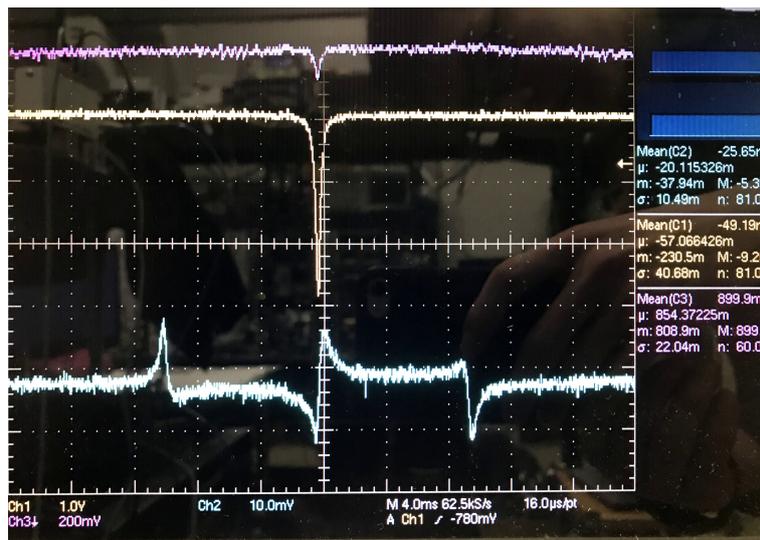
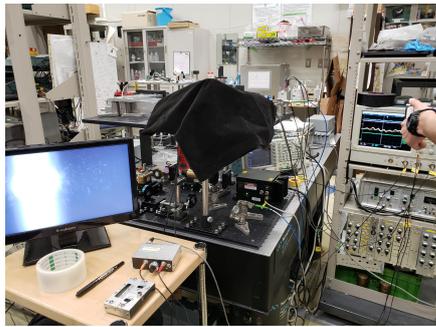
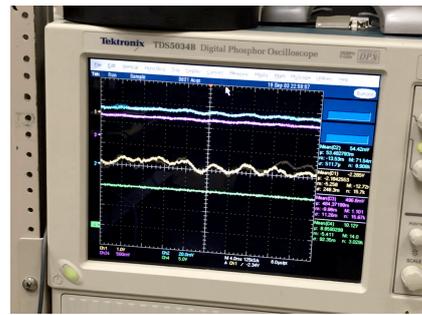


図 7.2.1: PDH 法のエラー信号(黄色が透過光、ピンクが反射光、水色がエラー信号)



(a) 全体



(b) オシロスコープ画面(黄色が透過光であり、約2Vを保ったままである)

図 7.2.2: 制御の様子

7.2.2 オープンループ伝達関数とパワースペクトルの測定

加算回路を用いて図 7.1.6 のようなフィードバックループを組み、信号を注入してオープンループ伝達関数を測定した。結果は、図 7.2.3 のようになった。UGF は約 200 Hz、そのときの位相は約 -90° であった。位相余裕が 30° 以上あることから、安定に制御できたといえる。

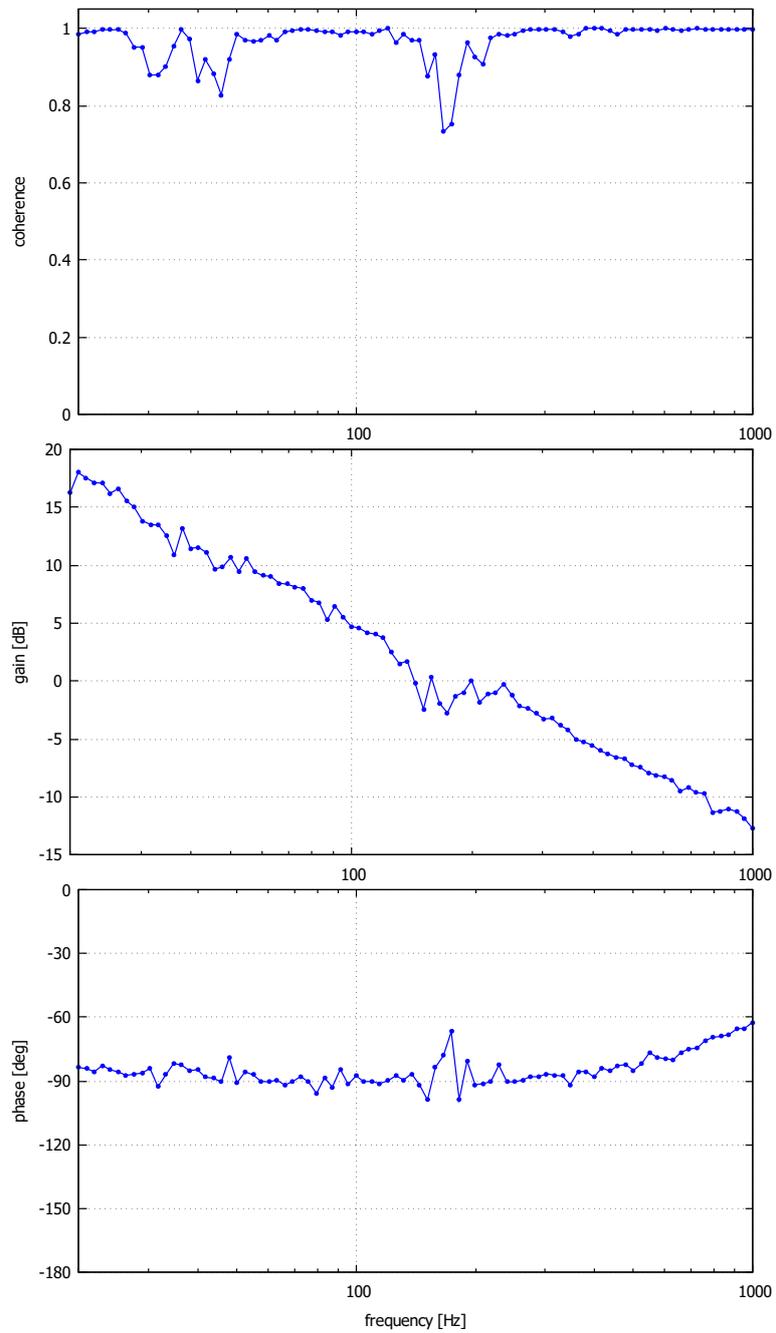


図 7.2.3: オープンループ伝達関数 (上から、コーレンス、ゲイン、位相)

図 7.1.5 の v_{fb} の位置でフィードバック信号のパワースペクトルを測定した。結果は図 7.2.4 のようになった。

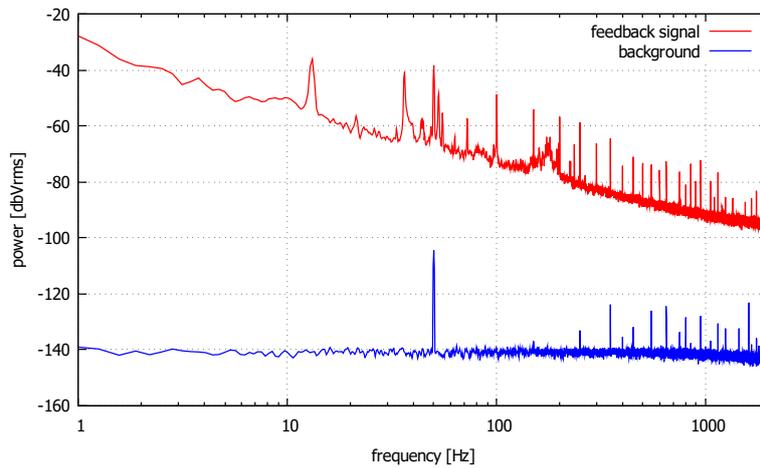


図 7.2.4: フィードバック信号のパワースペクトル

フィードバック信号のパワースペクトルは、ブロックダイアグラムから

$$v_{fb} = \frac{HF\delta f_0}{1+G} \quad (7.2.1)$$

と表される。 H , F , G がすべて周波数の関数になっていることに注意して、 v_{fb} から δf_0 を求めた。 δf_0 を二乗して、高周波数側から積分し、平方根を取って RMS を算出した。結果は図 8.2.5 のようになった。

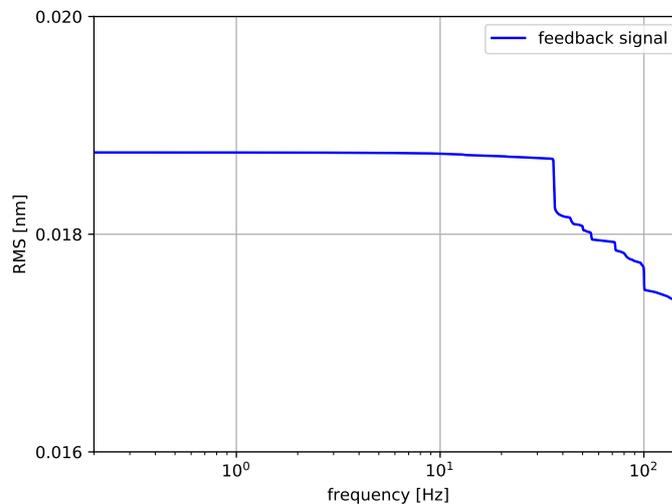


図 7.2.5: フィードバック信号のパワースペクトルから求めた外乱の RMS

外乱 δf_0 がフィードバック制御で抑えられる範囲に収まっているかを考察する。長さで考えると、キャビティスキンの 00 モードの FSR は $\lambda/2$ に相当する。FSR と FWHM の関係から、FWHM は $\lambda/(2\mathcal{F}) = 1.03 \pm 0.01$ nm となる。図 7.2.5 から、外乱は FWHM より十分小さく、十分制御できるといえる。

8 アクション暗黒物質の探索の準備

8.1 実験

8.1.1 1/2 波長板の回転角の測定

第7章の実験終了後、光学系2階部分を図8.1.1のように変更した。透過光をPBS③で分け、p偏光とs偏光を同時に測定できるようにPDを2つ置いた。

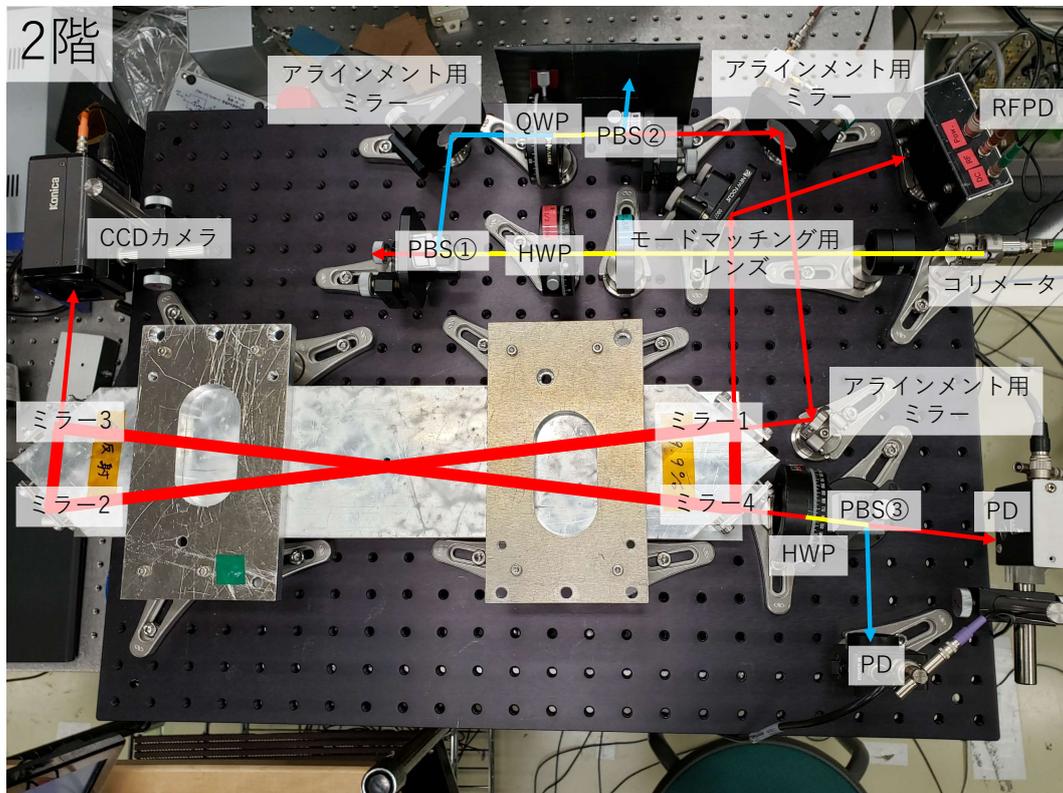


図 8.1.1: 光学系 2 階部分 (赤が p 偏光、青が s 偏光、黄色が p 偏光と s 偏光の混合を表す)

PBS③直前の1/2波長板を回転させることでp偏光とs偏光の光量の割合を変化させることができる。変化は、回転角 θ の \sin 関数になる。1/2波長板を、s偏光の割合が最も少なくなる回転角に固定してデータを取得すると、s偏光の光量の変化が θ の二次関数になってしまう。 θ の一次関数になる回転角で1/2波長板を固定するために、1/2波長板の回転角とs偏光の光量の割合を測定した。

まず、2つのPDの較正を行った。周波数80mHz、 $V_{p-p} = 8V$ の三角波をファンクションジェネレータからレーザー光源機器のTemperature ControllerのModulationに入力し、結晶の温度を変化させてレーザーの周波数を振動させた。p偏光を測定する位置にPDを置き、キャビティスキャンの00モードのピークの値を5回読み取った。この操作を2つのPDに対して行い、電圧の比を取ることで較正を行った。同じ強度のレーザーを測定したとき、s偏光を測定するPDはp偏光を測定するPDに対して 0.93 ± 0.04 倍の出力電圧であることが分かった。

次に、1/2波長板の回転角とs偏光の光量の割合の関係を測定した。周波数80mHz、 $V_{p-p} = 8V$ の三角波をファンクションジェネレータからレーザー光源機器のTemperature ControllerのModulationに入力し、結晶の温度を変化させてレーザーの周波数を振動させた。キャビティスキャンの00モードのピークの値を5回読み取った。1/2波長板を 5° ずつ回転させてこの操作を繰り返した。

$$\frac{s \text{ 偏光の強度}}{s \text{ 偏光の強度} + p \text{ 偏光の強度}} \quad (8.1.1)$$

を計算し、1/2 波長板の回転角 θ の関数としてプロットした。結果は図 8.1.2 のようになった。

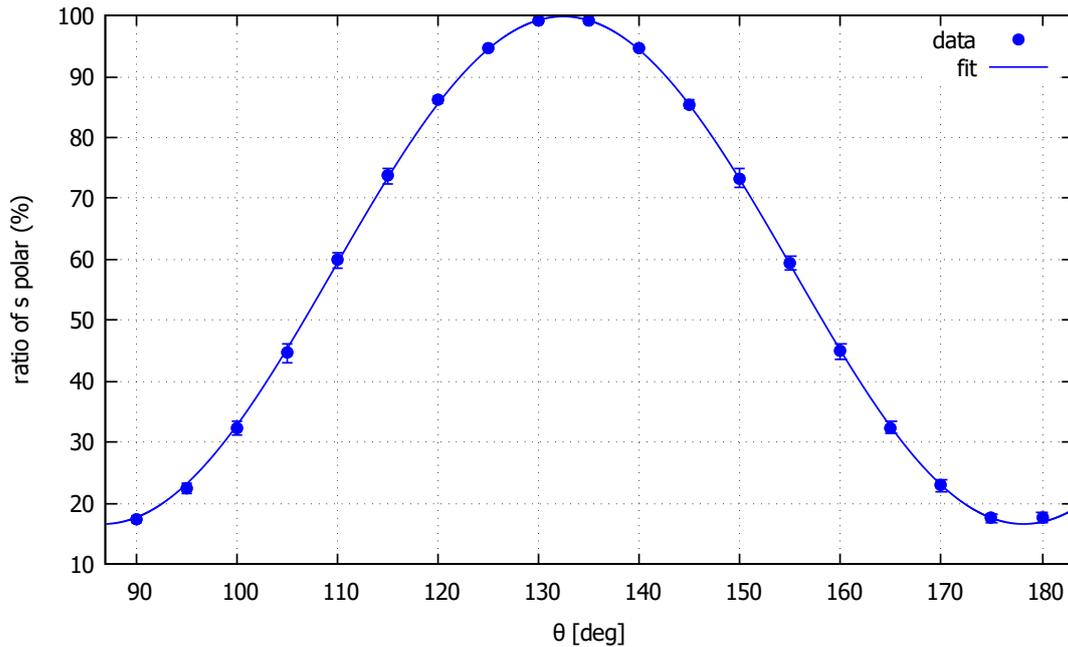


図 8.1.2: 1/2 波長板の回転角と透過光中の s 偏光の割合の関係

図 8.1.2 より、1/2 波長板を $\theta = 165^\circ$ で固定することに決定した。

図 8.1.2 より、s 偏光が 100% になることはあるが、0% になることはないことが分かった。この原因は、入射光に s 偏光が混入していることだと考えられる。PBS②を透過した p 偏光は、アラインメント用ミラー 2 つで反射してから共振器に入射する。この間に、レーザーの光軸の高さが変化し、s 偏光が混入した可能性がある。

この後、s 偏光の強度の変化を測定しようとしたが、PDH 法によるフィードバック制御が数秒間しか続かなくなってしまった。

9 結論

光リング共振器を作成した。p 偏光でのフィネスは 515 ± 6 となった。設計値の 3140 を大きく下回った理由は、共振器内での光のロスだと考えられる。

PDH 法によるフィードバック制御を行い、レーザーの周波数を制御して約 1 分間共振状態を保つことができた。外乱は十分制御できる範囲に収まっていたため、制御が長時間続かないことが原因は、オープンループ伝達関数のゲインが小さいことだと考えられる。

10 今後の展望

フィードバック信号のパワースペクトルより、外乱は制御できる範囲に収まっていることが分かったため、制御が続かない原因は他にあると考えられる。ローパスフィルタのカットオフ周波数と増幅回路のゲインを変えて、オープンループ伝達関数を測定し、長時間の制御が続くように改善したい。

s 偏光の強度変化のデータを取得し、解析してアクシオンに制限をつけられた後は、感度を向上させることを努力したい。共振器のフィネスが設計値を大幅に下回ってしまった原因を特定して改善したい。原因として、ミラーの汚れ、ミラーの中心にレーザーが当たっていないなどが考えられる。

当初は、共振器に円偏光を入射する予定だった。しかし、ファイバを振動させると偏光が回転することが分かり、直線偏光を入射することに変更した。円偏光で実験を行うためには、ファイバを使用しな

い光学系を組む必要がある。光学系 1 階部分から光学系 2 階部分へミラーで光を打ち上げるなどの方法を試したい。

謝辞

特別実験は、これまでの物理学実験 I・II とは大きく異なりました。安東研究室の先輩方は、実験装置の設計、組み立て、必要な回路の作成も自分で行っており、私たちも先生と先輩方に教えていただきながらそれらを経験しました。実験には、手を動かして根気よく泥臭く頑張る実践的な側面があることを知りました。苦勞して作成した実験装置に対し、8月には愛着が湧いていました。

4月末にテーマを決定し、5,6,7月と実験を進め、7月末にフィードバック制御を行うに至りました。制御が長続きしない中、3週間の院試休みに入りました。院試の筆記が終了した後、制御をいろいろと工夫しましたが、結局データを取得できずに終わってしまいました。低い感度でもよいからアクションに制限をつけたい、という気持ちで実験していたので、非常に悔しい思いをしています。無事に大学院に進学できましたら、フィードバック制御についてしっかり勉強し、データを取得して、アクションに制限をつけるまで実験をやり切りたいです。

本実験を通して、安東研究室の先生と先輩方には大変お世話になりました。安東正樹准教授には、素晴らしい環境と、興味深い実験テーマを与えていただきました。実験室の優れた環境、研究室の穏やかな雰囲気のおかげで、毎日楽しく実験を行うことができました。道村唯太助教授には、実験の原理や方法をすべて教えていただき、うまくいかないときにはアドバイスをいただきました。出張の際にはメールで対応していただきました。共振器への円偏光の入射が難しいとお話ししたときには、直線偏光を入射するという代替案を出してくださいました。大学院生の下田智文氏、長野晃士氏、武田紘樹氏、川崎拓也氏、高野哲氏、喜多直紀氏、宮崎祐樹氏には、RFPDの作成方法、アラインメントのコツ、オープンループ伝達関数の測り方など、実験室でたくさんのお話を教えていただきました。また、先輩方が研究する姿を間近で見られたことで、大学院での生活を想像することができました。

最後に、共同実験者の渡邊泰平氏に感謝します。物を壊したりといったトラブルを起こすのはたいてい私で、何度も迷惑をかけてしまいました。私が教育実習に行っていた3週間は、1人で実験を進めてくれました。アラインメントとプログラミングが非常に得意で、とても頼りになりました。一緒に議論することで、実験の工夫を思いついたり、原理を深く理解できました。ありがとうございました。

参考文献

- [1] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健: 『重力波をとらえる』 (京都大学出版会, 1998) p.339-361.
- [2] 麻生洋一: 東京大学 修士論文 (2002)
「補助干渉計による Fabry-Perot 干渉計の安定化」
- [3] 道村唯太: 東京大学 修士論文 (2011)
「光リング共振器を用いた片道光速の異方性探査」
- [4] 酒井譲: 東京大学 修士論文 (2017)
「光リング共振器の連続回転による片道光速の異方性探査」)
- [5] 武田紘樹: 東京大学 修士論文 (2017)
「ローレンツ不変性検証のためのモノリシック光学系の開発」
- [6] 川崎拓也: 東京大学 修士論文 (2018)
「巨視的量子系の実現に向けた鏡の光学浮上方法の研究」
- [7] 赤羽健二, 小野貴晃: 東京大学 卒業論文 (2014)
「高フィネス光共振器を用いた高精度な光周波数差の測定」
- [8] 道村唯太: 「レーザー干渉計によるアクシオン暗黒物質の探索」 (ダークマターの懇談会 2019, 早稲田大学)
- [9] 道村唯太: 「光共振器基礎」 (東京大学, 2012)
- [10] 道村唯太: 「Notes on the Pound-Drever-Hall technique」 (東京大学, 2010)
- [11] Ippei Obata, Tomohiro Fujita, Yuta Michimura: *Phys. Rev. Lett.* **121** 161301 (2018).
Optical Ring Cavity Search for Axion Dark Matter
- [12] H. Kogelnik and T. Li: *Proc. IEEE* **54** 1312 (1966).
Laser Beams and Resonators
- [13] Hongwan Liu, Brodi D. Elwood, Matthew Evans, Jesse Thaler: arXiv: 1809.01656v1.
Searching for Axion Dark Matter with Birefringent Cavities
- [14] E. D. Black: *AM. J. Phys.* **69** 79 (2001).
An Introduction to Pound-Drever-Hall Laser Frequency Stabilization
- [15] 浜松ホトニクス Si PIN フォトダイオード S3759 データシート
- [16] Thorlabs PDA100A データシート
- [17] Ando Lab Wiki
- [18] 物理学実験 I 解説書 2018 年度 東京大学理学部物理学科