

光共振器基礎

道村唯太

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 修士 2年

2012年1月10日

1 はじめに

光共振器を扱う上で必要となる基本的な知識をまとめておく。もともとは修士論文に入れる予定で書いたものである。

2 Gaussian ビーム光学

レーザー光の電場を考えると平面波を考えれば十分な場合も多いが、光共振器へのレーザー光の入射などを考える場合は電場の空間モードが重要になってくる。ここでは特に Hermite-Gaussian モードに関する知識をまとめる。また、レーザー光の空間モードがレンズや鏡といった光学素子でどのように変換されるかについて述べる。式の導出は例えば [1] などがある。

2.1 Hermite-Gaussian モード

レーザー光の電場は空間モード $U(x, y, z)$ まで考えると

$$E(t, x, y, z) = U(x, y, z)E_0 e^{i\omega t} \quad (2.1)$$

と表される。この $U(x, y, z)$ が Hermite 多項式と Gaussian の積で表されるモードを、Hermite-Gaussian モードと呼ぶ。

2.1.1 表式

z 軸方向に進む光を考える。規格化された¹Hermite-Gaussian モードの表式は

$$U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z)U_m(y, z) \exp[-ikz + i(l+m+1)\zeta(z)] \quad (l, m \text{ は非負整数}) \quad (2.2)$$

である。ここで

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2 - i\frac{kx^2}{2R(z)}\right] \quad (2.3)$$

¹ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U_{lm}(x, y, z)|^2 dx dy = 1$ ということ。

である。 $U_l(x, z)$ は x 軸方向の電場振幅の分布、 $U_m(y, z)$ は y 軸方向の電場振幅の分布を示しており、Hermite 多項式 $H_l(x)$ と Gaussian の積になっている。Hermite 多項式の具体的な表式は例えば

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2 \quad (2.4)$$

である。

また、 k, w_0 はそれぞれ波数、ウェスト半径であり、各記号は

$$z_0 = \frac{kw_0^2}{2} \quad \text{Rayleigh レンジ} \quad (2.5a)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad \text{ビーム半径} \quad (2.5b)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right] \quad \text{波面の曲率半径} \quad (2.5c)$$

$$\zeta(z) = \arctan \frac{z}{z_0} \quad \text{Gouy 位相} \quad (2.5d)$$

である。それぞれの記号の意味は次節で見えていく。

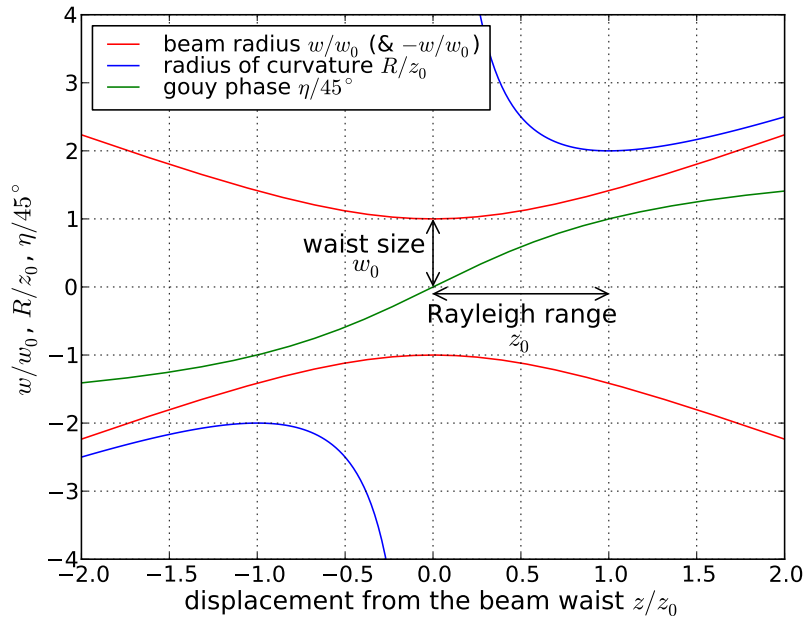


図 1: Gaussian ビームのビーム半径 $w(z)$ 、波面の曲率半径 $R(z)$ 、Gouy 位相 $\zeta(z)$

2.1.2 基本モード

式 (2.2) で $(l, m) = (0, 0)$ とした時の空間モードを基本 Gaussian モードと呼ぶ。理想的なレーザー光源から出射された光はこの基本モードとなっており、その表式は

$$U_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \exp \left[-i(kz - \zeta(z)) - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) \right] \quad (2.6)$$

式を見るとわかるように、基本モードでは xy 平面で z 軸対称に電場振幅が Gauss 分布してる。 z 軸上の電場振幅が最も大きく、中心からビーム半径 w だけずれると電場振幅は $1/e$ となる。また、Gouy 位相 $\zeta(z)$ は平面波と基本モードの位相差を表していることがわかる。

ビーム半径 $w(z)$ 、波面の曲率半径 $R(z)$ 、Gouy 位相 $\zeta(z)$ をプロットしたのが図 1 である。ビーム半径は $z = 0$ で最小となるため、この位置をビームウェストと呼び、 $w_0 \equiv w(0)$ をウェスト半径と呼ぶ。ウェストで xy 平面上の電場振幅の広がり是最小となっている。

また、波面の曲率半径 $R(z)$ はウェストで無限大となり、平面波となる。そのためウェストでは Gouy 位相 ζ は 0 となる。ウェストから離れていくと曲率半径は小さくなっていくが、Rayleigh レンジで最小となった後は再び大きくなる。十分遠く ($z \gg z_0$) から見るとレーザー光源は点光源とみなすことができ、Gouy 位相は無限遠で $|\zeta| = 90^\circ$ となる。したがって Rayleigh レンジはレーザー光が平面波とみなせる範囲を示しており、Rayleigh レンジを超えると球面波のふるまいをするようになる。

2.1.3 高次モード

式 (2.2) で $(l, m) \neq (0, 0)$ となる空間モードを高次モードと呼ぶ。基本モード $U_{00}(x, y, z)$ を用いて式 (2.2) を書きなおすとその表式は

$$U_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp [i(l + m)\zeta(z)] U_{00}(x, y, z) \quad (2.7)$$

となる。この式から、Gouy 位相 ζ は高次モードと基本モードの位相差を表していることもわかる。基本モードと $l + m$ 次の高次モードでは位相差が $(l + m)\zeta$ だけ存在する。

レーザー光源から出射された光は理想的には基本モードだけとなるが、実際にはこの高次モードが一部含まれる。また、共振器のミスアラインなどでも高次モードを考慮に入れる必要がある。

高次モードの xy 平面での光の強度分布 $|U_{lm}(x, y, z)|^2$ を計算したのが図 2 である。x 軸、y 軸のスケールはそれぞれビーム半径 w で規格化されており、色の濃い場所ほど強度が強いことを示している。また、青色の実線は $y = 0$ における電場振幅を表している。

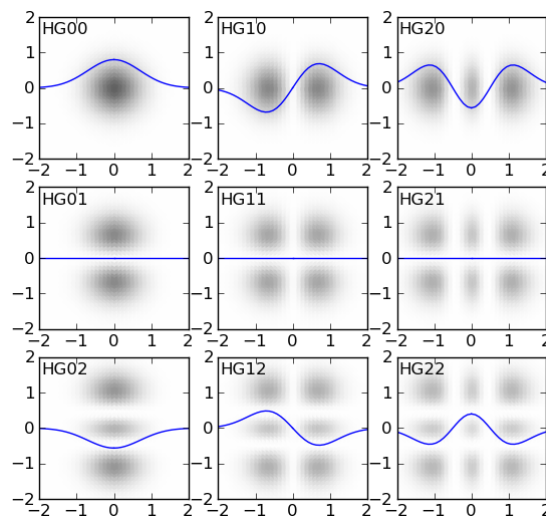


図 2: Hermite-Gaussian モードの強度分布と電場振幅

2.2 ビームの変換

レンズや鏡の反射にともなって Gaussian ビームがどのように変換されるかを考えよう。

式 (2.5) を見るとわかるように、Gaussian ビームの空間分布、空間発展はウェストからの位置 z と Rayleigh レンジ z_0 だけで全て記述することができる。したがって

$$q \equiv z + iz_0 \quad (2.8)$$

とにおいて q の変換を考えれば良い。

q の変換は光線伝播行列 (ray transfer matrix または ABCD 行列) によって記述される。例えば、ある光学素子によって q_1 から q_2 に変換されるとすると、適当な規格化定数 a を用いて

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ 1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

となる。この式を解くと、

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (2.10)$$

となる。各光学素子における光線伝播行列は幾何学的に簡単に計算することができ、例えば [1] などにまとまっている。

ここでは例として、焦点距離 f のレンズの光線伝播行列を求めてみよう。入射前の曲率半径を R_1 、透過後の曲率半径を R_2 とするとレンズの公式より

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \frac{1}{f} \quad (2.11)$$

が成り立つ。

q は式 (2.5) を用いると

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{2}{kw^2} \quad (2.12)$$

と表すことができ、レンズの前後でビーム半径 w は変わらないので式 (2.11) は

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f} \quad (2.13)$$

となる。

したがって、上式を解くと

$$q_2 = \frac{q_1}{-q_1/f + 1} \quad (2.14)$$

となるので、焦点距離 f のレンズの光線伝播行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

となる。

3 Fabry-Perot 共振器

Fabry-Perot 共振器とは図 3 のように 2 枚の鏡を向かい合わせることで光を何度も往復させることのできる装置である。本実験で用いたリング共振器の性質は、この Fabry-Perot 共振器とよく似ている。そこで、ここでは Fabry-Perot 共振器の性質について簡単にまとめる。

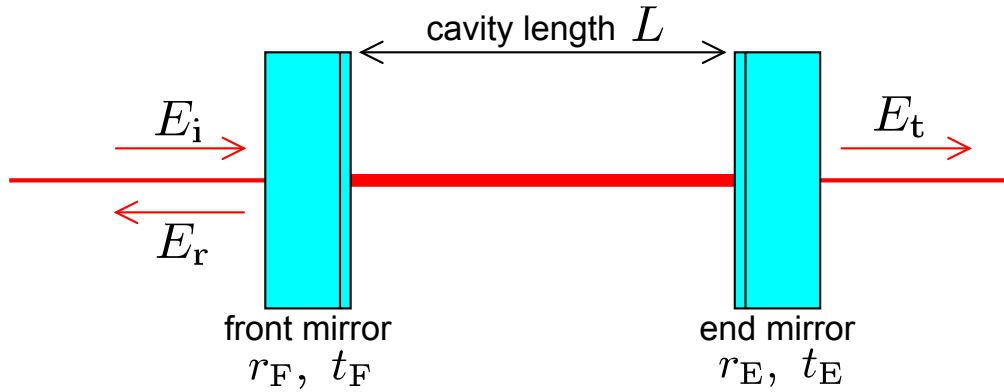


図 3: Fabry-Perot 共振器

3.1 反射率と透過率

図 3 のような Fabry-Perot 共振器を考える。共振器長を L 、フロントミラーの反射率、透過率をそれぞれ r_F 、 t_F とし、同様にエンドミラーの反射率、透過率を r_E 、 t_E とする²。

フロントミラーに入射するレーザー光の電場振幅を E_i とすると、反射光の振幅は、共振器内での光の往復を考えて

$$\begin{aligned}
 E_r &= E_i(-r_F) + E_i t_F^2 r_E e^{-i\phi} + E_i t_F^2 r_E^2 r_F e^{-2i\phi} + E_i t_F^2 r_E^3 r_F^2 e^{-3i\phi} + \dots \\
 &= E_i(-r_F) + E_i t_F^2 r_E e^{-i\phi} \sum_{n=0}^{\infty} (r_F r_E e^{-i\phi})^n \\
 &= E_i \left(-r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \right) \tag{3.1}
 \end{aligned}$$

となる。ここで ϕ は光が共振器を往復するときの位相変化であり、レーザーの角周波数を ω とすると

$$\phi = \frac{2L\omega}{c} \tag{3.2}$$

である。

²ここで反射率、透過率とは振幅反射率、振幅透過率を指す。一般に強度反射率、強度透過率は R 、 T のように大文字で表すことが多く、 $R = r^2$ 、 $T = t^2$ である。

同様に透過光の振幅は

$$\begin{aligned}
E_t &= E_i t_F t_E e^{-i\phi/2} + E_i t_F r_E r_F t_E e^{-3i\phi/2} + E_i t_F r_E^2 r_F^2 t_E e^{-5i\phi/2} + \dots \\
&= E_i t_F t_E e^{-i\phi/2} \sum_{n=0}^{\infty} (r_F r_E e^{-i\phi})^n \\
&= E_i \frac{t_F t_E e^{-i\phi/2}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

となるので、Fabry-Perot 共振器の反射率 r_{cav} 、透過率 t_{cav} は

$$r_{\text{cav}}(\phi) = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{-i\phi}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \tag{3.4}$$

$$t_{\text{cav}}(\phi) = \frac{t_F t_E e^{-i\phi/2}}{1 - r_F r_E e^{-i\phi}} \tag{3.5}$$

となる。

さて、式 (3.1) より反射光強度は

$$\begin{aligned}
P_r &= |E_r|^2 \\
&= \frac{[(t_F^2 + r_F^2)r_E - r_F]^2 + 4r_F r_E (t_F^2 + r_F^2) \sin^2(\phi/2)}{(1 - r_F r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2(\phi/2)} |E_i|^2
\end{aligned} \tag{3.6}$$

となり、式 (3.3) より透過光強度は

$$\begin{aligned}
P_t &= |E_t|^2 \\
&= \frac{(t_F t_E)^2}{(1 - r_F r_E)^2 + 4r_F r_E \sin^2(\phi/2)} |E_i|^2
\end{aligned} \tag{3.7}$$

となる。この透過光強度が最大になるとき、共振器内部の光強度が最大となり、入射レーザー光と Fabry-Perot 共振器が共振しているという。共振条件は

$$\phi = 2\pi m \quad (m \text{ は自然数}) \tag{3.8}$$

である。この条件は式 (3.2) と光の周波数と波長の関係を用いれば

$$2L = m\lambda \quad (m \text{ は自然数}) \tag{3.9}$$

と書き直すことができ、共振条件は共振器の往復長がレーザーの波長 λ の整数倍になっていることであると言える。

また、式 (3.1) を用いて、共振付近における反射率の絶対値と位相をプロットしたものが図 4 である。この図から分かる通り、共振付近では ϕ のわずかな変化に対して反射光の位相は大きく変化する。これは光が共振器内を何度も往復することにより ϕ の変化が増幅されたためだと考えることができる。この性質があるため、Fabry-Perot 共振器は鏡間の距離 L や光の周波数 ω を精密に測定する干渉計として用いられている。

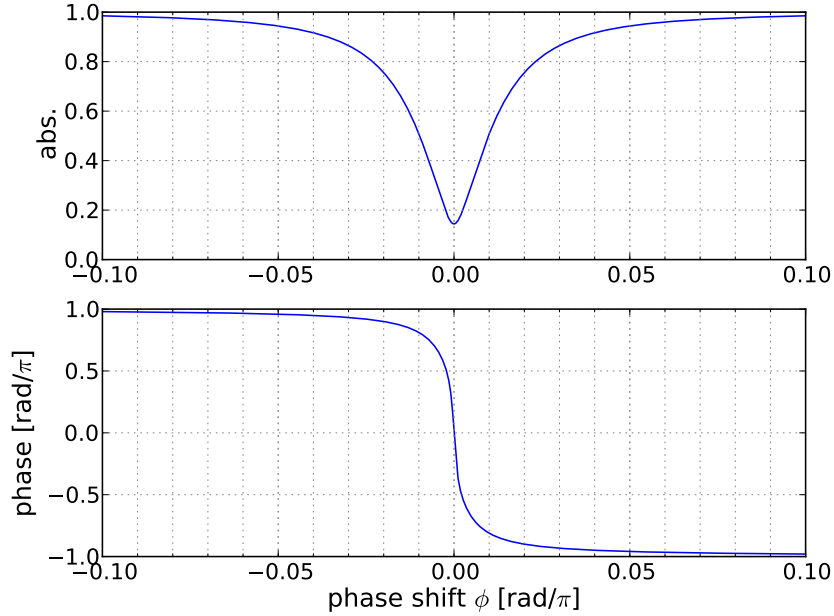


図 4: Fabry-Perot 共振器の反射率の絶対値と位相

3.2 フリースペクトラルレンジとフィネス

式 (3.7) を用いて、レーザーの周波数 ω に対する透過光強度の変化をプロットしたものが図 5 である。共振器長 L を固定してレーザーの周波数を変化させると、透過光強度は周期的に変化することがわかる。この周期をフリースペクトラルレンジ (FSR) といい、式 (3.8) より

$$\Delta\phi = \frac{2L\omega_{\text{FSR}}}{c} = 2\pi \quad (3.10)$$

なので

$$\nu_{\text{FSR}} = \frac{\omega_{\text{FSR}}}{2\pi} = \frac{c}{2L} \quad (3.11)$$

となる。

また、透過強度ピークの半値全幅 ν_{FWHM} は式 (3.7) より求めることができ、

$$\frac{1}{1 + \frac{4r_{\text{F}}r_{\text{E}}}{(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})^2} \sin^2\left(\frac{\pi L\nu_{\text{FWHM}}}{c}\right)} = \frac{1}{2} \quad (3.12)$$

を解けばよい。ここで $\frac{\pi L\nu_{\text{FWHM}}}{c} = \frac{\pi\nu_{\text{FWHM}}}{2\nu_{\text{FSR}}} \ll 1$ とする³と \sin の展開ができ、

$$\nu_{\text{FWHM}} = \frac{c(1 - r_{\text{F}}r_{\text{E}})}{2\pi L\sqrt{r_{\text{F}}r_{\text{E}}}} \quad (3.13)$$

³一般に共振器を用いるときはフィネス (式 (3.14) 参照) を 1 より十分大きくとるのでこの仮定は妥当である。

となる。

ν_{FSR} と ν_{FWHM} の比は共振の鋭さを表し、フィネスという。計算すると、

$$\mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\nu_{\text{FWHM}}} = \frac{\pi\sqrt{r_F r_E}}{1 - r_F r_E} \quad (3.14)$$

となる。鏡の反射率を 1 に近づけるほどフィネスは大きくなり、共振は鋭くなる。

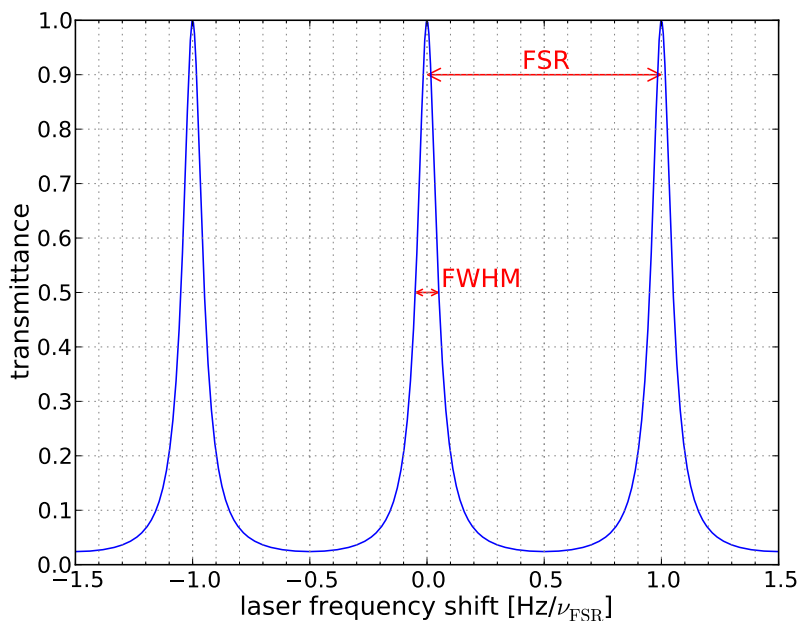


図 5: レーザー周波数の変化に対する Fabry-Perot 共振器の透過光強度 ($r_F = r_E$, $\mathcal{F} = 10$ の場合)

3.3 固有モード

Fabry-Perot 共振器には共振器長と 2 枚の鏡の曲率半径で決まる固有モードと呼ばれる空間モードが存在する。ここでは Fabry-Perot 共振器の固有モードについて述べる。

3.3.1 固有モードとモードマッチング

共振器の共振条件は式 (3.8) で表される位相の条件だけではない。2 枚の鏡間を光が何度も往復する際に空間モードが徐々に変形していってしまうと光は共振することができないため、鏡の反射で空間モードが変形しないという条件が必要となる。この条件はレンズの公式 (2.11) と曲率半径 R の鏡は焦点距離 $R/2$ を持つことを用いると、鏡上で波面の曲率半径が鏡の曲率半径と一致していることとなる。

したがって 2 枚の鏡の曲率半径 R_F , R_E と鏡間距離 L を決めると条件を満たす空間モードが決まる。この空間モードのことを共振器の固有モードと呼ぶ。この固有モードの Rayleigh レンジ z_0 ,

フロントミラー、エンドミラーからウェストまでの距離 d_F 、 d_E は

$$z_0 = \frac{L\sqrt{g_F g_E (1 - g_F g_E)}}{g_F + g_E - 2g_F g_E} \quad (3.15)$$

$$d_i = \frac{L g_F g_E (1 - g_i)}{g_i (g_F + g_E - 2g_F g_E)} \quad (i = F, E) \quad (3.16)$$

となる [2]。ここで g_i は g ファクターと呼ばれ

$$g_i = 1 - \frac{L}{R_i} \quad (i = F, E) \quad (3.17)$$

である。

レーザー光を共振器に入射させる場合は、光源と共振器の間にレンズなどを置くことによって入射光の空間モードと共振器の固有モードを一致させる必要がある。この操作のことをモードマッチングという。

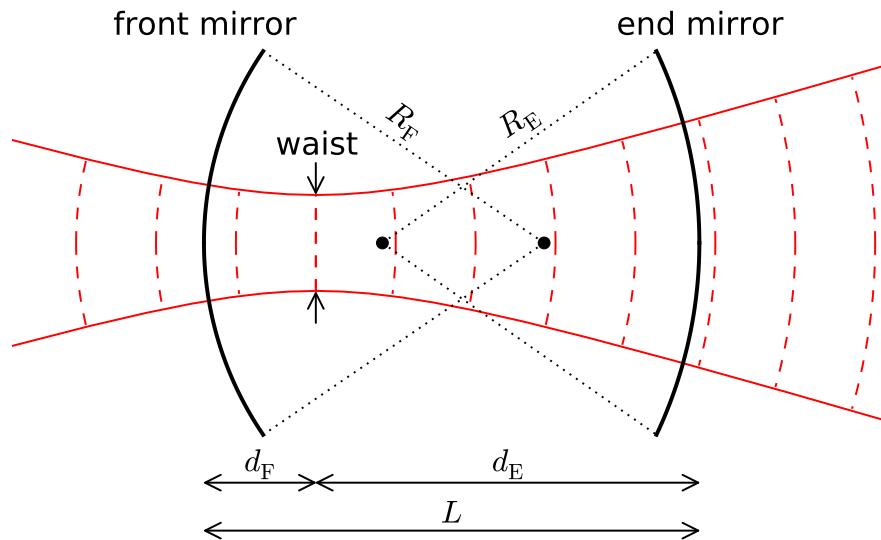


図 6: Fabry-Perot 共振器の固有モード

3.3.2 高次モードの縮退

前節までは基本モードのみを考えていたが、入射光が鏡に垂直に入射しなかった場合などは高次モードが共振してしまう。また垂直に入射した場合でも、共振条件を満たすと高次モードが共振してしまう。したがって、基本モードは共振条件を満たすが、高次モードは共振条件を満たさないような設計が必要となる。

2.1.3 節で (l, m) の高次モードは基本モードと Gouy 位相の $l + m$ 倍だけ位相差があることを見た。鏡間を進む際に生じる Gouy 位相は

$$\zeta_0 = \arctan \frac{d_F}{z_0} + \arctan \frac{d_E}{z_0} \quad (3.18)$$

なので、式 (3.15)、式 (3.16) を代入して整理すると

$$\zeta_0 = \arccos \sqrt{g_F g_E} \quad (3.19)$$

となる。したがって、高次モードの共振条件は式 (3.9) を書き換えて

$$\frac{2L}{\lambda} = m_0 + (l + m + 1) \frac{\zeta_0}{\pi} \quad (m_0 \text{ は整数}) \quad (3.20)$$

となる。 ζ_0/π が整数比で表されないように g_F 、 g_E を選ぶことで、基本モードと高次モードが同時に共振条件を満たさないようにすることができる。

式 (3.20) は共振器が周波数選択性と空間モード選択性を持つことを表している。特に、基本モードだけが共振するように鏡の曲率半径や鏡間の距離を選んだ共振器にレーザー光を入射すると、その透過光にはほぼ基本モードだけが含まれることになる。したがって、そのような共振器はモードクリーナーとして用いることができる。

参考文献

- [1] H. Kogelnik and T. Li: Proc. IEEE **54** (1966) 1312.
Laser Beams and Resonators
- [2] 森脇成典: 『重力波をとらえる』(中村卓, 三尾典克, 大橋正健 編著, 京都大学学術出版会, 1998)
p.339-361.