

Experiments I made in my undergraduate days (GWPO seminar)

NAGANO Koji (長野 晃士)

Kawamura lab. M1

2015/5/20

学部時代に行った実験

私が学部時代に行った主な実験は以下の3つ

- ① 宇宙線を用いた安田講堂のミュオグラフィー (@五月祭)
- ② 非平衡状態下の熱運動の測定 (@前期特別実験 (安東研))
- ③ フェムト秒レーザーを用いた偶数次の高次高調波と試料ガスの配向度の同時測定 (?) (@後期特別実験 (酒井研))

今回は、2つ目の実験について説明する。

- ① はじめに
- ② 実験の原理
- ③ 実験の方法
- ④ 結果
- ⑤ 考察
- ⑥ 今後の展望とまとめ

Abstract

The thermal noise is one of the noises that limit the sensitivity of KAGRA. To beat the thermal noise, it is planned to maintain low cryogenic temperatures of mirrors. But incident lasers warm mirrors and make the thermal current. In other words, a non-equilibrium state is made. To estimate the influence of the thermal noise more precisely, we made the experiment to measure thermal motions of the torsion pendulum under the non-equilibrium state with a Michelson interferometer. But the thermal motion even under the equilibrium state still could not be measured for the seismic noise.

① はじめに

② 実験の原理

③ 実験の方法

④ 結果

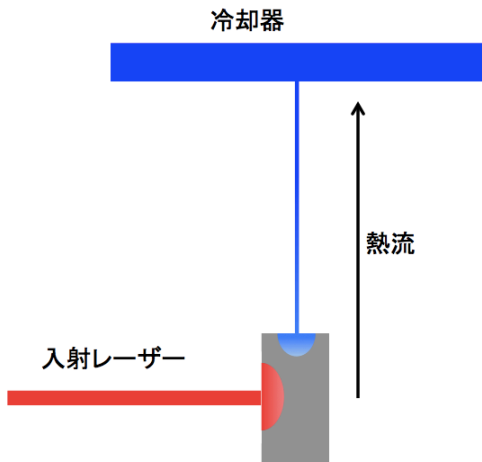
⑤ 考察

⑥ 今後の展望とまとめ

実験の背景

- 大型レーザー干渉型重力波望遠鏡の感度を制限する雑音の一つに熱雑音がある。
- そこで、KAGRA では鏡と懸架ワイヤーを冷やすことで熱雑音を小さくする予定である。
- しかし、入射しているレーザーが鏡を温めるので、鏡やワイヤーに熱流が生じて非平衡状態になる。
- 熱雑音の大きさの評価に使われている揺動散逸定理は、平衡状態において成り立つ定理なので、非平衡状態ではそのままでは使えない。
- このような非平衡効果が熱雑音にどの程度影響があるかはまだ評価されていない。

実験の背景



実験の目的

- 重力波望遠鏡の感度を制限するブラウン運動による熱運動を測定すること。
- それも特に、非平衡状態における熱運動を測定し、非平衡効果が熱雑音に与える影響の大きさを定量的に評価すること。

① はじめに

② 実験の原理

③ 実験の方法

④ 結果

⑤ 考察

⑥ 今後の展望とまとめ

熱運動

右のような弾性体の調和振動の運動方程式は以下の通り。

$$\mu \ddot{x}(t) + \gamma \dot{x}(t) + \mu \omega_0^2 x(t) = f(t)$$

ここで、 $x(t)$ は変位、 μ は換算質量、 γ は減衰に関する定数、 ω_0 は振動子の固有 (角) 振動数である。
これをフーリエ変換すると、

$$(-\mu \omega^2 + i \gamma \omega + \mu \omega_0^2) x(\omega) = f(\omega)$$

となる。

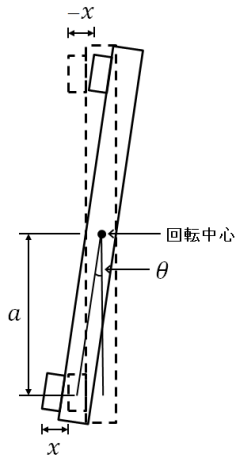


Figure: 変位 x とねじれの角度 θ

揺動散逸定理

系のコンダクタンス $\sigma(\omega)$ を以下のように定義する。

$$\sigma(\omega) = \operatorname{Re} \left[\frac{\dot{x}(\omega)}{f(\omega)} \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{i\omega x(\omega)}{f(\omega)} \right]$$

第1種揺動散逸定理によると、 x に関する周波数 f のパワースペクトル $G(x)$ は、

$$G(f) = \frac{4k_B T \sigma(\omega)}{\omega^2}$$

となる。ただし、 k_B はボルツマン定数、 T は系の温度である。

平衡状態の熱運動のパワースペクトル

減衰力が速度に比例する Viscous damping model によると、 $\gamma = \frac{2\omega_0 I}{a^2 Q}$ であるので、先ほどの図のような場合の、変位 x に関するパワースペクトル $G^{(x)}(f)$ は、

$$G^{(x)}(f) = \frac{2a^2 k_B T}{8\pi^3 I Q} \frac{f_0}{(f^2 - f_0^2)^2 + (\frac{f f_0}{Q})^2}$$

となる。ただし、 Q は Q 値であり、振動子の慣性モーメントを I とすると、換算質量 $\mu = \frac{2I}{a^2}$ であることを用いた。

平衡状態の熱運動のパワースペクトル

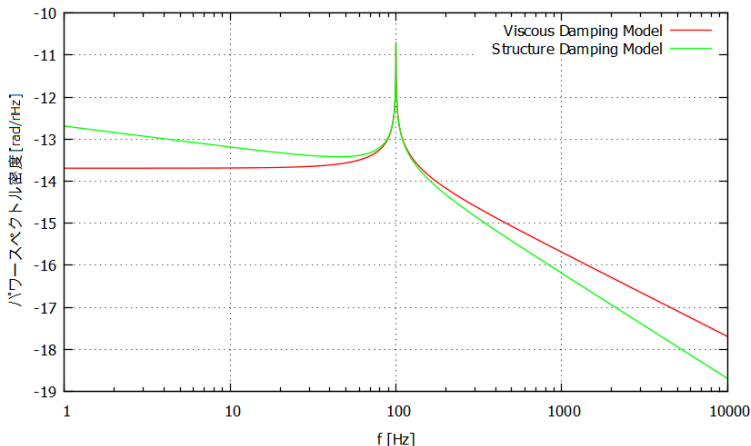


Figure: Viscous Damping Model と Structure Damping Model での熱運動のパワースペクトル密度。ここでは、 $T = 300$ K、 $I = 4.0 \times 10^{-5} \text{ kg}\cdot\text{m}^2$ 、 $Q = 2000$ 、 $f_0 = 100$ Hz とした。

非平衡状態の熱運動

非平衡状態を実現するために次ページのような系を考える。平衡状態の熱運動の大きさ x_{eq} と非平衡状態の熱運動の大きさ x_{noneq} の比 $\epsilon \equiv \frac{x_{\text{noneq}}}{x_{\text{eq}}}$ は、 $\frac{1}{L} \frac{\Delta T}{T}$ で展開できると考えられて、 $\frac{1}{L} \frac{\Delta T}{T}$ の1次まで考慮すると、

$$\epsilon = C \frac{1}{L} \frac{\Delta T}{T}$$

となる。ここで、 C は比例定数、 L はロッドの長さである。非平衡状態の熱運動を測定するために、 T 一定の下で ϵ を大きくするためには、 ΔT を大きくして、 L を小さくすれば良いことが分かる。

非平衡状態の熱運動

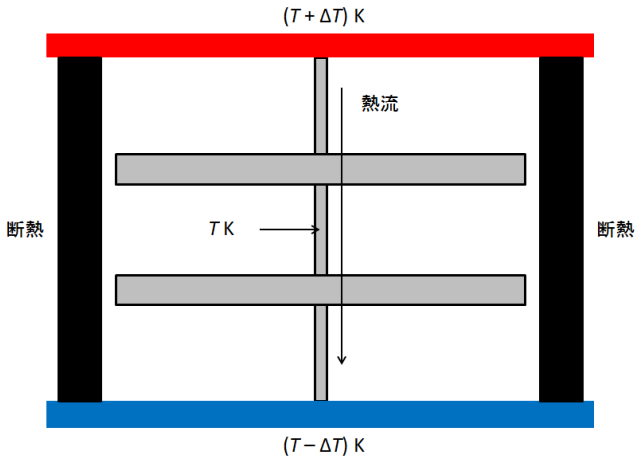


Figure: 非平衡状態を実現する系。上の板はヒーターで加熱され、下の板はペルチェ素子で冷却されている。また、上下の板を支えている柱は断熱されており、熱流は全て振動子を通る。

Michelson 干渉計

今回の実験では、以下のような差動 Michelson 干渉計を用いた。

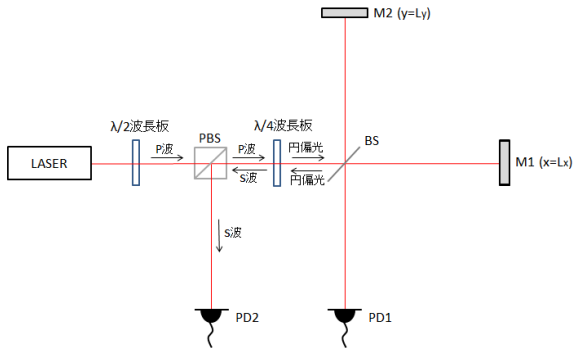


Figure: 差動 Michelson 干渉計

Michelson 干渉計

この干渉計の出力 (2 つの PD の出力の差) は、

$$P = P_{\text{in}} \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} (L_x - L_y + \Delta x - \Delta y) \right]$$

となり、鏡の変位量の差 $\Delta x - \Delta y$ を測定することが出来る。ここで L_x, L_y は干渉計のそれぞれの腕の長さ、 $\Delta x, \Delta y$ は干渉計のそれぞれの腕の長さの変化、 P_{in} はレーザーの入射パワー、 λ はレーザーの波長である。

フィードバック制御の原理

フィードバック制御をしないと、出力が変位に対して三角関数として応答するので扱いにくい。そこで、光路長を制御することによって干渉計の出力を振動中心 (ミッドフリンジ) に固定する。

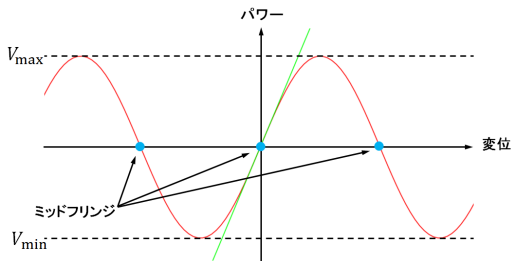


Figure: 観測されるパワーと変位量の関係

フィードバック制御

フィードバック制御の基本的なブロックダイアグラムは以下のようなものである。フィードバック信号 v_f から鏡の変位量 x_0 を読み取る。

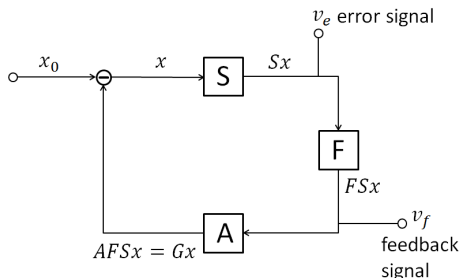


Figure: フィードバック制御のブロックダイアグラム。S はセンサー、F はフィルター回路、A はアクチュエーターを表す。

フィードバック制御

光路長の変化 x は、センサー S とフィルター回路 F 、アクチュエーター A の伝達関数をそれぞれ S, F, A とし、 $G \equiv AFS$ とすると、

$$x = \frac{1}{1 + G} x_0$$

となる。

よって、 $|G| \rightarrow \infty$ とすると、 $x \rightarrow 0$ となる。

フィードバック制御

制御中に測定した電圧信号 v_f と鏡の変位量 x_0 の関係は以下の通り。

$$\begin{aligned} v_f &= FS \frac{1}{1+G} x_0 \\ \therefore x_0 &= \frac{1+G}{FS} v_f \\ &= A v_f \quad (|G| \gg 1) \end{aligned}$$

今回の実験で考慮・測定した主な雑音は以下の4つ。

- ① 地面振動
- ② ショットノイズ
- ③ PD のダークノイズ
- ④ 回路雑音

また、今回は測定しなかったが、他にもレーザーの強度雑音や周波数雑音なども存在する。

地面振動

地面振動のパワースペクトル $S(f)$ は、1 Hz 以上では、

$$S(f) = 10^{-7} \times \left(\frac{1 \text{ Hz}}{f} \right)^2 \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

と表される。この振動が振動子の振動にカップルすることによって雑音になる。

地面振動は、後述する回路雑音等と違い、振動子に直接作用する雑音であるので、(今回の) フィードバック制御によっては抑えることが出来ず、非常に大きな雑音になると考えられる。したがって、熱雑音の測定の際には、十分な防振をする必要がある。

ショットノイズ

ショットノイズとは、フォトダイオードに入射する光子数が量子的に揺らぐことに起因する雑音である。フォトディテクターの電流の直流成分が I_{dc} であるときのショットノイズは、

$$i_{\text{shot}} = \sqrt{2eI_{dc}} \quad \text{A}/\sqrt{\text{Hz}}$$

と表せる。ただし、 e は素電荷量である。このままではデータや他の雑音と比較しづらいので、以下のように変換しておく。

$$v_{\text{shot}} = i_{\text{shot}} \times R = \sqrt{2eV_{dc}R} \quad \text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$$

ただし、 V_{dc} はフォトディテクターの電圧の直流成分、 R はフォトダイオードからの電流が流れる抵抗の大きさである。

PD のダークノイズ

フォトディテクターのダークノイズとは、フォトダイオードに光が入射していない時に流れる電流によるノイズである。

回路雑音とは、回路に対する入力電圧がないにもかかわらず出力されてしまう雑音電圧である。この雑音は、抵抗の雑音電圧、つまりブラウン運動に起因し、回路のグラウンドが不十分であるときなどに大きくなる。

① はじめに

② 実験の原理

③ 実験の方法

④ 結果

⑤ 考察

⑥ 今後の展望とまとめ

実験全体の流れ

実際の実験としては、以下の手順を想定していた。

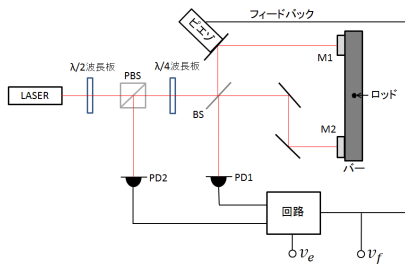
- ① 装置の設計・作成
- ② 回路の設計・作成
- ③ 回路の特性や雑音の測定
- ④ 振動子の特性 (主に Q 値と共振周波数) の測定
- ⑤ 平衡状態下の熱運動の測定
- ⑥ 非平衡状態下の熱運動の測定

しかし、時間の都合上、今回の実験では平衡状態下の熱運動の測定までしか行えなかった。

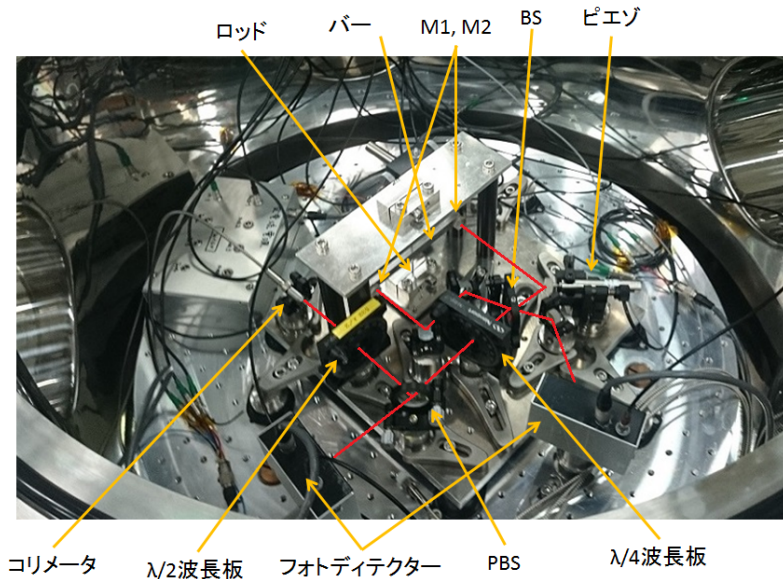
実験装置

本実験で用いた実験系の模式図は下図のようなものであり、主に以下の4要素からなる。

- ① レーザー光源および光学系
- ② 振動子および熱系
- ③ 制御用回路
- ④ 測定装置



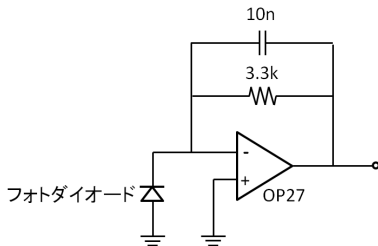
実験風景



レーザー光源および光学系

本実験で用いたレーザーは、波長 $\lambda = 1550$ nm、強度 4.0 mW であった。

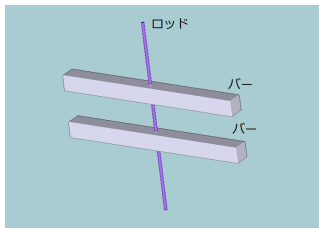
また、本実験で使用したフォトディテクターの回路図は下図の通りである。



振動子および熱系

振動子の概観は下図のようなものである。また、各部の寸法及び材質は下表のようになっている。ロッドとバーの接合には熱嵌めを用いた。

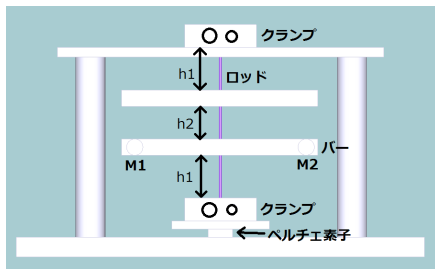
ロッドの直径 (mm)	バーの寸法 (mm)	ロッドの材質	バーの材質
2	10 × 10 × 120	タングステン	アルミニウム



振動子および熱系

この振動子を下図のようなやぐらに固定する。天板にはヒーター、床にはペルチェ素子がついており熱勾配をつけることができるようになっている。

$h1(\text{mm})$	$h2(\text{mm})$	天板と床の材質	クランプの材質	支柱の材質	慣性モーメント $I_1(\text{kg}\cdot\text{m}^2)$
26	20	アルミニウム	SUS	ポリアセタール	3.9×10^{-5}



振動子および熱系

この振動子には、2つのバーが逆位相で動く逆位相モード ($\theta_1 - \theta_2$) と同位相で動く同相モード ($\theta_1 + \theta_2$) が存在する。タングステンのずれ弾性係数などの数値を用いると、それぞれのモードの共振周波数の理論値は、

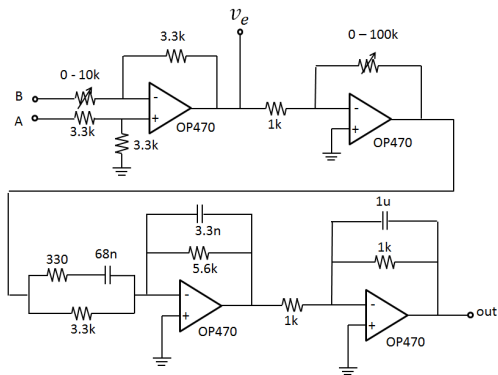
$$\text{逆位相モード : } f_a = 150.80 \text{ Hz}$$

$$\text{同相モード : } f_s = 79.48 \text{ Hz}$$

となる。

制御用回路

本実験で用いた制御用回路は以下の通りである。



① はじめに

② 実験の原理

③ 実験の方法

④ 結果

⑤ 考察

⑥ 今後の展望とまとめ

今回の実験では、時間の関係上、非平衡熱雑音の測定までいらず、平衡状態下の熱雑音の測定まで行った。

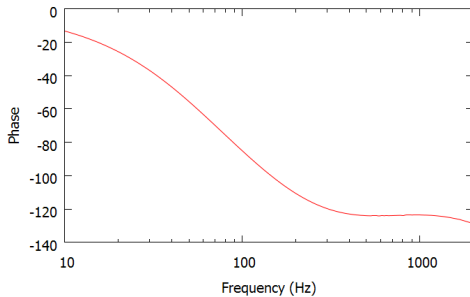
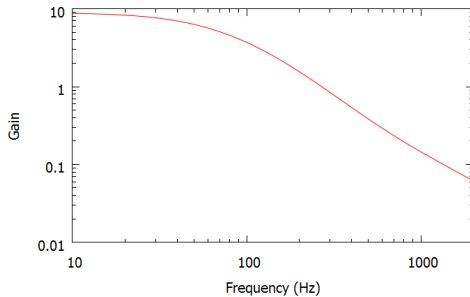
センサーの伝達関数 S

本実験の際には、差動増幅回路の可変抵抗を調整して、 $V_{\max} = -V_{\min} = 1.52 \text{ V}$ とした。このときのセンサーの伝達関数 S は、

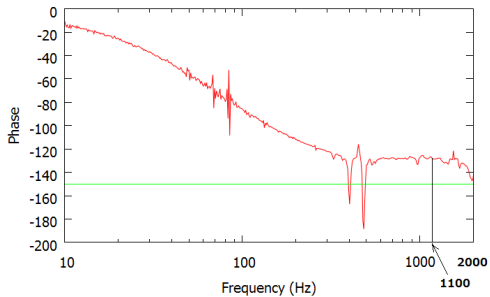
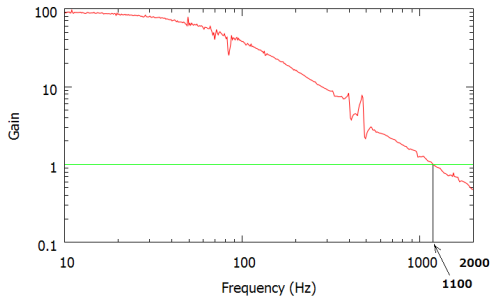
$$S = 2.46 \times 10^7 \text{ V/m}$$

となった。

フィルターの伝達関数 F



オープンループ伝達関数 G



アクチュエータの伝達関数 A

アクチュエータの伝達関数は、ピエゾ素子の応答は、低周波領域ではあまり変化しないと考えて、 $A = G/FS$ という式と上の各結果を用いて、**30 ~ 300 Hz** で平均すると、

$$A = 4.20 \times 10^{-7} \text{ m/V}$$

であった。

ねじれ振りの共振周波数の測定

2 位相ロックインアンプを用いて測定した同相モードの共振周波数 f_s と逆位相モードの共振周波数 f_a は、

$$f_s = 69.14 \pm 0.01 \text{ Hz}$$

$$f_a = 134.50 \pm 0.01 \text{ Hz}$$

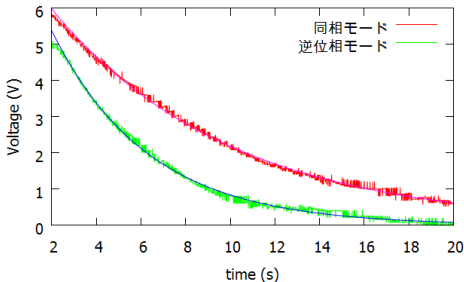
であった。

ねじれ振りの Q 値の測定

測定された振動子の各モードの減衰は下図のようになって、そこからそれぞれのモードの Q 値を測定することができ、同相モードの Q 値 Q_s と逆位相モードの Q 値 Q_a は、

$$Q_s = 1724 \pm 3, \quad Q_a = 1819 \pm 4$$

であった。



平衡状態下の熱運動の測定

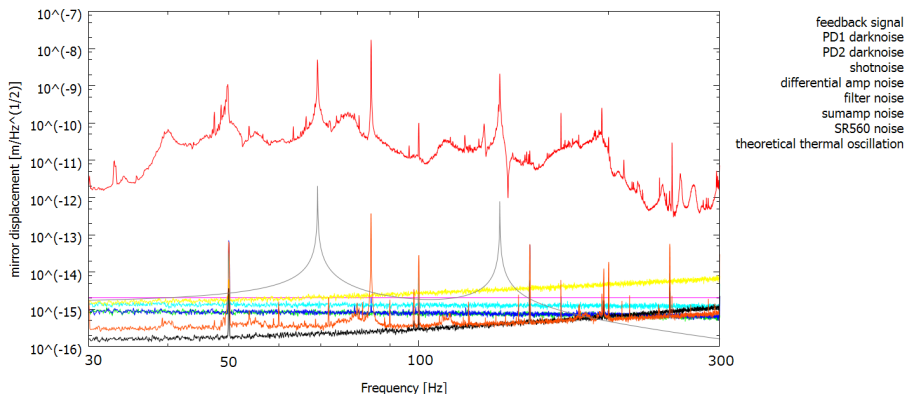


Figure: 鏡の変位と各雑音の大きさのパワースペクトル

① はじめに

② 実験の原理

③ 実験の方法

④ 結果

⑤ 考察

⑥ 今後の展望とまとめ

ねじれ振りの共振周波数について

測定された共鳴周波数を再掲するが、どちらの共振モードでも計算値より小さい。

モード	測定値 (Hz)	計算値 (Hz)	測定値/計算値
同相モード	69.14 ± 0.01	79.48	0.8699 ± 0.0001
逆位相モード	134.50 ± 0.01	150.80	0.89190 ± 0.00006

この原因としては、

- ① タングステンに不純物が混入していることによる、
ずれ弾性係数等のパラメータのずれ
- ② 計算値にはロッドとバーの熱嵌め部分やクランプ部分の摩擦は考慮されていない。そのため、ロッドがねじれにくくなっている、その影響で慣性モーメントが大きくなっている

などが考えられる。

Q 値を制限している原因

今回用いた振動子の Q 値を制限している原因を考える。
今回の実験は、大気圧中で行ったが、真空中で測定しても Q 値は変化しなかった。

よって、本実験の振動子の Q 値はクランプや熱嵌めの接合部分の機械的な損失によって制限されていると考えられる。

熱運動の大きさについて

今回得られた結果の共振周波数のピークが全て熱運動に由来すると仮定し、各共振ピークの大きさから振動子の温度を逆算すると、

$$\begin{aligned}\text{同相モード } x_0 &= (5.0 \pm 0.2) \times 10^{-9} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \\ &\rightarrow (4.8 \pm 0.2) \times 10^8 \text{ K}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{逆位相モード } x_0 &= (2.1 \pm 0.1) \times 10^{-9} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}} \\ &\rightarrow (7.9 \pm 0.4) \times 10^7 \text{ K}\end{aligned}$$

であった。この温度は明らかに非現実的である。
これは、地面振動の防振が不十分であったため、それによって振動子が揺らされたためであると考えられる。

- ① はじめに
- ② 実験の原理
- ③ 実験の方法
- ④ 結果
- ⑤ 考察
- ⑥ 今後の展望とまとめ

今後の展望

今回の実験では、防振が不十分であったので熱運動が地面振動に隠されてしまった。そこで、熱運動を測定するために、装置全体を懸架したステージの上に乗せて防振する必要がある。現在の振動子の振動は計算値よりも 10^3 倍程度大きい。共鳴周波数が 1 Hz のステージ上に乗せると、逆位相モードの共鳴周波数である 135 Hz 程度では地面振動の影響を 135^{-2} 倍程度小さくできるので、熱運動を測定できると考えられる。

その後、ヒーター等で熱勾配をつくり非平衡状態下の熱運動の測定を行い、非平衡効果の大きさを評価する。

まとめ

- 非平衡熱雑音の測定のために、ねじれ型振り子を用いた熱運動の測定を行った。
- そのために、装置の設計、回路の作成を行った。
- 回路雑音等は熱運動に比べて十分小さいことが確認できた。
- しかし、地面振動の防振が不十分であったために熱運動を確認することは出来なかった。
- 今後は、防振装置を作成し、非平衡状態下の熱運動の測定に移る。

Appendix

揺動散逸定理

コンダクタンス $\sigma(\omega)$ とパワースペクトル $G^{(x)}(f)$ と θ に関するパワースペクトル $G^{(\theta)}(f)$ は、

$$\sigma(\omega) = \frac{a^2 \gamma \omega^2}{\mu^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$G^{(x)}(f) = \frac{4a^2 k_B T \gamma}{\mu^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$G^{(\theta)}(f) = \frac{4k_B T \gamma}{\mu^2(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

である。

Viscous damping model

パワースペクトルは、

$$\begin{aligned} G_{\text{V}}^{(x)}(f) &= \frac{4a^2 k_B T}{2I Q} \frac{\omega_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (\frac{\omega \omega_0}{Q})^2} \\ &= \frac{2a^2 k_B T}{8\pi^3 I Q} \frac{f_0}{(f^2 - f_0^2)^2 + (\frac{f f_0}{Q})^2} \\ G_{\text{V}}^{(\theta)}(f) &= \frac{2k_B T}{8\pi^3 I Q} \frac{f_0}{(f^2 - f_0^2)^2 + (\frac{f f_0}{Q})^2} \end{aligned}$$

である。

Structure damping model

$$\gamma = \gamma_S = \frac{\mu\omega_0^2}{\omega Q} = \frac{2\omega_0^2 I}{\omega a^2 Q}$$

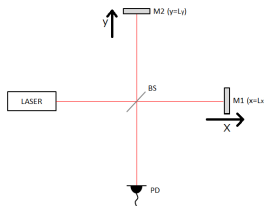
である。パワースペクトルは、

$$G_S^{(x)}(f) = \frac{2a^2 k_B T}{8\pi^3 I Q} \frac{f_0^2 / f}{(f^2 - f_0^2)^2 + (\frac{f_0^2}{Q})^2}$$

$$G_S^{(\theta)}(f) = \frac{2k_B T}{8\pi^3 I Q} \frac{f_0^2 / f}{(f^2 - f_0^2)^2 + (\frac{f_0^2}{Q})^2}$$

である。

Michelson 干渉計



ビームスプリッターで合流してフォトディテクターに入射する光 E_{out} は、

$$\begin{aligned} E_{\text{out}} &= \frac{i}{2} E_0 e^{i(2\pi f t - 2k_x L_x)} + \frac{i}{2} E_0 e^{i(2\pi f t - 2k_y L_y)} \\ &= i e^{i(2\pi f t - k_x L_x - k_y L_y)} E_0 \cos(k_x L_x - k_y L_y) \end{aligned}$$

である。

Michelson 干渉計

フォトディテクターで観測される光のパワー P_{out} は、

$$\begin{aligned} P_{\text{out}} &= P_{\text{in}} \cos^2(k_x L_x - k_y L_y) \\ &= \frac{P_{\text{in}}}{2} \{1 + \cos[2(k_x L_x - k_y L_y)]\} \end{aligned}$$

となる。また、フォトディテクターに入らない方の光のパワー P_{refl} についても同様に考えると、

$$\begin{aligned} P_{\text{refl}} &= P_{\text{in}} \sin^2(k_x L_x - k_y L_y) \\ &= \frac{P_{\text{in}}}{2} \{1 - \cos[2(k_x L_x - k_y L_y)]\} \end{aligned}$$

である。

Michelson 干渉計

$k_x = k_y = 2\pi/\lambda$ (λ はレーザーの波長) として、鏡の位置が、 $L_x \rightarrow L_x + \Delta x$ 、 $L_y \rightarrow L_y + \Delta y$ とずれたとする (この時、光路長はそれぞれ $2\Delta x, 2\Delta y$ ずれる) と、PD で観測されるパワーは

$$P_{\text{out}} = \frac{P_{\text{in}}}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{4\pi}{\lambda} (L_x - L_y + \Delta x - \Delta y) \right] \right\}$$

となるので、PD の出力から鏡の変位量の差 $\Delta x - \Delta y$ を測定することが出来る。

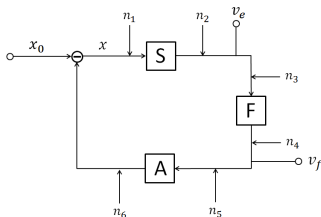
フィードバック制御

フィードバック制御してミッドフリンジに固定することは、 $\frac{4\pi(L_x - L_y)}{\lambda} = -\frac{\pi}{2}$ とすることに相当し、このとき、信号 P は、鏡の位置が x_0 だけ変化した際の光路長の変化を x とすると、 $|x| \ll 1$ だから、

$$P = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} \frac{2\pi x}{\lambda}$$

となり、出力信号の応答を線形化出来る

ノイズの混入



上図のようにノイズが混入した場合、エラー信号は、

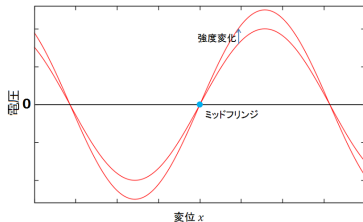
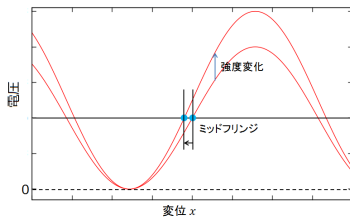
$$v_e = \frac{S}{1+G} x_0 + \frac{S}{1+G} n_1 + \frac{1}{1+G} n_2 - \frac{G}{1+G} n_3 - \frac{G}{1+G} \frac{n_4 + n_5}{F} - \frac{1}{1+G} n_6$$

$$\therefore x_0 = \frac{1+G}{S} v_e - n_1 - \frac{1}{S} n_2 + \frac{G}{S} n_3 + \frac{G}{FS} (n_4 + n_5) + n_6$$

となる。

差動マイケルソン干渉計での同相雑音の除去

ミッドフリンジに固定している場合は、レーザーの強度が変化しても動作点が変わらない。差動 Michelson 干渉計を用いると同相雑音を低減することが出来る。



装置の設計方針

装置の設計は以下の方針で進めた。

- 熱勾配を作るために、2箇所 の接合部分が必要
- 地面振動が大きな雑音になることが予想されるので、振動子とそれを固定するやぐらの振動が出来るだけカップルしないようにする
- ロッドの熱伝導があまり高くないようにする

その結果、タングステン製のロッドの上下2箇所をクランプし、バーが2本ある振動子を用いることにした。バーが2本あると、以下で説明するように、やぐらが揺れずバーのみが振動するモード (逆位相モード) がある。

振動子の振動モード

やぐらの慣性モーメントを I_2 、上下のバーのねじれの角度をそれぞれ θ_1, θ_2 、やぐらのねじれの角度を θ_3 とすると、この系の運動方程式は、

$$I_1 \ddot{\theta}_1 = -k_1(\theta_1 - \theta_3) - k_2(\theta_1 - \theta_2)$$

$$I_1 \ddot{\theta}_2 = k_2(\theta_1 - \theta_2) - k_1(\theta_2 - \theta_3)$$

$$I_2 \ddot{\theta}_3 = k_1(\theta_1 - \theta_3) + k_1(\theta_2 - \theta_3)$$

となる。ただし、ねじれ弾性係数 $k_i = \frac{\pi G r^4}{2h_i}$ (r : ロッドの半径)、タングステンのずれ弾性係数 $G = 161$ GPa である。

振動子の振動モード

これらの運動方程式から、この系の基本振動モードとその共振周波数を計算すると以下ようになる。

基本振動モード	共振周波数 (Hz)
$\theta_1 - \theta_2$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi Gr^4}{2I_1 h_1} + \frac{\pi Gr^4}{I_1 h_2}}$
$\theta_1 + \theta_2 - 2\theta_3$	$\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi Gr^4}{2I_1 h_1} + \frac{\pi Gr^4}{I_2 h_2}}$
$I_1(\theta_1 + \theta_2) + I_2\theta_3$	0

振動子の振動モード

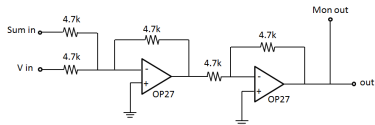
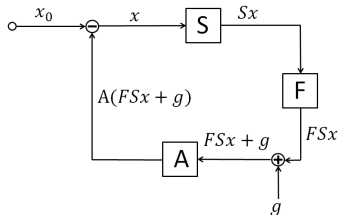
ここで、上の2つのモードに注目し、 I_3 が非常に大きく、 $\theta_3 = 0$ であるとする、2つのバーが逆位相で動く逆位相モード ($\theta_1 - \theta_2$) と同位相で動く同相モード ($\theta_1 + \theta_2$) が存在し、それぞれのモードの共振周波数は、

逆位相モード : $f_a = 150.80$ Hz

同相モード : $f_s = 79.48$ Hz

となる。

オープンループ伝達関数の測定



オープンループ伝達関数 G を測定するためには、上図のように制御ループの途中でサムアンプを使って、信号 g を加えれば良い。このとき、

$$x = \frac{x_0 - Ag}{1 + AFS}$$

となる。

オープンループ伝達関数の測定

信号 g を加えた箇所の前後の信号の比を取ると、

$$\frac{FSx}{FSx + g} = \frac{FS \frac{x_0 - Ag}{1 + AFS}}{FS \frac{x_0 - Ag}{1 + AFS} + g} = \frac{FSx_0 - Gg}{FSx_0 + g}$$

となる。よって、信号 g の大きさを $g \gg FSx_0$ となるようにしておくと、

$$\frac{FSx}{FSx + g} = -G$$

となるから、オープンループ伝達関数を測定できる。

Q 値の測定

Q 値の測定には 2 つの方法がある。それは、

- ① 振動の減衰時間を測る
- ② 振動ピークの半値幅を測る

であるが、2 つ目の方法は Q 値があまり高くない場合に用いる。本実験では、1 つ目の方法を用いた。

振動子がある程度励起したあとに、励起をやめた時の減衰振動は、

$$V(t) \propto \exp \left[-\frac{\omega_0 t}{2Q} \right] \sin \omega_0 t$$

と書ける。ここで、 ω_0 は注目しているモードの共振周波数、 Q は Q 値である。

Q 値の測定

この信号を、2 位相ロックインアンプを用いて、振動数 ω_r の参照信号 $\sin \omega_r t$ と $\cos \omega_r t$ をかけると、ローパスフィルターの後の出力は、

$$V_c(t) \propto \exp \left[-\frac{\omega_0 t}{2Q} \right] \cos((\omega_0 - \omega_r)t)$$
$$V_s(t) \propto \exp \left[-\frac{\omega_0 t}{2Q} \right] \sin((\omega_0 - \omega_r)t)$$

となり、 $\omega_r \simeq \omega$ の信号を取り出すことが出来る。

Q 値の測定

この2つの信号をつかって、

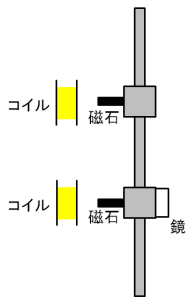
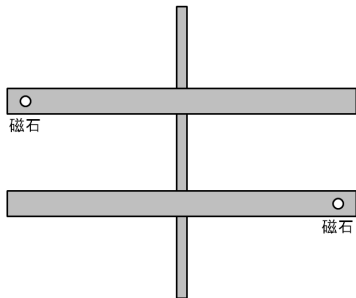
$$\sqrt{V_c(t)^2 + V_s(t)^2} \propto \exp \left[-\frac{\omega_0 t}{2Q} \right]$$

なる信号を取り出すことが出来る。よって、信号の大きさが $1/e$ になる時間を τ とすると、 $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ となるから、共鳴周波数が分かっているならば、 τ を測定することで Q 値を求めることができる。

振動子の励起方法

振動子の共鳴周波数や Q 値の測定のために、振動子を励起する必要がある。その方法として、本実験では、次頁の図のように振動子に磁石を付けてその傍にコイルを置き、そこに交流電流を流すことで振動子の振動を励起した。また、それぞれのコイルに交流電流を流して同位相で力を加えると、振動子の逆位相モードの振動を励起でき、そこから位相が π だけずれた電流を流すと同相モードを励起することができる。

振動子の励起方法

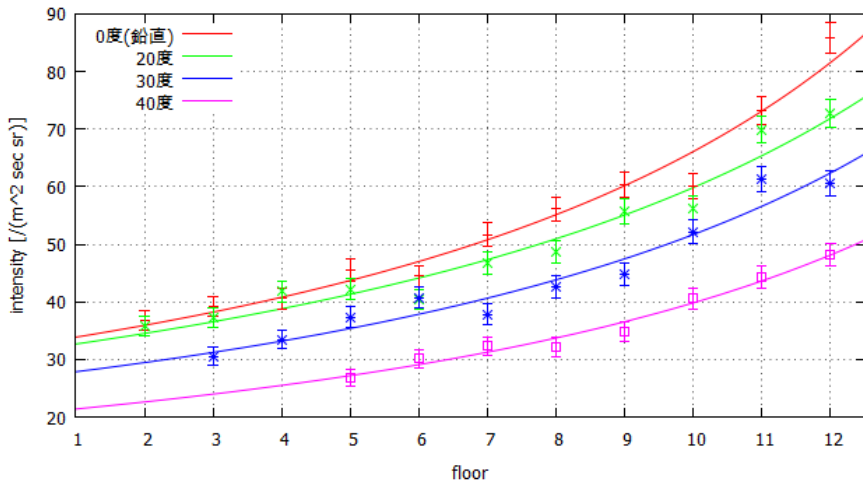


安田講堂のミュオグラフィ

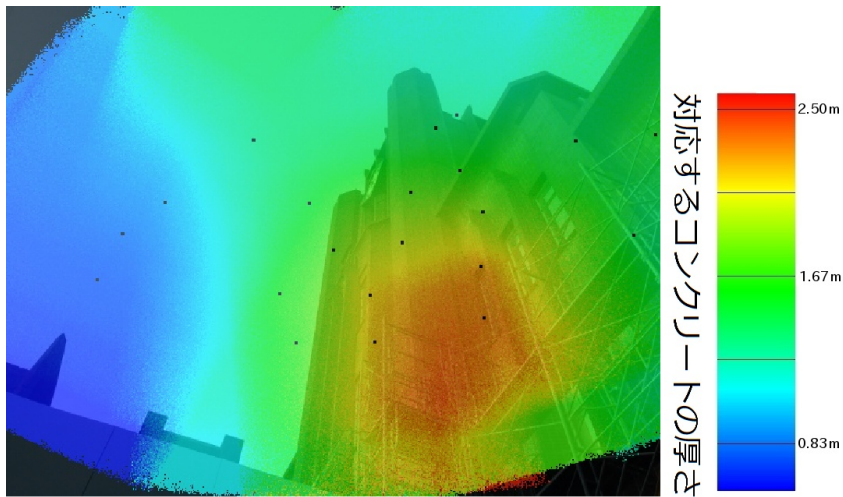


安田講堂のミュオグラフィ

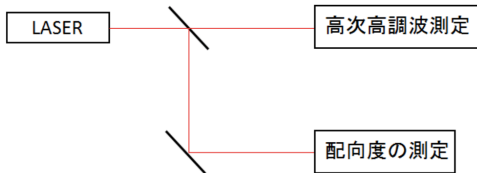
Height dependence of muon flux



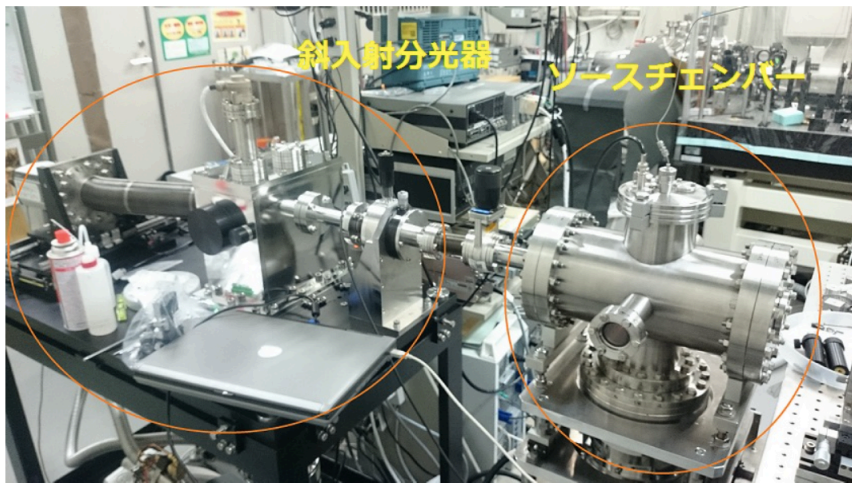
安田講堂のミュオグラフィ



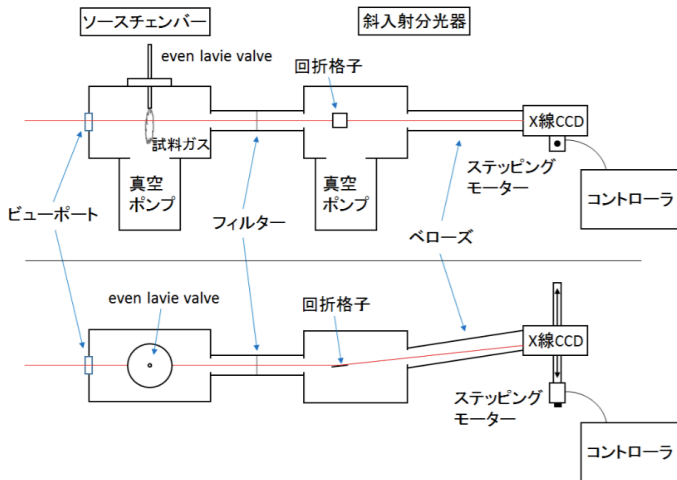
高次高調波の同時測定



高次高調波の同時測定



高次高調波の同時測定



高次高調波の同時測定

