重力波4年生ゼミ補足

高橋走 (坪野研 D2)

2010/1/13

目 次

1 概要 1

2 Saulson 4.3.2 章 解説 1

2.1 概要 1

2.2 バンド幅 2

2.3 典型的周波数 (or タイムスケール) とバンド幅 2

2.4 バンド幅とノイズ 2

2.5 ノイズの計算例 3

3 SNR の定義 (特に"N") の定義について 3

1 概要

今日のゼミで Saulson の 4.3.2 章"SNR rules of thumb" (SNR の経験則) がいまいちよく分からなかったので、改めて自分で読んでまとめてみました。

それと、SNR の定義のところで不明な部分があったので、そこも読んでみました。

2 Saulson 4.3.2 章 解説

2.1 概要

フィルタを作成する際には観測対象となる重力波信号の形を知っている必要がありますが、実際にはこれを正確に知ることは不可能です。ですので、観測対象となる物理現象のタイムスケールから適当にフィルタの形を決めて、そこから大まかな SNR を見積もろうという話です。実験屋の感覚に近いところで議論が進むので、装置にさわった経験が少ないと辛い内容だったと思います。

結論としては、ノイズの大きさは現象の特徴的な時間 T に対しておおよそ $1/\sqrt{T}$ に比例するので、ここから SNR を大まかに求められるということが

書いてあります。また、ここから導かれる重要な結論として、速い現象 (T が小さい) の観測はノイズが大きく、遅い現象は低ノイズの観測が可能ということが言えます。

Saulson によると、この見積もりでファクター 2 くらいの範囲で SNR を求められると言うことです (つまり、本来の値の 2/3 - 1.5 倍くらいの範囲で SNR を決められる)。

2.2 バンド幅

僕の記憶では"バンド幅"という言葉が定義されていなかった気がするので、先に定義しておきます。

バンド幅は、信号を周波数空間で考えるときに使用する概念で、観測する周波数の領域の広さを表します。例えば、得られる信号の内、10 Hz - 100 Hz の部分だけ使用するのであれば、この観測のバンド幅は 90 Hz です (セミナーの中では領域の内低い周波数はあまり気にしないと言いましたが、これからの議論の中では下も気にしないとダメっぽいので訂正します)。周波数特性をもつフィルタを使って明示的にバンド幅を決めることもありますし、そのようなものを使用しなくても測定装置の性能上、無限のバンド幅 (0 Hz - ∞ Hz) をもつものは作成できません。例えば、坪野研でよく使用している OP27 という OP アンプを使用した回路は、特性上 8 MHz 以上の信号を出すことはできません。また、データの測定時間が 100 秒であれば、このデータから 1/100 Hz より低い周波数の情報を読み取ることはできません。さらに言えば、デジタル機器を用いて測定を行う場合は、1 秒間に測定するデータの個数が決まっているので、それ以上高い周波数の情報を得ることはできません。

2.3 典型的周波数 (or タイムスケール) とバンド幅

重力波には、その波源となる物理現象によって特徴的な周波数やタイムスケールがあると考えられます。そのため、対象となる現象によって自ずと観測のバンド幅も決まってきます。例えば、超新星爆発のは 1 ms 程度のバースト的な重力波を出すので、これを調べるためには 1 kHz 程度のバンド幅での観測が必要です。これに対して、仮に 100 s 程度のタイムスケールを持つ物理現象を調べるのであれば、0.1 Hz 程度のバンド幅で観測を行えばいいわけです。

また、放出する重力波の周波数が短くても、継続時間が長ければバンド幅は短くなります。なぜなら、長時間安定して放出される重力波を調べるのであれば、低い周波数の情報がいらなくなるからです。

2.4 バンド幅とノイズ

測定する周波数領域でノイズが充分に一様であるとすれば時系列でのノイズの振幅の平均値 $\langle n(t) \rangle$ (というか、分散 $\langle n^2(t) \rangle$)ha

$$\langle n^2(t)\rangle = n^2\Delta f \tag{1}$$

となります。ここで、n はノイズのパワースペクトル密度、Δf は測定のバンド幅です。

証明は以下の通りです。

$$\begin{aligned}\langle n^2(t)\rangle &= \int_{-f_{\rm low}}^{f_{\rm high}} n^2(f)df \qquad (2)\\ &= n^2 f\Big|_{f=f_{\rm low}}^{f=f_{\rm high}} \qquad (3)\\ &= n^2\Delta f\\ &. \qquad (4)\end{aligned}$$

ここで、$f_{\rm high}$ は観測周波数の上限、$f_{\rm low}$ は観測周波数の下限です。

これを用いると SNR の"N"を見積もることができるので、ラフなテンプレートから"S"を求めて SNR を見積もることができます。("S"の見積もり手法については一切書いてありません ^^; 。)

2.5 ノイズの計算例

上に挙げられたタイムスケール 1 ms の現象と 100s の現象のノイズを考えてみましょう。ノイズのパワースペクトル密度は共に 1 μV/$\sqrt{\rm Hz}$ とします。

1 ms の現象を調べるには、1 kHz 程度のバンド幅が必要です。従ってノイズの大きさは

$$1\ [\mu{\rm V}/\sqrt{\rm Hz}] \times\sqrt{1\times 10^3\ [\rm Hz]} = 32\ [\mu{\rm V}] \tag{5}$$

となります。

これに対して、100 s の現象であれば、同様の計算からノイズの大きさは 0.1 μV となり、1 ms の現象に比べてノイズが 1/300 になります。

3 SNR の定義 (特に"N") の定義について

本文中で N の定義が

$$N^2 = \sqrt{\langle (v * s(\tau))^2\rangle} \tag{6}$$

となっていることに道村君が疑問を呈していたので、読んでみました。

どうやら、ここでは S と N で定義に用いられている $s(\tau)$ が異なるようです。S の定義は"信号として予想される"テンプレート $s(\tau)$ を用いて

$$S^2 = \sqrt{(v * s(\tau))^2} \tag{7}$$

と定義していましたが、N の定義では"任意の"$s(\tau)$ に対して

$$N^2 = \sqrt{\langle (v * s(\tau))^2 \rangle} \tag{8}$$

と定義されています。つまり、N を計算するときには、わざと予想されるのと異なるテンプレートを用いる訳です。テンプレートが信号と一致していなければ (例えば、テンプレートとしてガウシアンノイズの時系列データを用いれば)、直感的には N はノイズになるように思えます (本当にこのやり方が正当なのかは保証しかねますが…)。