量子雑音まとめ

2018 年 2 月 22 日

（重力波検出器の）量子雑音のまとめ.

目次

1 電磁波の量子論 3
1.1 電磁場の量子化 . . . 3
1.1.1 3D 自由空間 . . . 3
1.1.2 1D，1 方向 . . . 3
1.2 電磁場の状態，演算子 . . . 4
1.2.1 vacuum state, number state . . . 4
1.2.2 coherent state . . . 4
1.2.3 Quadrature . . . 5
1.2.4 Displacement operator . . . 6
1.2.5 Squeeze operator, squeezed state . . . 6
1.2.6 ビームスプリッター . . . 8
1.3 Two-photon formalism . . . 8
1.3.1 Sideband picture . . . 9
1.3.2 two-photon quadrature . . . 9
1.3.3 Quadrature の交換関係，期待値 . . . 10
1.3.4 レーザー電場の量子化 . . . 11
1.3.5 Two-mode squeeze operator . . . 11

A 電磁場の量子化の詳細 13
A.1 準備 . . . 13
A.2 3D 自由空間 . . . 13
A.2.1 量子化 . . . 13
A.2.2 連続極限 . . . 16
A.3 1D 自由空間 . . . 16
A.3.1 連続極限，1 方向 . . . 17

B オペレータの細かい計算 18
B.1 Baker-Hausdorff's lemma . . . 18
B.2 Baker-Campbell-Hausdorff formula . . . 18
B.3 生成消滅演算子の変換 . . . 19
B.3.1 Displacement operator . . . 20

B.3.2 Squeezed operator 20

C おまけ 21

C.1 Two-photon coherent states 21

1　電磁波の量子論

電磁場を量子化し，coherent state, squeezed state, 2-photon formalism などを導入する．

1.1　電磁場の量子化

1.1.1　3D 自由空間

導出は A にまとめるとして，結果のみを載せる．

交換関係

$$[a_\sigma(\boldsymbol{k}), a_{\sigma'}(\boldsymbol{k'})] = [a^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k}), a^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k'})] = 0,\ [a_\sigma(\boldsymbol{k}), a^\dagger_{\sigma'}(\boldsymbol{k'})] = (2\pi)^3\delta_{\sigma\sigma'}\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k'}) \tag{1.1}$$

を満たすボゾンの演算子を用いて，電磁場は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\omega_{\boldsymbol{k}}}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\sigma(\boldsymbol{k})a_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k})t)} + \text{H.c.} \\
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i\sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{2\epsilon_0}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\sigma(\boldsymbol{k})a_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k})t)} + \text{H.c.} \\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \sum_\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} i\sqrt{\frac{\mu_0\hbar\omega(\boldsymbol{k}\frac{\boldsymbol{k}}{k})}{2}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\sigma(\boldsymbol{k})a_\sigma(\boldsymbol{k})e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k})t)} + \text{H.c.}
\end{aligned} \tag{1.2}$$

と量子化される．ここで $\sigma = p, s$ は偏向を表すインデックスで，$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_\sigma(\boldsymbol{k})$ は波数 $\boldsymbol{k}$ の電場の偏向ベクトル．ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_\sigma \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\hbar\omega(\boldsymbol{k})a^\dagger_\sigma(\boldsymbol{k})a_\sigma(\boldsymbol{k}) \tag{1.3}$$

となる．以下，偏向は特に明記しない限り無視する．

1.1.2　1D，1 方向

次に次元を落として，1 次元 $z > 0$ に進行する電磁波の量子化をすると，交換関係

$$[a(\omega), a^\dagger(\omega')] = 2\pi\delta(\omega-\omega') \tag{1.4}$$

を満たすボゾンの演算子を用いて

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= u(\boldsymbol{r})\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0\mathcal{A}c}}\omega\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\omega)a(\omega)e^{-i\omega(t-z/c)} + \text{H.c.} \\
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= iu(\boldsymbol{r})\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0\mathcal{A}c}}\hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\omega)a(\omega)e^{-i\omega(t-z/c)} + \text{H.c.} \\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= iu(\boldsymbol{r})\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\mu_0\hbar\omega}{2\mathcal{A}c}}\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}(\omega)a(\omega)e^{-i\omega(t-z/c)} + \text{H.c.}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

となり，ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\hbar\omega a(\omega)^\dagger a(\omega) \tag{1.6}$$

と書ける．ただし $u(\boldsymbol{r})$ はビームの空間モードで，$\mathcal{A}$ はビームの断面積．

のちの都合上，$a(\omega)$ の位相を回すことで E の係数 i をキャンセルする．また係数の $u(\boldsymbol{r})\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 c\mathcal{A}}}$ は暗黙のうちにかけることにして表記上は省く．これらの元で，電場を

$$\hat{E} = E^{(+)} + \hat{E}^{(-)},\ E^{(-)} = \{\hat{E}^{(+)}\}^\dagger \tag{1.7}$$

と分けて

$$\hat{E}^{(+)} = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} a(\omega) e^{-i\omega(t-z/c)} \tag{1.8}$$

とおく．

1.2 電磁場の状態，演算子

この節では簡単のため周波数 ω のモード．$a = a(\omega)$ だけを考え，$[a, a^\dagger] = 1$ とする．ハミルトニアンは $\mathcal{H} = \hbar\omega a^\dagger a$ である．[*1]

1.2.1 vacuum state, number state

vasuum state$|0\rangle$ を

$$a\,|0\rangle = 0 \tag{1.9}$$

で定義する．vacuum state の平均光子数は

$$\langle n \rangle_0 = \langle 0|\, a^\dagger a\,|0\rangle = 0 \tag{1.10}$$

である．つまり，平均的には光子が一つもない状態である．

次に，number state を number operator $n := a^\dagger a$ の固有状態

$$a^\dagger a\,|n\rangle = n\,|n\rangle \tag{1.11}$$

として定義する．vacuum state は $n = 0$ に対応する number state でもある．

Number state に $a, a^\dagger$ を作用させると

$$a\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle\,,\ a^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle \tag{1.12}$$

が成り立ち，これから帰納的に

$$|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}\,|0\rangle \tag{1.13}$$

とも書ける．

1.2.2 coherent state

coherent state を，消滅演算子 a の固有状態

$$a\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle \tag{1.14}$$

として定義する．number state で展開すれば，

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n}}\,|n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{\dagger n}}{n!}\,|0\rangle \tag{1.15}$$

と表される．

coherent state の平均光子数，分散は

$$\langle n \rangle_\alpha = \langle \alpha|\, a^\dagger a\,|\alpha\rangle = |\alpha|^2 \tag{1.16}$$

$$\Delta n^2 = \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = |\alpha|^2 = \langle n \rangle^2 \tag{1.17}$$

[*1] 繰り込みして $\frac{1}{2}$ は除いた．

となる．つまり，coherent state における光子数の分布は期待値 $|\alpha|^2$ の Poisson 分布になっている．

異なる固有値の coherent state 同士の内積は

$$\langle\alpha|\beta\rangle = \exp\left[\alpha^*\beta - \frac{1}{2}|\alpha|^2 - \frac{1}{2}|\beta|^2\right] \tag{1.18}$$

であるから，$\alpha \neq \beta$ でも $\langle\alpha|\beta\rangle \neq 0$ である．しかし $|\alpha - \beta| \gg 1$ の場合には近似的に $\langle\alpha|\beta\rangle \simeq 0$ とみなせる．つまり十分離れた固有値の coherent state 同士は (完全ではない) がほぼ直交している．また

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\, |\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \tag{1.19}$$

が成り立つから，$\{|\alpha\rangle\}$ は overcomplete である．

1.2.3 Quadrature

生成消滅演算子は non-Hermitian である．つまり observable ではない．一方，observable な電磁波の演算子として，

$$X_1(\omega) = a + a^\dagger,\ X_2(\omega) = (a - a^\dagger)/i \tag{1.20}$$

と X_1, X_2 を導入する．[*2]それぞれ amplitude quadrature, phase quadrature と呼ぶ．qudrature で生成消滅演算子を表せば

$$a = \frac{X_1 + iX_2}{2},\ a^\dagger = \frac{X_1 - iX_2}{2} \tag{1.21}$$

となる．

quadrature で電場を表すと

$$E(z,t) = ae^{-i\omega(t-z/c)} + a^\dagger e^{i\omega(t-z/c)} = X_1\cos\omega(t - z/c) + X_2\sin\omega(t - z/c) \tag{1.22}$$

と書ける．つまり X_1, X_2 はそれぞれ電場の cos 成分，sin 成分の振幅に相当する．電場を古典的に

$$E(t) = A(1 + a(t))\cos(\omega t + \phi(t)) \tag{1.23}$$

と表した時，$a(t)$ が X_1 に，$\phi(t)$ が X_2 に相当する．これが amplitude, phase quadrature と呼ばれる所以である．

Vacuum state における期待値，揺らぎは

$$\langle 0|\, X_1\, |0\rangle = \langle 0|\, X_2\, |0\rangle = 0, \tag{1.24}$$

$$\langle 0|\, X_1^2\, |0\rangle = \langle 0|\, X_2^2\, |0\rangle = 1 \tag{1.25}$$

となる．つまり，vacuum state は平均は 0 だが何もないのではなく，各 quadrature で 1 だけの揺らぎを持つ場であることがわかる．

揺らぎについては，Robertson 不等式から一般の状態について

$$\Delta X_1 \Delta X_2 \geq \frac{1}{2}|[X_1, X_2]|^2 = 1 \tag{1.26}$$

が成り立つ．先の結果から vacuum state では等号が成り立っているから，vacuum state は最小不確定状態である．

同様に，coherent state における期待値，揺らぎは

$$\begin{aligned}
\langle\alpha|\, X_1\, |\alpha\rangle &= \alpha + \alpha^* = 2\mathrm{Re}[\alpha], \\
\langle\alpha|\, X_2\, |\alpha\rangle &= -i(\alpha - \alpha^*) = 2\mathrm{Im}[\alpha] \\
\langle\alpha|\, (X_1)^2\, |\alpha\rangle &= \alpha^2 + (\alpha^*)^2 + 2|\alpha|^2 + 1, \\
\langle\alpha|\, (X_1)^2\, |\alpha\rangle &= -(\alpha^2 + (\alpha^*)^2 - 2|\alpha|^2 - 1)
\end{aligned} \tag{1.27}$$

[*2] X_1, X_2 の定義は文献によってコロコロ変わるから注意.

であるから

$$\langle(\Delta X_1)^2\rangle = \langle(\Delta X_2)^2\rangle = 1 \tag{1.28}$$

である．つまり coherent state も vacuum state と同じく最小不確定状態である．[*3]

1.2.4 Displacement operator

Displacement operator $D(\alpha)$ を

$$D(\alpha) = \exp[\alpha a^\dagger - \alpha^* a] \tag{1.29}$$

と定義する．定義から，$D^\dagger(\alpha) = D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha)$ である．すなわち $D(\alpha)$ はユニタリである．

Campbell-Baker-Hausdorff formula から

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} \tag{1.30}$$

と書けるから，これを vacuum state に作用させると

$$D(\alpha)\,|0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha a^\dagger)n}{n!} = |\alpha\rangle \tag{1.31}$$

となる．つまり，Displacement operator $D(\alpha)$ は vacuum state に作用して固有値 α の coherent state を生成する演算子である．

ここまで coherent state を Schrödinger picture 的に見てきたが，今度は Heisenberg picture 的に考える．Baker-Hausdorff lemma [*4] から

$$D^\dagger(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha,\ D^\dagger(\alpha) a^\dagger D(\alpha) = a^\dagger + \alpha^* \tag{1.32}$$

が成り立つ．[*5] これを用いると，任意のコヒーレント状態のある物理量の期待値は，別の演算子の真空期待値に置き換えることができる．状態 $|\alpha\rangle$ におけるある演算子 $O(a, a^\dagger)$ の期待値は，

$$\langle\alpha|\, O(a, a^\dagger)\, |\alpha\rangle = \langle 0|\, D^\dagger[\alpha] O(a, a^\dagger) D[\alpha]\, |0\rangle = \langle 0|\, O(a+\alpha, a^\dagger + \alpha^*)\, |0\rangle \tag{1.33}$$

のように $O(a+\alpha, a^\dagger + \alpha^*)$ の真空期待値として計算することができる．したがって，光の時間発展を追う時に a だけ見ておけば，状態については気にしなくても期待値を計算することができる．

例えば，$O(a, a^\dagger) = E$ のとき

$$\begin{aligned} E(z,t)_\alpha &:= D^\dagger(\alpha) E(z,t) D(\alpha) = (a+\alpha) e^{-i\omega(t-z/c)} + (a^\dagger + a^*) e^{i\omega(t-z/c)} \\ &= (2\mathrm{Re}[\alpha] + X_1)\cos\omega(t - z/c) + (2\mathrm{Im}[\alpha] + X_2)\sin\omega(t - z/c) \end{aligned} \tag{1.34}$$

である．つまり，$|\alpha|$ は古典的な電場の振幅に相当し，実部が cos 成分，虚部が sin 成分になる．一方 quadrature は量子的な揺らぎ成分を表す．

1.2.5 Squeeze operator, squeezed state

(One mode) squeezed operator $S(\xi)$ を

$$S(\xi) := \exp\left[\frac{1}{2}(\xi a^\dagger 2 - \xi^* a^2)\right] \tag{1.35}$$

と定義する．これを vacuum state に作用させた状態

$$|0, \xi\rangle := S(\xi)\,|0\rangle \tag{1.36}$$

[*3] むしろ vacuum state が $\alpha = 0$ の coherent state であると言うべきか．

[*4] 証明は B.1

[*5] 証明は B.3.1

を squeezed vacuum という．Squeezed vacuum にさらに displacement operator を作用させたもの

$$|\alpha, \xi\rangle := D(\alpha)S(\xi)\,|0\rangle \tag{1.37}$$

を squeezed coherent state と呼ぶ．Displacement opeator のときと同じように，squeezed operator によって $a, a^\dagger$ は

$$\begin{aligned} a(\xi) &:= S^\dagger(\xi)aS(\xi) = a\cosh r + a^\dagger e^{-2i\phi}\sinh r, \\ a^\dagger(\xi) &:= S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi) = a^\dagger\cosh r + ae^{2i\phi}\sinh r \end{aligned} \tag{1.38}$$

と変化する．[*6]

これらの表すものを分かりやすくするために，θ 方向の quadrature $X_\theta = \cos\theta X_1 + \sin\theta X_2$ を定義する．$X_\theta = e^{-i\theta}a + e^{i\theta}a^\dagger$ と書けるから，

$$\begin{aligned} X_\theta(\xi) &= e^{-i\theta}(a\cosh r + a^\dagger e^{-2i\phi}\sinh r) + e^{i\theta}(a^\dagger\cosh r + ae^{2i\phi}\sinh r) \\ &= X_\theta\cosh r + X_{-\theta-2\phi}\sinh r \end{aligned} \tag{1.39}$$

である．したがって，$Y_1 := X_{-\phi}, Y_2 := X_{-\phi+\frac{\pi}{2}}$ とおくと，

$$\begin{aligned} Y_1(\xi) &= Y_1\cosh r + Y_1\sinh r = e^r Y_1, \\ Y_2(\xi) &= Y_2\cosh r - Y_2\sinh r = e^{2r}Y_2 \end{aligned} \tag{1.40}$$

のように変換される．[*7] これにより，squeezed operator $S(\xi)$ によって $-\phi$ 方向の量子揺らぎが e^r 倍され，$-\phi + \frac{\pi}{2}$ 方向の量子揺らぎが e^{-r} 倍されることが見て取れる．実際，

$$\begin{aligned} \langle 0,\xi|\,Y_1\,|0,\xi\rangle &= \langle 0,\xi|\,Y_2\,|0,\xi\rangle = 0, \\ \langle 0,\xi|\,(Y_1)^2\,|0,\xi\rangle &= \langle 0|\,Y_1(\xi)^2\,|0\rangle = e^{2r}, \\ \langle 0,\xi|\,(Y_2)^2\,|0,\xi\rangle &= \langle 0|\,Y_2(\xi)^2\,|0\rangle = e^{-2r} \end{aligned} \tag{1.42}$$

である．また，光子数について

$$\langle 0,\xi|\,a^\dagger a\,|0,\xi\rangle = \sinh^2 r \tag{1.43}$$

が成り立つ．vacuum state とは違い squeezed vacuum の平均光子数は 0 にはならない．

Squeezed coherent state の場合はさらに $D(\alpha)$ を作用させれば良いから

$$\begin{aligned} a(\alpha,\xi) &= S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)aD(\alpha)S(\xi) = a\cosh r + a^\dagger e^{-2i\phi}\sinh r + \alpha \\ a^\dagger(\alpha,\xi) &= S^\dagger(\xi)D^\dagger(\alpha)a^\dagger D(\alpha)S(\xi) = a^\dagger\cosh r + ae^{2i\phi}\sinh r + \alpha^* \end{aligned} \tag{1.44}$$

となる．$\alpha = 0$ のとき squeezed vacuum に帰着する．quadrature については，

$$\begin{aligned} Y_1(\alpha,\xi) &= e^r Y_1 + 2\mathrm{Re}[\alpha e^{i\phi}], \\ Y_2(\alpha,\xi) &= e^{-r}Y_2 + 2\mathrm{Im}[\alpha e^{i\phi}] \end{aligned} \tag{1.45}$$

と変形される．これから，

$$\langle Y_1\rangle = 2\mathrm{Re}[\alpha e^{i\phi}],\ \langle Y_2\rangle = 2\mathrm{Im}[\alpha e^{i\phi}] \tag{1.46}$$

である．また

$$\begin{aligned} \langle Y_1\rangle^2 &= \langle 0|\,(e^r Y_1 + 2\mathrm{Re}[\alpha e^{i\phi}])^2\,|0\rangle = e^{2r} + (2\mathrm{Re}[\alpha e^{i\phi}])^2, \\ \langle Y_2\rangle^2 &= \langle 0|\,(e^{-r}Y_2 + 2\mathrm{Im}[\alpha e^{i\phi}])^2\,|0\rangle = e^{-2r} + (2\mathrm{Im}[\alpha e^{i\phi}])^2 \end{aligned} \tag{1.47}$$

---

*6 証明は B.3.2 参照

*7 これらはまとめて

$$Y_1 + iY_2 = (X_1 + iX_2)e^{i\phi} \tag{1.41}$$

と書ける．

であるから

$$\Delta Y_1 = e^r,\ \Delta Y_2 = e^{-r} \tag{1.48}$$

となる．

光子の平均，分散は

$$\langle n \rangle = \sinh^2 r + |\alpha|^2 \tag{1.49}$$

$$\langle n^2 \rangle = \sinh^4 r + 2\sinh^2 r \cosh^2 r + |\alpha|^2 (3\sinh^2 r + \cosh^2 r) \tag{1.50}$$

$$+ 2\sinh r \cosh r (\alpha^2 e^{2i\phi} + a^{*2} e^{-2i\phi}) + |\alpha|^4 \tag{1.51}$$

$$\Delta n^2 = |\alpha \cosh r - \alpha^* \sinh r|^2 + 2\sinh^2 r \cosh^2 r \tag{1.52}$$

である．

1.2.6 ビームスプリッター

この節では複数のモードを扱う．各モード a_i について交換関係は

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij},\ [a_i, a_j] = 0 \tag{1.53}$$

とする．

ビームスプリッターによって

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t & r' \\ r & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \tag{1.54}$$

と変化される．ここで r, t, r', t' は

$$|r| = |r'|,\ |t| = |t'|,\ |r|^2 + |t|^2 = |r'|^2 + |t'|^2 = 1,\ r^* t' + r' t^* = r^* t + r' t'^* = 0 \tag{1.55}$$

を満たす．つまり B はユニタリ行列である．B の各要素の位相は，光学的に適当に調整すれば 0 に出来る．したがって一般に

$$B = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{1.56}$$

とおける．次に，このビームスプリッターの線形変換 B をユニタリなオペレータ U で

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = U^\dagger \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} U \tag{1.57}$$

となるようにすると，

$$U = \exp\left[\theta(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger)\right] \tag{1.58}$$

と書ける．[*8]

特に 50:50 ビームスプリッターの場合，$\theta = \frac{\pi}{4}$ であるから

$$B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ U = \exp\left[\frac{\pi}{4}(a_1^\dagger a_2 - a_1 a_2^\dagger)\right] \tag{1.59}$$

である．

1.3 Two-photon formalism

この節では 1.2 で導入した状態，演算子を複数モードに拡張し，two-photon formalism と呼ばれる形式を導入する．

[*8] Baker-Hausdorff lemma から確認できる．

1.3.1 Sideband picture

レーザー電場を量子化するにあたり，ω_0 を基本モード，その周りの $\omega_0 \pm \Omega$ の組を雑音として扱うのがよい．この $\omega_0 + \Omega(\omega_0 - \Omega)$ を upper(lower) sideband と呼ぶ．

Sideband picuture は雑音だけでなく重力波信号に対しても扱うことができる．ω_0 のレーザーが周波数 Ω で動くミラーで反射されると $\omega_0 \pm \Omega$ の sideband が励起される．干渉計の量子雑音は，信号 sideband と量子揺らぎの sideband の SN 比で決まる．Sideband 同士は相関を持っている．したがって全ての周波数を無相関として扱うよりも，上下の sideband が相関を持っているとして記述する方が適切である．この，相関を持つ sideband の組で展開する形式を two-photon formalism と呼ぶ．

Sideband の演算子を

$$a_+(\Omega) := a(\omega_0 + \Omega),\ a_-(\Omega) := a(\omega_0 - \Omega) \tag{1.60}$$

とおく．交換関係は

$$[a_+(\Omega), a_+^\dagger(\Omega')] = [a_-(\Omega), a_-^\dagger(\Omega')] = 2\pi\delta(\Omega - \Omega'),\ \text{Otherwise} = 0 \tag{1.61}$$

である．これらを用いて $E^{(+)}$ を周波数 ω_0 の周りに展開する．しばらくの間省いていた係数を復活させると

$$\begin{aligned}
E^{(+)}(\boldsymbol{r}, t) &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2c\epsilon_0\mathcal{A}}}a(\omega)e^{-i\omega(t-z/c)} && (1.62)\\
&= \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar(\omega_0+\Omega)}{2c\epsilon_0\mathcal{A}}}a(\omega_0+\Omega)e^{-i(\omega_0+\Omega)(t-z/c)} && (1.63)\\
&\qquad + \int_0^{\omega_0} \frac{d\Omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar(\omega_0+\Omega)}{2c\epsilon_0\mathcal{A}}}a(\omega_0-\Omega)e^{-i(\omega_0-\Omega)(t-z/c)} && (1.64)\\
&\simeq \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2c\epsilon_0\mathcal{A}}}e^{-i\omega_0(t-z/c)} && (1.65)\\
&\qquad \times \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\left[\sqrt{\frac{\omega_0+\Omega}{\omega_0}}a_+(\Omega)e^{-i\Omega(t-z/c)} + \sqrt{\frac{\omega_0-\Omega}{\omega_0}}a_-(\Omega)e^{i\Omega(t-z/c)}\right] && (1.66)
\end{aligned}$$

のように，upper sideband $\omega_0 + \Omega$ と lower sideband $\omega_0 - \Omega$ に分離して書くことができる．ただし $\Omega \ll \omega_0$ として lower sideband の積分の上限を $\omega_0 \to \infty$ に近似した．$E^{(-)}$ についても同様に変形することができ，これらをまとめると

$$\begin{aligned}
E(z,t) &= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2c\epsilon_0\mathcal{A}}}e^{-i\omega_0(t-z/c)}\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\left[\lambda_+ a_+(\Omega)e^{-i\Omega(t-z/c)} + \lambda_- a_-(\Omega)e^{i\Omega(t-z/c)}\right] + \text{H.c.}\\
&= \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{2c\epsilon_0\mathcal{A}}}\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\left[\lambda_+ a_+(\Omega)e^{-i\omega_0(t-z/c)} + \lambda_- a_-^\dagger(\Omega)e^{i\omega_0(t-z/c)}\right]e^{-i\Omega(t-z/c)} + \text{H.c.}
\end{aligned} \tag{1.67}$$

と書ける．ただし $\lambda_\pm = \sqrt{\frac{\omega_0 \pm \Omega}{\omega_0}}$.

1.3.2 two-photon quadrature

$E(z,t)$ の積分の中身について，

$$\begin{aligned}
&\lambda_+ a_+(\Omega)e^{-i\omega_0(t-z/c)} + \lambda_- a_-(\Omega)e^{i\omega_0(t-z/c)}\\
&= [\lambda_+ a_+(\Omega) + \lambda_- a_-(\Omega)]\cos\omega_0(t-z/c) - i[\lambda_+ a_+(\Omega) - \lambda_- a_-^\dagger(\Omega)]\sin\omega_0(t-z/c)
\end{aligned} \tag{1.68}$$

と変形できる．ここで

$$a_1(\Omega) := \frac{\lambda_+ a_+(\Omega) + \lambda_- a_-^\dagger(\Omega)}{\sqrt{2}},\ a_2(\Omega) := \frac{\lambda_+ a_+(\Omega) - \lambda_- a_-^\dagger(\Omega)}{i\sqrt{2}} \tag{1.69}$$

と $a_1(\Omega), a_2(\Omega)$ を定義し，two-photon quadrature と呼ぶ．特に a_1 を amplitude quadrature, a_2 を phase quadrature と呼ぶ．

これらを用いて，$E(z,t)$ は

$$E(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{c\epsilon_0\mathcal{A}}}\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\left[a_1(\Omega)e^{-i\Omega(t-z/c)}\cos\omega_0(t-z/c) + a_2(\Omega)e^{-i\Omega(t-z/c)}\sin\omega_0(t-z/c)\right] + \text{H.c.} \tag{1.70}$$

と書くことができる．さらに

$$a_i(z,t) := \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\left[a_i(\Omega)e^{-i\Omega(t-z/c)} + a_i^\dagger(\Omega)e^{i\Omega(t-z/c)}\right] \tag{1.71}$$

とおけば，

$$E(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{c\epsilon_0\mathcal{A}}}\left[a_1(z,t)\cos\omega_0(t-z/c) + a_2\sin\omega_0(z-t/c)\right] \tag{1.72}$$

となる．

1.3.3 Quadrature の交換関係，期待値

Quadrature の交換関係は

$$\begin{aligned}
[a_i(\Omega), a_i^\dagger(\Omega')] &= \frac{\Omega}{\omega_0}2\pi\delta(\Omega-\Omega'),\\
[a_i(\Omega), a_j(\Omega')] &= 0,\\
[a_1(\Omega), a_2^\dagger(\Omega')] &= [a_1^\dagger, a_2(\Omega')] = 2\pi i\delta(\Omega-\Omega')
\end{aligned} \tag{1.73}$$

である．$(i,j=1,2,\ i\neq j)$ また vacuum state における期待値は

$$\begin{aligned}
\langle a_i(\Omega)\rangle &= 0,\\
\langle a_i(\Omega)a_i(\Omega')\rangle &= \langle a_i(\Omega)a_j(\Omega')\rangle = 0
\end{aligned} \tag{1.74}$$

$$\begin{aligned}
\langle a_i(\Omega)a_i^\dagger(\Omega')\rangle &= \frac{\omega_0+\Omega}{2\omega_0}2\pi\delta(\Omega-\Omega'),\\
\langle a_i^\dagger(\Omega)a_i(\Omega')\rangle &= \frac{\omega_0-\Omega}{2\omega_0}2\pi\delta(\Omega-\Omega'),\\
\langle a_1(\Omega)a_2^\dagger(\Omega')\rangle &= \frac{\omega_0+\Omega}{2\omega_0}2i\pi\delta(\Omega-\Omega'),\\
\langle a_1^\dagger(\Omega)a_2(\Omega')\rangle &= \frac{\omega_0-\Omega}{2\omega_0}2i\pi\delta(\Omega-\Omega'),\\
\langle a_2(\Omega)a_1^\dagger(\Omega')\rangle &= -\frac{\omega_0+\Omega}{2\omega_0}2i\pi\delta(\Omega-\Omega'),\\
\langle a_2^\dagger(\Omega)a_1(\Omega')\rangle &= -\frac{\omega_0-\Omega}{2\omega_0}2i\pi\delta(\Omega-\Omega')
\end{aligned} \tag{1.75}$$

一般には $\lambda_\pm \neq 1$ だが，$\frac{\Omega}{\omega_0}\to 0$ の極限で考えれば $\lambda_\pm \simeq 1$ とでき，

$$a_1(\Omega) \to \frac{a_+(\Omega)+a_2^\dagger(\Omega)}{\sqrt{2}},\ a_2(\Omega) \to \frac{a_+(\Omega)-a_2^\dagger(\Omega)}{i\sqrt{2}} \tag{1.76}$$

と簡単になる．交換関係は

$$[a_j(\Omega), a_j^\dagger(\Omega')] \to 0 \tag{1.77}$$

であり，期待値は

$$\begin{aligned}
\langle a_i(\Omega)a_i^\dagger(\Omega')\rangle &= \langle a_i(\Omega)a_i^\dagger(\Omega')\rangle \to 2\pi\delta(\Omega-\Omega'),\\
\langle a_1(\Omega)a_2^\dagger(\Omega')\rangle &= \langle a_1^\dagger(\Omega)a_2(\Omega')\rangle \to 2i\pi\delta(\Omega-\Omega'),\\
\langle a_2(\Omega)a_1^\dagger(\Omega')\rangle &= \langle a_2^\dagger(\Omega)a_1(\Omega')\rangle \to -2i\pi\delta(\Omega-\Omega')
\end{aligned} \tag{1.78}$$

となる．

1.3.4 レーザー電場の量子化

Displacemnet operator を連続モードに拡張する．$D[\alpha]$ を

$$D[\alpha] = \exp\left[\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\{\alpha(\omega)a^\dagger(\omega) - \alpha(\omega)a(\omega)\}\right] \tag{1.79}$$

と定義し，これを vacuum state$|0\rangle$ に作用させた状態 $D[\alpha]\,|0\rangle$ を coherent state$|\alpha\rangle$ とする．単一モードのときと同様，$D[\alpha]$ によって $a(\omega), a^\dagger(\omega)$ は

$$D^\dagger[\alpha]a(\omega)D[\alpha] = a(\omega) + \alpha(\omega),\ D^\dagger[\alpha]a^\dagger(\omega)D[\alpha] = a^\dagger(\omega) + \alpha^*(\omega) \tag{1.80}$$

と変形される．これを用いれば，演算子 $O[a, a^\dagger]$ の期待値は $O[a+\alpha, a^\dagger+\alpha^*]$ の真空期待値と同じになることがわかる．

$D[\alpha]$ を使って，基本モード ω_0 の電磁場をモデル化する．$\alpha(\omega) = 2\pi\alpha_0\delta(\omega-\omega_0)$ とおくと，(α_0 は実数)

$$D^\dagger[\alpha]E(z,t)D[\alpha] = \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2c\epsilon_0\mathcal{A}}}\left\{[a(\omega)+\alpha(\omega)]e^{-i\omega(t-z/c)} + [a^\dagger(\omega)+\alpha^*(\omega)]e^{i\omega(t-z/c)}\right\} \tag{1.81}$$

$$= \sqrt{\frac{2\hbar\omega_0}{c\epsilon_0\mathcal{A}}}\alpha_0\cos\omega(t-z/c) + \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{c\epsilon_0\mathcal{A}}}[a(\omega)e^{-i\omega(t-z/c)} + a^\dagger(\omega)e^{i\omega(t-z/c)}] \tag{1.82}$$

となる．さらに第 2 項を two-photon quadrature で表せば

$$D^\dagger[\alpha]E(z,t)D[\alpha] = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{c\epsilon_0\mathcal{A}}}\left[(\overline{\alpha} + a_1(z,t))\cos\omega_0(t-z/c) + a_2(z,t)\sin\omega_0(t-z/c)\right] \tag{1.83}$$

となり，(ただし $\overline{\alpha} := \sqrt{2}\alpha_0$) 周波数 ω_0 の古典的な電場 α_0 と量子的な揺らぎ a_1, a_2 として考えることができる．

古典的な電場のパワーを P_0 とすると，

$$P_0 = c\epsilon_0\int dxdy\overline{|E|^2} \tag{1.84}$$

で与えられる．(1.82) の第 1 項を (1.84) に代入すると

$$P_0 = c\epsilon_0\frac{\hbar\omega_0}{c\epsilon_0\mathcal{A}}\overline{\alpha}^2\overline{\cos^2\omega(t-z/c)}\int dxdy|u(\boldsymbol{r})|^2 = \frac{\hbar\omega_0}{2}\overline{\alpha}^2 \tag{1.85}$$

であるから，

$$\overline{\alpha} = \sqrt{\frac{2P_0}{\hbar\omega_0}} \tag{1.86}$$

と対応している．したがって，パワー P_0 のレーザー電場は

$$E_\alpha(z,t) = \sqrt{\frac{\hbar\omega_0}{c\epsilon_0\mathcal{A}}}\left[\left(\sqrt{\frac{2P_0}{\hbar\omega_0}} + a_1(z,t)\right)\cos\omega_0(t-z/c) + a_2(z,t)\sin\omega_0(t-z/c)\right] \tag{1.87}$$

と表現できる．

1.3.5 Two-mode squeeze operator

Two-mode squeeze operator$S[\xi]$ を

$$S[\xi] := \exp\left[\int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi}\left(\xi(\Omega)a_+^\dagger(\Omega)a_-^\dagger(\Omega) - \xi^*(\omega)a_+(\Omega)a_-(\Omega)\right)\right] \tag{1.88}$$

で定義する．また $\xi(\Omega) = r(\Omega)e^{-2i\phi(\Omega)}$ とおく．これは one-mode squeeze operator の拡張であるが，one-mode のときとは異なり a_+ と a_-，すなわち $\omega_0 \pm \Omega$ のモードに相関がある．$S[\xi]$ によって，a_+, a_- は one-mode の場合と同様に

$$\begin{aligned} a_+(\Omega;\xi) &:= S^\dagger[\xi]a_+(\Omega)S[\xi] = a_+(\Omega)\cosh r(\Omega) + a_-^\dagger(\Omega)e^{-2i\phi(\Omega)}\sinh r(\Omega), \\ a_-(\Omega;\xi) &:= S^\dagger[\xi]a_-(\Omega)S[\xi] = a_-(\Omega)\cosh r(\Omega) + a_+^\dagger(\Omega)e^{-2i\phi(\Omega)}\sinh r(\Omega) \end{aligned} \tag{1.89}$$

と変形される．これを quadrature で表すと

$$\begin{aligned} a_1(\Omega;\xi) &:= S^\dagger[\xi]a_1(\Omega)S[\xi] \\ &= a_1(\Omega)\left[\cosh r - i\sqrt{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}\sin 2\phi\sinh r + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}\cos 2\phi\sinh r\right] \\ &\quad - a_2(\Omega)\left[i\sqrt{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}\cos 2\phi\sinh r + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}\sin 2\phi\sinh r\right] \\ a_2(\Omega;\xi) &:= S^\dagger[\xi]a_2(\Omega)S[\xi] \\ &= a_2(\Omega)\left[\cosh r + i\sqrt{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}\sin 2\phi\sinh r - \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}\cos 2\phi\sinh r\right] \\ &\quad - a_1(\Omega)\left[i\sqrt{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}\cos 2\phi\sinh r + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}\sin 2\phi\sinh r\right] \end{aligned} \tag{1.90}$$

と書ける．$\frac{\Omega}{\omega_0^2} \to 0$ の極限では

$$\begin{aligned} a_1(\Omega;\xi) &= a_1(\Omega)(\cosh r + \cos 2\phi\sinh r) - a_2(\Omega)\sin 2\phi\sinh r, \\ a_2(\Omega;\xi) &= a_2(\Omega)(\cosh r - \cos 2\phi\sinh r) - a_1(\Omega)\sin 2\phi\sinh r \end{aligned} \tag{1.91}$$

となる．

ここで，one-mode のときと同じく

$$a_\theta(\Omega) := a_1(\Omega)\cos\theta + a_2(\Omega)\theta \tag{1.92}$$

を定義すると，$S[\xi]$ によって

$$a_\theta(\Omega;\xi) = a_\theta(\Omega)\cosh r + \sqrt{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}a_{-\theta-2\phi}(\Omega)\sinh r + i\sqrt{\frac{\Omega^2}{\omega_0^2-\Omega^2}}a_{\frac{\pi}{2}-\theta-2\phi}(\Omega)\sinh r \tag{1.93}$$

と変化する．$\Omega \gg \omega_0$ の極限を取れば

$$a_\theta(\Omega;\xi) = a_\theta(\Omega)\cosh r + a_{-\theta-2\phi}(\Omega)\sinh r \tag{1.94}$$

と簡略化される．これから,，$b_1 := a_{-\phi}$, $b_2 = a_{-\phi+\frac{\pi}{2}}$ とおくと

$$b_1(\Omega,\xi) = e^r b_1(\Omega),\ b_2(\Omega,\xi) = e^{-r}b_2(\Omega) \tag{1.95}$$

のように書け，$S[\xi]$ は $-\phi$ 方向の揺らぎを e^r 倍，$-\phi+\frac{\pi}{2}$ 方向の揺らぎを e^{-r} 倍にすることがわかる．

Appendix

A　電磁場の量子化の詳細

電磁場の量子化の詳細.

A.1　準備

電磁場の量子化にあたり必要なものをまとめる．まず Maxwell equation

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= \frac{\rho(\boldsymbol{r},t)}{\epsilon_0} \\
\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}(\boldsymbol{r},t) \\
\nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}t) &= 0 \\
\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \mu_0 \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
\tag{A.1}
$$

とスカラーポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r},t)$，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\nabla\phi(\boldsymbol{r},t) - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}(\boldsymbol{r},t) \\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
\tag{A.2}
$$

今自由空間 $(\rho = 0, \boldsymbol{j} = 0)$ であるから放射ゲージをとれて，ポテンシャルは

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{r},t) &= 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= 0 \\
\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= 0
\end{aligned}
\tag{A.3}
$$

電場と磁場は

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}(\boldsymbol{r},t) \\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
\tag{A.4}
$$

となる．

次に，電磁場のハミルトニアン

$$
\mathcal{H}_{\mathrm{em}} = \int_V d^3x \left(\frac{\epsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \tag{A.5}
$$

ただし V は考えている領域の体積.

A.2　3D 自由空間

A.2.1　量子化

まず 3 次元自由空間の電磁場の量子化をする．周期 L の周期境界条件の元での平面波解は[*9]

$$
\boldsymbol{A} = \sum_{\sigma=p,s}\sum_{\boldsymbol{k}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\sigma,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)} + \mathrm{c.c.} \tag{A.6}
$$

[*9] 最終的には $L \to \infty$ の極限を取る.

である．ただし $\sigma = p, s$ は偏向を表すインデックス，$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}}$ は偏向ベクトルで，$\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{k}} = \delta_{\sigma,\rho}$ を満たす．$\boldsymbol{k} = (k_x, ky, k_z)$ は波数ベクトル，$\omega_{\boldsymbol{k}} = c|\boldsymbol{k}| = ck$ で，周期境界条件から

$$k_i = \frac{2\pi n_i}{L} \ (i = x, y, z,\ n_i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{A.7}$$

と離散化されている．また (A.3) から $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ である．$\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{k}}{k}$ とおけば $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{p,\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{s,\boldsymbol{k}}, \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}}$ は正規直交基底をなす．

(A.6) を (A.2) に代入すれば，$\boldsymbol{E}$ と $\boldsymbol{B}$ についても

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= i \sum_{\sigma=p,s} \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}} A_{\sigma,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)} + \text{c.c.} \\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= i \sum_{\sigma=p,s} \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{\boldsymbol{n}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} k A_{\sigma,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)} + \text{c.c.}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

とかける．

次にこれらをハミルトニアン $\mathcal{H}_{\text{em}}$ に代入する．

$$\boldsymbol{E}^2 = \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} (i\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}} A_{\sigma,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)} + \text{c.c.}) \cdot (i\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}} \omega_{\boldsymbol{l}} A_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{i(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{l}} t)} + \text{c.c.}) \tag{A.9}$$

$$= \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}}\, \omega_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{l}} \left[-A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r} - i(\omega_{\boldsymbol{k}} + \omega_{\boldsymbol{l}})t} \right. \tag{A.10}$$

$$\left. + A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r} - i(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{l}})t} + \text{c.c.} \right] \tag{A.11}$$

$V = [0, L] \times [0, L] \times [0, L]$ として積分すると，周期境界条件より

$$\int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r}} = L^3 \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} \tag{A.12}$$

であるから

$$\int_V d^3x \boldsymbol{E}^2 = L^3 \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}}\, \omega_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{l}} \left[-A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} + \omega_{\boldsymbol{l}})t} \delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{l}} \right. \tag{A.13}$$

$$\left. + A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{l}})t} \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} + \text{c.c.} \right] \tag{A.14}$$

$$= L^3 \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}}^2 \left[-\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,-\boldsymbol{k}} A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,-\boldsymbol{k}} e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}} t} + \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{k}} A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\rho,\boldsymbol{k}} + \text{c.c.} \right] \tag{A.15}$$

$$= -L^3 \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}}^2 \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,-\boldsymbol{k}} A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,-\boldsymbol{k}} e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}} t} + L^3 \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}}^2 A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\rho,\boldsymbol{k}} + \text{c.c.} \tag{A.16}$$

となる．$\boldsymbol{B}$ についても同様に，

$$\boldsymbol{B}^2 = \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} (i\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} k A_{\sigma,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)} + \text{c.c.}) \cdot (i\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}} l A_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{i(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{l}} t)} + \text{c.c.}) \tag{A.17}$$

$$= \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} (\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}}) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}})\, kl \tag{A.18}$$

$$\times \left[-A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r} - i(\omega_{\boldsymbol{k}} + \omega_{\boldsymbol{l}})t} + A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})\cdot\boldsymbol{r} - i(\omega_{\boldsymbol{k}} - \omega_{\boldsymbol{l}})t} + \text{c.c.} \right] \tag{A.19}$$

となる．ここで

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot (\boldsymbol{C} \times \boldsymbol{D}) = (\epsilon_{ijk} A_j B_k) \cdot (\epsilon_{ilm} C_l D_m) \tag{A.20}$$

$$= (\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}) A_j B_k C_l D_m \tag{A.21}$$

$$= A_j B_k C_j D_k - A_j B_k C_k D_j \tag{A.22}$$

$$= (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{D}) - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{D})(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) \tag{A.23}$$

より

$$(\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}}) \cdot (\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{l}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}}) = (\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{l}})(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}}) - (\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}})(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{l}}) \tag{A.24}$$

とかけるから，積分すると

$$\int_V d^3x \boldsymbol{B}^2 = L^3 \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} \left[(\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{l}})(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}}) - (\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{l}})(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{l}}) \right] kl \tag{A.25}$$

$$\times \left[-A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_{\boldsymbol{l}})t} \delta_{\boldsymbol{k},-\boldsymbol{l}} + A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\rho,\boldsymbol{l}} e^{-i(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_{\boldsymbol{l}})t} \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} + \text{c.c.} \right] \tag{A.26}$$

$$= L^3 \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k}} k^2 \left\{ - \left[(\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{-\boldsymbol{k}})(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,-\boldsymbol{k}}) - (\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,-\boldsymbol{k}})(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{-\boldsymbol{k}}) \right] A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,-\boldsymbol{k}} e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}} t} \right. \tag{A.27}$$

$$\left. + \left[(\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}})(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{k}}) - (\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,\boldsymbol{k}})(\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}}) \right] + A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\rho,\boldsymbol{k}} \right\} + \text{c.c.} \tag{A.28}$$

$$= L^3 \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k}} k^2 (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,-\boldsymbol{k}}) A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,-\boldsymbol{k}} e^{-2i\omega_{\boldsymbol{k}} t} + L^3 \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} k^2 A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\sigma,\boldsymbol{k}} + \text{c.c.} \tag{A.29}$$

以上より

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = L^3 \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\frac{\epsilon_0}{2} \omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \frac{k^2}{2\mu_0} \right) A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\sigma,\boldsymbol{k}} \tag{A.30}$$

$$+ L^3 \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(-\frac{\epsilon_0}{2} \omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \frac{k^2}{2\mu_0} \right) (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,-\boldsymbol{k}}) A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,-\boldsymbol{k}} + \text{c.c.} \tag{A.31}$$

$$= \frac{\epsilon_0 L^3}{2} \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\omega_{\boldsymbol{k}}^2 + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \right) A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\sigma,\boldsymbol{k}} \tag{A.32}$$

$$- \frac{\epsilon_0 L^3}{2} \sum_{\sigma,\rho} \sum_{\boldsymbol{k}} \left(\omega_{\boldsymbol{k}}^2 - \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{c^2} \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \right) (\hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \cdot \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\rho,-\boldsymbol{k}}) A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A_{\rho,-\boldsymbol{k}} + \text{c.c.} \tag{A.33}$$

$$= \epsilon_0 V \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \omega_{\boldsymbol{k}}^2 A_{\sigma,\boldsymbol{k}} A^*_{\sigma,\boldsymbol{k}} + \text{c.c.} \tag{A.34}$$

となる．ただし $V = L^3$ は領域の体積.

このハミルトニアンと，調和振動子のハミルトニアン

$$\mathcal{H}_{\text{ho}} = \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\hbar \omega_{\boldsymbol{k}}}{2} (a^\dagger_{\boldsymbol{k}} a_{\boldsymbol{k}} + a_{\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\boldsymbol{k}}) \tag{A.35}$$

を比較して

$$A_{\sigma,\boldsymbol{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\boldsymbol{k}}}} a_{\sigma,\boldsymbol{k}} \tag{A.36}$$

とおくと，

$$\mathcal{H}_{\text{em}} = \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{\hbar \omega_{\boldsymbol{k}}}{2} (a^\dagger_{\sigma,\boldsymbol{k}} a_{\sigma,\boldsymbol{k}} + a_{\sigma,\boldsymbol{k}} a^\dagger_{\sigma,\boldsymbol{k}}) \tag{A.37}$$

と書ける．これから，$a_{\sigma,\boldsymbol{k}}, a^\dagger_{\sigma,\boldsymbol{k}}$ を偏向 σ，波数 $k\boldsymbol{k}$ の photon の消滅演算子，生成演算子と捉えることができる．これらを用いてベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V \omega_{\boldsymbol{k}}}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} a_{\sigma,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)} + \text{H.c.} \tag{A.38}$$

と量子化される．また $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ についても

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) &= i \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar \omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0 V}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} a_{\sigma,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)} + \text{H.c.} \\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) &= i \sum_{\sigma} \sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\mu_0 \hbar \omega_{\boldsymbol{k}}}{2V}} \left(\hat{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{k}} \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,\boldsymbol{k}} \right) a_{\sigma,\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_{\boldsymbol{k}} t)} + \text{H.c.} \end{aligned} \tag{A.39}$$

となる．

以下，偏向は 1 方向のみを考えることにして無視する．また，電場の係数 i は $a_{\boldsymbol{k}}$ の位相を回すことでキャンセルする．

A.2.2 連続極限

今までは一辺 L の立方体を考えていたために波数 $\boldsymbol{k}$ は離散的だったが，$L \to \infty$ にすることで $\boldsymbol{k}$ を連続にする．離散的な波数 $\boldsymbol{k}$ の間隔は $\Delta k = \frac{2\pi}{L}$ であるから，$\boldsymbol{k}$ についての和は

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \to \frac{1}{(\Delta k)^3} \int d^3k = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k \tag{A.40}$$

と変換される．一方，$\delta_{\boldsymbol{kl}} \to (\Delta k)^3 \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})$ であるから[*10] 交換関係は

$$[a_{\boldsymbol{k}}, a_{\boldsymbol{l}}^\dagger] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{l}} \to [a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{l})] = \frac{(2\pi)^3}{V} \tag{A.41}$$

と変換される．これをさらに $a(\boldsymbol{k}) \to \frac{1}{\sqrt{V}} a(\boldsymbol{k})$ と変換して

$$[a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{l})] = (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}) \tag{A.42}$$

とおくと，

$$\sum_{\boldsymbol{k}} \sqrt{\frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}{2\epsilon_0 V}} a_{\boldsymbol{k}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega_{\boldsymbol{k}}t)} \to \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} V \sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{2\epsilon_0 V}} \frac{1}{\sqrt{V}} a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k})t)} \tag{A.43}$$

$$= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{2\epsilon_0}} a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k})t)} \tag{A.44}$$

のように L, V があらわにでてこない形に書くことができる．以降，この極限を考える．

まとめると，交換関係は

$$[a(\boldsymbol{k}), a(\boldsymbol{l})] = [a^\dagger(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{l})] = 0,\ [a(\boldsymbol{k}), a^\dagger(\boldsymbol{l})] = (2\pi)^3 \delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l}) \tag{A.45}$$

であり，電場は

$$\hat{E} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\frac{\hbar\omega(\boldsymbol{k})}{2\epsilon_0}} a(\boldsymbol{k}) e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega(\boldsymbol{k})t)} + \text{H.c.} \tag{A.46}$$

となる．

A.3 1D 自由空間

次に，波数ベクトルを 1 次元に限定し，$z > 01$ 方向に進行する電磁波の量子化を考える．まず長さ L，断面積 $\mathcal{A}$ の領域において考える．[*11] z 軸を長さ方向，xy 平面を断面積に取り，長さ方向に周期境界条件を取れば，$\boldsymbol{A}$ は近軸近似で

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = u(\boldsymbol{r}) \sum_\sigma \sum_k \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,k} A_{\sigma,k} e^{i(kz-\omega_k t)} + \text{c.c.} \tag{A.47}$$

と書ける．ここで $u(\boldsymbol{r})$ は電磁波の空間モードで

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2ik\frac{\partial}{\partial z} \right) u(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{A.48}$$

[*10] $\delta_{\boldsymbol{kl}}$ が無次元なのに対して $\delta(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{l})$ は (波数)$^{-3}$ の次元を持つから

[*11] 後で $L \to \infty$ に取る．$\mathcal{A}$ はレーザーの断面積に相当.

を満たす．[*12]また $\int dx \int dy |U(\boldsymbol{r})|^2 = \mathcal{A}$ と規格化されている．波数 k は周期境界条件から

$$k = \frac{2n\pi}{L} (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{A.49}$$

と離散化されている．

これらを用いて 3 次元の時と同様にすれば，

$$A_{\sigma,k} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L\mathcal{A}}} a_{\sigma,k} \tag{A.50}$$

と量子化することで

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &= u(\boldsymbol{r}) \sum_\sigma \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L\mathcal{A}}\omega_k} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,k} a_{\sigma,k} e^{-i(kz-\omega_k t)} + \text{H.c.} \\
\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) &= iu(\boldsymbol{r}) \sum_\sigma \sum_k \sqrt{\frac{\hbar\omega_k}{2\epsilon_0 L\mathcal{A}}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,k} a_{\sigma,k} e^{-i(kz-\omega_k t)} + \text{H.c.} \\
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) &= iu(\boldsymbol{r}) \sum_\sigma \sum_k \sqrt{\frac{\mu_0\hbar\omega_k}{2L\mathcal{A}}} \hat{\boldsymbol{n}}_k \times \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_{\sigma,k} a_{\sigma,k} e^{-i(kz-\omega_k t)} + \text{H.c.}
\end{aligned} \tag{A.51}$$

となり，ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \sum_\sigma \sum_k \hbar\omega_k a^\dagger_{\sigma,k} a_{\sigma,k} \tag{A.52}$$

と書ける．

以下では偏向は 1 方向のみを考える．また a_k の位相を回して E の係数の i は除く．

A.3.1 連続極限，1 方向

3 次元の時と同様に連続極限を取ると，

$$\hat{E}(\boldsymbol{r},t) = u(\boldsymbol{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega(k)}{2\epsilon_0\mathcal{A}}} a(k) e^{i(kz-\omega(k)t)} + \text{H.c.} \tag{A.53}$$

となり，交換関係は

$$[a(k), a^\dagger(k')] = 2\pi\delta(k-k') \tag{A.54}$$

となる．

ここではさらに $z > 0$ 方向に進行する波を考える．これは $k > 0$ の領域だけを考えることに相当するから，k と $\omega(k)$ は 1 対 1 に対応する．したがって

$$a(k) \to \sqrt{c} a(\omega) \tag{A.55}$$

とおくと，交換関係は

$$\begin{aligned}
&[a(k), a^\dagger(k')] = 2\pi\delta(k-k') \\
&\to [a(\omega), a^\dagger(\omega')] = \frac{2\pi}{c}\delta\left(\frac{\omega}{c} - \frac{\omega}{c}\right) = 2\pi\delta(\omega-\omega')
\end{aligned} \tag{A.56}$$

となり，電場は

$$\hat{E}(\boldsymbol{r},t) = u(\boldsymbol{r}) \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 c\mathcal{A}}} a(\omega) e^{-i\omega(t-z/c)} + \text{H.c.} \tag{A.57}$$

となる．

[*12] つまり Gaussian Beam のこと．

B　オペレータの細かい計算

B.1　Baker-Hausdorff's lemma

X, Y をオペレータとし，e^X を

$$e^X := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!} = 1 + X + \frac{1}{2!}X^2 + \cdots \tag{B.1}$$

と無限級数で定義する．このとき次の関係が成り立つ．

$$e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \cdots \tag{B.2}$$

ただし $[X, Y] := XY - YX$．これを示す．

まず，関数 $f(t)$ を

$$f(t) = e^{tX} Y e^{-tX} \tag{B.3}$$

と定義する．これの微分をとると

$$f'(t) = X e^{tX} Y e^{-tX} - e^{tX} Y e^{-tX} X = e^{tX} [X, Y] e^{-tX} \tag{B.4}$$

となる．高次の微分についても，同様に

$$f^{(n)}(t) = e^{tX} \underbrace{[X, [X, \cdots [X}_{n}, Y]]] e^{-tX} \tag{B.5}$$

と書ける．

次に，$f(t)$ を $t = 0$ の周りでテイラー展開して

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n \tag{B.6}$$

と書けるが，これに $f^{(n)}(0)$ を代入すれば，

$$f(t) = Y + t[X, Y] + \frac{t^2}{2!}[X, [X, Y]] + \cdots \tag{B.7}$$

である．最後に $t = 1$ を代入して

$$f(1) = e^X Y e^{-X} = Y + [X, Y] + \frac{1}{2!}[X, [X, Y]] + \cdots \tag{B.8}$$

を得る．より高次の項は，$F(t)$, $g(t)$ の展開する次数を増やせば同様に求められる．

B.2　Baker-Campbell-Hausdorff formula

X, Y をオペレータとすると

$$e^X e^Y = e^{X + Y + \frac{1}{2}[X,Y] + \frac{1}{12}[X - Y, [X,Y]] + \cdots} \tag{B.9}$$

が成り立つ．特に $[A, B] = c (c \text{ は } c - \text{number})$ のときは高次の項は落ちて

$$e^X e^Y = e^{X + Y + \frac{1}{2}[X,Y]} \tag{B.10}$$

となる．

まず

$$f(t) := e^{tX}e^{tY} = e^{g}(t),\ g(t) := \log(e^{tX}e^{tY}) = \log f(t) \tag{B.11}$$

とおく．$f(t)$ を微分すると

$$f'(t) = e^{tX}(X+Y)e^{tY} \tag{B.12}$$

同様に

$$\begin{aligned} f''(t) &= e^{tX}[X(X+Y)+(X+Y)Y]e^{tY} = e^{tX}(X^2+2XY+Y^2)e^{tY} \\ &= e^{tX}\left((X+Y)^2+[X,Y]\right)e^{tY} \end{aligned} \tag{B.13}$$

$$\begin{aligned} f'''(t) &= e^{tX}\{X[(X+Y)^2+[X,Y]]+[(X+Y)^2+[X,Y]]\}e^{tY} \\ &= e^{tX}\left((X+Y)^3+X[X,Y]+[X^2,Y]+[X,Y]Y+[X,Y^2]\right)e^{tY} \end{aligned} \tag{B.14}$$

よってテイラー展開は

$$\begin{aligned} f(t) &= 1+t(X+Y)+\frac{t^2}{2}\left((X+Y)^2+[X,Y]\right) \\ &\quad +\frac{t^3}{3!}\left((X+Y)^3+X[X,Y]+[X^2,Y]+[X,Y]Y+[X,Y^2]\right)+O(t^4) \\ &=: 1+F(t) \end{aligned} \tag{B.15}$$

となる．

次に $g(t)$ を展開する．$\log(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+O(x^4)$ から

$$\begin{aligned} g(t) &= \log f(t) = \log[1+F(t)] \\ &= F(t)-\frac{1}{2}F(t)^2+\frac{1}{3}F(t)^3+O(F(t)^4) \end{aligned} \tag{B.16}$$

である．t の次数で比較すると

$$O(t) = X+Y \tag{B.17}$$

$$\begin{aligned} O(t^2) &= \frac{1}{2}\left((X+Y)^2+[X,Y]\right)-\frac{1}{2}(X+Y)^2 \\ &= \frac{1}{2}[X,Y] \end{aligned} \tag{B.18}$$

$$\begin{aligned} O(t^3) &= \frac{1}{3!}\left((X+Y)^3+X[X,Y]+[X^2,Y]+[X,Y]Y+[X,Y^2]\right) \\ &\quad -\frac{1}{2}\left[(X+Y)\left((X+Y)^2+[X,Y]\right)-\left((X+Y)^2+[X,Y]\right)(X+Y)\right]+\frac{1}{3}(X+Y)^3 \\ &= \frac{1}{12}[X-Y,[X,Y]] \end{aligned} \tag{B.19}$$

したがって，

$$g(t) = t(X+Y)+\frac{t^2}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X-Y,[X,Y]]+O(t^4) \tag{B.20}$$

これに $t=1$ を代入して

$$e^Xe^Y = e^{X+Y+\frac{1}{2}[X,Y]+\frac{1}{12}[X-Y,[X,Y]]+\cdots} \tag{B.21}$$

を得る．

B.3 生成消滅演算子の変換

生成消滅演算子 $a(\Omega), a^\dagger(\omega)$ が $D[\alpha], S[\xi]$ でどう変換されるのかの計算．

B.3.1 Displacement operator

Displacement operator $D[\alpha]$ を改めて書くと

$$D[\alpha] = \exp\left[\int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\{\alpha(\omega)a^\dagger(\omega) - \alpha^*(\omega)a(\omega)\}\right] \tag{B.22}$$

である．まず

$$D[\alpha] = e^{d[\alpha]} \tag{B.23}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}[a(\omega), d[\alpha]] &= \left[a(\omega), \int_0^\infty \frac{d\omega'}{2\pi}\{\alpha(\omega')a^\dagger(\omega') - \alpha^*(\omega')a(\omega')\}\right] \\ &= \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi}\alpha(\omega)2\pi\delta(\omega-\omega') = \alpha(\omega)\end{aligned} \tag{B.24}$$

である．よって Baker-Hausdorff lemma より

$$\begin{aligned}D^\dagger[\alpha]a(\omega)D[\alpha] &= a(\omega) - [d[\alpha]a(\omega)] + \frac{1}{2!}[d[\alpha],[d[\alpha],a(\omega)]] + \cdots \\ &= a(\omega) + \alpha(\omega)\end{aligned} \tag{B.25}$$

となる．$a^\dagger(\omega)$ についても，(B.25) のエルミート共役を取れば

$$D^\dagger[\alpha]a^\dagger(\omega)D[\alpha] = a^\dagger(\omega) + \alpha^*(\omega) \tag{B.26}$$

と変換される．

単一モードの場合も，同様に $D^\dagger(\alpha)aD(\alpha) = \alpha$ が示せる．

B.3.2 Squeezed operator

One-mode squeezing

まず one-mode squeezing について見る．one-mode squeeze operator $S(\xi)$ は

$$S(\xi) = \exp\left[\frac{1}{2}\left(\xi a^{\dagger 2} - \xi^* a^2\right)\right] \tag{B.27}$$

である．これを

$$S(\xi) = e^{s(\xi)} \tag{B.28}$$

とおくと，$s(\xi)$ と $a, a^\dagger$ の交換関係は

$$[a, s(\xi)] = \frac{\xi}{2}[a, a^{\dagger 2}] = \xi a^\dagger,\ [a^\dagger, s(\xi)] = -\frac{\xi^*}{2}[a^\dagger, a^2] = \xi^* a^\dagger \tag{B.29}$$

である．よって Baker-Hausdorff lemma より

$$\begin{aligned}S^\dagger(\xi)aS(\xi) &= a + [s(-\xi), s] + \frac{1}{2!}[s(-\xi),[s(-\xi),a]] + \frac{1}{3!}[s(-\xi),[s(-\xi),[s(-\xi),a]]] + \cdots \\ &= a + \xi a^\dagger + \frac{|\xi|^2}{2!}a + \frac{\xi|\xi|^2}{3!}a^\dagger + \cdots = \sum_{n=0}^\infty \frac{|\xi|^{2n}}{(2n)!}a + \sum_{n=0}^\infty \frac{|\xi|^{2n}}{(2n+1)!}\xi a^\dagger \\ &= \cosh ra + e^{-2i\phi}\sinh ra^\dagger\end{aligned} \tag{B.30}$$

と書ける．ただし $\xi = re^{-2i\phi}$ とおいた．同様に，$a^\dagger$ についても

$$S^\dagger(\xi)a^\dagger S(\xi) = \cosh ra^\dagger + e^{2i\phi}\sinh ra \tag{B.31}$$

と書ける．

Two-mode squeezing

Two-mode squeeze operator $S[\xi]$ は

$$S[\xi] = \exp\left[\int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi}\left(\xi(\Omega)a_+^\dagger(\Omega)a_-^\dagger(\Omega) - \xi^*(\Omega)a_+(\Omega)a_-(\Omega)\right)\right] \tag{B.32}$$

である．これを

$$S[\xi] = e^{s[\xi]} \tag{B.33}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
] &= \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{2\pi}\left[a_+(\Omega), \left(\xi(\Omega')a_+^\dagger(\Omega')a_-^\dagger(\Omega') - \xi^*(\Omega')a_+(\Omega')a_-(\Omega')\right)\right] \\
&= \xi(\Omega)a_-^\dagger(\Omega) \\
[a_-(\Omega), s[\xi]] &= \int_0^\infty \frac{d\Omega'}{2\pi}\left[a_-(\Omega), \left(\xi(\Omega')a_+^\dagger(\Omega')a_-^\dagger(\Omega') - \xi^*(\Omega')a_+(\Omega')a_-(\Omega')\right)\right] \\
&= \xi(\Omega)a_+^\dagger(\Omega)
\end{aligned} \tag{B.34}$$

である．エルミート共役を取れば

$$[a_+^\dagger(\Omega), s[\xi]] = -\xi^*(\Omega)a_-(\Omega),\ [a_-^\dagger(\Omega), s[\xi]] = -\xi^*(\Omega)a_+(\Omega) \tag{B.35}$$

となる．

これらの交換関係と Baker-Hausdorff lemma から

$$\begin{aligned}
a_+(\Omega;\xi) &:= S^\dagger[\xi]a_+(\Omega)S[\xi] \\
&= a_+(\Omega) + [s[-\xi], a_+(\Omega)] + \frac{1}{2!}[s[-\xi],[s[-\xi],a_+(\Omega)]] + \frac{1}{3!}[s[-\xi],[s[-\xi],[s[-\xi],a_+(\Omega)]]] \\
&= a_+(\Omega) + \xi(\Omega)a_-^\dagger(\Omega) + \frac{1}{2}|\xi(\Omega)|^2 a_+(\Omega) + \frac{1}{3!}|\xi(\Omega)|^2\xi(\Omega)a_2^\dagger(\Omega) + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{|\xi(\Omega)|^2}{(2n)!}a_+(\Omega) + \sum_{n=0}^\infty \frac{|\xi(\Omega)|^2}{(2n+1)!}\xi(\Omega)a_-^\dagger(\Omega) \\
&= a_+(\Omega)\cosh r(\Omega) + a_-^\dagger(\Omega)e^{-2i\phi(\Omega)}\sinh r(\Omega)
\end{aligned} \tag{B.36}$$

C おまけ

C.1 Two-photon coherent states

新しい消滅演算子 b を

$$b := S(\xi)aS^\dagger(\xi) \tag{C.1}$$

で定義すると，

$$b = \mu a + \nu a^\dagger,\ |\mu|^2 - |\nu|^2 = 1 \tag{C.2}$$

と Bogoliubov 変換の形で表せる．[*13]ただし $\mu = \cosh r$, $\nu = -e^{-2i\phi}\sinh r$．このとき交換関係は

$$[b, b^\dagger] = |\mu|^2[a, a^\dagger] + |\nu|^2[a^\dagger, a] = 1 \tag{C.3}$$

であるから，元の演算子と同じである．そこで，この新しい演算子 b における coherent state を

$$b\,|\beta\rangle_g = \beta\,|\beta\rangle_g \tag{C.4}$$

[*13] Boson だとこの形．BCS など Fermion だと $|\mu|^2 + |\nu|^2 = 1$ になる．

で定義し，two-photon coherent state と呼ぶ．

b の定義から

$$aS^\dagger(\xi)\left|\beta\right\rangle_g = \beta S^\dagger(\xi)\left|\beta\right\rangle_g \tag{C.5}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} S(\xi)^\dagger\left|\beta\right\rangle_g &= \left|\beta\right\rangle, \\ \left|\beta\right\rangle_g = S(\xi)\left|\beta\right\rangle &= S(\xi)D(\beta)\left|0\right\rangle \end{aligned} \tag{C.6}$$

である．特に

$$\left|0\right\rangle_g = S(\xi)\left|0\right\rangle = \left|0,\xi\right\rangle \tag{C.7}$$

であるから $\left|0\right\rangle_g$ は squeezed vacuum になる．

新しい displacement operator を

$$D_g(\beta) := e^{\beta b^\dagger - \beta^* b} \tag{C.8}$$

とおくと，coherent state と同様

$$\left|\beta\right\rangle_g = D_g(\beta)\left|0\right\rangle_g \tag{C.9}$$

と書ける．またこれから

$$\begin{aligned} S(\xi)D(\beta) &= D_g(\beta)S(\xi), \\ D_g(\beta) &= S(\xi)D(\beta)S^\dagger(\beta) \end{aligned} \tag{C.10}$$

とも書ける．したがって

$$\begin{aligned} D_g(\beta) &= S(\xi)D(\alpha)S^\dagger(\xi) \\ &= \exp[\alpha a(-\xi)^\dagger - \alpha^* a(-\xi)] \\ &= \exp[(\alpha\cosh r - \alpha^* e^{-2i\phi}\sinh r)a^\dagger - (\alpha^*\cosh r - \alpha e^{2i\phi}\sinh r)a] \quad = D(\alpha\cosh r - \alpha^* e^{-2i\phi}\sinh r)) \end{aligned} \tag{C.11}$$

である．これを用いれば，α と β は

$$\begin{aligned} \beta &= \alpha\cosh r - \alpha^* e^{-2i\phi}\sinh r = \mu\alpha + \nu\alpha^* \\ \alpha &= \beta\cosh r + \beta^* e^{-2i\phi}\sinh r = \mu\beta - \nu\beta^* \end{aligned} \tag{C.12}$$

の関係にあることがわかる．さらに

$$\left|\beta\right\rangle_g = D_g(\beta)\left|0\right\rangle_g = D_g(\beta)S(\xi)\left|0\right\rangle \tag{C.13}$$

であるから

$$\left|\beta\right\rangle_g = \left|\beta\cosh r + \beta^* e^{-2i\phi}\sinh r, \xi\right\rangle \tag{C.14}$$

と squeezed coherent state の形で表せる．

Coherent state のときのように，$\{\left|\beta\right\rangle_g\}$ も overcomplete である．異なる固有値の two-photon coherent state 同士の積は

$${}_g\langle\beta|\beta\rangle_g = \exp\left[\beta^*\beta' - \frac{1}{2}|\beta|^2 - \frac{1}{2}|\beta'|^2\right] \tag{C.15}$$

であり，

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\beta\left|\beta\right\rangle_{gg}\langle\beta| = 1 \tag{C.16}$$

である．ここで $d^2\beta = d^2\alpha$ であり，$\left|\beta\right\rangle_g$ に $\left|\alpha,\xi\right\rangle$ を代入すればであるから

$$\frac{1}{\pi}\int d^2\alpha\left|\alpha,\xi\right\rangle\left\langle\alpha,\xi\right| \tag{C.17}$$

と書ける．つまり同じ squeezed factor の coherent squeezed states は overcomplete である．