QPD の計算まとめ

2019 年 7 月 1 日

QPD についての色々な計算．主にビーム径と QPD の口径，スリット幅についての考察．

目次

1　基本設定

基本設定

1.1　レーザー

レーザーの電場を

$$E_0(x,y) := \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right) \tag{1.1}$$

で定義する．パワーの分布は

$$P_0(x,y) := \frac{2}{\pi w^2} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2}\right) \tag{1.2}$$

となる．ここでは全面積でのパワーの積分が 1 になるように規格化している．

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy P_0(x,y) = 1 \tag{1.3}$$

また，基本 Gaussian を

$$U_0(x) := \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) = N \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \tag{1.4}$$

で定義する．ここで N は規格化定数

$$N := \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{1.5}$$

である．これを用いると

$$E_0(x,y) = U_0(x)U_0(y),\ P_0(x,y) = U_0(x)^2 U_0(y)^2 \tag{1.6}$$

とかける．

1.2　レーザースポットの変位

レーザースポットが (x_0, y_0) だけずれた場合の電場を

$$E(x,y;x_0,y_0) := E_0(x-x_0, y-y_0) = \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{w^2}\right] \tag{1.7}$$

とおく．パワーは

$$P(x,y;x_0,y_0) := P_0(x-x_0, y-y_0) = \frac{2}{\pi w^2} \exp\left[-\frac{2(x-x_0)^2+2(y-y_0)^2}{w^2}\right] \tag{1.8}$$

となる．このずれた Gaussian を，高次の Hermite-Gaussian で近似する．n 次の Hermite-Gaussian モード U_n を

$$U_n(x) := \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{\frac{1}{4}} \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2^n n!}} H_n\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) U_0(x) \tag{1.9}$$

とおく．ここで $H_n(x)$ は n 次の Hermite 多項式である．特に 1 次のモードは，$H_1(x) = 2x$ であるから

$$U_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}} H_1\left(\frac{\sqrt{2}x}{w}\right) U_0(x) = \frac{2x}{w} U_0(x) \tag{1.10}$$

となる．これを用いて $U_0(x - x_0)$ を近似すると，

$$\begin{aligned}
U_0(x - x_0) &= N \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{w^2}\right) && (1.11)\\
&= N \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \exp\left(-\frac{-2xx_0 + {x_0}^2}{w^2}\right) && (1.12)\\
&= U_0(x)\left[1 + 2\frac{x}{w}\frac{x_0}{w} + O\left(\left(\frac{x_0}{w}\right)^2\right)\right] && (1.13)\\
&\simeq U_0(x)\left(1 + \frac{x_0}{w}\frac{2x}{w}\right) && (1.14)\\
&= U_0(x) + \frac{x_0}{w} U_1(x) && (1.15)
\end{aligned}$$

と書ける．つまり，$x_0 \ll w$ においては，ビームスポットの変位は 1 次の Hermite-Gaussian モードの生成とみなせる．

$x_0 = 0.1w$ の場合をプロットしたのが図である．

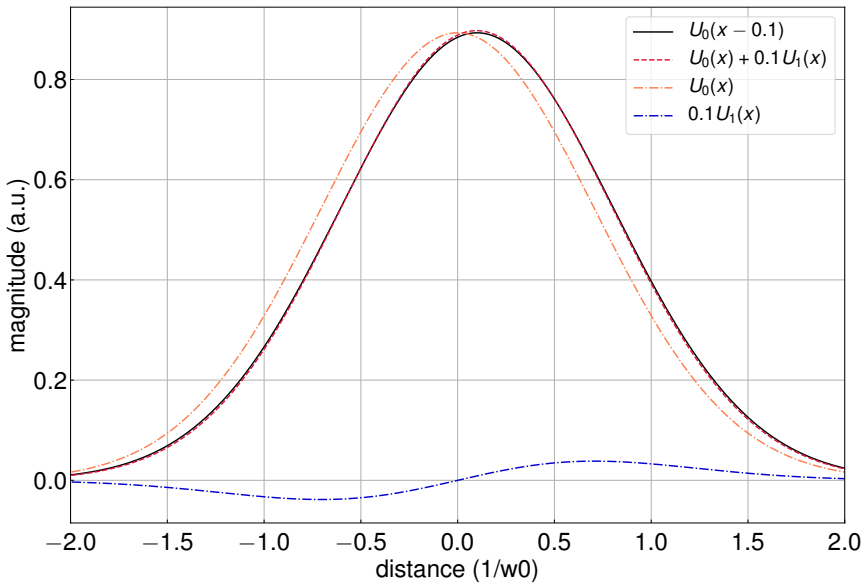

図 1　変位したビームスポットを U_0 と U_1 の重ね合わせで表した例．図は $x_0 = 0.1$ の場合である．ただし，$U_0(x) + 0.1U_1(x)$ は $\sqrt{1 + 0.1^2}$ で割って規格化している．通常 x_0/w はこれよりもさらに小さいため，実用上は規格化は不要である．

この近似を用いると，変位したビームスポットの電場，パワーは

$$E(x,y;x_0,y_0) \simeq \left[U_0(x)+\frac{x_0}{w}U_1(x)\right]\left[U_0(y)+\frac{y_0}{w}U_1(y)\right] \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} P(x,y;x_0,y_0) &\simeq \left[U_0(x)+\frac{x_0}{w}U_1(x)\right]^2\left[U_0(y)+\frac{y_0}{w}U_1(y)\right]^2 \\ &\simeq [U_0(x)U_0(y)]^2+\frac{2x_0}{w}U_0(x)U_1(x)U_0(y)^2+\frac{2x_0}{w}U_0(x)^2U_0(y)U_1(y) \end{aligned} \tag{1.17}$$

と書ける．

$$V_{00}(x,y) = [U_0(x)U_0(y)]^2, \tag{1.18}$$

$$V_{10}(x,y) = U_0(x)U_1(x)U_0(y)^2, \tag{1.19}$$

$$V_{01}(x,y) = U_0(x)^2U_0(y)U_1(y) \tag{1.20}$$

とおくと，

$$P(x,y;x_0,y_0) \simeq V_{00}(x,y)+\frac{2x_0}{w}V_{10}(x,y)+\frac{2y_0}{w}V_{01}(x,y) \tag{1.21}$$

となる．

1.3 QPD

QPD の各セグメントを図のように A,B,C,D と定める．QPD は有限の口径 D を持つが，ビームスポットが十分小さい ($w \ll D$) ときはほぼ無限の大きさとみなせる．2 はこの場合を扱う．また，図では各セグメントが隙間なく接しているが，実際はセグメント間にはわずかなスリット (幅 d) がある．3 では口径は有限だがスリットがない場合を，4 では口径は有限でスリットも考慮した場合を扱う．

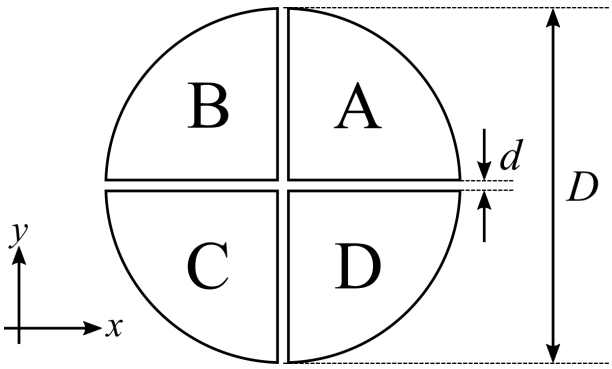

図 2　QPD の概形．口径 D の PD が 4 つセングメント A〜D に分かれており，各セグメントの間には幅 d のスリットが入っている．

2　無限大のサイズの QPD

QPD の口径が無限大とみなせる場合の応答.

2.1　積分範囲

各セグメントに対する積分範囲は以下の通り.

- segment A:

$$\int_0^\infty dx \int_0^\infty dy = \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta \tag{2.1}$$

- segment B:

$$\int_{-\infty}^0 dx \int_0^\infty dy = \int_0^\infty dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r d\theta \tag{2.2}$$

- segment C:

$$\int_{-\infty}^0 dx \int_{-\infty}^0 dy = \int_0^\infty dr \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r d\theta \tag{2.3}$$

- segment D:

$$\int_0^\infty dx \int_{-\infty}^0 dy = \int_0^\infty dr \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r d\theta \tag{2.4}$$

この場合は積分範囲が $\pm\infty$ まであるので Cartesian で積分することも難しくないが，QPD のサイズが有限の場合は Cartesian ではうまくできず Polar で計算するのが見通しが良い．$x \ll w$ の近似を使わずに Cartesian で計算した結果は補遺を参照.

2.2　各セグメントで積分

まずセグメント A について積分する.

$$\int_A dSV_{00}(x,y) = N^4 \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{4} \tag{2.6}$$

$$\int_A dSV_{10}(x,y) = N^4 \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \frac{2r\cos\theta}{w} \tag{2.7}$$

$$= N^4 \frac{2}{w} \int_0^\infty dr r^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{2.8}$$

$$= N^4 \frac{2}{w} \frac{w^2}{4} \sqrt{\frac{\pi w^2}{8}} \tag{2.9}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \tag{2.10}$$

$$\int_A dSV_{01}(x,y) = N^4 \int_0^\infty dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \frac{2r\sin\theta}{w} \tag{2.11}$$

$$= N^4 \frac{2}{w} \int_0^\infty dr r^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{2.12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \tag{2.13}$$

したがって，セグメント A で受けるパワーの総量 P_A は

$$P_A := \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{2(x_0 + y_0)}{w} \tag{2.14}$$

となる．

同様に他のセグメントについても計算すると，

$$P_B := \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{2(-x_0 + y_0)}{w} P_C := \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{2(-x_0 - y_0)}{w} P_D := \frac{1}{4} + \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{2(x_0 - y_0)}{w} \tag{2.15}$$

となる．

ちなみに，P_i から QPD に入ってきた光の総量を求めると

$$P_{\mathrm{sum}} = P_A + P_B + P_C + P_D = 1 \tag{2.16}$$

であるから，光は全て QPD で受けていることがわかる．

2.3 スポットの変動への応答

各セグメントでの出力からビームスピットの変位を求めるには，

- x 方向:

$$P_x := (P_A + P_D) - (P_B + P_C) \tag{2.17}$$

- y 方向:

$$P_y := (P_A + P_B) - (P_C + P_D) \tag{2.18}$$

を計算すれば良い．したがって，

$$P_x = (P_A + P_D) - (P_B + P_C) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{x_0}{w} \tag{2.19}$$

$$P_y = (P_A + P_B) - (P_C + P_D) = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{y_0}{w} \tag{2.20}$$

となる．スポットの変位からパワーの変化へのセンサー効率を

$$S_0 = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \tag{2.21}$$

とおく．

2.4 近似のない場合との比較

$P(x, y; x_0, y_0)$ を U_1 で近似せずに直接積分を行なった結果[*1] と，近似をして得られた結果 (2.14)〜(2.20) を比較する．

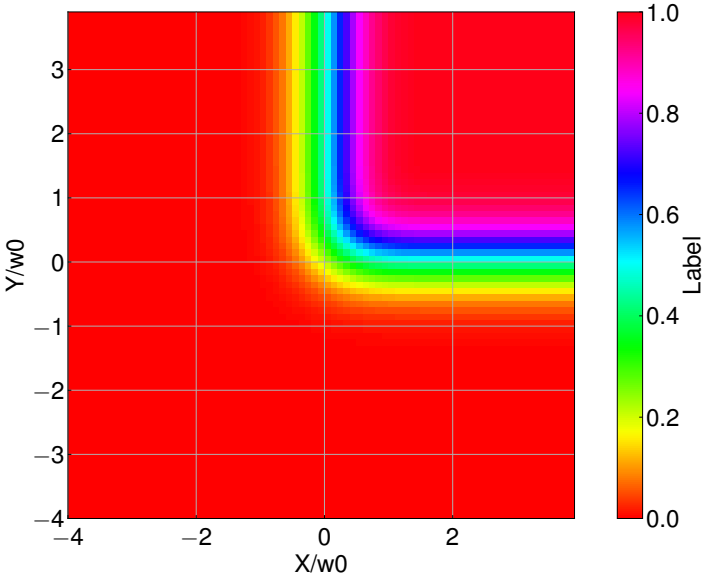

図 3　セグメント A での積分を近似せずに直接計算した結果

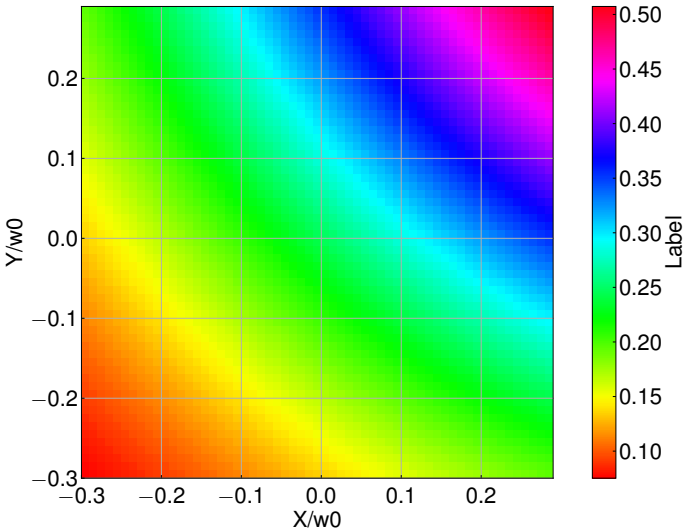

図 4　セグメント A での積分を近似せずに直接計算した結果 (拡大)

[*1] QPD の口径が無限大の場合は数値積分ではなく解析的に解ける（誤差関数は使うが）ため，今回は解析的に求めた結果を用いている．他の場合は解析解がない（本当はあるかもしれない．誰か教えてください）ので，数値積分した結果と比較する．

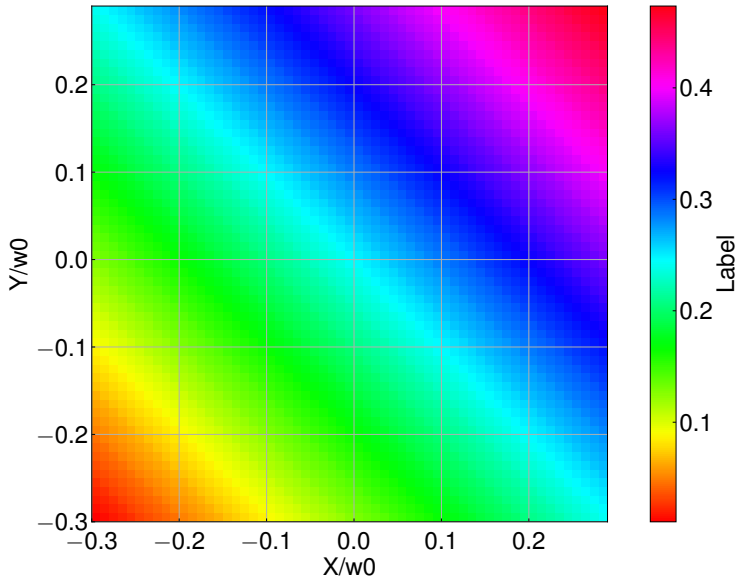

図 5　セグメント A での積分を近似計算した結果

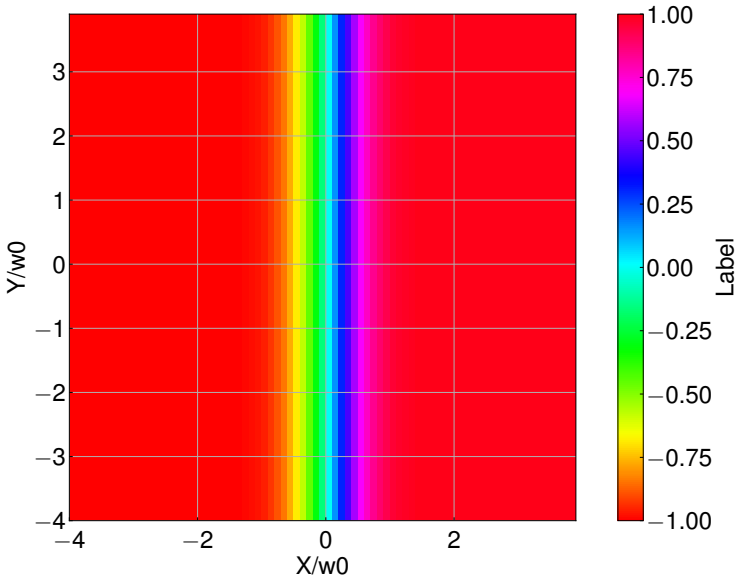

図 6　x 方向の値（直接積分）

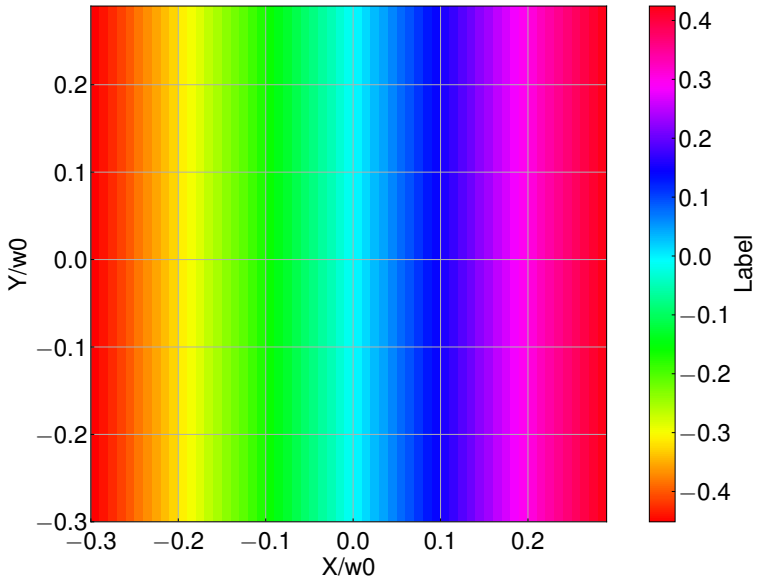

図 7　x 方向の値（直接積分，拡大）

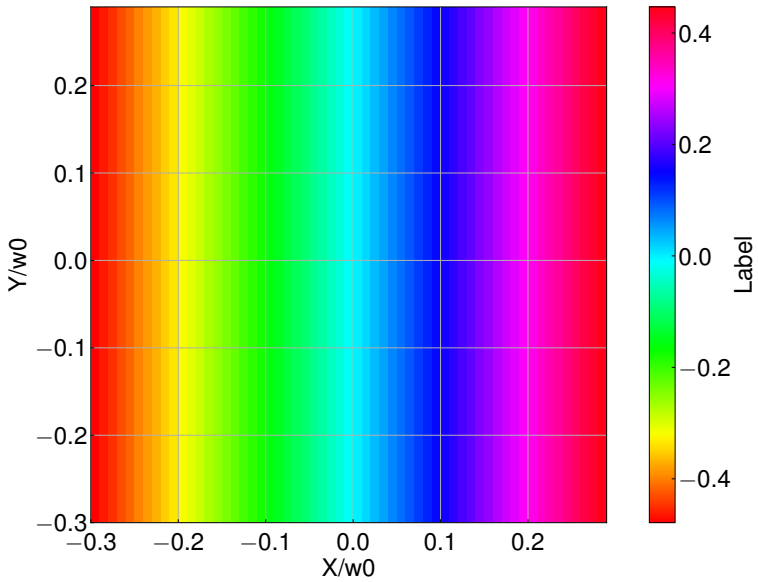

図 8　x 方向の値（近似）

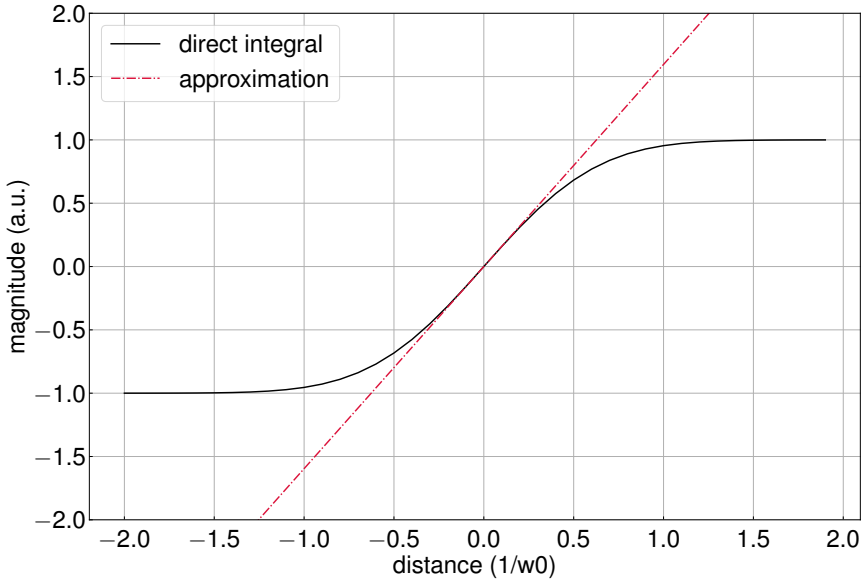

図 9　$y_0 = 0$ での P_x の変化．黒線が直接積分した結果，赤線が近似計算した結果．

$y_0 = 0$ に固定したとき，P_x の x_0 依存性をプロットしたのが図 18 である．黒線，赤点線がそれぞれ直接積分した結果，近似計算した結果を表している．x_0/w が十分小さな領域ではよく近似できていることがわかる．

3　有限のサイズでスリットのない QPD

QPD の口径が有限でスリットがない場合の応答.

3.1　積分範囲

各セグメントに対する積分範囲は以下の通り.

- segment A:

$$\int_0^{\frac{D}{2}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}} dy = \int_0^{\frac{D}{2}} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta \tag{3.1}$$

- segment B:

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{0} dx \int_0^{\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}} dy = \int_0^{\frac{D}{2}} dr \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} r d\theta \tag{3.2}$$

- segment C:

$$\int_{-\frac{D}{2}}^{0} dx \int_{-\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}}^{0} dy = \int_0^{\frac{D}{2}} dr \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} r d\theta \tag{3.3}$$

- segment D:

$$\int_0^{\frac{D}{2}} dx \int_{-\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}}^{0} dy = \int_0^{\frac{D}{2}} dr \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} r d\theta \tag{3.4}$$

Cartesian での積分区間が x と y が混ざっている格好になるため，Polar でないと積分が難しい．また動径方向の積分の上限が ∞ ではなく $\frac{D}{2}$ になっていて，これによって口径のサイズの効果が現れる．

3.2　各セグメントで積分

まずセグメント A について積分する．

$$\int_A dSV_{00}(x,y) = N^4 \int_0^{\frac{D}{2}} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r d\theta \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{3.5}$$

$$= \frac{2}{\pi w^2}\frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{D}{2}} dr r \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{3.6}$$

$$= \frac{1}{4}\left[1 - \exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right)\right] \tag{3.7}$$

$$\int_A dSV_{10}(x,y) = N^4 \int_0^{\frac{D}{2}} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} rd\theta \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \frac{2r\cos\theta}{w} \tag{3.8}$$

$$= \frac{2}{\pi w^2}\frac{2}{w}\int_0^{\frac{D}{2}} drr^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{3.9}$$

$$= \frac{4}{\pi w^3}\left[-\frac{w^2}{4}r\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{D}{2}} + \frac{w^2}{4}\int_0^{\frac{D}{2}} dr\exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right)\right] \tag{3.10}$$

$$= \frac{1}{\pi w}\left[-\frac{D}{2}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \frac{w}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{D}{\sqrt{2}w}} dre^{-x^2}\right] \tag{3.11}$$

$$= -\frac{D}{2\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right) \tag{3.12}$$

$$\int_A dSV_{01}(x,y) = N^4 \int_0^{\frac{D}{2}} dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} rd\theta \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \frac{2r\sin\theta}{w} \tag{3.13}$$

$$= \frac{2}{\pi w^2}\frac{2}{w}\int_0^{\frac{D}{2}} drr^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{3.14}$$

$$= -\frac{D}{2\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right) \tag{3.15}$$

となる．ただし，erf(·) は誤差関数で

$$\mathrm{erf}(x) := \frac{2}{\pi}\int_0^x dxe^{-x^2} \tag{3.16}$$

である．

式 (3.7)，(3.12)，(3.15) をまとめて，セグメント A で受けるパワーの総量 P'_A は

$$P'_A = \frac{1}{4}\left[1-\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right)\right] + \frac{2(x_0+y_0)}{w}\left[-\frac{D}{2\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right)\right] \tag{3.17}$$

となる．

同様に他のセグメントについても計算すると，

$$P'_B = \frac{1}{4}\left[1-\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right)\right] + \frac{2(-x_0+y_0)}{w}\left[-\frac{D}{2\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right)\right] \tag{3.18}$$

$$P'_C = \frac{1}{4}\left[1-\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right)\right] + \frac{2(-x_0-y_0)}{w}\left[-\frac{D}{2\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right)\right] \tag{3.19}$$

$$P'_D = \frac{1}{4}\left[1-\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right)\right] + \frac{2(x_0-y_0)}{w}\left[-\frac{D}{2\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right)\right] \tag{3.20}$$

と計算できる．

このとき，QPD に入ってきた光の総量は

$$\begin{aligned} P'_{\mathrm{sum}} &= P'_A + P'_B + P'_C + P'_D \\ &= 1-\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) \end{aligned} \tag{3.21}$$

であるから，ビームスポットが QPD に対して十分小さくないと光がクリップして受けるパワーが下がる．

3.3 スポットの変動への応答

各セグメントでの出力からビームスピットの変位を求めると，

$$
\begin{aligned}
P'_x &= (P'_A + P'_D) - (P'_B + P'_C) \\
&= \frac{x_0}{w}\left[-\frac{4D}{\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \sqrt{\frac{8}{\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right)\right] \qquad (3.22)\\
P'_y &= (P'_A + P'_B) - (P'_C + P'_D) \\
&= \frac{y_0}{w}\left[-\frac{4D}{\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) + \sqrt{\frac{8}{\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right)\right] \qquad (3.23)
\end{aligned}
$$

である．したがって，センサー効率は

$$
S_1 = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right) - \frac{4D}{\pi w}\exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) \qquad (3.24)
$$

となる．

3.4 近似のない場合との比較

$P(x, y; x_0, y_0)$ を U_1 で近似せずに直接積分を行なった結果と，近似をして得られた結果 (3.17)〜(3.23) を比較する．

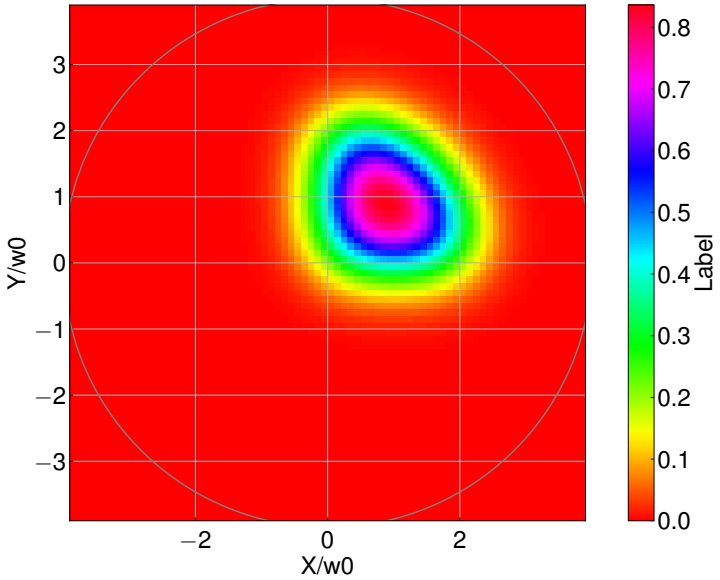

図 10　セグメント A での積分を近似せずに直接計算した結果．黒線は QPD の口径 ($D = 4w$)

口径が無限大の時とは異なり，ビームがセグメントの端に近い領域では値が小さくなっている．

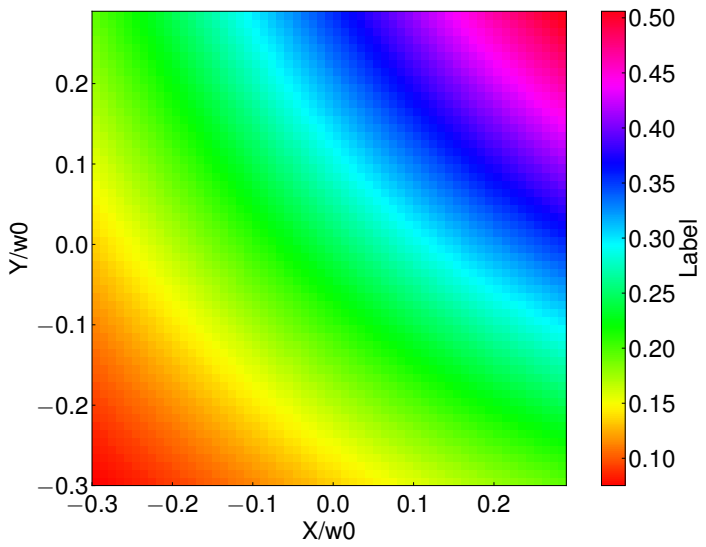

図 11　セグメント A での積分を近似せずに直接計算した結果 (拡大)

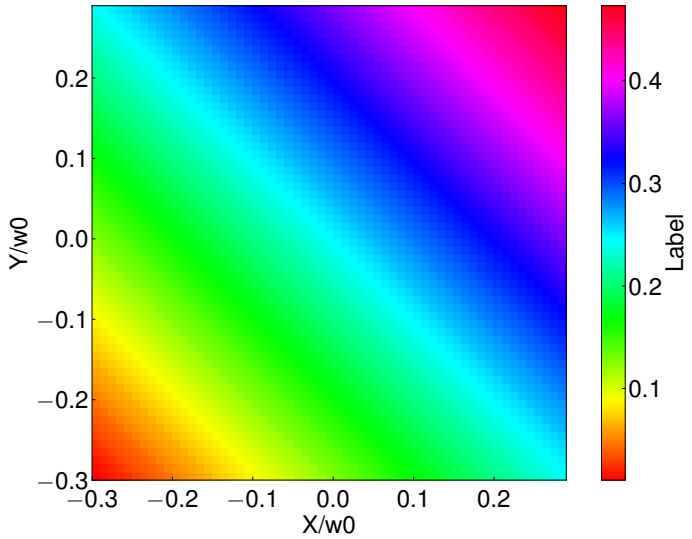

図 12　セグメント A での積分を近似計算した結果

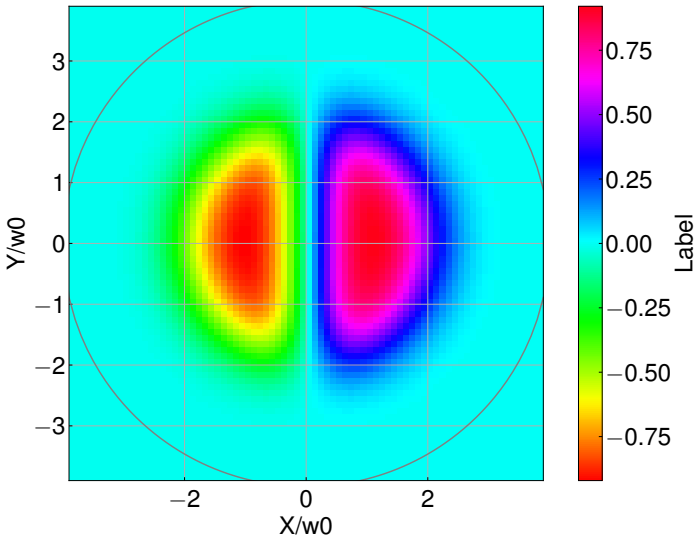

図 13　x 方向の値（直接積分）．黒線は QPD の口径 ($D = 4w$)

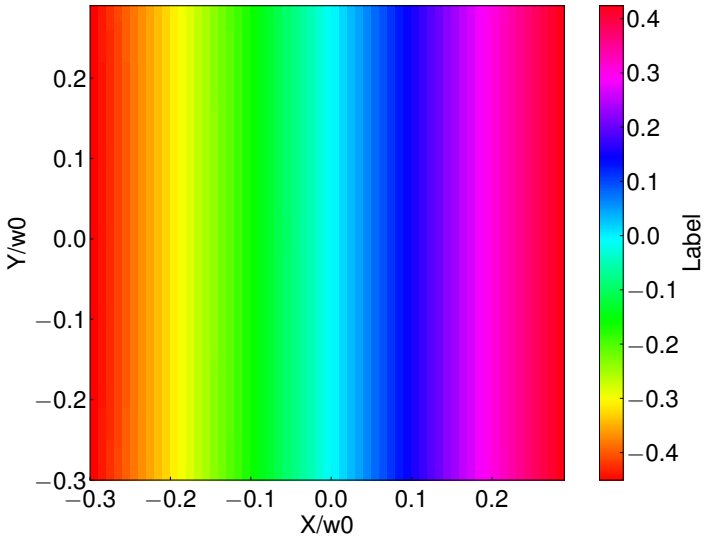

図 14　x 方向の値（直接積分，拡大）

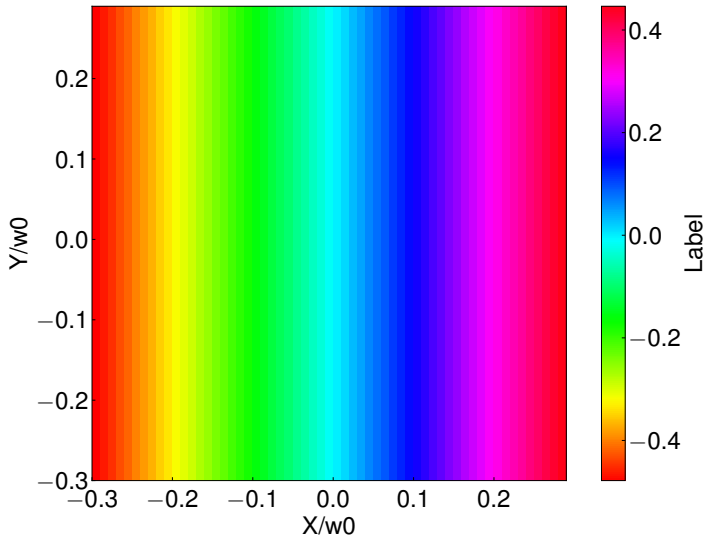

図 15　x 方向の値（近似）

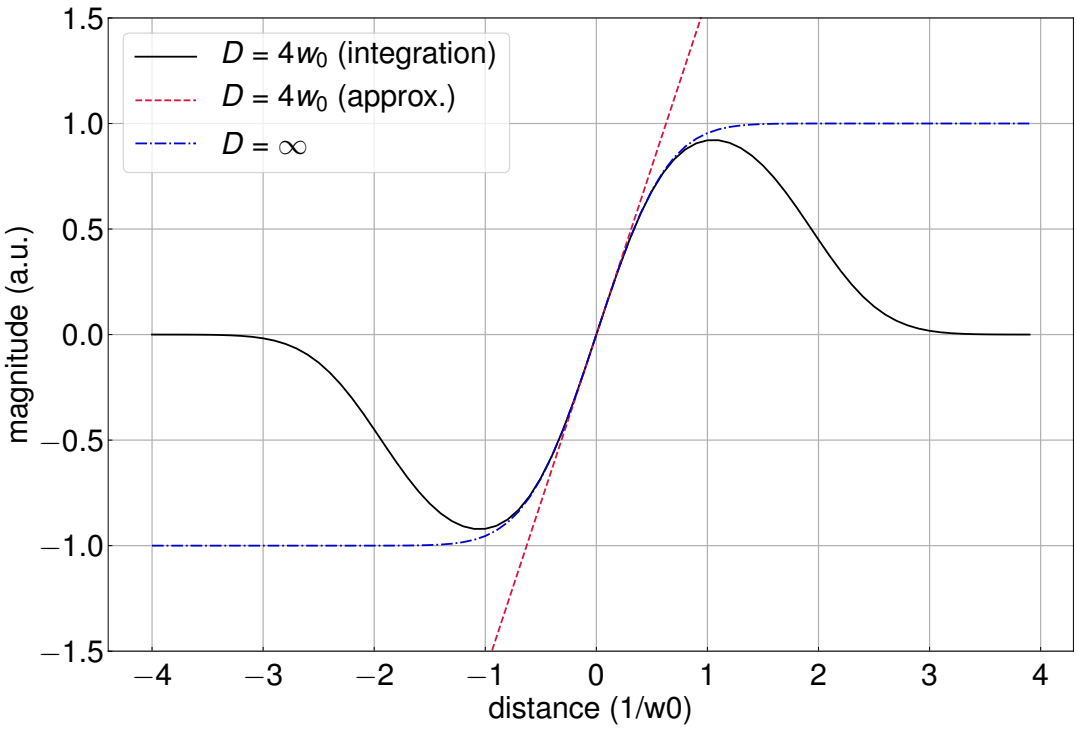

図 16　$y_0 = 0$ での P_x の変化．黒線が直接積分した結果，赤線が近似計算した結果 (どちらも $D = 4_w 0$)．青線が口径が無限大の場合 ($D = \infty$)

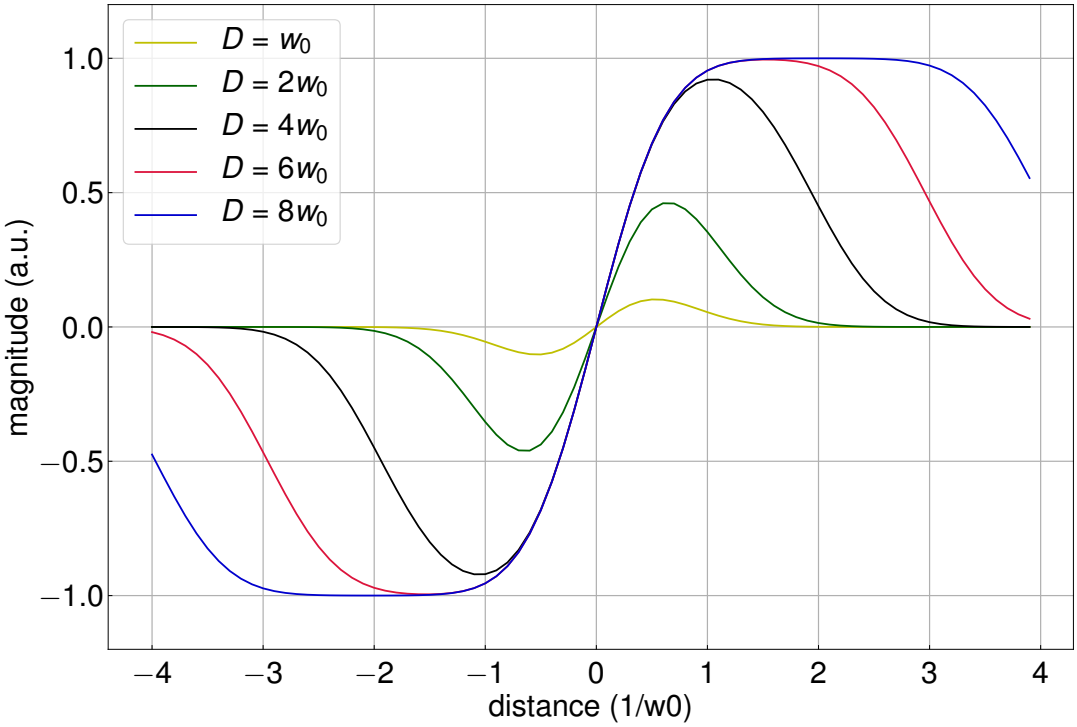

図 17　P_x の口径依存性

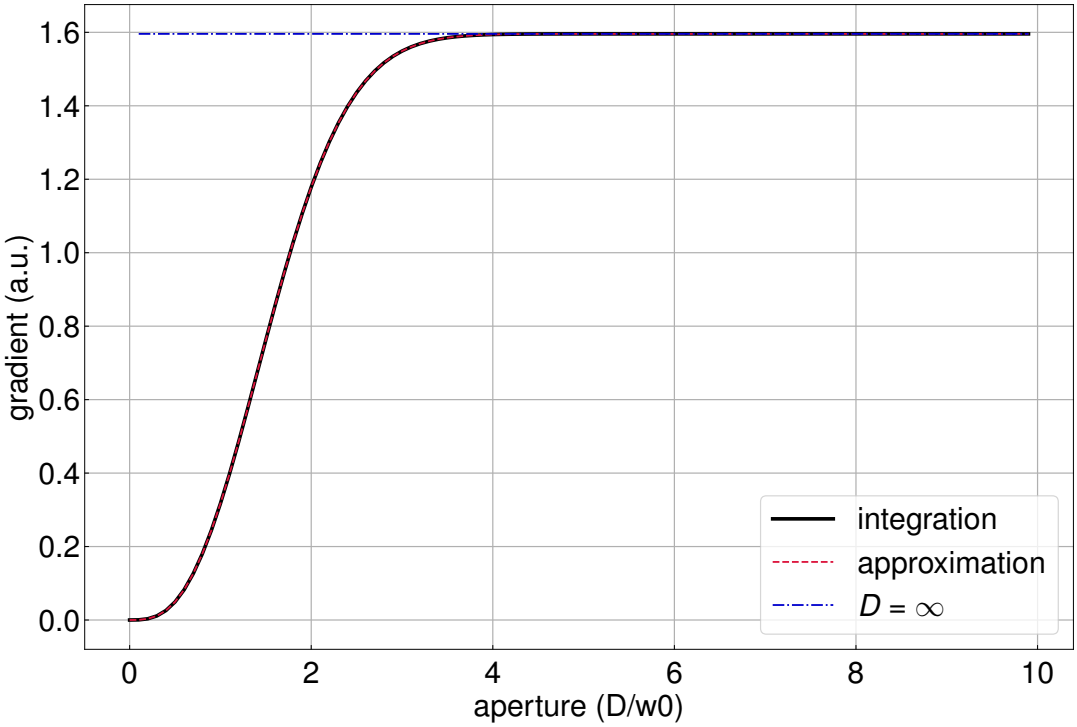

図 18　S_1 の口径依存性．黒線が直接積分した結果，赤線が近似計算した結果 (どちらも $D = 4w$)，青線が $D = \infty$ の場合．

口径がビーム径に比べて小さい領域では S_1 の値は QPD のサイズ効果で小さくなるが，口径が十分大きくなれば $D = \infty$ のときの値 $S_0 = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{P}{w}$ にほぼ等しい．$D \simeq 4w$ 程度であれば，QPD のサイズ効果はほぼ無視していいだろう．また，近似計算で直接積分した結果を十分再現できていることもわかる．

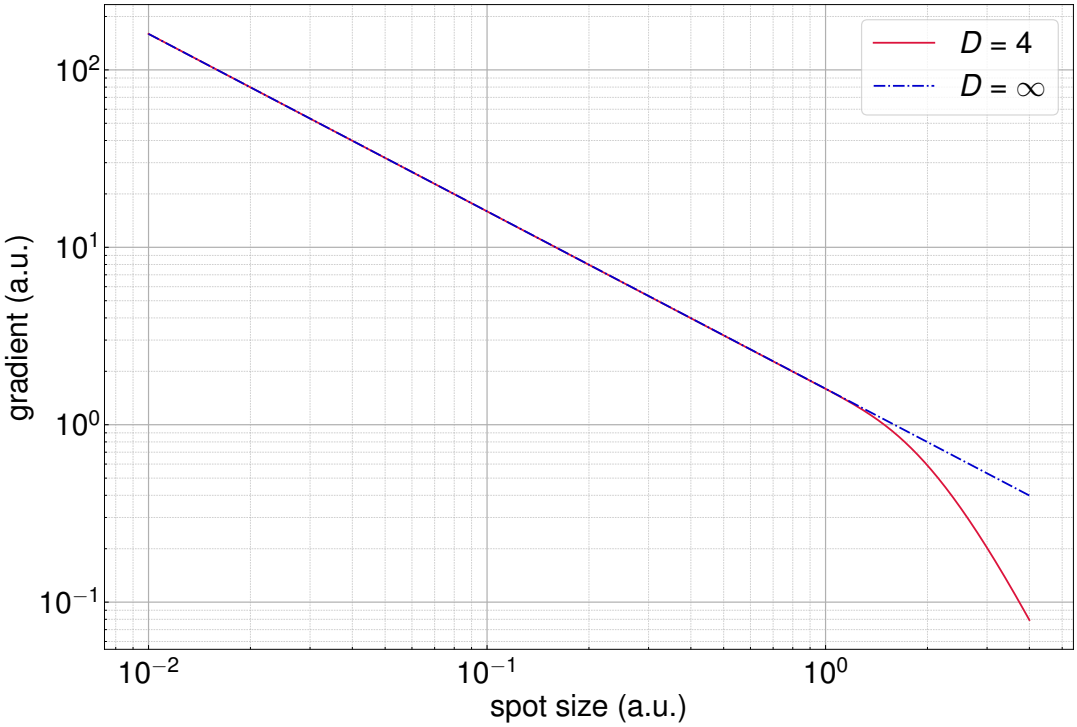

図 19　S_1 のビーム径依存性．赤線が近似計算した結果 ($D = 4w$)，青線が $D = \infty$ の場合．

またビーム径を変えたときの S_1 の変化をプロットすると，図 19 のようである．ビーム径が十分小さい場合には，S_1 は $D = \infty$ のとき ($S_0 = \sqrt{\frac{8}{\pi}}\frac{P}{w}$) とほぼ同じであり，ビーム径を小さくすれば S_1 はどこまでも大きくなる．一方，$w \simeq 1$ あたりから QPD のサイズ効果が現れ始め，S_1 は S_0 よりも小さな値になる．

4　有限のサイズでスリットのある QPD

QPD の口径が有限でスリットがある場合の応答.

4.1　積分範囲

各セグメントに対する積分範囲は以下の通り.

- segment A:

$$\int_{\frac{d}{2}}^{r} dx \int_{\frac{d}{2}}^{\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}} dy \tag{4.1}$$

- segment B:

$$\int_{-r}^{\frac{d}{2}} dx \int_{\frac{d}{2}}^{\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}} dy \tag{4.2}$$

- segment C:

$$\int_{-r}^{\frac{d}{2}} dx \int_{-\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}}^{\frac{d}{2}} dy \tag{4.3}$$

- segment D:

$$\int_{\frac{d}{2}}^{r} dx \int_{-\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}}^{\frac{d}{2}} dy \tag{4.4}$$

ただし，$r := \sqrt{\frac{D^2}{4} - \frac{d^2}{4}}$ とおいた.

スリットがある場合その分だけ積分区間が短くなるが，その結果積分領域の形状が四半円ではなくなり Polar での積分は難しい．そこで，以下の仮定に基づいて近似をする.

- $D \gg d$
  QPD の口径がスリットの幅よりも十分大きいとする．現実的にこの仮定は妥当だと考えられる.[*2]
- $D > 6w$
  ビームスポットが QPD よりも十分小さいとする．$6w$ というのはだいたいの値．(99.9% が含まれる幅)

この過程の元で，スリットによって除かれる区間，例えば

$$\int_{0}^{\frac{d}{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}} dy \tag{4.5}$$

を，長方形として近似する

$$\int_{0}^{\frac{d}{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{\frac{D^2}{4}-x^2}} dy \simeq \int_{0}^{\frac{d}{2}} dx \int_{0}^{\frac{D}{2}} dy \tag{4.6}$$

[*2] 例えば，浜ホトの InGaAs の QPD だと $D = 2\text{mm}$，$d = 0.1\text{mm}$

この近似した領域で積分を行い，式 (3.17)〜(3.20) から引くことでスリットの影響を与えることにする．

4.2 各セグメントで積分

4.2.1 スリット部分の積分

まずセグメント A について考える．スリットで除外すべき部分は

$$\int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{D}{2}} dy + \int_0^{\frac{D}{2}} dx \int_0^{\frac{d}{2}} dy - \int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{d}{2}} dy \tag{4.7}$$

である．ここで $[0, \frac{d}{2}] \times [0, \frac{d}{2}]$ の積分を引いているのは，$[0, \frac{d}{2}] \times [0, \frac{D}{2}]$ と $[0, \frac{D}{2}] \times [0, \frac{d}{2}]$ の積分で重なっているためである．

まず $[0, \frac{d}{2}] \times [0, \frac{D}{2}]$ について積分すると

$$\int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{D}{2}} dy V_{00}(x, y) = N^4 \int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{D}{2}} dy \exp\left(-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2}\right) \tag{4.8}$$

$$= \frac{2}{\pi w^2} \frac{w^2}{2} \int_0^{\frac{d}{\sqrt{2}w}} dx \int_0^{\frac{D}{\sqrt{2}w}} dy e^{-x^2 - y^2} \tag{4.9}$$

$$= \frac{1}{4} \mathrm{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}w}\right) \mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right) \tag{4.10}$$

$$\int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{D}{2}} dy V_{10}(x, y) = N^4 \int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{D}{2}} dy \frac{2x}{w} \exp\left(-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2}\right) \tag{4.11}$$

$$= \frac{2}{\pi w^2} \frac{w}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} \mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right) \times \int_0^{\frac{d}{2}} dx \frac{2x}{w} \exp\left(-\frac{2x^2}{w^2}\right) \tag{4.12}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi w^2}} \mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right) \times \frac{2}{w} \left[-\frac{w^2}{4} \exp\left(-\frac{2x^2}{w^2}\right) \Big|_0^{\frac{d}{2}} \right] \tag{4.13}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{d^2}{2w^2}\right) \right] \tag{4.14}$$

$$\int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{D}{2}} dy V_{01}(x, y) = N^4 \int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{D}{2}} dy \frac{2y}{w} \exp\left(-\frac{2(x^2 + y^2)}{w^2}\right) \tag{4.15}$$

$$= \frac{2}{\pi w^2} \frac{2}{w} \int_0^{\frac{D}{2}} dr r^2 \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2}\right) \tag{4.16}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \mathrm{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}w}\right) \left[1 - \exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right) \right] \tag{4.17}$$

となる．同様に，$[0, \frac{D}{2}] \times [0, \frac{d}{2}]$ での積分は

$$\int_0^{\frac{D}{2}} dx \int_0^{\frac{d}{2}} dy V_{00}(x, y) = \frac{1}{4}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}w}\right) \tag{4.18}$$

$$\int_0^{\frac{D}{2}} dx \int_0^{\frac{d}{2}} dy V_{10}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}w}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{D^2}{2w^2}\right)\right] \tag{4.19}$$

$$\int_0^{\frac{D}{2}} dx \int_0^{\frac{d}{2}} dy V_{10}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{D}{\sqrt{2}w}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{d^2}{2w^2}\right)\right] \tag{4.20}$$

となる．最後に $[0, \frac{d}{2}] \times [0, \frac{d}{2}]$ での積分を計算すると

$$\int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{d}{2}} dy V_{00}(x, y) = \frac{1}{4}\mathrm{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}w}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}w}\right) \tag{4.21}$$

$$\int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{d}{2}} dy V_{10}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}w}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{d^2}{2w^2}\right)\right] \tag{4.22}$$

$$\int_0^{\frac{d}{2}} dx \int_0^{\frac{d}{2}} dy V_{10}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\mathrm{erf}\left(\frac{d}{\sqrt{2}w}\right)\left[1 - \exp\left(-\frac{d^2}{2w^2}\right)\right] \tag{4.23}$$

である．

4.2.2　スリット部分を引き算

以上，式 (4.10)〜(4.23) を (3.17) から引く（あるいは足す）と

$$\begin{aligned}\tilde{P}_A =& \frac{1}{4}[1 - e^{-K^2} - 2\mathrm{erf}(K)\mathrm{erf}(k) + \mathrm{erf}(k)^2] \\ &+ \frac{2(x_0 + y_0)}{w}\left[\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\mathrm{erf}(K)e^{-k^2} - \mathrm{erf}(k)(e^{-k^2} - e^{-K^2})\right) - \frac{\sqrt{2}K}{\pi}e^{-K^2}\right]\end{aligned} \tag{4.24}$$

となる．ただし，

$$k = \frac{d}{\sqrt{2}w},\ K = \frac{D}{\sqrt{2}w} \tag{4.25}$$

である．

4.2.3　他のセグメント

他のセグメントについても同様に計算すれば求められるが，対称性からほとんど同じ形になり

$$\begin{aligned}\tilde{P}_B =& \frac{1}{4}[1 - e^{-K^2} - 2\mathrm{erf}(K)\mathrm{erf}(k) + \mathrm{erf}(k)^2] \\ &+ \frac{2(-x_0 + y_0)}{w}\left[\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\mathrm{erf}(K)e^{-k^2} - \mathrm{erf}(k)(e^{-k^2} - e^{-K^2})\right) - \frac{\sqrt{2}K}{\pi}e^{-K^2}\right]\end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_C =& \frac{1}{4}[1 - e^{-K^2} - 2\mathrm{erf}(K)\mathrm{erf}(k) + \mathrm{erf}(k)^2] \\ &+ \frac{2(-x_0 - y_0)}{w}\left[\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\mathrm{erf}(K)e^{-k^2} - \mathrm{erf}(k)(e^{-k^2} - e^{-K^2})\right) - \frac{\sqrt{2}K}{\pi}e^{-K^2}\right]\end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_D =& \frac{1}{4}[1 - e^{-K^2} - 2\mathrm{erf}(K)\mathrm{erf}(k) + \mathrm{erf}(k)^2] \\ &+ \frac{2(x_0 - y_0)}{w}\left[\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\mathrm{erf}(K)e^{-k^2} - \mathrm{erf}(k)(e^{-k^2} - e^{-K^2})\right) - \frac{\sqrt{2}K}{\pi}e^{-K^2}\right]\end{aligned} \tag{4.28}$$

である．

このとき，QPD に入ってきた光の総量は

$$\begin{aligned}\tilde{P}_{\mathrm{sum}} &= \tilde{P}_A + \tilde{P}_B + \tilde{P}_C + \tilde{P}_D \\ &= 1 - e^{-K^2} - 2\mathrm{erf}(K)\mathrm{erf}(k) + \mathrm{erf}(k)^2\end{aligned} \tag{4.29}$$

である．

4.3　スポットの変動への応答

各セグメントでの出力からビームスピットの変位を求めると，

$$\begin{aligned}\tilde{P}_x &= (\tilde{P}_A + \tilde{P}_D) - (\tilde{P}_B + \tilde{P}_C) \\ &= \frac{x_0}{w}\left[\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\mathrm{erf}(K)e^{-k^2} - \mathrm{erf}(k)(e^{-k^2} - e^{-K^2})\right) - \frac{\sqrt{2}K}{\pi}e^{-K^2}\right]\end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}\tilde{P}_y &= (\tilde{P}_A + \tilde{P}_B) - (\tilde{P}_C + \tilde{P}_D) \\ &= \frac{y_0}{w}\left[\frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\mathrm{erf}(K)e^{-k^2} - \mathrm{erf}(k)(e^{-k^2} - e^{-K^2})\right) - \frac{\sqrt{2}K}{\pi}e^{-K^2}\right]\end{aligned} \tag{4.31}$$

である．したがって，センサー効率は

$$S_2 = \frac{1}{\sqrt{8\pi}}\left(\mathrm{erf}(K)e^{-k^2} - \mathrm{erf}(k)(e^{-k^2} - e^{-K^2})\right) - \frac{\sqrt{2}K}{\pi}e^{-K^2} \tag{4.32}$$

となる．

4.4　近似のない場合との比較

$P(x, y; x_0, y_0)$ を U_1 で近似せずに直接積分を行なった結果と，近似をして得られた結果 (2.14)〜(2.20) を比較する．

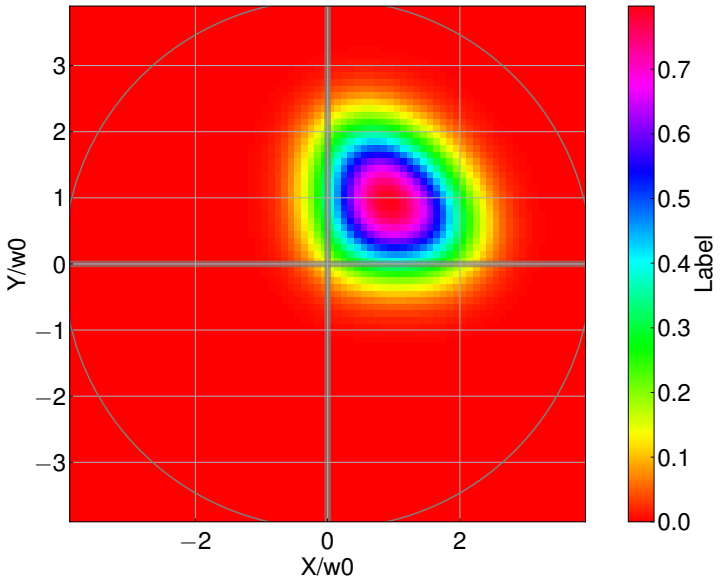

図 20　セグメント A での積分を近似せずに直接計算した結果. 黒線の円は QPD の口径 ($D = 4w$), 黒い帯は QPD のスリット (d=0.1w)

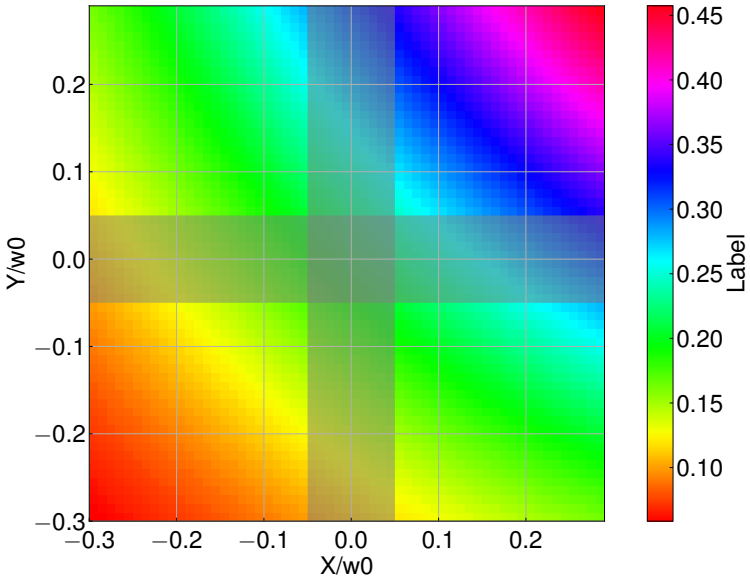

図 21　セグメント A での積分を近似せずに直接計算した結果 (拡大). 黒い帯は QPD のスリット ($d = 0.1w$)

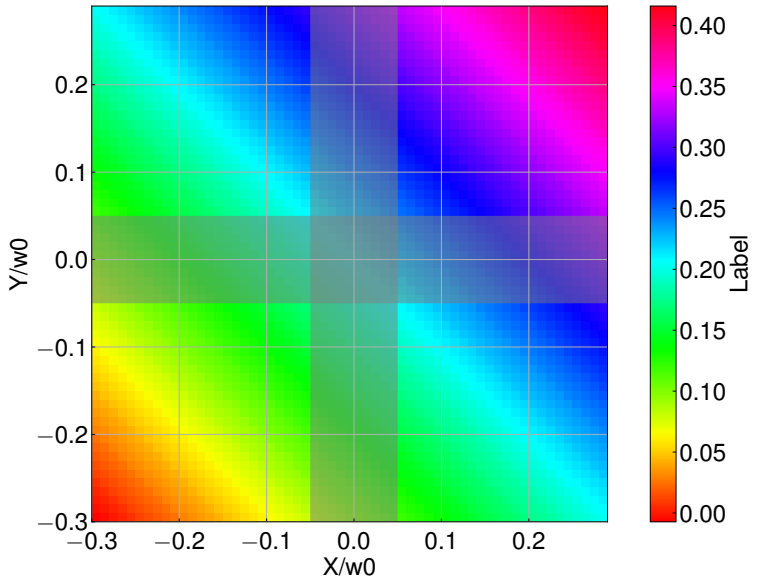

図 22　セグメント A での積分を近似計算した結果．黒い帯は QPD のスリット ($d = 0.1w$)

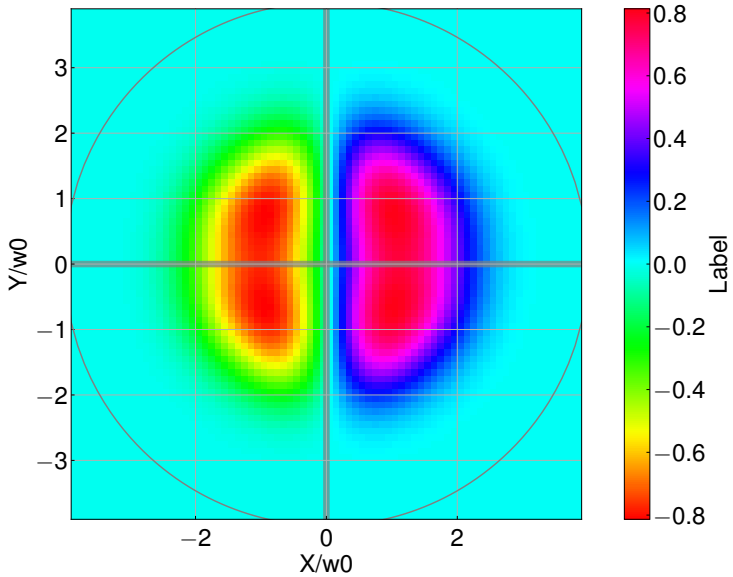

図 23　x 方向の値（直接積分）．黒線の円は QPD の口径 ($D = 4w$)，黒い帯は QPD のスリット ($d = 0.1w$)

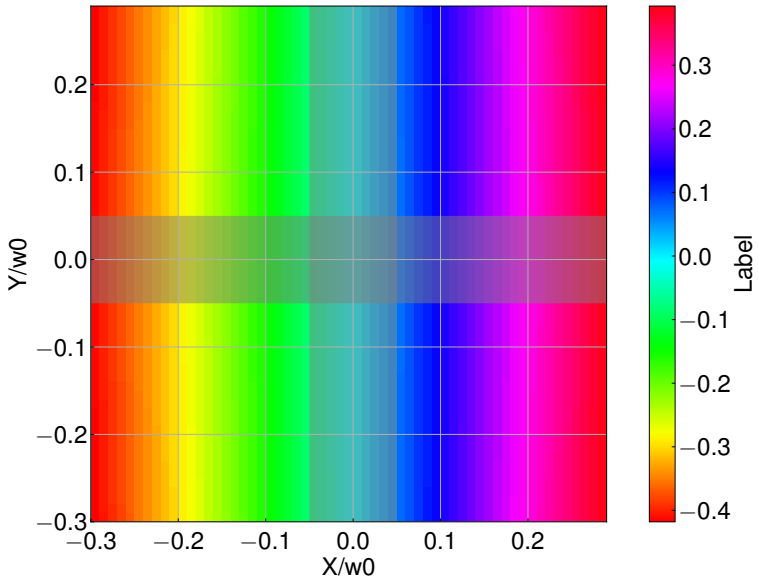

図 24　x 方向の値（直接積分，拡大）．黒い帯は QPD のスリット ($d = 0.1w$)

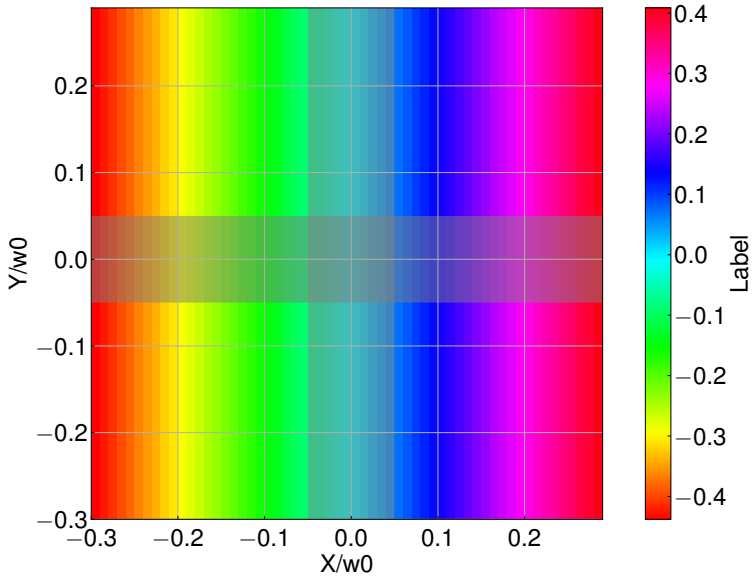

図 25　x 方向の値（近似）．黒い帯は QPD のスリット ($d = 0.1w$)

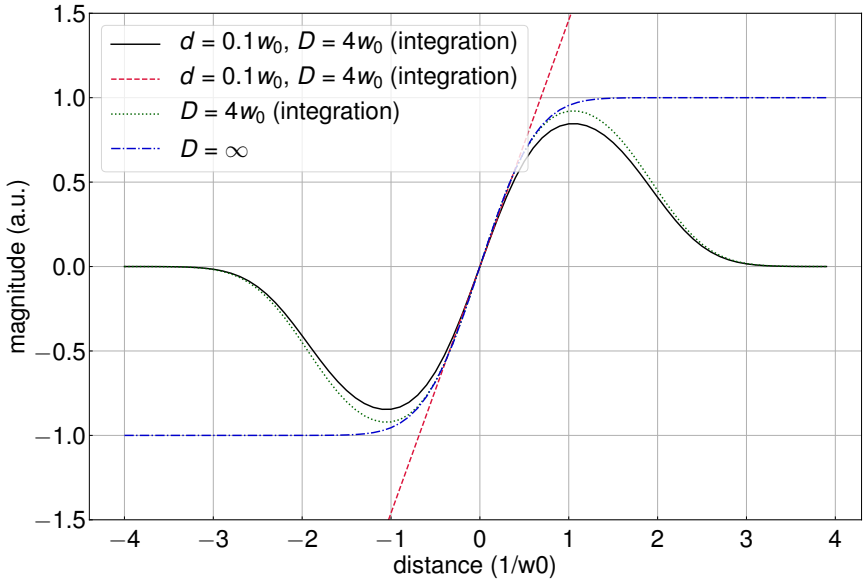

図 26　$y_0 = 0$ での Px の変化．黒線が直接積分した結果，赤線が近似計算した結果 (どちらも $D = 4_w0$，$d = 0.1w$)．緑線がスリットのない場合 ($d = 0$，$D = 4_w0$) で青線が口径が無限大の場合 ($d = 0$，$D = \infty$)

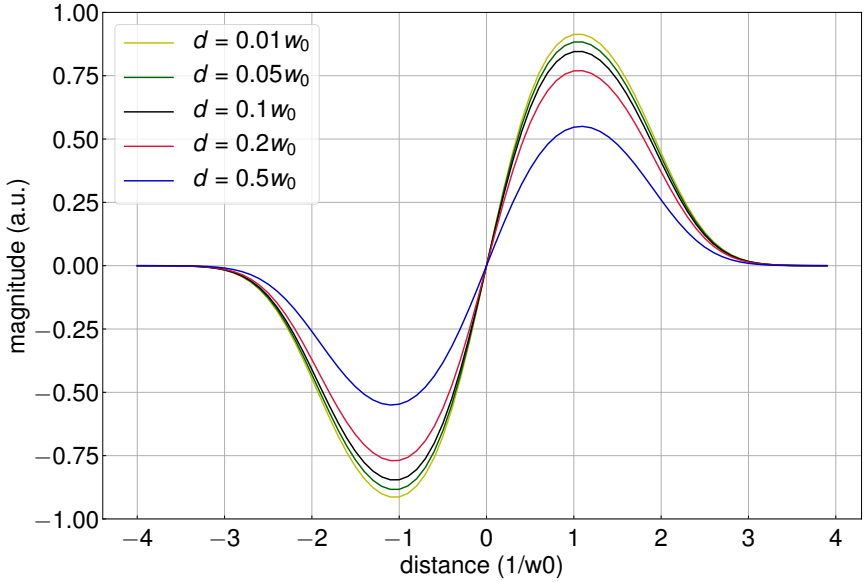

図 27　スリット幅 d を変えたときの，$y_0 = 0$ での Px の変化．QPD の口径は全て $D = 4w$

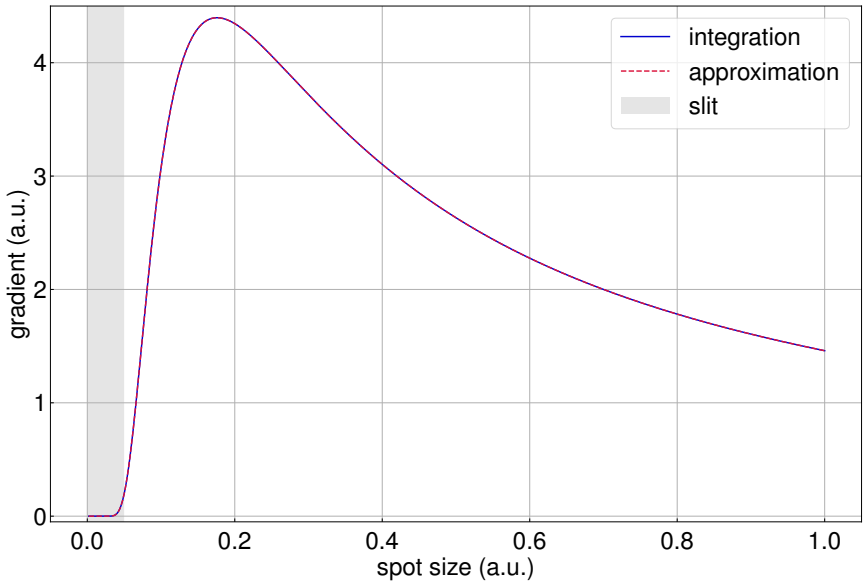

図 28　ビーム径 w を変えたときの，Sx の変化．QPD の口径は $D = 4$，スリット幅は $d = 0.1$ で固定．黒線が直接積分した結果，赤線が近似計算した結果．

スリットがない場合 (図 19) にはビーム径を小さくすれば S_1 はどこまでも大きくなったが，スリット幅を考慮に入れた場合はビーム径を小さくしすぎると S_2 は小さくなり，最大値が存在することがわかる．また近似計算が直接積分した結果を十分再現できていることもわかる．

4.5　実際に使う QPD

実際に使う QPD は，浜松ホトニクスの G6849 である．データーシートによれば，$D = 2$mm，$d = 0.1$mm であるので，この値を用いてビーム径 w を変えたときの効率 S_2 をプロットすると，図 29 のようになる．

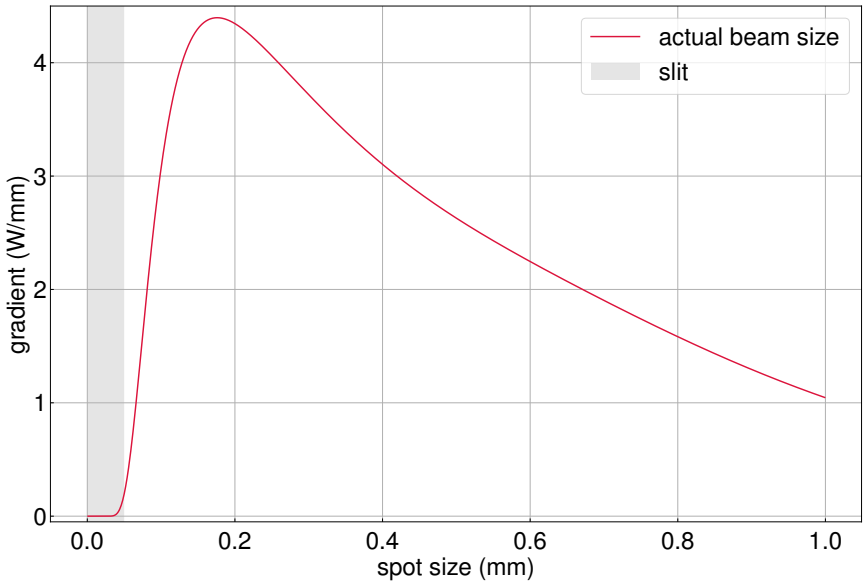

図 29　実際に使う QPD のパラメーターを用いた計算（近似計算）．QPD の口径は $D = 2$mm, スリット幅は $d = 0.1$mm.

これから，おおよそ $w \simeq 180\mu$mm のときに S_2 は最大になる．