モードマッチングの計算メモ

2017 年 8 月 20 日

モードマッチングに関する計算のメモ．[1] を参考にした．

目次

1 Ray Transfer Matrix

まず Ray Transfer Matrix を導入して，近軸近似において電磁波が光学素子によってどう変換されるかを記述する．

1.1 Ray Transfer Matrix

図のように，光線を光軸からの距離 x と光軸とのなす角 θ で表す．この光線が光学素子によって x', θ' に変換されるとき，

$$\begin{pmatrix} x' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

と表す．この M を Ray Transfer Matrix と呼ぶ．M は次の性質を持つ:

- $\det(M) = 1$
- 2 つの光学素子による変化はそれぞれに対応する Ray Transfer Matrix の積で表される．

すなわち Ray Transfer Matrix は群をなす．

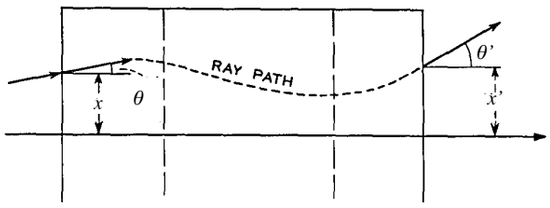

図 1　Ray Transfer Matrix

1.1.1　具体例 1:並進

距離 d だけ並進する場合，$x' = x + d\theta, \theta' = \theta$ であるから

$$\begin{pmatrix} x \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + d\theta \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

よって

$$M_d = \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.3}$$

またこのとき $\det(M_d) = 1$ が成り立つ．

1.1.2　具体例 2:レンズによる屈折

焦点距離 f のレンズによって $x' = x, \theta' = \theta - \frac{x}{f}$ に変換される[*1]から，

$$M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

このときも $\det(M_f) = 1$ が成り立つ．

1.1.3　具体例 3:並進 + レンズ

距離 d だけ進んで焦点距離 f のレンズに入射する場合．並進とレンズの Ray Transfer Matrix をかければ良いから

$$M_{d+f} = M_d M_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

当然だが $\det(M_{d+f}) = 1$ も成り立つ．

1.2　共振器の安定性

共振器は，向かい合った凹面鏡の間を光が何回も反射することで定常波を起こす．これを同じ曲率をもつ凸レンズが繰り返し並んでいるとみなすこともできるから，共振器の 1 往復分を 1 つの Ray Transfer Matrix$M$ で表し，その n 乗を解析することで，共振器の安定性を議論できる．

M の固有値を $\lambda_1, \lambda_2\,(\lambda_1 < \lambda_2)$ とすれば $\det(M) = \lambda_1\lambda_2 = 1$ であるから $\lambda_2 = \frac{1}{\lambda_1}$．これから M を $M = P\Lambda P^{-1}\,(\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2))$ と対角化すれば

$$M^n = P \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_2}^n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} {\lambda_1}^n & 0 \\ 0 & {\lambda_1}^{-n} \end{pmatrix} P^{-1} \tag{1.6}$$

[*1] 証明は付録

従って，$\lambda \in \mathbb{R}$ であれば $\lambda_1 \neq 1$ でない限り M^n の要素は発散する．これより λ_1, λ_2 は複素数.[*2]

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{1.7}$$

とおくと，$\mathrm{Tr}(M) = A + D$，$\det(M) = 1$ であるから特製多項式は

$$\Phi_M(\lambda) = \lambda^2 - (A+D)\lambda - 1 \tag{1.8}$$

固有値は複素数になるから，共振器が安定になる条件は

$$\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 - 1 < 0 \tag{1.9}$$

$$-1 < \frac{A+D}{2} < 1 \tag{1.10}$$

実際の共振器について考える．凹面鏡の曲率をそれぞれ R_1, R_2 とする．それに対応する焦点距離を f_1, f_2 とすれば $f = \frac{R}{2}$ であるから[*3]，共振器 1 往復に相当する Ray Transfer Matrix は

$$\begin{aligned} M &= M_{d+f_2} M_{d+f_1} && (1.11) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix} && (1.12) \\ &= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & 2d - \frac{d^2}{f_1} \\ \frac{d}{f_1 f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{2d}{f_2} + \frac{d^2}{f_1 f_2} \end{pmatrix} && (1.13) \end{aligned}$$

のようになる．従って，共振器が安定になる条件は

$$\frac{1}{2}\left|1 - \frac{d}{f_1} + 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{2d}{f_2} + \frac{d^2}{f_1 f_2}\right| < 1 \tag{1.14}$$

$$-2 < 2 - \frac{2d}{f_1} - \frac{2d}{f_2} + \frac{d^2}{f_1 f_2} < 2 \tag{1.15}$$

$$0 < 4 - \frac{4d}{R_1} - \frac{4d}{R_2} + \frac{4d^2}{R_1 R_2} < 4 \tag{1.16}$$

$$0 < \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right) < 1 \tag{1.17}$$

[*2] $\lambda_1 = \lambda_2\,(A + D = \pm 1)$ のときはこの議論は成り立たない．対角化はできずジョルダン標準形にしかならないが，いずれにせよ $n \to \infty$ のとき M^n の要素が発散するから以下の議論には影響しない．

[*3] 証明は補遺

2　共振器の空間モード

上で定義した Ray Transfer Matrix を用いて共振器内の Gaussian Beam の空間モードを議論する．

2.1　Gaussian Beam の q parameter

Gaussian Beam は以下の形で与えられる．詳細は [1] などを参照．

$$E(x,y,z) = \psi_{lm}(x,y,z)e^{i\omega t} \tag{2.1}$$

$$\psi_{lm} = U_l(x,z)U_m(y,z)e^{-ikz+i(l+m+1)\zeta(z)} \tag{2.2}$$

$$\times \exp\left\{-i\frac{kr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{w(z)^2}\right\} \tag{2.3}$$

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z\lambda}{\pi {w_0}^2}\right)^2}, \quad R(z) = z\left\{1+\left(\frac{\pi {w_0}^2}{\lambda z}\right)^2\right\} \tag{2.4}$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\left(\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}\right) \tag{2.5}$$

$$U_l(x,z) = \left(\frac{2}{\pi w(x)^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \tag{2.6}$$

ここで，q parameter を次のように定義する:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \tag{2.7}$$

$$q = z + i\frac{\pi {w_0}^2}{\lambda} \tag{2.8}$$

q_1 で表される Gaussian Beam が Ray Transfer Matrix$M$ で表される光学素子によって q_2 に変形されるとき，q_2 は

$$\begin{pmatrix} q_2 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ a \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

を a について解くことで与えられる．すなわち

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \tag{2.10}$$

となる．

2.2　共振器内での q parameter の変換

Gaussian Beam が共振器で共振するには，鏡の間を往復するときにレーザーの形が元に戻らなければならない．すなわち，1 往復したときに同じ q parameter になれば良い．さらに鏡の往復は，前節のように凸レンズの繰り返しで記述できる．

1 往復に相当する Ray Transfer Matrix を

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

とすると，共振する条件は $q_1 = q_2 = q$ であるから (2.10) より

$$q = \frac{Aq + B}{Cq + D} \tag{2.12}$$

$$Cq^2 + (D - A)q - B = 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{B}{q^2} - \frac{D - A}{q} - C = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} \pm \frac{\sqrt{(D - A)^2 + 4BC}}{2B} \tag{2.15}$$

ここで $\det(M) = AD - BC = 1$ より

$$(D - A)^2 + 4BC = A^2 - 2AD + D^2 + 4BC \tag{2.16}$$

$$= A^2 + 2AD + D^2 - 4(AD - BC) \tag{2.17}$$

$$= (A + D)^2 - 4 \quad (< 0) \tag{2.18}$$

であることを用いれば,

$$\frac{1}{q} = \frac{D - A}{2B} \pm i\frac{\sqrt{4 - (A + D)^2}}{2B} \tag{2.19}$$

となる (+ の解は物理的にありえないから除いた．)．これと (2.7) を比較して，鏡の位置 ($z = z_{end}$) における R, w の関係は

$$R(z_{end}) = \frac{2B}{D - A} \tag{2.20}$$

$$\frac{\pi w(z)^2}{\lambda} = \frac{2B}{\sqrt{(A + D)^2 - 4}} \tag{2.21}$$

2.3 共振器内の共振モード

実際の共振器におけるレーザーのモードを求める．

2.3.1 曲率半径が等しい共振器

どちらの鏡も曲率半径が R_0 の凹面鏡の共振器を考える．

図 2 のように Ray Transfer Matrix を定義すると，焦点距離は $f = \frac{R_0}{2}$ であるから,

$$M_1 = M_{d+f} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix} \tag{2.22}$$

である．また対称性から，ウェストの位置は共振器の中心で $z_{end} = \frac{z}{2}$ となる．よって

$$R\left(-\frac{d}{2}\right) = \frac{2d}{1 - \frac{d}{f} - 1} = -2f = -R_0 \tag{2.23}$$

$$R\left(\frac{d}{2}\right) = R_0 \tag{2.24}$$

すなわち，鏡の位置でのビームの曲率は鏡のそれと一致する．ビーム半径については

$$\frac{\pi w\left(-\frac{d}{2}\right)^2}{\lambda} = \frac{2d}{\sqrt{4 - \left(1 - \frac{d}{f} + 1\right)^2}} \tag{2.25}$$

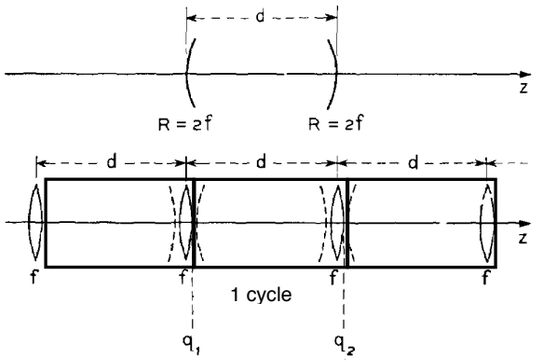

図 2　曲率が等しい共振器

であり，

$$\sqrt{4-\left(1-\frac{d}{f}+1\right)^2}=\sqrt{4-\left(2-\frac{2d}{R_0}\right)^2}=2\sqrt{1-\left(1-\frac{d}{R_0}\right)^2} \tag{2.26}$$

$$=2\sqrt{\frac{2d}{R_0}-\left(\frac{d}{R_0}\right)^2} \tag{2.27}$$

より

$$w\left(\frac{d}{2}\right)^2=\frac{\lambda}{\pi}\frac{2d}{2\sqrt{\frac{2d}{R_0}-\left(\frac{d}{R_0}\right)^2}}=\frac{\lambda R_0}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{2R_0}{d}-1}} \tag{2.28}$$

となる．ここで，(2.4) から

$$\frac{\lambda z}{\pi {w_0}^2}=\frac{\pi w(z)^2}{\lambda R(z)} \tag{2.29}$$

である．これより

$$\frac{\lambda\cdot\frac{d}{2}}{\pi {w_0}^2}=\frac{\pi w(\frac{d}{2})}{\lambda R(\frac{d}{2})}=\frac{\pi}{\lambda R_0}\frac{\lambda R_0}{\pi}\frac{1}{\sqrt{\frac{2R_0}{d}-1}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{2R_0}{d}-1}} \tag{2.30}$$

よって

$${w_0}^2=\frac{\lambda d}{2\pi}\sqrt{\frac{2R_0}{d}-1}=\frac{\lambda}{2\pi}\sqrt{d(2R_0-d)} \tag{2.31}$$

となる．

次に，(2.5) から

$$\tan\zeta\left(\frac{d}{2}\right)=\frac{\lambda\cdot\frac{d}{2}}{\pi}\frac{2\pi}{\lambda}\frac{1}{\sqrt{d(2R_0-d)}}=\frac{d}{\sqrt{d(2R_0-d)}} \tag{2.32}$$

$$\zeta\left(\frac{d}{2}\right)=\tan^{-1}\frac{d}{\sqrt{d(2R_0-d)}} \tag{2.33}$$

また

$$\cos\zeta=\sqrt{\frac{d(2R_0-d)}{d(2R_0-d)+d^2}}=\sqrt{\frac{2R_0-d}{2R_0}}=\sqrt{1-\frac{d}{2R_0}} \tag{2.34}$$

であるから，

$$\cos 2\zeta=2\cos\zeta^2-1=1-\frac{d}{R_0} \tag{2.35}$$

すなわち

$$\zeta\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(1 - \frac{d}{R_0}\right) \tag{2.36}$$

ここで，位相について共振する条件を考える．対称性より，$z = \frac{d}{2}$ で位相が $\frac{n+1}{2}\pi$ だけ進めば良いから

$$k\frac{d}{2} - (1+l+m)\zeta\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{n+1}{2}\pi \tag{2.37}$$

$$kd - (1+l+m)\cos^{-1}\left(1 - \frac{d}{R_0}\right) = (n+1)\pi \tag{2.38}$$

が満たされれば良い．さらに，free spectral range $\nu_0 = \frac{c}{2d}$ を用いて，

$$\frac{2\pi\nu}{c}d - (1+l+m)\cos^{-1}\left(1 - \frac{d}{R_0}\right) = (n+1)\pi \tag{2.39}$$

$$\frac{\nu}{\nu_0} = n + 1 + \frac{1}{\pi}(1+l+m)\cos^{-1}\left(1 - \frac{d}{R_0}\right) \tag{2.40}$$

となる．これが，周波数 ν の TEMlm モードが共振する条件である．

2.3.2 曲率の違う鏡同士の共振器

鏡の曲率を R_1, R_2，対応する焦点距離を f_1, f_2 とする．

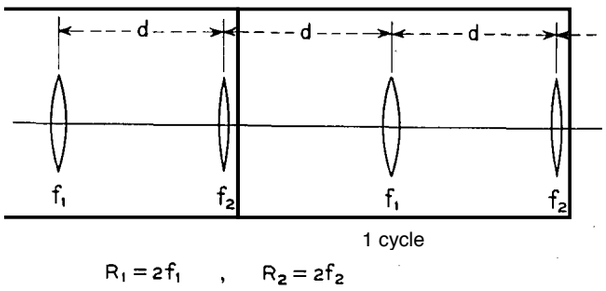

図 3　曲率が異なる共振器

$f_i = \frac{R_i}{2}$ である．図 3 のように Ray Transfer Matrix を定義すると，

$$M_2 = M_{d+f_2}M_{d+f_1} = \begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_2} & 1 - \frac{d}{f_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f_1} & 1 - \frac{d}{f_1} \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{d}{f_1} & 2d - \frac{d}{f_1} \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{2d}{f_2} + \frac{d^2}{f_1 f_2} \end{pmatrix} \tag{2.42}$$

である．これから

$$D - A = 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{2d}{f_2} + \frac{d^2}{f_1 f_2} - \left(1 - \frac{d}{f_1}\right) = -\frac{d}{f_2}\left(2 - \frac{d}{f_1}\right) \tag{2.43}$$

$$4 - (A+D)^2 = 4 - \left(1 - \frac{d}{f_1} + 1 - \frac{d}{f_1} - \frac{2d}{f_2} + \frac{d^2}{f_1 f_2}\right)^2 \tag{2.44}$$

$$= 4 - \left(2 - \frac{2d}{f_1} - \frac{2d}{f_2} - \frac{d^2}{f_1 f_2}\right)^2 = 4 - \left(2 - \frac{4d}{R_1} - \frac{4d}{R_2} + \frac{4d^2}{R_1 R_2}\right)^2 \tag{2.45}$$

$$= \left(4 - \frac{4d}{R_1} - \frac{4d}{R_2} + \frac{4d^2}{R_1 R_2}\right)\left(\frac{4d}{R_1} + \frac{4d}{R_2} - \frac{4d^2}{R_1 R_2}\right) \tag{2.46}$$

$$= 16d\left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right)\frac{R_1 + R_2 - d}{R_1 R_2} \tag{2.47}$$

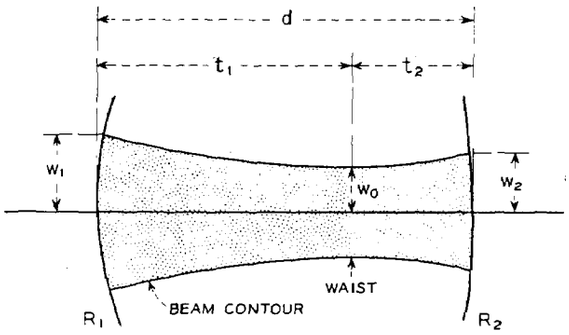

図 4　共振器のビームウェストの位置

また図 4 のようにビームウェストの位置を定めれば，$z_{end} = -t_2$ である．$z = -t_2$ での曲率，ビーム径は

$$R(-t_2) = \frac{2B}{D-A} = 2\frac{2d - \frac{d^2}{f_1}}{-\frac{d}{f_2}\left(2 - \frac{d}{f_1}\right)} \tag{2.48}$$

$$= -2f_2 = -R_2 \tag{2.49}$$

$$w(-t_2)^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{(2B)^2}{4-(A+D)^2} \tag{2.50}$$

$$= \left(\frac{2\lambda}{\pi}\right)^2 \left(2d - \frac{2d^2}{R_1}\right)^2 \frac{R_1 R_2}{16d\left(1-\frac{1}{R_1}\right)\left(1-\frac{1}{R_2}\right)(R_1+R_2-d)} \tag{2.51}$$

$$= \frac{d\lambda^2}{\pi^2}\frac{1-\frac{1}{R_1}}{1-\frac{1}{R_2}}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2-d} \tag{2.52}$$

$$= \left(\frac{\lambda R_2}{\pi}\right)^2 \frac{R_1-d}{R_2-d}\frac{d}{R_1+R_2-d} \tag{2.53}$$

となる．M_2 の定義から，$R(-t_2)$ は曲率 R_2 のレンズを通った後のビームの曲率だが，先の例と同様にレンズ自体の曲率と一致している．また添字の 1 と 2 を入れ替えれば，反対側のレンズについても同様のことが言える．

次に，ウェストの位置を求める．式 (2.29) から

$$\frac{\lambda t_2}{\pi {w_0}^2} = \frac{\pi w(t_2)^2}{\lambda R(t_2)} \tag{2.54}$$

$$\frac{\pi^2 {w_0}^2}{\lambda^2} = \frac{R(t_2)t_2}{w(t_2)^2} \tag{2.55}$$

(ここで $R(-z) = R(z)$, $w(z) = w(-z)$ を用いた) 式 (2.49)，(2.53) を代入して

$$\begin{aligned}\frac{R(t_2)t_2}{w(t_2)^2} &= R_2 t_2 \frac{\pi}{\lambda R_2}\sqrt{\frac{R_2-d}{R_1-d}\frac{R_1+R_2-d}{d}} \\ &= \frac{\pi t_2}{\lambda}\sqrt{\frac{R_2-d}{R_1-d}\frac{R_1+R_2-d}{d}}\end{aligned} \tag{2.56}$$

同様に，

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2 {w_0}^2}{\lambda^2} &= \frac{R(t_1)t_1}{w(t_1)^2} \\ &= \frac{\pi t_1}{\lambda}\sqrt{\frac{R_1-d}{R_2-d}\frac{R_1+R_2-d}{d}}\end{aligned} \tag{2.57}$$

これらから

$$\frac{\lambda t_1}{\pi}\sqrt{\frac{R_1-d}{R_2-d}\frac{R_1+R_2-d}{d}} = \frac{\lambda t_2}{\pi}\sqrt{\frac{R_2-d}{R_1-d}\frac{R_1+R_2-d}{d}} \tag{2.58}$$

$$t_1(R_1-d) = t_2(R_2-d) \tag{2.59}$$

これと $t_1+t_2=d$ から，

$$t_1 = \frac{d(R_2-d)}{R_1+R_2-2d} \tag{2.60}$$

$$t_2 = \frac{d(R_1-d)}{R_1+R_2-2d} \tag{2.61}$$

と，ウェストの位置が定まった．これを式 (2.57) に代入して

$${w_0}^2 = \frac{\lambda}{\pi}\frac{d(R_2-d)}{R_1+R_2-2d}\sqrt{\frac{R_1-d}{R_2-d}\frac{R_1+R_2-d}{d}} \tag{2.62}$$

$${w_0}^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^2 \frac{d(R_1-d)(R_2-d)(R_1+R_2-d)}{(R_1+R_2-2d)^2} \tag{2.63}$$

となる．

次に，位相について共振する条件を考える．式 (2.5) から

$$\begin{aligned}\tan\zeta(t_1) &= \frac{\lambda t_2}{\pi {w_0}^2} = \frac{\pi w(t_1)^2}{\lambda R(t_1)} \\ &= \frac{\pi}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{\pi}\sqrt{\frac{R_2-d}{R_1-d}\frac{d}{R_1+R_2-d}} \\ &= \sqrt{\frac{R_2-d}{R_1-d}\frac{d}{R_1+R_2-d}}\end{aligned} \tag{2.64}$$

同様に，

$$\tan\zeta(t_2) = \sqrt{\frac{R_1-d}{R_2-d}\frac{d}{R_1+R_2-d}} \tag{2.65}$$

ビームが共振するには，$z=-t_1$ から $z=t_2$ へ進む間に位相が $(n+1)\pi$ 進めばいいから

$$[kt_2-(1+l+m)\zeta(t_2)]-[k(-t_2)-(1+l+m)\zeta(-t_2)] = (n+1)\pi \tag{2.66}$$

$$k(t_1+t_2)-(1+l+m)[\zeta(t_2)-\zeta(-t_1)] = (n+1)\pi \tag{2.67}$$

ここで $t_1+t_2=d$，$\zeta(z)=-zeta(-z)$ より

$$kd-(1+l+m)[\zeta(t_1)+\zeta(t_2)] = (n+1)\pi \tag{2.68}$$

FSR $\nu_0=\frac{c}{2d}$ を用いて

$$\frac{\nu}{\nu_0} = n+1+\frac{1}{\pi}(1+l+m)[\zeta(t_1)+\zeta(t_2)] \tag{2.69}$$

となる．

ところで，

$$\tan[\zeta(t_1)+\zeta(t_2)] = \frac{\tan\zeta(t_1)+\tan\zeta(t_2)}{1-\tan\zeta(t_1)\tan\zeta(t_2)} = \frac{\xi+\eta}{1-\xi\eta} \tag{2.70}$$

$(\xi = \tan\zeta(t_1)\,, \eta = \tan\zeta(t_2))$

$$\begin{aligned}\cos[\zeta(t_1)+\zeta(t_2)] &= \frac{1-\xi\eta}{\sqrt{(1-\xi\eta)^2+(\xi+\eta)^2}} \\ &= \frac{1-\xi\eta}{\sqrt{1-2\xi\eta+\xi^2\eta^2+\xi^2+2\xi\eta+\eta^2}} \\ &= \frac{1-\xi\eta}{\sqrt{(1+\xi^2)(1+\eta^2)}}\end{aligned} \tag{2.71}$$

だが,

$$\begin{aligned}1+\xi^2 = 1+\tan^2\zeta(t_1) &= 1+\frac{R_2-d}{R_1-d}\frac{d}{R_1+R_2-d} \\ &= \frac{(R_1-d)(R_1+R_2-d)+(R_2-d)d}{(R_1-d)(R_1+R_2-d)} \\ &= \frac{R_1^2-dR_1+R_1R_2-dR_2-dR_1+d^2+dR_2-d^2}{(R_1-d)(R_1+R_2-d)} \\ &= \frac{R_1^2+R_1R_2-2dR_1}{(R_1-d)(R_1+R_2-d)} = \frac{R_1(R_1+R_2-2d)}{(R_1-d)(R_1+R_2-d)}\end{aligned} \tag{2.72}$$

同様に

$$1+\eta^2 = \frac{R_2(R_1+R_2-2d)}{(R_2-d)(R_1+R_2-d)} \tag{2.73}$$

一方

$$\begin{aligned}1-\xi\eta &= 1-\tan\zeta(t_1)\tan\zeta(t_2) \\ &= 1-\sqrt{\frac{R_2-d}{R_1-d}\frac{d}{R_1+R_2-d}}\sqrt{\frac{R_1-d}{R_2-d}\frac{d}{R_1+R_2-d}} \\ &= 1-\frac{d}{R_1+R_2-d} = \frac{R_1+R2-2d}{R_1+R_2-d}\end{aligned} \tag{2.74}$$

これらより

$$\begin{aligned}\cos[\zeta(t_1)+\zeta(t_2)] &= \frac{R_1+R2-2d}{R_1+R_2-d}\sqrt{\frac{(R_1-d)(R_1+R_2-d)}{R_1(R_1+R_2-2d)}}\sqrt{\frac{(R_2-d)(R_1+R_2-d)}{R_2(R_1+R_2-2d)}} \\ &= \sqrt{\frac{(R_1-d)(R_2-d)}{R_1R_2}} = \sqrt{\left(1-\frac{d}{R_1}\right)\left(1-\frac{d}{R_2}\right)}\end{aligned} \tag{2.75}$$

よって,

$$\zeta(t_1)+\zeta(t_2) = \cos^{-1}\sqrt{\left(1-\frac{d}{R_1}\right)\left(1-\frac{d}{R_2}\right)} \tag{2.76}$$

これを用いれば，共振する条件は

$$\frac{\nu}{\nu_0} = n+1+\frac{1}{\pi}(1+l+m)\cos^{-1}\sqrt{\left(1-\frac{d}{R_1}\right)\left(1-\frac{d}{R_2}\right)} \tag{2.77}$$

と書ける．このとき，$\frac{1}{\pi}\cos^{-1}\sqrt{\left(1-\frac{d}{R_1}\right)\left(1-\frac{d}{R_2}\right)}$ が整数にならないように共振器を組めば，モードを選択して共振させることができる．

付録A　レンズの屈折による光線の変換

付録B　凹面鏡の曲率半径と焦点距離

参考文献

[1] H. Kogelnik and T. Li, Kogelnik, Herwig, and Tingye Li. "Laser beams and resonators." Proc. IEEE, **54**, 1312-1329(1966)
Gaussian Beam の基礎的なことが書かれている．HG モードや LG モードについては結果だけ書いてある．

[2] 森脇成典，重力波をとらえる, 中村卓, 三尾典克, 大橋正健 編著, 京都大学学術出版会, 1988, p.339-361
Gaussian Beam の細かい計算いついていろいろ書いてある．