干渉計 計算メモ

2017年11月27日

干渉計回りの計算のメモ.細かい計算は [1], [3] を参考にした. Finesse を使った近似などは [2], [4], [5] など を参照した.変調を使った制御に関しては [4], [5] を参考にした.

目次

1	Michelson 干涉計	2
1.1	基本的なセットアップ...................................	2
1.2	動作点	3
1.3	SN 比	4
1.4	重力波への応答	4
1.5	変調	7
1.6	信号 sideband	9
2	Fabry-Perot 共振器	11
2.1	基本的なセットアップ...................................	11
2.2	共振器の特性	12
2.3	共振器長の変化の応答....................................	20
2.4	重力波への応答・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	24
2.5	信号 sideband	26
2.6	共振器長の制御	28
3	Fabry-Perot Michelson 干渉計	31
3.1	基本セットアップ	31
3.2	共振器長の変化の応答....................................	31
3.3	重力波への応答・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・	32
3.4	信号取得	33
3.5	Power recycling	34
4	量子雑音	37
4.1	古典的描像	37
4.2	Shot noise	38
4.3	Radiation pressure noise	41
4.4	Michelson 干渉計で radiation pressure noise は見えるか?	44

А	詳細な計算

A.1	反射光の複素平面上軌跡....................................	45
A.2	sideband 描像の行列計算	45
A.3	入射光の揺らぎから反射光の揺らぎへの伝達関数................................	47
В	Michelson 干渉計の基線長変動の周波数応答	48
С	共振器内電場は定在波か	51
C C.1	共振器内電場は定在波か 定在波	51 51

1 Michelson 干涉計

基本としてまず Michelson 干渉計を考える.

1.1 基本的なセットアップ



図 1.1 基本的な Michelson 干渉計の構成

図 1.1 のような構成を考える. 左から入射した光は BS で上 (x 軸) と右 (y 軸) に分離され,それぞれの光が EM で反射されて BS で再結合する.入射した電場を $E_0e^{-i\Omega t}$ とすると,鏡の反射率の符号に注意して

$$E_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega(t - 2l_x/c)}$$
(1.1)

$$E_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega(t - 2l_y/c)}$$
(1.2)

$$E_{\rm AS} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_x - \frac{1}{\sqrt{2}} E_y = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\Omega t} (e^{2ikl_x} - e^{2ikl_y})$$
(1.3)

$$E_{\text{SYM}} = \frac{1}{\sqrt{2}}E_x + \frac{1}{\sqrt{2}}E_y = -\frac{1}{2}E_0e^{-i\Omega t}(e^{2ikl_x} + e^{2ikl_y})$$
(1.4)

ここで $l_{\pm} = l_x \pm l_y$ とおくと

$$E_{\rm AS} = -iE_0 e^{-i\Omega t + ikl_+} \sin kl_- \tag{1.5}$$

$$E_{\rm SYM} = -E_0 e^{-i\Omega t + ikl_+} \cos kl_- \tag{1.6}$$

PD は光のパワーを見るから、それぞれのポートで得られる信号は

$$P_{\rm AS} = |E_{\rm AS}|^2 = P_0 \sin^2 k l_- \tag{1.7}$$

$$P_{\rm SYM} = |E_{\rm SYM}|^2 = P_0 \cos^2 k l_- \tag{1.8}$$

ただし $P_0 = |E_0|^2$. ここで l_x, l_y には周波数依存性がないとしたが、周波数依存性を持つ場合にも同様の結果が 得られる. 詳細は補遺参照.

実際には光を完全に干渉させることは難しく、光のロスのために光量の最大値 $P_{max} \neq P_0$ と最小値 $V_{min} \neq 0$ が存在する。干渉の度合いを表すものとして Visibility*C* が定義される:

$$C = \frac{P_{max} - P_{min}}{P_{max} + P_{min}} \tag{1.9}$$

理想的な状況 $(P_{max} = P_0, P_{min} = 0)$ では C = 1 になる.以下, Visibility は理想的だとして計算する.

1.2 動作点

実際に干渉計から信号を取得する際には DC 成分 l_- と変動成分 δl_- を分離して考え、 l_- が一定になるように 制御する.式 (1.7)、(1.8) を $\delta l_- \ll 1$ として 1 次で展開すると

$$P_{\rm AS} = P_0(\sin^2 k l_- + 2k\delta l_- \sin k l_- \cos k l_-) \tag{1.10}$$

$$P_{\rm SYM} = P_0(\cos^2 k l_- - 2k\delta l_- \sin k l_- \cos k l_-)$$
(1.11)

となる. ここで $2kl_{-} = 2n\pi$ になる時を Dark fringe, $kl_{-} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ になる時を Mid fringe, $kl_{-} = (2n+1)\pi$ になる時を Bright fringe と言う. Bright fringe の時にはレーザー光は全て AS に現れ, Drak fringe の時は全て SYM に帰り, Mid fringe の時はどちらのポートにも同じだけの光量が帰る.

Mid fringe の場合は干渉計の応答がもっとも線形に近いためダイナミックレンジが広い. 一方 Bright fringe, Dark fringe の場合はそのままでは信号が線形にならないため、工夫を要する. また後述するように、Shot noise は Bright > Mid > Dark の順に大きくなるため、基本的には Mid fringe か Dark fringe で動作させることが多 い. 以下、MId fringe と Dark fringe の場合について見ていく.

1.2.1 Mid fringe

式 (1.10) に $kl_{-} = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ を代入して

$$P_{\rm AS} = P_0 \left(\frac{1}{2} + 2k\delta l_- \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{P_0}{2} (1 + 2k\delta l_-)$$
(1.12)

となる.したがって,AS で得られた信号の振動中心がちょうど 0 になるように Offset を加えれば Mid fringe になる.SYM についても同様に

$$P_{\rm SYM} = \frac{P_0}{2} (1 - 2k\delta l_-) \tag{1.13}$$

となる.*1

1.2.2 Dark fringe

式 (1.10) に $kl_{-} = 2n\pi$ を代入して

$$P_{\rm AS} = P_0(0 - 2kl_- \cdot 0 \cdot 1) = 0 \tag{1.14}$$

^{*1} AS の方を正にしたから SYM の方は負になる.

と Mid fringe とは違い1次では信号が取れない。2次まで展開すると、

$$P_{\rm AS} = P_0 \left(\frac{1}{2} (kl_-)^2 \frac{d^2}{d\varphi^2} \sin^2 kl_-|_{kl_-=2n\pi} \right)$$
(1.15)

$$= P_0 \left(\frac{1}{2} (kl_-)^2 \cdot 2\cos 2kl_-|_{kl_-} = 2n\pi \right)$$
(1.16)

$$=P_0(kl_-)^2 (1.17)$$

となる. 2次だと *l*_の符号がわからず,また *l*_がそもそも小さいため得られる信号が非常に小さくなってしまう.そこで線形な信号を取得するために,レーザーに位相変調を加えてビートを生じさせる方法をとる.

1.3 SN比

古典的には光の強度は無限に精度よくすることができるが、量子論的には揺らぎが生じる.したがって、PD に入射するレーザー光にはパワーの平方根に比例した揺らぎがあることになる.これを用いて各動作点における *P*_{AS} の SN 比を考える.

 $kl_{-} = \varphi, \ k\delta l_{-} = \delta \varphi$ とおくと, $P_{AS} = P_0(\sin^2 \varphi + 2\delta \varphi \sin \varphi \cos \varphi)$ とかける. 信号は $\delta \varphi$ に比例する部分で あるから $S \propto 2P_0 \sin \varphi \cos \varphi$) である. 雑音は強度の DC 成分に比例するから $N \propto \sqrt{P_0 \sin^2 \varphi}$ である. よって

$$\frac{S}{N} \propto \frac{2P_0 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{P}} = \frac{2P_0 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{P_0 \sin^2 \varphi}}$$
(1.18)

$$\propto 2\cos\varphi \tag{1.19}$$

Dark fringe では $\varphi = 2n\pi$ で $S/N = \sqrt{2}$, Mid fringe では $\varphi = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ で S/N = 1, Bright fringe では $\varphi = 2\pi + \frac{\pi}{2}$ で S/N = 0 である. したがって, SN 比は Dark fringe がもっともよく, MId fringe がその次に良 い. また AS が Dark の時は SYM は Bright になっているため, AS を Dark にしている時は SYM では信号が雑 音で埋もれてしまう. 一方 AS を Mid にすれば SYM も Mid になるため, 両ポートからの信号を利用すれば SN 比を上げることもできる. それぞれのポートの出力の差を取ると,

 $P_{diff} = P_{\rm AS} - P_{\rm SYM} = P_0(\sin^2\varphi + 2\delta\varphi\sin\varphi\cos\varphi) - P_0(\cos^2\varphi - 2\delta\varphi\sin\varphi\cos\varphi) = P_0(-\cos^2\varphi + 4\delta\varphi\sin\varphi\cos\varphi)$ (1.20)

で、得られる信号は2倍になる.また雑音は各ポートでの雑音の寄与を考えるから、各ポートで無相関だとすれば $\sqrt{2}$ 倍され、全体として SN 比は $\sqrt{2}$ 倍になる.したがって mid でこの方法をとれば SN 比を Dark と同程度まで上げることができる.

しかし,実際のところは Dark を使う方が良い. Dark の場合はすべてのレーザーが SYM に戻るため,これを打ち返すことで実効的に干渉計内のパワーを上げることができるからである (Power recycling). Power recycling については後述する.

1.4 重力波への応答

+ モードの重力波 $h = h_0 \cos \omega t$ が z 軸方向から飛来したとする. proper distance ds^2 は

$$ds^{2} = -c^{2}dt^{2} + (1+h)dx^{2} + (1-h)dy^{2} + dz^{2}$$
(1.21)

x腕の光の動きで考えるとdy = dz = 0であるから

$$0 = -c^2 dt^2 + (1+h)dx^2 \tag{1.22}$$

$$dx = \pm \frac{cdt}{\sqrt{1+h}} \tag{1.23}$$

 $h \gg 1$ と仮定して*2

$$dx \simeq \pm c \left(1 - \frac{1}{2}h\right) dt \tag{1.24}$$

行きの場合を +, 帰りの場合を – とする. BS を原点に取ると, EM の座標は $(l_x, 0, 0)$ である. 光が BS を出発 した時刻を t_0 , EM に到達した時刻を t_1 , BS に帰ってきた時刻を t_2 とすれば,式 (1.24) を積分して

$$l_x = c \int_{t_0}^{t_1} dt (1 - \frac{1}{2}h_0 \cos \omega t) = c(t_1 - t_0) - \frac{ch_0}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \cos \omega t$$
(1.25)

$$-l_x = -c \int_{t_1}^{t_2} dt (1 - \frac{1}{2}h_0 \cos \omega t) = -c(t_1 - t_0) + \frac{ch_0}{2} \int_{t_1}^{t_2} dt \cos \omega t$$
(1.26)

行きと帰りを足して

$$2l_x = c(t_2 - t_0) - \frac{ch_0}{2} \int_{t_0}^{t_2} dt \cos \omega t$$
(1.27)

$$t_0 = t_2 - \frac{2l_x}{c} - \frac{h_0}{2} \int_{t_0}^{t_2} dt \cos \omega t$$
 (1.28)

 h_0 の一次で考えているから、積分区間の t_1 を $t_2 - \frac{2l_x}{c}$ で近似して

$$t_0 = t_2 - \frac{2l_x}{c} - \frac{h_0}{2} \int_{t_2 - 2l_x/c}^{t_2} dt \cos \omega t$$
(1.29)

積分は

$$\int_{t_2 - 2l_x/c}^{t_2} dt \cos \omega t = \frac{1}{\omega} \left[\sin \omega t_2 - \sin \omega \left(t_2 - \frac{2l_x}{c} \right) \right]$$
(1.30)

$$= \frac{2}{\omega} \sin \omega \left(\frac{t_2 - (t_2 - \frac{2l_x}{c})}{2} \right) \cos \omega \left(\frac{t_2 + (t_2 - \frac{2l_x}{c})}{2} \right)$$
(1.31)

$$= \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega l_x}{c} \cos \omega \left(t_2 - \frac{l_x}{c} \right) \tag{1.32}$$

であるから

$$t_0 = t_2 - \frac{2l_x}{c} - \frac{h_0}{\omega} \sin \frac{\omega l_x}{c} \cos \omega \left(t_2 - \frac{l_x}{c} \right)$$
(1.33)

sinc 関数でもう少し綺麗にすると

$$t_0 = t_2 - \frac{2l_x}{c} - \frac{l_x}{c}\operatorname{sinc}\frac{\omega l_x}{c}h\left(t_2 - \frac{l_x}{c}\right)$$
(1.34)

これを用いると、前節の E_x は

$$E_x = E_0 e^{-i\Omega t_0} = E_0 e^{-i\Omega t} \exp\left[2ikl_x + i\frac{\Omega l_x}{c}\operatorname{sinc}\frac{\omega l_x}{c}h\left(t - \frac{l_x}{c}\right)\right]$$
(1.35)

とかける. (ただし $t_2 \rightarrow t$ にした.) y 腕についてはhの符号を逆にすればいいから

$$E_y = E_0 e^{-i\Omega t} \exp\left[2ikl_x - i\frac{\Omega l_x}{c}\operatorname{sinc}\frac{\omega l_x}{c}h\left(t - \frac{l_x}{c}\right)\right]$$
(1.36)

これらより,

$$E_{AS} = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\Omega t} (e^{2ikl_x} e^{i\varphi_x} - e^{2ikl_y} e^{-i\varphi_y})$$
(1.37)

*2 連星合体での典型的な値が $h \sim 10^{-21}$ であるから、十分妥当な仮定である.

$$E_{SYM} = -\frac{1}{2}E_0e^{-i\Omega t}(e^{2ikl_x}e^{i\varphi_x} + e^{2ikl_y}e^{-i\varphi_y})$$
(1.38)

ただし

$$\varphi_i = \frac{\Omega l_x}{c} \operatorname{sinc} \frac{\omega l_x}{c} h\left(t - \frac{l_x}{c}\right) \tag{1.39}$$

ここで l_x, l_y を l_+, l_- で表すと

$$\varphi_x = \frac{\Omega(l_+ - l_-)}{2c} \operatorname{sinc} \frac{\omega(l_+ - l_-)}{2c} h\left(t - \frac{l_+ - l_-}{2c}\right)$$
(1.40)

通常干渉計の腕の長さはなるべく同じ長さにする*³から, $l_+ \gg l_-$ として良い. さらに φ はすでに $O(h_0)$ である から, l_- の寄与は全て無視して近似すると

$$\varphi_x = \frac{\Omega l_+}{2c} \operatorname{sinc} \frac{\omega l_+}{2c} h\left(t - \frac{l_+}{2c}\right) = \frac{\Omega l}{c} \operatorname{sinc} \frac{\omega l}{c} h\left(t - \frac{l}{c}\right)$$
(1.41)

とかける. (ただし $l = l_+/2$) 同様に,

$$\varphi_y = \frac{\Omega l_+}{2c} \operatorname{sinc} \frac{\omega l_+}{2c} h\left(t - \frac{l}{c}\right) = \varphi_x \tag{1.42}$$

これらより

$$E_{\rm AS} = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\Omega t} \left(e^{2ikl_x} e^{i\varphi_x} - e^{2ikl_y} e^{-i\varphi_x} \right) \tag{1.43}$$

$$= -iE_0 e^{-i\Omega t} e^{ikl_+} \sin(kl_- + \varphi_x) \tag{1.44}$$

$$E_{\text{SYM}} = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\Omega t} \left(e^{2ikl_x} e^{i\varphi_x} + e^{2ikl_y} e^{-i\varphi_x} \right)$$
(1.45)

$$= -E_0 e^{-i\Omega t} e^{ikl_+} \cos(kl_- + \varphi_x) \tag{1.46}$$

得られる信号は

$$P_{\rm AS} = P_0 \sin^2(2kl_- + \varphi_x) = \frac{P_0}{2} (1 - \cos(2kl_- + 2\varphi_x))$$
(1.47)

$$P_{\rm SYM} = P_0 \cos^2(2kl_- + \varphi_x) = \frac{P_0}{2} (1 - \cos(2kl_- + 2\varphi_x))$$
(1.48)

となる. 従って、Michelson 干渉計で得られる重力波信号は位相変化 $\varphi_{Mich} = 2\varphi_x$ である.

ここで、重力波の信号と腕の長さの関係を見る、重力波による位相変化は

$$\varphi_{\text{Mich}} = \frac{2\Omega l}{c} \operatorname{sinc} \frac{\omega l}{c} h\left(t - \frac{l}{c}\right) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin \frac{\omega l}{c} h\left(t - \frac{l}{c}\right)$$
(1.49)

とかける.理想的な状況として $\frac{\omega l}{c} = \frac{\pi}{2}$ を考えると,

$$l = \frac{\pi c}{2\omega} = \frac{c}{4f_{\rm GW}} \simeq 750 \text{km} \left(\frac{100 \text{Hz}}{f_{\rm GW}}\right) \tag{1.50}$$

となり、100Hz オーダーの重力波を捉えるのに最適な腕の長さは 1000km オーダーと非現実的な長さになる. この問題を解決するためには、*l*を固定したまま実効的な長さを大きくするのが良い. その1つの方法が後述する Fabry-Perot 共振器である.

^{*&}lt;sup>3</sup> 後述する Schnupp asymmetry を除く

また, φ_x と kl_- が同じ位相変化をすることから, $\frac{\omega l}{c} \ll 1$ である状況であれば

$$kl_{-} = \frac{\Omega l}{c} \operatorname{sinc} \frac{\omega l}{c} h\left(t - \frac{l}{c}\right)$$
(1.51)

$$\frac{\Omega l_{-}}{c} \simeq \frac{\Omega l}{c} h\left(t - \frac{l}{c}\right) \tag{1.52}$$

$$l_{-} \simeq lh\left(t - \frac{l}{c}\right) \tag{1.53}$$

と、両腕の差動運動が重力波と両腕の長さの積で表される、という簡単な形でかける. 次に重力波を Fourier 変換して周波数応答を考える.

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} h(\omega) e^{i\omega t}$$
(1.54)

式 (1.49) から

$$\varphi_{\rm Mich}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\Omega}{\omega} \sin \frac{\omega l}{c} e^{-i\frac{\omega l}{c}} h(\omega) e^{i\omega t}$$
(1.55)

であるから、重力波 $h(\omega)$ から位相変化 φ_{Mich} への伝達関数を

$$H_{\rm Mich}(\omega) = \frac{2\Omega}{\omega} \sin \frac{\omega l}{c} e^{-i\omega \frac{l}{c}}$$
(1.56)

とかける.

1.5 変調

Dark fringe では線形な信号が取れないことを見たが、レーザーに位相変調を加えることで線形な信号を得ることができる.以下、それを見ていく.



図 1.2 Dark fringe でロックするための Michelson 干渉計の構成

位相変調を加えるには Pockels 効果を用いた EOM(Electro-Optic Modulator) を用いる. EOM を通したレー ザーには, $\beta \sin \omega_m t$ だけ位相変調がかかる. ただし ω_m は変調周波数, β は変調指数で通常 $\beta \ll 1$ を仮定する. 位相変調されたレーザーは、Bessel 関数を用いると、

$$E_0 e^{-i(\Omega t - \beta \sin \omega_m t)} = E_0 e^{-i\Omega t} \sum_{n = -\infty}^{\infty} J_n(\beta) e^{-i\omega_m t}$$
(1.57)

$$\simeq E_0 J_0(\beta) e^{-i\Omega t} + E_0 J_1(\beta) e^{-i(\Omega+\omega_m)t} - E_0 J_1(\beta) e^{-i(\Omega-\omega)t}$$
(1.58)

と展開することができる. (ただし $J_n(\beta)$ は n 次の Bessel 関数.) *4この第 1 項を carrier, 第 2,3 項をそれぞれ upper sideband, lower sideband と呼ぶ. 以降, carrier については 0,sideband については ± を添え字につける.

AS に来る光は、式 (1.5) より各周波数でそれぞれ

$$E_{\rm AS0} = -iE_0 J_0(\beta) e^{-i\Omega t + ikl_+} \sin(kl_- + \delta\varphi(\Omega))$$
(1.60)

$$E_{\text{AS}\pm} = \mp i E_0 J_1(\beta)^{-i(\Omega \pm \omega_m)t + ik_{\pm}l_{\pm}} \sin(k_{\pm}l_{-} + \delta\varphi(\Omega \pm \omega_m))$$
(1.61)

である (ただし $k_{\pm} = \frac{\Omega \pm \omega_m}{c}, \delta \varphi(\Omega) = k \delta l_{-} = \frac{\Omega \delta l_{-}}{c}$). これらをそれぞれ $-E_0 J_0(\beta) t_0 e^{-i\Omega t}, \mp E_0 J_1(\beta) t_{\pm} e^{-i(\Omega \pm \omega_m)t}$ とおく. $\delta \varphi \ll 1$ として 1 次で展開すれば

$$t_0 = ie^{ikl_+} [\sin kl_- + \delta\varphi(\Omega) \cos kl_-] \tag{1.62}$$

$$t_{\pm} = ie^{ik_{\pm}l_{\pm}} [\sin k_{\pm}l_{-} + \delta\varphi(\Omega \pm \omega) \cos k_{\pm}l_{-}]$$
(1.63)

である.

AS で得られる出力はこれらの和の強度であるから,

$$P_{\rm AS} = |E_0 J_0(\beta) t_0 e^{-i\Omega t} + E_0 J_1(\beta) t_+ e^{-i(\Omega + \omega_m)t} - E_0 J_1(\beta) t_- e^{-i(\Omega \omega_m)t}|^2$$
(1.64)

$$= P_0(J_0(\beta)^2 |t_0|^2 + J_1(\beta)^2 |t_+|^2 + J_1(\beta)^2 |t_-|^2)$$
(1.65)

$$+ P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) (t_0 t_+^* - t_0^* t_-) e^{i\omega_m t} + \text{c.c.}$$
(1.66)

$$+ (2\omega_m \text{ term})$$
(1.67)

となる. ここで振動数 ω_m の信号をかけて時間平均を取れば線形信号は DC で現れ,もともと DC の信号は ω_m に, $2\omega_m$ の信号は $\omega_m, 3\omega_m$ の周波数に現れる. その後ローパスフィルタで高周波成分を落とせば, 欲しい信号 を得ることができる.

詳しく計算する.まず Dark fringe での動作を仮定しているから $kl_{-} = 2n\pi$ として

$$t_0 = ie^{ikl_+} [\sin 2n\pi + \delta\varphi(\Omega) \cos 2n\pi] = ie^{ikl_+} \delta\varphi(\Omega)$$
(1.68)

$$t_{\pm} = ie^{ik_{\pm}l_{\pm}} [\sin(2n\pi \pm k_m l_{-}) + \delta\varphi(\Omega \pm \omega)\cos(2n\pi \pm k_m l_{-})]$$

$$(1.69)$$

$$= ie^{ik_{\pm}l} [\pm \sin k_m l_- + \delta\varphi(\Omega \pm \omega) \cos k_m l_-]$$
(1.70)

となる. これから

$$t_0 t_+^* - t_0^* t_- = i e^{ikl_+} \delta \varphi(\Omega) (-i e^{-ik_+ l_+}) [\sin k_m l_- + \delta \varphi(\Omega + \omega) \cos k_+ l_-]$$
(1.71)

$$+ ie^{-ikl_{+}}\delta\varphi(\Omega)(ie^{ik_{-}l_{-}})[-\sin k_{m}l_{-} + \delta\varphi(\Omega - \omega)\cos k_{+}l_{-}]$$
(1.72)

$$=\delta\varphi(\Omega)\sin k_m l_-(e^{i(k-k_+)l_+} + e^{i(-k+k_-)l_+}) + O(\delta\varphi^2)$$
(1.73)

$$\simeq 2e^{-ik_m l_+} \delta\varphi(\Omega) \sin k_m l_- \tag{1.74}$$

*4 一般に整数 n に対して $J_{-n}(x) = (-1)^2 J_n(x)$ であり、 β の 2 次までで

$$J_0(\beta) = 1 - \frac{\beta^2}{4}, \ J_1(\beta) = \frac{\beta}{2}$$
(1.59)

である.

となる、よって

$$P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) (t_0 t_+^* - t_0^* t_-) e^{i\omega t} + c.c.$$
(1.75)

 $=4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \delta\varphi(\Omega) \sin k_m l_- \cos(\omega_m t - k_m l_+)$ (1.76)

となり、 ω_m で振動する信号が得られる.

得られる信号を最大にするには、次の2つのことに注意する必要がある.まず、系に非対称性をつけることで ある.信号は sin $k_m l_-$ に比例するから、完全に対称 $(l_-=0)$ だと信号は得られない.しかし $kl_-=2n\pi$ かつ $k_m l_-=\frac{\pi}{2}$ のような状況が作れれば、信号は最も大きくなる。例えば $\Omega = 2\pi \times 300$ THz、 $\omega_m = 2\pi \times 150$ MHz の場合、 $\lambda = 1\mu$ m、 $\lambda_m = 2m$ であるから、腕の長さが数 km もあるような大型干渉計の場合は十分可能である。 次に、復調する信号に位相差をつけることである。PD の信号は cos($\omega_m t - k_m l_+$) で変動しているから、変調信 号 (sin $\omega_m t$) をそのまま用いて復調しても最大にはならない。現実的には、適当に位相差をつけて最も大きくなる ような点を探すことになる。

最後に、復調した信号を求める.上での議論から $\cos(\omega_m t - k_m l_+)$ で復調した時が最も効率が良く、さらに基線長にマクロな差 $(kml_- = \frac{\pi}{2})$ をつけると、信号は

$$P_{\text{signal}} = 4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \delta\varphi(\Omega) \left\langle \cos^2 \left[\omega_m \left(t - \frac{l_+}{c} \right) \right] \right\rangle$$
(1.77)

$$=2P_0J_0(\beta)J_1(\beta)\delta\varphi(\Omega) \tag{1.78}$$

と求められる.

1.6 信号 sideband

これまで腕の基線長の変化を光の位相の変化としてみてきたが、前節で導入した位相変調と sideband の描像を 用いることもできる. 1.5 節で見たように、重力波による基線長変化は

$$l_{-} = lh(t) = lh_0 \cos \omega t \tag{1.79}$$

と等価である. (簡単のため時刻のずれ $\frac{\omega l}{c}$ を無視した.) これを用いると, $\epsilon = k l h_0$ として x 腕の電場は

$$E_x = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t + 2ikl_x + ikl_-} = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t + 2ikl_x + iklh_0 \cos \omega t}$$
(1.80)

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}E_0e^{-i\Omega t+2ikl_x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}i^nJ_n(\epsilon)e^{in\omega t}$$
(1.81)

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{2ikl_x} (J_0(\epsilon) e^{-i\Omega t} + iE_0 J_1(\epsilon) e^{-i(\Omega+\omega)t} + iJ_1(\epsilon) e^{-i(\Omega-\omega)t})$$
(1.82)

と carrier と 2 つの sideband の和としても書くことができる. y 腕も同様に

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t + 2ikl_y - 2klh_0 \cos \omega t}$$
(1.83)

$$\simeq \frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{2ikl_y} (J_0(\epsilon) e^{-i\Omega t} - iE_0 J_1(\epsilon) e^{-i(\Omega+\omega)t} - iJ_1(\epsilon) e^{-i(\Omega-\omega)t})$$
(1.84)

とかける.

この描像が以前の結果と一致することを見る. AS の電場は

$$E_{\rm AS} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x - E_y) \tag{1.85}$$

$$= -\frac{1}{2}E_0 e^{-i\Omega t} [(J_0(\epsilon) + iJ_1(\epsilon)e^{-i\omega t} + iJ_1(\epsilon)e^{i\omega t})e^{2ikl_x}$$
(1.86)

$$-\left(J_0(\epsilon) - iJ_1(\epsilon)e^{-i\omega t} - iJ_1(\epsilon)e^{i\omega t}\right)e^{2ikl_y}]$$
(1.87)

$$= -\frac{1}{2}E_0e^{-i\Omega_t + 2ikl}[J_0(\epsilon)(e^{ikl_-} - e^{-ikl_-}) + iJ_1(\epsilon)(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})(e^{ikl_-} + e^{ikl_-})]$$
(1.88)

$$= -iE_0 e^{-i\Omega t + 2ikl} (J_0(\epsilon)\sin kl_- + 2J_1(\epsilon)\cos\omega t\cos kl_-)$$
(1.89)

 ϵ の1次で $J_0(\epsilon)=1,$ $J_1(\epsilon)=\frac{\epsilon}{2}$ であるから

$$E_{\rm AS} = -iE_0 e^{-i\Omega t + 2ikl} (\sin kl_- + \epsilon \cos \omega t \cos kl_-)$$
(1.90)

$$= -iE_0 e^{-i\Omega t + 2ikl} (\sin kl_- + \frac{\Omega lh_0}{c} \cos \omega t \cos kl_-)$$

$$\tag{1.91}$$

$$\simeq -iE_0 e^{-i\Omega t + 2ikl} \sin\left(kl_- + \frac{\Omega l}{c}h(t)\right)$$
(1.92)

と確かに式 (1.44) と一致する.

2 Fabry-Perot 共振器

次に Fabry-Perot 共振器について見ていく.

2.1 基本的なセットアップ

図 2.1 のような構成を考える.入射光は振幅反射率 r1,振幅透過率 t1 の FM で一部が反射,一部が透過する. 透過した光は振幅反射率 r2,振幅透過率 t2 の EM で同様に一部が反射,一部が透過する.これを繰り返して,共振器内を複数回往復する光が干渉し合う.



図 2.1 基本的な Fabry-Perot 共振器の構成

 $E_i = E_0 e^{-i\Omega t}$ の光が入射したとすると、反射光 E_r は

$$E_r = r_1 E_i + t_1 \cdot (-r_2) \cdot t_1 e^{2ikL} E_i + t_1 \cdot (-r_2) \cdot (-r_1) \cdot (-r_2) \cdot t_1 e^{4ikL} E_i + \cdots$$
(2.1)

$$=E_{i}\left(r_{1}-r_{1}t_{1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}(r_{1}r_{2})^{n-1}e^{2nikL}\right)$$
(2.2)

$$=E_{i}\left(r_{1}-\frac{r_{1}t_{1}^{2}e^{2ikL}}{1-r_{1}r_{2}e^{2ikL}}\right)=E_{i}\frac{r_{1}-(t_{1}^{2}+r_{1}^{2})r_{2}e^{2i\varphi}}{1-r_{1}r_{2}e^{2i\varphi}}$$
(2.3)

とかける. (ただし $\varphi = kL$) 同様に, 透過光 E_t は

$$E_t = t_1 \cdot t_2 e^{ikL} E_i + t_1 \cdot (-r_2) \cdot (-r_1) \cdot t_2 e^{3ikL} E_i + \cdots$$
(2.4)

$$= t_1 t_2 E_i \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{(2n-1)ikL} = E_i \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}$$
(2.5)

また右向きの共振器内電場は

$$E_{\triangleright} = t_1 E_i + t_1 \cdot (-r2) \cdot (-r1) e^{2ikL} E_i + \cdots$$
(2.6)

$$= t_1 E_i \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{2(n-1)ikL} = E_i \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}$$
(2.7)

左向きの共振器内電場は

$$E_{\triangleleft} = t_1 \cdot (-r_2) e^{2ikL} E_i + t_1 \cdot (-r_2) \cdot (-r_1) \cdot (-r_2) e^{4ikL} E_i + \cdots$$
(2.8)

$$= -t_1 r_2 E_i \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{2nikL} = -E_i \frac{t_1 r_2 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}$$
(2.9)

となる.

共振器全体を一つの鏡とみなすこともできる。この場合の振幅反射率 r_c ,振幅透過率 t_c は

$$r_c = \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i\varphi}}{1 - r_1r_2e^{2i\varphi}},$$
(2.10)

$$t_c = \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}$$
(2.11)

とかける.

2.2 共振器の特性

共振器の様々な特性は、のちに導入する Finesse F を使って表現することができる.

2.2.1 透過光

入射光と透過光の強度比を考えると

$$\frac{P_i}{P_t} = \left| \frac{t_1 t_2 e^{i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} \right|^2 = \frac{t_1^2 t_2^2}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\varphi}$$
(2.12)

$$=\frac{r_1 r_2}{(1-r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2 \varphi}$$
(2.13)

であるから、 $\varphi = n\pi$ のとき透過光は最大になる.また透過光強度は周期的に繰り返す構造を持っていて、この ピークとピークの間隔を Free specrtal range(FSR) と呼ぶ. 1FSR は $\nu_{\text{FSR}} = \frac{c}{2L}$ である. 直感的には、光が定 常波を作るには共振器を往復するのにかかる時間が $1/\nu_{\text{FSR}}$ の整数倍でなくてはならないことを表している.

またピークの半値全幅を $\nu_{\rm FWHM}$ とすれば

$$\frac{t_1^2 t_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2 \frac{\pi L \nu_{\text{FWHM}} L}{c}} = \frac{t_1^2 t_2^2}{2(1 - r_1 r_2)^2}$$
(2.14)

$$(1 - r_1 r_2)^2 + 4r_1 r_2 \sin^2 \pi \frac{\nu_{\rm FWHM}}{2\nu_{\rm FSR}} = 2(1 - r_1 r_2)^2$$
(2.15)

$$\sin^2 \pi \frac{\nu_{\rm FWHM}}{2\nu_{\rm FSR}} = \frac{(1 - r_1 r_2)^2}{4r_1 r_2} \tag{2.16}$$

$$\frac{\nu_{\rm FWHM}}{\nu_{\rm FSR}} = \frac{1}{\pi} \sin^{-1} \frac{1 - r_1 r_2}{\sqrt{r_1 r_2}}$$
(2.17)

と与えられる.通常 $\frac{\nu_{\rm FWHM}}{\nu_{\rm FSR}} \ll 1$ となる状況を考えるから*5

$$\frac{\nu_{\rm FWHM}}{\nu_{\rm FSR}} = \frac{1 - r_1 r_2}{\pi \sqrt{r_1 r_2}} \tag{2.18}$$

となる. ここで Finesse $\mathcal{F} = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{\nu_{\text{FWHM}}}$ を導入する. Finesse は共振のピークがどれだけ鋭いかの指標であり,

$$\mathcal{F} = \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \tag{2.19}$$

と表される.

振幅透過率が十分小さい (\simeq 反射率が十分 1 に近い) ときは、透過率 $T_1 = t_1^2, T_2 = t^2$ を用いて Finesse を近似 でき、

$$\frac{\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} = \frac{\sqrt[4]{(1 - T_1)(1 - T_2)}}{1 - \sqrt{(1 - T_1)(1 - T_2)}}$$
(2.20)

$$\simeq \frac{\sqrt[4]{1 - T_1 - T_2}}{1 - \sqrt{1 - T_1 - T_2}} \simeq \frac{1 - \frac{1}{4}T_1 - \frac{1}{4}T_2}{\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2}$$
(2.21)

$$\simeq \frac{2}{T_1 + T_2} = \frac{2}{T}$$
 (2.22)

^{*&}lt;sup>5</sup> これは Finesse が十分大きいことと等価.



図 2.2 $r_1 = r_2 = 0.9, t_1 = t_2 = 0.43$ の場合の透過率 $|t_c|^2$ のグラフ. $\mathcal{F} = 156$

であるから (ただし $T = T_1 + T_2$)

$$\mathcal{F} \simeq \frac{2\pi}{T} \tag{2.23}$$

とかける.*6また透過率を用いれば、共振時の透過光強度は

$$|t_c|^2 = \frac{t_1^2 t_2^2}{|1 - r_1 r_2|^2} \simeq \frac{4T_1 T_2}{(T_1 + T_2)^2}$$
(2.24)

のようにかける. $T_1 = T_2$ の場合 (後述する critically coupled のとき) は $|t_c|^2 = 1$ で,入射光は全て通り抜け るように見える. $T_1 \gg T_2$ の場合 (overcoupled) は $|t_c|^2 \simeq \frac{4T_2}{T_1} = \frac{2FT_2}{\pi}$ と Finesse と EM の透過率でかける. $T_1 \ll T_2$ の場合も同様.

また,式 (2.19) を r_1r_2 について解くと

$$(1 - r_1 r_2)^2 = \left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2 r_1 r_2 \tag{2.25}$$

$$r_1 r_2 = \frac{2 + \left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left[2 + \left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2\right]^2 - 4}$$
(2.26)

$$= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\pi}{\mathcal{F}} \sqrt{4 + \left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2}$$
(2.27)

$$=1-\frac{\pi}{\mathcal{F}}+O\left(\left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2\right) \tag{2.28}$$

のようにもかける.

2.2.2 反射光の特性

反射光は、本質的に2種類の光からなる.1つは共振器内に1度も入らずに反射された光(0次反射光)、もう1つは共振器内で1回以上反射されて再び出てきた光(n次反射光)である.後者は必ず奇数回反射されるから、前者と位相が正反対になる.したがって、反射光は0次とn次が打ち消しあう形になり、共振の際に最も打ち消さ

^{*6} 鏡にロスがある場合は,透過率とロスの和を $\mathcal{T}_i = T_i + p_i = 1 - R_i$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ とおけば, finesse は $\mathcal{F} \simeq \frac{2\pi}{\mathcal{T}}$ と同様の結果が得られる.

れる量が大きくなる.この打ち消した量で,共振器を3つに分類することができる.式(2.10),(2.11)より,共振時の反射光は及び透過光は

$$r_c = \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} \tag{2.29}$$

$$t_c = \frac{t_1 t_2}{1 - r_1 r_2} \tag{2.30}$$

である. $r_2 = \frac{r_1}{t_1^2 + r_1^2}$ のときは打ち消し合いが完璧に起こり,反射光はなくなり全て共振器内電場と透過光になる. 特に鏡にロスがないとすると, $r_1 = r_2$ であるから $t_c = 1$ となり入射光は全て透過することになる. この打ち消し が完璧な共振器を critically coupled cavity と呼ぶ. 他に,打ち消しが不十分で $r_c > 0$ な共振器を undercoupled cavity,打ち消しが大きすぎて $r_c < 0$ になる共振器を overcoupled cavity という. 大雑把に言って, $r_1 = r_2$ の とき critically coupled, $r_1 < r_2$ のとき overcoupled, $r/1 > r_2$ のとき undercoupled と言える. 重力波検出器 は Fabry-Perot Michelson であるから,光を元来た方へ打ち返して 2 つの腕で干渉させなければならない. した がって, $r_2 = 1, r_1 \approx 1 < r_2$ の overcoupled な共振器になっている.



図 2.3 各 couple の場合の反射光強度. critically coupled は $r_1 = r_2 = 0.9, t_1 = 0.436$. overcoupled は $r_1 = 0.9, r_2 = 0.99, t_1 = 0.436$. undercoupled は $r_1 = 0.99, r_2 = 0.9, t_1 = 0.14$.

また共振のときの反射光強度を透過率で近似すると,

$$r_c = \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2}{1 - r_1 r_2} = \frac{\sqrt{1 - T_1} - (1 - p_1)\sqrt{1 - T_2}}{1 - \sqrt{1 - T_1}\sqrt{1 - T_2}}$$
(2.31)

(ただし $p_1 = 1 - T_1 - R_1$ は FM のロス) であるが、 $p_1 \ll 1$ とすれば*7

$$r_c \simeq \frac{1 - \frac{1}{2}T_1 - (1 - p_1 - \frac{1}{2}T_2)}{\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2} = \frac{-T_1 + T_2 + 2p_1}{T}$$
(2.32)

のようにかける. 十分に overcoupled な共振器であれば, $T_2 \ll T_1$ として

$$r_c \simeq \frac{-T_1 + 2p_1}{T_1} = -1 + \frac{p_1}{\pi} \mathcal{F}$$
 (2.33)

のように、FMのロスとFinesseで書くこともできる.

^{*7} 通常の鏡ではこれは十分に満たされる

次に共振付近での反射光の位相を考えると,

$$\arg r_c = \arg \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} = \theta_1 - \theta_2$$
(2.34)

ただし

$$\theta_1 = \arg[r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i\varphi}], \ \theta_2 = \arg[1 - r_1r_2e^{2i\varphi}]$$
(2.35)

である.

$$\theta_1 = \arg[(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2\cos 2\varphi) - i(t_1^2 + r_1^2)r_2\sin 2\varphi]$$
(2.36)

であるが, 共振のときには over (under)[critically]coupled の場合は第 1 項 < 0 (> 0)[= 0] である. よって over coupled のときは

$$\theta_1 = \pi - \tan^{-1} \frac{(t_1 + r_1^2) r_2 \sin 2\varphi}{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2 \cos 2\varphi}$$
(2.37)

undercouple, critically coupled のときは

$$\theta_1 = -\tan^{-1} \frac{(t_1 + r_1^2)r_2 \sin 2\varphi}{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2 \cos 2\varphi}$$
(2.38)

となる (ただし criticaly coupled の場合は共振時に θ_1 は定義されない.). さらに共振付近での位相変化を考えて $\varphi \ll 1$ で展開すると, overcoupled の場合は

$$\theta_1 \simeq \pi - 2\varphi \frac{(t_1 + r_1)^2 r_2}{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2} = \pi - 2\varphi \left(-1 + \frac{r_1}{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2} \right)$$
(2.39)

$$= \pi - 2\varphi \left(-1 + \frac{\sqrt{1 - T_1}}{\sqrt{1 - T_1} - (1 - p_1)\sqrt{1 - T_2}} \right)$$
(2.40)

$$\simeq \pi - 2\varphi \left(-1 + \frac{1 - \frac{1}{2}T_1}{-\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 + p_1} \right)$$
(2.41)

$$\simeq \pi - 2\varphi \left(-1 - \frac{2}{T_1} + 1 \right) = \pi + 2\varphi \frac{\mathcal{F}}{\pi}$$
(2.42)

となる. 一方 undercoupled の場合は

$$\theta_1 \simeq -2\varphi \left(1 - \frac{1 - \frac{1}{2}T_1}{-\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2 + p_1} \right)$$
(2.43)

$$\simeq -2\varphi \left(-1 + \frac{2}{T_2}\right) \simeq -2\varphi \frac{\mathcal{F}}{\pi}$$
(2.44)

のようになる. ちなみに critically coupled のときは

$$\theta_1 = \arg[r_1 - r_1 e^{2i\varphi}] = \arg[1 - e^{2i\varphi}] = \arg[(1 - \cos 2\varphi) - i\sin 2\varphi]$$
(2.45)

であるから、 $O(\varphi^2)$ で近似すると

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{-\sin 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi} \simeq -\tan^{-1} \frac{2\varphi}{1 - (1 - \frac{(2\varphi)^2}{2})}$$
(2.46)

$$= -\tan^{-1}\frac{2\varphi}{2\varphi^2} = -\tan^{-1}\frac{1}{\varphi} = -\cot^{-1}\varphi$$
 (2.47)

となる.

一方 $heta_2$ の方は

$$\theta_2 = \arg[(1 - r_1 r_2 \cos 2\varphi) - ir_1 r_2 \sin 2\varphi] = \tan^{-1} \frac{-r_1 r_2 \sin 2\varphi}{1 - r_1 r_2 \cos 2\varphi}$$
(2.48)

であるが、共振付近で考えて $\varphi \ll 1$ で展開すると

$$\theta_2 \simeq -2\varphi \frac{r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} = -2\varphi \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}T_1}\sqrt{1 - \frac{1}{2}T/2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}T_1}\sqrt{1 - \frac{1}{2}T_2}}$$
(2.49)

$$\simeq -2\varphi \frac{1 - \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{2}T_2}{\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2} \simeq -2\varphi \frac{2}{T_1 + T_2} = -2\varphi \frac{\mathcal{F}}{\pi}$$
(2.50)

のようにかける. これらを式 (2.34) に入れると, overcoupled の場合は

$$\arg r_c \simeq \pi + 2\varphi \frac{\mathcal{F}}{\pi} + 2\varphi \frac{\mathcal{F}}{\pi} = \pi + 2\varphi \frac{2\mathcal{F}}{\pi}$$
(2.51)

と位相変化は $\frac{2F}{\pi}$ 倍される. また undercoupled の場合は

$$\arg r_c \simeq -2\varphi \frac{\mathcal{F}}{\pi} + 2\varphi \frac{\mathcal{F}}{\pi} = 0 \tag{2.52}$$

と、この近似の範囲では打ち消しあってほとんど変化しないことがわかる. 最後に、critically coupled の場合は

$$\arg r_c \simeq -\cot^{-1}\varphi + 2\varphi \frac{\mathcal{F}}{\pi} \tag{2.53}$$

であるから、位相は共振付近 ($\varphi = 0$) で不連続に変化し、

$$\arg r_c = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & (\varphi \to +0) \\ \frac{\pi}{2} & (\varphi \to -0) \end{cases}$$
(2.54)

となる.



図 2.4 overcoupled のときの位相変化. $r_1 = 0.9, r_2 = 0.99, t_1 = 0.43$ 見やすさのため範囲を $0\sim360^\circ$ で書いている.

各 coupling の時の位相変化を見ると図 2.4, 2.5, 2.6 のようになる. undercoupled のときは位相変化が小さく,あまり回らない. 一方で overcoupled のときは位相は $-\pi$ から π へ大きく回り,共振付近で変化が最も大きい. また critically coupled のときは共振付近で位相が $\frac{\pi}{2}$ から $-\frac{\pi}{2}$ へ (図 2.6 では 90° から 270° まで) と不連続 に変化する.



図 2.5 undercoupled のときの位相変化. $r_1 = 0.99, r_2 = 0.9, t_1 = 0.14$



図 2.6 critical coupled のときの位相変化. $r_1 = 0.9, r_2 = 0.9, t_1 = 0.436$ 見やすさのため範囲を $0\sim360^\circ$ で書いている.

上で見たことを, r_c の複素平面上の軌跡からも考えることができる. [5] 式 (2.10) より*⁸

$$r_c - r_1 = -\frac{r_2 t_1^2 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} \tag{2.55}$$

$$(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(r_c - r_1) = -r_2 t_1^2 e^{2i\varphi}$$
(2.56)

$$|r_c - r_1|^2 = r_2^2 |r_1 r_c - (t_1^2 + r_1^2)|^2$$
(2.57)

$$|r_c - Z_- 0|^2 = R^2 \tag{2.58}$$

^{*&}lt;sup>8</sup> 詳しい計算は Appendix を参照

ただし

$$Z_0 = r_1 \frac{1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2^2}{1 - r_1^2 r_2^2}, \ R = \frac{r_2 t_1^2}{1 - r_1^2 r_2^2}$$
(2.59)

とおいた.これより,反射光は複素平面上で中心 Z_0 ,半径 Rの円周上に存在し,位相 $2i\varphi$ が回るごとに円周上 を反時計回りに進むむことがわかる. Z_0 と Rの大小で共振時の位相が変わり, $Z_0 > R$ のときは同じ, $Z_0 < R$ のときは π だけ回り, $Z_0 = R$ のときは不連続になる.critically coupled になる条件は $Z_0 = R$ より

$$r_1(1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2^2) = r_2 t_1^2$$
(2.60)

$$r_2 = \frac{r_1}{t_1^2 + r_1^2} \tag{2.61}$$

と上でもと求めたものと一致する.また共振付近の位相変化も追うことができ、前述した結果と一致する.



図 2.7 overcoupled のときの軌跡. $r_1 = 0.9, r_2 = 0.99, t_1 = 0.43$



図 2.8 overcoupled のとぎの軌跡. $r_1 = 0.99, r_2 = 0.9, t_1 = 0.14$



図 2.9 overcoupled のときの軌跡. $r_1 = 0.9, r_2 = 0.9, t_1 = 0.436$

2.2.3 共振器内の電場

共振器内の右方向の光のゲインは

$$G_{\triangleright} = \left|\frac{E_{\triangleright}}{E_i}\right|^2 = \left|\frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}\right|^2 \tag{2.62}$$

とかける.特に共振しているときは

$$G_{\triangleright} = \frac{t_1^2}{(1 - r_1 r_2)^2} \tag{2.63}$$

である.反射率が十分高い場合には

$$G_{\triangleright} = \frac{T_1}{(1 - \sqrt{(1 - T_1)(1 - T_2)})^2}$$
(2.64)

$$\simeq \frac{T_1}{\left[1 - \left(1 - \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{2}T_2\right)\right]^2} = \frac{4T_1}{(T_1 + T_2)^2}$$
(2.65)

のようにも書ける. overcoupled $(T_1 \gg T_2)$ の場合には

$$G \vartriangleright \simeq \frac{4T_1}{T_1^2} = \frac{4}{T_1} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi}$$
 (2.66)

と,およそ Finesse 倍されることになる. 左方向についても同様に考えると

$$G_{\triangleleft} = \left|\frac{E_{\triangleleft}}{E_i}\right|^2 = \left|\frac{t_1 r_2}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}\right|^2 \tag{2.67}$$

で、共振の際には

$$G_{\triangleleft} = \frac{t_1^2 r_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2} = \frac{T_1 (1 - T_2)}{(1 - \sqrt{1 - T_1} \sqrt{1 - T_2})^2}$$
(2.68)

$$\simeq \frac{4T_1(1-T_2)}{(T_1+T_2)^2} \tag{2.69}$$

のように, EM でのロスの分だけ右方向よりも小さくなる. overcoupled の場合は $G_{\triangleleft} \simeq \frac{2\mathcal{F}}{\pi}(1-T_2)$.

ここで、共振器内で光が平均してどの程度往復しているかを考える. 1 往復にかかる時間は $\Delta t = \frac{2L}{c}$ であり、 1 往復ごとにパワーは $(r_1r_2)^2$ 倍されるから、パワーでの平均滞在時間 $\hat{\tau}$ は

$$\tilde{\tau} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n\Delta t (r_1 r_2)^{2(n-1)}}{\sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{2(n-1)}} = (1 - (r_1 r_2)^2) \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} n (r_1 r_2)^{2(n-1)}$$
(2.70)

$$= (1 - (r_1 r_2)^2) \frac{\Delta t}{(1 - (r_1 r_2)^2)^2} = \frac{\Delta t}{1 - (r_1 r_2)^2}$$
(2.71)

Finesse F が十分大きいとして近似すると,式 (2.28) より

$$1 - (r_1 r_2)^2 = 1 - \left[1 - \frac{\pi}{\mathcal{F}} + O\left(\left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2\right)\right]^2$$
(2.72)

$$= 1 - \left[1 - 2\frac{\pi}{\mathcal{F}} + O\left(\left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2\right)\right] \simeq 2\frac{\pi}{\mathcal{F}}$$
(2.73)

であるから

$$\tilde{\tau} = \Delta t \frac{\mathcal{F}}{2\pi} = \frac{L\mathcal{F}}{c\pi} \tag{2.74}$$

となる.また、平均折り返し回数 n は $n = \frac{F}{2\pi}$ であることもわかる.次に、光の減衰する時間を考える. n 往復した光の強度 P_n と共振器に入った瞬間の光の強度 P_0 の比は

$$\frac{P_n}{P_0} = (r_1 r_2)^{2n} = \exp[2n \log(r_1 r_2)]$$
(2.75)

$$= \exp\left[2n\log\left(1 - \frac{\pi}{\mathcal{F}} + O\left(\left(\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right)^2\right)\right)\right]$$
(2.76)

$$\simeq \exp\left[-2n\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right]$$
 (2.77)

ここで Δt が十分小さいとし、 $t = n\Delta t = \frac{2nL}{c}$ を有限に保って $n \to \infty$ の極限を考えれば

$$\frac{P(t)}{P_0} \simeq \exp\left[-\frac{ct}{L}\frac{\pi}{\mathcal{F}}\right] = \exp\left[-t\frac{c\pi}{L\mathcal{F}}\right] = \exp\left[-\frac{t}{\tilde{\tau}}\right]$$
(2.78)

とかける.これから、パワーでの平均滞在時間 τ は共振器内のパワーが $\frac{1}{e}$ に減衰する時間と考えることもで きる.電場の減衰を考えると、 $|E|^2 = P$ であるから $|E| \propto \exp[-\frac{t}{2\tau}]$ とかける.したがって平均滞在時間を $\tau = 2\tau = \frac{2LF}{c\pi}$ とおくと、電場は $|E| \propto \exp[-t/\tau]$ と τ ごとに $\frac{1}{e}$ に減衰することがわかる.また τ には F の情 報も含まれているため、例えば共振状態からレーザーを止めた後で透過光が減衰する時間を測定すれば τ がわか り、そこからさらに F も求めることができる.(リングダウン測定)

2.3 共振器長の変化の応答

共振器長が変化した際の応答を見る.

2.3.1 準静的な場合

まず周波数依存性を無視して考える。これは周波数が十分小さく、共振器が平衡状態を保ったまま準静的に長さが変化することに対応する。共振器長は共振を保つように制御し、その周囲での変動を考える。式 (2.10) を位相 φ で微分すれば

$$r_{c}' = \frac{d}{d\varphi} \left(r_{1} - \frac{t_{1}^{2} r_{2} e^{2i\varphi}}{1 - r_{1} r_{2} e^{2i\varphi}} \right)$$
(2.79)

$$= -2i \frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})^2}$$
(2.80)

したがって、共振器長が $L = 2n\pi/k + \delta L$ と共振回りでで変化したとき、反射光は

$$r_c(L) = r_c|_{\varphi=n\pi} + ik\delta L \cdot r'_c|_{\varphi=n\pi}$$
(2.81)

$$=\frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2}{1 - r_1r_2} + k\delta L\left(-2i\frac{t_1^2r_2}{(1 - r_1r_2)^2}\right)$$
(2.82)

$$= r_0 \left[1 - \frac{2kt_1^2 r_2 \delta L}{(1 - r_1 r_2)(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2)} \right]$$
(2.83)

ただし

$$r_0 = \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2}{1 - r_1r_2} \tag{2.84}$$

である.

2.3.2 周波数応答

共振器長が $L + \delta L(t)$ のように動いているとする. 時刻 t = 0 で共振器に入射した光が時刻 τ_1 に EM で反射され, FM に時刻 t_1 に戻ってくるとすると

$$\tau_1 = \frac{L}{c} + \frac{\delta L(\tau_1)}{c}, \ t_1 = 2\tau_1 \tag{2.85}$$

 $\delta L(t) \ll L$ として δL の 1 次までで近似すると

$$\tau_1 = \frac{L}{c} + \frac{\delta L\left(\frac{L}{c} + \frac{\delta L(\tau_1)}{c}\right)}{c} \simeq \frac{L}{c} + \frac{\delta L\left(\frac{L}{c}\right)}{c}$$
(2.86)

よって

$$t_1 \simeq \frac{2L}{c} + \frac{2\delta L\left(\frac{L}{c}\right)}{c} \tag{2.87}$$

となる.

次に t_1 で FM で反射され、 $t_1 + \tau_2$ で再度 EM で反射されて t_2 で FM に戻ってくるとすると

$$\tau_2 = \frac{L}{c} + \frac{\delta L(t_1 + \tau_2)}{c}, \ t_2 = t_1 + 2\tau_2 \tag{2.88}$$

同様に δL の 1 次で近似すれば

$$\tau_2 \simeq \frac{L}{c} + \frac{\delta L\left(\frac{3L}{c}\right)}{c} \tag{2.89}$$

$$t_2 \simeq \frac{4L}{c} + \frac{2\delta L\left(\frac{L}{c}\right)}{c} + \frac{2\delta L\left(\frac{3L}{c}\right)}{c}$$
(2.90)

以下,同様にn回 EM で反射された光が FM 戻ってくる時刻 t_n は帰納的に

$$t_n = \frac{2nL}{c} + \frac{2}{c} \sum_{m=1}^n \delta L\left(\frac{(2m-1)L}{c}\right)$$
(2.91)

とかける. したがって、n回反射されて時刻tで FM に戻ってきた光が、初めて共振器内に入った時刻 t'_n は

$$t'_{n} = t - \frac{2nL}{c} - \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{n} \delta L \left(t - \frac{(2m-1)L}{c} \right)$$
(2.92)

である.

これを用いて式 (2.1) のように計算すると、反射光は

$$E_r = r_1 E_i + t_1 \cdot (-r_2) \cdot t_1 e^{-i\Omega(t_1')} E_0 + t_1 \cdot (-r_2) \cdot (-r_1) \cdot (-r_2) \cdot t_1 e^{-i\Omega(t_2')} E_0 + \cdots$$
(2.93)

$$= E_i \left(r_1 - r_2 t_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{-i\Omega(t'_{n+1} - t)} \right)$$
(2.94)

ここで δL の 1 次で近似して

$$e^{-i\Omega(t'_n-t)} = \exp\left[i\Omega\frac{2nL}{c} + i\Omega\frac{2}{c}\sum_{m=1}^n \delta L\left(t - \frac{(2m-1)L}{c}\right)\right]$$
(2.95)

$$\simeq e^{i\Omega\frac{2nL}{c}} \left(1 + i\Omega\frac{2}{c} \sum_{m=1}^{n} \delta L \left(t - \frac{(2m-1)L}{c} \right) \right)$$
(2.96)

とかける、これから

$$E_r = E_i \left[r_1 - r_2 t_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{i2(n+1)\varphi} \left(1 + i\Omega \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{n+1} \delta L \left(t - \frac{(2m-1)L}{c} \right) \right) \right]$$
(2.97)

となる.

次に、周波数成分を考える. $\delta L(t) = \delta L e^{i\omega t}$ とすると

$$\sum_{m=1}^{n} \delta L\left(t - \frac{(2m-1)L}{c}\right) = \delta L \sum_{m=1}^{n} \exp\left[i\omega t - i\omega \frac{(2m-1)L}{c}\right]$$
(2.98)

$$=\delta L e^{i\omega t} e^{-i\omega \cdot \frac{L}{c}} \frac{1 - e^{-i\omega \frac{2L}{c}}}{1 - e^{-i\omega \frac{2L}{c}}}$$
(2.99)

$$= \delta L e^{i(\omega t - \psi)} \frac{1 - e^{-2in\psi}}{1 - e^{-2i\psi}}$$
(2.100)

となる. (ただし $\psi = \frac{L\omega}{c}$) これより

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{2i(n+1)\varphi} \sum_{m=1}^{n+1} \delta L\left(t - \frac{(2m-1)L}{c}\right)$$
(2.101)

$$=\sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{2i(n+1)\varphi} \delta L e^{i(\omega t - \psi)} \frac{1 - e^{-2i(n+1)\psi}}{1 - e^{-2i\psi}}$$
(2.102)

$$= \frac{\delta L e^{i\omega t - i\psi + 2i\varphi}}{1 - e^{-2i\psi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(r_1 r_2)^n e^{2in\varphi} - e^{-2i\psi} (r_1 r_2)^n e^{2in(\varphi - \psi)} \right]$$
(2.103)

$$= \frac{\delta L e^{i\omega t - i\psi + 2i\varphi}}{1 - e^{-2i\psi}} \left[\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} - \frac{e^{-2i\psi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)}} \right]$$
(2.104)

$$=\frac{\delta L e^{i\omega t - i\psi + 2i\varphi}}{1 - e^{-2i\psi}} \frac{1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)} - e^{-2i\psi} (1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)})}$$
(2.105)

$$=\frac{\delta L e^{i\omega t - i\psi + 2i\varphi}}{1 - e^{-2i\psi}} \frac{1 - e^{-2i\psi}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)})}$$
(2.106)

$$=\frac{\delta L e^{i\omega t - i\psi + 2i\varphi}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)})}$$
(2.107)

よって,周波数応答のある反射率は

$$r_c(\omega) = r_1 - r_2 t_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{i2(n+1)\varphi} \left(1 + i\Omega \frac{2}{c} \sum_{m=1}^{n+1} \delta L \left(t - \frac{(2m-1)L}{c} \right) \right)$$
(2.108)

$$= r_c(0) - i\Omega \frac{2}{c} r_2 t_1^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{2i(n+1)\varphi} \sum_{m=1}^{n+1} \delta L\left(\frac{(2m-1)L}{c}\right)$$
(2.109)

$$= r_c(0) - i \frac{2kr_2 t_1^2 \delta L e^{i\omega t - i\psi + 2i\varphi}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)})}$$
(2.110)

とかける.特に共振点周りでは、 $\varphi = n\pi$ として

$$r_c(\omega) = \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2}{1 - r_1r_2} - i\frac{2kr_2t_1^2\delta Le^{i\omega t - i\psi}}{(1 - r_1r_2)(1 - r_1r_2e^{-2i\psi})}$$
(2.111)

$$= r_0 \left(1 - i \frac{2kr_2 t_1^2 \delta L e^{i\omega t - i\psi}}{(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2)(1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi})} \right)$$
(2.112)

であるから, $\omega = 0(\psi = 0)$ のときに式 (2.83) と一致する.

また, 共振において δL から反射光の位相への伝達関数として

$$H_{\rm FP}(\omega) = \frac{2kr_2t_1^2e^{-i\psi}}{(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2)(1 - r_1r_2e^{-i\psi})} = \frac{2\alpha k e^{-i\psi}}{1 - r_1r_2e^{-2\psi}},\tag{2.113}$$

$$\alpha = \frac{r_2 t_1^2}{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2} \tag{2.114}$$

を定義すれば

$$r_c(\omega) = r_0(1 - iH_{\rm FP}(\omega)\delta Le^{i\omega t})$$
(2.115)

と書くことができる.

ここで、共振器長が変化する時間が光が共振器を1往復するのにかかる時間よりも十分長ければ* $^{9}\psi \ll 1$ であるから

$$\frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}} \simeq \frac{1}{1 - r_1 r_2 (1 - 2i\psi)}$$
(2.116)

$$=\frac{1}{1-r_1r_2+2ir_1r_2\frac{L\omega}{c}}$$
(2.117)

$$= \frac{1}{1 - r_1 r_2} \left(1 + i \frac{2L\omega}{c} \frac{r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} \right)^{-1}$$
(2.118)

であり, さらに反射率が十分大きければ,

$$\frac{r_1 r_2}{1 - r_1 r_2} = \frac{\sqrt[4]{(1 - T_1)(1 - T_2)}}{1 - \sqrt{(1 - T_1)(1 - T_2)}}$$
(2.119)

$$\simeq \frac{1 - \frac{1}{4}(T_1 + T_2)}{1 - (1 - \frac{1}{2}(T_1 + T_2))} = \frac{1 - \frac{1}{4}(T_1 + T_2)}{\frac{1}{2}(T_1 + T_2)}$$
(2.120)

$$=\frac{2}{T_1+T_2} - \frac{1}{2} \simeq \frac{\mathcal{F}}{\pi}$$
(2.121)

であるから

$$H_{\rm FP}(\omega) \simeq \frac{2\alpha k}{1 - r_1 r_2} \frac{e^{-i\psi}}{1 + i\frac{2L\omega}{c}\frac{\mathcal{F}}{\pi}}$$
(2.122)

$$=\frac{2\alpha k}{1-r_1r_2}\frac{e^{-i\psi}}{1+i\omega\tau} \tag{2.123}$$

^{*&}lt;sup>9</sup> 共振器長の変動があまりに高周波だとずれるが、大型の重力波検出器は通常 1FSR が *O*(10)kHz であるから重力波を捉えるという意味では問題無い.

(ただし τ は前述した平均滞在時間) と書くことができ、時定数 τ のローパス特性があることがわかる。時定数の 逆数、すなわち 1 次の極 $\gamma = \frac{1}{\tau} = \frac{c\pi}{2LF}$ を Cavity pole といい、共振器内の信号が 50% 失われる振動数である。 周波数にすれば $f_0 = \frac{\gamma}{2\pi} = \frac{c}{4LF}$ である。このローパス特性は、直感的には共振器内を光が往復している間に互い に信号が相殺されてしまうから、と考えることができる。一方で

$$f_0 = \frac{\nu_{\text{FSR}}}{2\mathcal{F}} = \frac{\nu_{\text{FWHM}}}{2} = \nu_{\text{HWHM}}$$
(2.124)

でもあるから、高周波の信号だと共振器が共振から十分外れてしまうため、と捉えることもできる.

ここで、overcoupled の場合を考える. 透過率などで $H_{\rm FP}(\omega)$ を近似すると、

$$|H_{\rm FP}(\omega)| \simeq \left| \frac{2\alpha k}{(1 - r_1 r_2)\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \right|$$
 (2.125)

$$=\frac{2k}{(1-r_1r_2)\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\frac{t_1^2r_2}{|r_1-(t_1^2r_1^2)r_2|}$$
(2.126)

$$\simeq \frac{1}{1 - (1 - \frac{\pi}{\mathcal{F}})} \frac{T_1(1 - \frac{1}{2}T_2)}{|1 - \frac{1}{2}T_1 - (1 - \frac{1}{2}T_2 - p_1)|} \frac{2k}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$
(2.127)

$$\simeq \frac{\mathcal{F}}{\pi} \frac{2T_1}{|-T_1 + T_2 + 2p_1|} \frac{2k}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$
(2.128)

$$\simeq \frac{4k\mathcal{F}}{\pi\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = \frac{8\mathcal{F}}{\lambda\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$
(2.129)

のように書ける. Michelson 干渉計の場合と比較すると、 $|H_{Mich}(\omega)| = 2k$ であるから、 共振器は

$$\frac{|H_{\rm Mich}(\omega)|}{|H_{\rm FP}(\omega)|} = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$
(2.130)

だけ信号を増幅している,すなわち腕の長さが実効的に $\frac{2F}{\pi}$ 倍に伸びている,と言える.またこれは反射光の位相が $\frac{2F}{\pi}$ 倍されていることに対応する.

2.4 重力波への応答

重力波の応答を考える. 共振器長 Lの共振器に $h = h_0 e^{i\omega t}$ の重力波が飛来したとする. 時刻 t_n に FM から 入った光が n 往復して時刻 t に FM から出てくるとすると, Michelson 干渉計と同様に考えて, 式 (1.24) から

$$t_n = t - \frac{2nL}{c} - \frac{1}{2} \int_{t_n}^t dt h_0 e^{i\omega t}$$
(2.131)

 $h_0 \ll 1$ として1次までで近似すると

$$t_n \simeq t - \frac{2nL}{c} - \frac{h_0}{2} \int_{t - \frac{2nL}{c}}^t dt e^{i\omega t}$$
 (2.132)

$$= t - \frac{2nL}{c} - \frac{h_0}{2i\omega} \left[e^{i\omega t} - e^{i\omega(t - \frac{2nL}{c})} \right]$$
(2.133)

$$= t - \frac{2nL}{c} - \frac{h_0}{2i\omega} e^{i\omega t} (1 - e^{-2in\psi})$$
(2.134)

よって,式(2.1)と同様に反射光を求めると

$$E_r = r_1 E_i + t_1 \cdot (-r_2) \cdot t_1 e^{-i\Omega t_1} E_0$$
(2.135)

$$+ t_1 \cdot (-r_2) \cdot (-r_1) \cdot (-r_2) \cdot t_1 e^{-i\Omega t_2} E_0 + \cdots$$
(2.136)

$$= E_i \left(r_1 - r_2 t_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{2in\varphi} \exp\left[\frac{\Omega}{2\omega} h_0 e^{i\omega t} (1 - e^{-2in\psi})\right] \right)$$
(2.137)

$$\simeq E_i \left(r_1 - r_2 t_1^2 \sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{2in\varphi} \left[1 + \frac{\Omega}{2\omega} h_0 e^{i\omega t} (1 - e^{-2in\psi}) \right] \right)$$
(2.138)

ここで最後は h₀ の 1 次で近似した. さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} (r_1 r_2)^{n-1} e^{2in\varphi} (1 - e^{-2in\psi}) = \frac{e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}} - \frac{e^{2i(\varphi - \psi)}}{1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)}}$$
(2.139)

=

$$=\frac{e^{2i\varphi}(1-r_1r_2e^{2i(\varphi-\psi)})-e^{2i(\varphi-\psi)}(1-r_1r_2e^{2i\varphi})}{(1-r_1r_2e^{2i\varphi})(1-r_1r_2e^{2i(\varphi-\psi)})}$$
(2.140)

$$\frac{e^{2i\varphi} - e^{2i(\varphi-\psi)}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi-\psi)})}$$
(2.141)

$$=e^{i(2\varphi-\psi)}\frac{2i\sin\psi}{(1-r_1r_2e^{2i\varphi})(1-r_1r_2e^{2i(\varphi-\psi)})}$$
(2.142)

であるから,

$$r_{c}(\omega) = r_{c}(0) - r_{2}t_{1}^{2}\frac{\Omega}{2\omega}h_{0}e^{i\omega t} \cdot e^{i(2\varphi-\psi)}\frac{2i\sin\psi}{(1-r_{1}r_{2}e^{2i\varphi})(1-r_{1}r_{2}e^{2i(\varphi-\psi)})}$$
(2.143)

$$= r_c(0) - i\frac{\Omega}{\omega} \frac{r_2 t_1^2 \sin\psi h_0 e^{i\omega t + 2i\varphi - i\psi}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)})}$$
(2.144)

となる. ここで式 (2.110) と式 (2.144) とを比較すると,

$$2k\delta L = \frac{\Omega h_0}{\omega} \sin \psi \simeq \frac{\Omega h_0}{\omega} \frac{\omega L}{c}$$
(2.145)

$$\delta L \simeq \frac{h_0 L}{2} \tag{2.146}$$

であるから、重力波に対する共振器の応答は、 $\frac{h_0L}{2}$ だけ鏡が変動したことと等価である. Fabry-Perot Michelson にすれば差動運動の位相差が2倍になるから、この場合は重力波は h_0L だけ鏡が差動運動したことと等価である. これは前章の Michelson 干渉計の場合と一致する.

また共振点付近の動作を考えると、 $\varphi = n\pi$ として

$$r_c(\omega) = r_0 - i\frac{\Omega}{\omega} \frac{r_2 t_1^2 \sin\psi h_0 e^{i\omega t - i\psi}}{(1 - r_1 r_2)(1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi})}$$
(2.147)

$$= r_0 \left(1 - i \frac{\Omega}{\omega} \frac{r_2 t_1^2 \sin \psi h_0 e^{i\omega t - i\psi}}{(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2)(1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi})} \right)$$
(2.148)

$$= r_0 (1 - iH_{\rm FP;GW}(\omega)h_0 e^{i\omega t}) \tag{2.149}$$

とかける. ただし

$$H_{\rm FP;GW}(\omega) = \frac{\Omega}{\omega} \frac{r_2 t_1^2 \sin \psi e^{-i\psi}}{(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2)(1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi})}$$
(2.150)

は重力波から位相差への伝達関数。絶対値は

$$|H_{\rm FP;GW}(\omega)| = \frac{\Omega}{\omega} \frac{\alpha |\sin \psi|}{|1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}|}$$
(2.152)

であるが、 $\psi \ll 1$ の状況下であれば

$$H_{\rm FP;GW}(\omega)| \simeq \frac{\alpha kL}{(1 - r_1 r_2)\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}$$

$$(2.153)$$

と $H_{\rm FP}(\omega)$ と同様のローパス特性があることがわかる.

2.5 信号 sideband

Michelson 干渉計のときと同様, 共振器長の変化に対する位相変化は sideband 生成と捉えることもできる. こ こでは共振器長が $\delta L(t) = \delta L \cos \omega t$ だけ動くとして議論するが, 重力波による位相変化も $\delta L \rightarrow \frac{h_0 L}{2}$ とすれば 同様に議論できる.

2.5.1 行列形式の導入

まずは、光が反射されることで carrier, sideband がどのように変化するのかを見る。簡単のため $r_1 = r_2 = 1$ とし、FM は動かないとする。時刻 $t - \Delta t$ に FM にいる光が EM で反射されて時刻 t に帰ってきたとすれば、 2.3.2 での議論から

$$\Delta t = \frac{2L}{c} + \frac{2\delta L(t - \frac{2L}{c})}{c} = \frac{2L}{c} + \frac{2\delta L}{c}\cos\left(\omega t - \frac{2L}{c}\right)$$
(2.154)

である. したがって, 時刻 *t* における *E*⊲ は

$$E_{\triangleleft}(t) = E_{\triangleright} e^{-i\Omega(t-\Delta t)} = E_{\triangleright} e^{-i\Omega t + i\frac{2\Omega L}{c} + i\frac{2\Omega\delta L}{c}\cos(\omega t - \frac{2L}{c})}$$
(2.155)

ここで $\epsilon = \frac{2\Omega\delta L}{c} \ll 1$ として Bessel 関数で展開すれば, ϵ の1次までで

$$E_{\triangleleft}(t) \simeq E_{\triangleright} e^{-i\Omega t + 2i\varphi} (J_0(\epsilon) + iJ_1(\epsilon)e^{-i\omega(t - \frac{2L}{c})} + iJ_1(\epsilon)e^{i\omega(t - \frac{2L}{c})})$$
(2.156)

とかける. これから,周波数 Ω の carrier 光が EM で反射されると周波数 $\Omega \pm \omega$ の sideband が生成されること がわかる. 以下, carrier には 0 を, upper と lower の sideband には ± を添え字につけて表記することにする.

次に, 生成した sideband が EM で反射されて 1 往復するとどのようになるのかを考える. 今右向きの電場に は sideband のみがあるとすると, ナイーブに carrier と同様に考えれば

$$E_{\triangleleft\pm}(t) \simeq E_{\triangleright\pm} e^{-i(\Omega\pm\omega)t + i\frac{2(\Omega\pm\omega)L}{c}} (J_0(\epsilon) + iJ_1(\epsilon)e^{-i\omega(t-\frac{2L}{c})} + iJ_1(\epsilon)e^{i\omega(t-\frac{2L}{c})})$$
(2.157)

のようになるが、carrier のときに見たように $E_{\triangleleft\pm}$ はすでに $J_1(\epsilon)$ を含んでおり、 $E_{\triangleright\pm}$ も同様に $O(J(\epsilon))$ である. 今は ϵ の 1 次のオーダーで考えているから、結局第 1 項のみが残って

$$E_{\triangleleft \pm} \simeq i J_0(\epsilon) J_1(\epsilon) E_0 e^{-i(\Omega \pm \omega)t + 2i(\varphi \pm \psi)}$$
(2.158)

よって、carrier と sideband を同時に考えると、これらの結果をまとめて

$$\begin{pmatrix} E_{\triangleleft 0} \\ E_{\triangleleft +} \\ E_{\triangleleft -} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_0(\epsilon)e^{2i\varphi} & 0 & 0 \\ iJ_1(\epsilon)e^{2i\varphi+i\psi} & J_0(\epsilon)e^{2i(\varphi+\psi)} & 0 \\ iJ_1(\epsilon)e^{2i\varphi-i\psi} & 0 & J_1(\epsilon)e^{2i(\varphi-\psi)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{\triangleright 0} \\ E_{\triangleright +} \\ E_{\triangleright -} \end{pmatrix}$$
(2.159)

とかける. この 3×3 の行列をMとおく. 共振器長の変動がなければ、Mは位相変化 $e^{2i\varphi}$ に対応する.

2.5.2 共振器のモデル

次に,式(2.159)のような行列の形式で共振器を考える.共振器の場合は反射率 r₁, r₂ が存在し,かつ入射光も存在する.まず入射光を無視して考えれば,

$$\begin{pmatrix} E_{\triangleright 0} \\ E_{\triangleright +} \\ E_{\triangleright -} \end{pmatrix} = -r_1 \begin{pmatrix} E_{\triangleleft 0} \\ E_{\triangleleft +} \\ E_{\triangleleft -} \end{pmatrix}$$
(2.160)

であるから

$$\begin{pmatrix} E_{\rhd 0} \\ E_{\rhd +} \\ E_{\triangleright -} \end{pmatrix} = -r_1 \cdot (-r_2 M) \begin{pmatrix} E_{\rhd 0} \\ E_{\rhd +} \\ E_{\triangleright -} \end{pmatrix} = r_1 r_2 M \begin{pmatrix} E_{\rhd 0} \\ E_{\rhd +} \\ E_{\triangleright -} \end{pmatrix}$$
(2.161)

となる. さらに入射光の効果も考えると、入射光 $E_0 e^{-i\Omega t}$ は carrier しかないから

$$E_i = \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(2.162)

これらより

$$\begin{pmatrix} E_{\rhd 0} \\ E_{\rhd +} \\ E_{\triangleright -} \end{pmatrix} = r_1 r_2 M \begin{pmatrix} E_{\rhd 0} \\ E_{\triangleright +} \\ E_{\triangleright -} \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(2.163)

すなわち

$$\begin{pmatrix} E_{\rhd 0} \\ E_{\rhd +} \\ E_{\rhd -} \end{pmatrix} = t_1 (1 - r_1 r_2 M)^{-1} \begin{pmatrix} E_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
(2.164)

となり、implicit に表せる.以下、簡略化のため $E_{\triangleright} = (E_{\triangleright 0}, E_{\triangleright,+}, E_{\triangleright-})$ と表記し、同様に E_{\triangleleft} も定義する.また $E_{ext} = (E_0, 0, 0)$ とする.これらを用いれば、

$$\boldsymbol{E}_{\rhd} = t_1 (1 - r_1 r_2 M)^{-1} \boldsymbol{E}_{ext}$$
(2.165)

と書ける. また左方向の電場は

$$\boldsymbol{E}_{\triangleleft} = -r_2 M \boldsymbol{E}_{\triangleright} \tag{2.166}$$

となる. さらに反射光は

$$\boldsymbol{E}_{r} = r_{1}\boldsymbol{E}_{ext} + t_{1}\boldsymbol{E}_{\triangleleft} = [r_{1} - t_{1}^{2}M(1 - r_{1}r_{2}M)^{-1}]\boldsymbol{E}_{ext}$$
(2.167)

とかけて、これを計算すれば反射光の位相変化が求まる. ちなみに、この形は $M \in e^{2i\varphi}$ で置き換えれば (2.3) と同じ形になる. これに限らず大体の場合において、共振器長が変動しない場合の $e^{2i\varphi}$ を M で置き換えれば、 sideband 描像でもそのまま成り立つ.

さて式 (2.167) を計算すると,*10

$$E_{r0} = E_0 \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}$$
(2.168)

$$E_{r\pm} = E_0 \frac{-i\epsilon t_1^2 r_2 e^{2i\varphi \pm i\psi}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi \pm \psi)})}$$
(2.169)

と求められる. これが式 (2.110) と一致するかを見ると,

$$E_{r} = E_{r0}e^{-i\Omega t} + E_{r+}e^{-i(\Omega+\omega)t} + E_{r-}e^{-i(\Omega-\omega)t} = E_{r_{0}}e^{-i\Omega t}\left(1 + \frac{E_{r+}}{E_{r0}}e^{-i\omega t} + \frac{E_{r+}}{E_{r0}}e^{i\omega t}\right)$$
(2.170)

^{*&}lt;sup>10</sup> 詳細は補遺で

であるから

$$\frac{E_{r-}}{E_{r0}}e^{i\omega t} = \frac{-i\epsilon r_2 t_1^2 e^{i\omega t + 2i\varphi - i\psi}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)})(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2 e^{2i\varphi})}$$
(2.171)

$$=\frac{-2ikr_2t_1^2\delta Le^{i\omega t+2i\varphi-i\psi}}{(1-r_1r_2e^{2i(\varphi-\psi)})(r_1-(t_1^2+r_1^2)r_2e^{2i\varphi})}$$
(2.172)

となり、確かに一致する.

この方法は、鏡の数が増えても行列を増やすだけで同様に行うことができる。そのため、共振器の数値シミュ レーションにはこの方法を発展させたものが採られている。

2.6 **共振器長の制御**

共振器を共振状態に保つためには共振器長の変動 δL の情報を得る必要がある.しかし図 2.2,2.3 を見ればわか るように、共振付近では透過光も反射光も強度変化は位相変化 φ に関して線形でないため、そのままでは十分な 大きさの信号を得られない.そこで、Michelson を Drak fringe でロックしたのと同様に、入射光に位相変調を 加えて carrier と sideband のビートを取ることで線形な信号を得る.図 2.10 を見ると、 r_c の実部は共振付近で flat でだが虚部は線形に近くなっているため、beat をとって $Im(r_c)$ を取得できれば良い.



図 2.10 rc の実部と虚部.

入射光に位相変調 $\beta \sin \omega_m t$ を加えると、 β の 1 次までで式 (1.58) のように carrier $E_0 J_0(\beta) e^{-i\Omega t}$ と sideband± $E_0 J_1(\beta) e^{-i(\Omega \pm \omega_m)t}$ が生成する. 反射光は各周波数の電場の重ね合わせになるから,

$$E_r = E_0(J_0(\beta)r_{c0}e^{-i\Omega t} + J_1(\beta)r_{c+}e^{-i(\Omega+\omega_m)t} - J_1(\beta)r_{c+}e^{-i(\Omega-\omega_m)t})$$
(2.173)

のようにかける. ただし r_{c0±} は carrier, sideband に対する共振器全体の反射率. これから,反射光の強度は

$$P_r = |E_0|^2 |J_0(\beta) r_{c0} e^{-i\Omega t} + J_1(\beta) r_{c+} e^{-i(\Omega + \omega_m)t} - J_1(\beta) r_{c-} e^{-i(\Omega - \omega_m)t}|^2$$
(2.174)

$$= P_0 (J_0(\beta)^2 |r_{c0}|^2 + J_1(\beta)^2 |r_{c+}|^2 + J_1(\beta)^2 |r_{c-}|^2)$$
(2.175)

$$+ P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) (r_{c0} r_{c+}^* e^{i\omega_m t} - r_{c0} r_{c-}^* e^{-i\omega_m t} + r_{c0}^* r_{c+} e^{-i\omega_m t} - r_{c0}^* r_{c-} e^{i\omega_m t})$$

$$+ (2\omega_m \text{ term})$$

$$(2.176)$$

$$(2.177)$$

$$= (DC term) + (\omega_m term) + (2\omega_m term)$$
(2.178)

のようになる. ω_m term だけ見ると

$$(\omega_m \text{ term}) = P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) (r_{c0} r_{c+}^* e^{i\omega_m t} - r_{c0}^* r_{c-} e^{i\omega_m t} + \text{c.c.})$$
(2.179)

$$= P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) [(r_{c0} r_{c+}^* - r_{c0}^* r_{c-}) e^{i\omega_m t} + \text{c.c.}]$$
(2.180)

$$= P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) [F(\Omega, \omega_m) e^{i\omega_m t} + \text{c.c.}]$$
(2.181)

と書ける. ただし $F(\Omega, \omega_m) = r_{c0}r_{c+}^* - r_{c0}^*r_{c-}$ である. 次に, $F(\Omega, \omega_m)$ の形を見ていく.まず, carrier は共振付近を考えているから,式 (2.110) より

$$r_{c0} = r_c(\omega) = r_0(1 - iH_{\rm FP}(\omega)\delta Le^{i\omega t})$$
(2.182)

である.ただし共振器長が $\delta Le^{i\omega t}$ で変動していると仮定した.ここでは周波数を一旦忘れて, $r_{c0} = r_0(1-i\varphi_{\rm FP})$ とおく.一方 sideband は, Finesse が十分大きく,かつ $\nu_{\rm FWHM} \ll \frac{\omega_m}{2\pi} \ll \nu_{\rm FSR}$ が成り立っていれば,ほぼ反共振状態にあるとみなせる.反共振における反射率は

$$r_{\text{anti}} = r_c|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \frac{r_1 + (t_1^2 + r_1^2)r_2}{1 + r_1r_2}$$
(2.183)

であるが、Finesse が十分大きく $T_1, T_2 \ll 1$ とすれば

$$r_{\text{anti}} \simeq \frac{1 - \frac{1}{2}T_1 + (1 - p_1)(1 - \frac{1}{2}T_2)}{1 + 1 - \frac{1}{2}T_1 - \frac{1}{2}T_2} \simeq 1 - \frac{1}{2}p_1$$
(2.184)

とかける. FM のロスが無視できるほど小さければ $r_{anti} = 1$ として良い. すなわち, sideband は FM で完全反射され共振器内には入らない.

以上の結果より、 $r_{c0} = r_0(1 - i\varphi_{\rm FP}), r_{c\pm} \simeq 1$ であるから

$$F(\Omega, \omega_m) = r_{c0} r_{c+}^* - r_{c0}^* r_{c-}$$
(2.185)

$$\simeq r_0 - r_0^* = 2iIm(r_0) = 2ir_0\varphi_{\rm FP}$$
 (2.186)

となる.したがって、反射光は

$$(\omega_m \text{ term}) = P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) [2ir_0 \varphi_{\rm FP} e^{i\omega_m t} + \text{c.c.}]$$
(2.187)

$$= -4r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \varphi_{\rm FP} \sin \omega_m t \tag{2.188}$$

であるから、 $\sin \omega_m t$ で復調して

$$P_{\rm sig} = -4r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \varphi_{\rm FP} \langle \sin^2 \omega_m t \rangle = -2r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \varphi_{\rm FP}$$
(2.189)

と得られる.

最後に周波数応答を考える. 共振からのズレを見るという意味では, 共振器長変動とレーザーの周波数変動を 区別することはできない. 両者は $\delta L/L = \delta f/f$ の関係にあるから, どちらかだけ考えれば他方の寄与による変 動もわかる. ここでは共振器長変動だけを考え,

$$\delta L = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta L(\omega) e^{i\omega t}$$
(2.190)

とフーリエ変換して扱う. 今まで無視してきた φ_{FP} の周波数応答を考えると,

$$\varphi_{\rm FP} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) \delta L(\omega) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2\alpha k e^{-i\psi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}} \delta L(\omega) e^{i\omega t}$$
(2.191)

ただし $\alpha = \frac{r_2 t_1^2}{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2}$, $\psi = \frac{L\omega}{c}$. ψ が十分小さければ

$$\varphi_{\rm FP} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{2k\alpha e^{-i\psi}}{1 - r_1 r_2} \frac{\delta L(\omega) e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau}$$
(2.192)



図 2.11 $F(\Omega, \omega_m)$ の実部と虚部. 共振点の周りの線形な部分がエラー信号になる.

とローパス特性を持つ. ただし $\tau = \frac{2LF}{c\pi}$ は平均滞在時間. ここで, $H_{\rm FP}^*(\omega) = H {\rm FP}(-\omega), \ \delta L^*(\omega) = \delta L(-\omega)$ より

$$\varphi_{\rm FP}^* = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}^*(\omega) \delta L^*(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(-\omega) \delta L(-\omega) e^{-i\omega t}$$
(2.193)

$$= \int_{\infty}^{-\infty} \frac{d(-\omega)}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) \delta L(\omega) e^{i\omega t} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) \delta L(\omega) e^{i\omega t}$$
(2.194)

$$=\varphi_{\rm FP} \tag{2.195}$$

であるから φ_{FP} は実数. したがって復調信号は上で求めたのと同様にして求められ, 復調信号は

$$P_{\rm sig}(\omega) = -2r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{2k\alpha}{1 - r_1 r_2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\delta L(\omega) e^{i\omega t - i\psi}}{1 + i\omega\tau}$$
(2.196)

$$= -4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{kt_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\delta L(\omega) e^{i\omega t - i\psi}}{1 + i\omega\tau}$$
(2.197)

と得られる.

3 Fabry-Perot Michelson 干涉計

前章までで議論したことを合わせて、Fabry-Perot Michelson 干渉計を見ていく.

3.1 基本セットアップ

図のような構成を考える.

x 腕の反射率を r_x , y 腕の反射率を r_y とすると

$$E_{\rm AS} = \frac{1}{2} E_0 e^{-i\Omega t} (r_x e^{2ikl_x} - r_y e^{2ikl_y})$$
(3.1)

$$E_{\rm SYM} = \frac{1}{2} E_0 e^{i\Omega t} (r_x e^{2ikl_x} + r_y e^{2ikl_y})$$
(3.2)

これを、干渉計が1つの複合鏡であるとみなして $E_{AS} = t_{if}E_0e^{-i\Omega t}$, $E_{SYM} = r_{if}E_0e^{-i\Omega t}$ とおくと

$$t_{if} = \frac{1}{2} (r_x e^{2ikl_x} - r_y e^{2ikl_y})$$
(3.3)

$$r_{if} = \frac{1}{2} (r_x e^{2ikl_x} + r_y e^{2ikl_y}) \tag{3.4}$$

となる.

3.2 共振器長の変化の応答

次に、共振器長が変化したとして r_x, r_y を考える. 共振器長が共振状態から $\delta L_i(t)$ で変動しているとすると、

$$\delta L_i(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta L_i(\omega) e^{i\omega t}$$
(3.5)

とフーリエ変換すると、式 (2.115) より

$$r_i = r_0 \left(1 - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) \delta L_i e^{i\omega t} \right)$$
(3.6)

であり,

$$r_x e^{2ikl_x} \pm r_y e^{2ikl_y} = e^{2ikl} (r_x e^{ikl_-} - r_y e^{-ikl_-})$$
(3.7)

$$(l = \frac{l_x + l_y}{2}, l_- = l_x - l_y)$$
 であるから,

$$r_x e^{2ikl_x} \pm r_y e^{2ikl_y} \tag{3.8}$$

$$=r_0 e^{2ikl} \left[e^{ikl_-} - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) \delta L_x(\omega) e^{i\omega t + ikl_-} \right]$$
(3.9)

$$\pm \left(e^{-ikl_{-}} - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega)\delta L_y e^{i\omega t - ikl_{-}}\right)$$
(3.10)

$$=r_0 e^{2ikl} \left[e^{ikl_-} \pm e^{-ikl_-} - i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(e^{ikl_-} \delta L_x(\omega) \pm e^{-ikl_-} \delta L_y(\omega) \right) \right]$$
(3.11)

となる. ここで
$$\delta L_+(\omega) = \delta L_x(\omega) + \delta L_y(\omega)$$
, $\delta L_-(\omega) = \delta L_x - \delta L_y(\omega)$ とおくと,

$$e^{ikl_{-}}\delta L_{x}(\omega) \pm e^{-ikl_{-}}\delta L_{y}(\omega)$$
(3.12)

$$=e^{ikl_{-}}\frac{\delta L_{+}(\omega) + \delta L_{-}(\omega)}{2} \pm e^{-ikl_{-}}\frac{\delta L_{+}(\omega) - \delta L_{-}(\omega)}{2}$$
(3.13)

$$= \begin{cases} \delta L_{+}(\omega) \cos kl_{-} + i\delta L_{-}(\omega) \sin kl_{-} & (+) \\ i\delta L_{+}(\omega) \sin kl_{-} + \delta L_{-}(\omega) \sin kl_{-} & (-) \end{cases}$$
(3.14)

よって

$$r_{x}e^{2ikl_{x}} + r_{y}e^{2ikl_{y}} = r_{0}e^{2ikl} \left[2\cos kl_{-} - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega)(\delta L_{+}(\omega)\cos kl_{-} + i\delta L_{-}(\omega)\sin kl_{-}) \right]$$
(3.15)

$$= r_0 e^{2ikl} (2\cos kl_- - i\varphi_{\rm FP+}) \tag{3.16}$$

$$r_{x}e^{2ikl_{x}} - r_{y}e^{2ikl_{y}} = r_{0}e^{2ikl} \left[2i\sin kl_{-} - i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega)(i\delta L_{+}(\omega)\sin kl_{-} + \delta L_{-}(\omega)\cos kl_{-}) \right]$$
(3.17)
$$= r_{0}e^{2ikl}(2i\cos kl_{-} - i(2\pi\pi))$$
(3.18)

$$r_0 e^{2ikl} (2i\cos kl_- - i\varphi_{\rm FP-})$$
 (3.18)

ただし

$$\varphi_{\rm FP+} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) (\delta L_{+}(\omega) \cos kl_{-} + i\delta L_{-}(\omega) \sin kl_{-})$$
(3.19)

$$\varphi_{\rm FP-} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) (i\delta L_+(\omega)\sin kl_- + \delta L_-(\omega)\sin kl_-)$$
(3.20)

とおいた.

ここで kl_{-} の変動と $\varphi_{\text{FP}\pm}$ を比較する.式 (2.129) より低周波では $|\varphi| \simeq 4k\delta L \frac{\mathcal{F}}{\pi}$ である.仮に l_{-} が δL_i と同 じレベルで変動していたとしても、 $|\varphi|$ は kl_{-} の変動に比べておよそ Finesse 倍大きい. したがって l_{-} の変動は 十分小さく無視できるとしてよい.以下, *l* はその DC 成分だけを考えるものとする.

この l_の選び方は Michelson 干渉計でどの fringe で動作させるかに対応し,通常は Dark fringe での動作で あるから $kl_{-} = 2n\pi$ になる. したがって

$$\varphi_{\rm FP+} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) \delta L_{+}(\omega)$$
(3.21)

$$\varphi_{\rm FP-} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP}(\omega) \delta L_{-}(\omega)$$
(3.22)

$$r_{if} = r_0 e^{2ikl} \left(1 - \frac{\varphi_{\rm FP+}}{2} \right) \tag{3.23}$$

$$t_{if} = -ir_0 e^{2ikl} \frac{\varphi_{\rm FP-}}{2} \tag{3.24}$$

となり、共振器長変化の同相モード $\delta L_+(\omega)$ は SYM に、差動モード $\delta L_-(\omega)$ は AS に現れることになる. *¹¹ 干渉 計の制御という観点からはどちらも必要な情報であるが、重力波信号を得るという点では差動モードにしか欲し い信号は現れない.よって以下では差動モードのみを考えて、 $\delta L_+(\omega) = 0$ すなわち $\varphi_{\text{FP}+} = 0, \frac{\varphi_{\text{FP}-}}{2} = \varphi_{\text{FPMI}}$ とおく.

3.3 重力波への応答

重力波の応答について考えると、 $l_i \ll L_i$ のような状況では arm cavity の腕の変化が支配的であるから l_i の重 力波の影響は無視して良い. 今, 共振状態に制御されている Fabry-Perot Michelson 干渉計に重力波 h(t) が z 軸 方向から来たとする. どちらの腕の長さも共に L だとして, 重力波による x 腕での位相変化は式 (2.144) から

$$\varphi_{\rm GW} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_{\rm FP;GW}(\omega) h(\omega) e^{i\omega t}$$
(3.25)

である. ただし h(ω) は

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} h(\omega) e^{i\omega t}$$
(3.26)

^{*&}lt;sup>11</sup> ちなみに、パワーだけで信号を得ようとすると Michelson のときと同様、 $\varphi_{\rm FP-}$ しか信号に現れない. $\varphi_{\rm FP+}$ の信号を得るには変調 をかけてビートを取らなければならないが、arm cavityの制御などで何れにせよ変調は必要であり、おまけとして $\varphi_{\rm FP+}$ も得られる.

とフーリエ変換で定義される. x 腕と y 腕の位相変化は h(t) の符号を逆にすれば良いから, $-\varphi_{GW}$ である. した がって, 干渉計全体を複合鏡と見たときの反射率 r_{if} , 透過率 t_{if} は

$$r_{if} = \frac{1}{2} \left[e^{2ikl_x} r_0 (1 - \varphi_{\rm GW}) + e^{2ikl_y} r_0 (1 + i\varphi_{\rm GW}) \right]$$
(3.27)

$$= \frac{1}{2} r_0 e^{2ikl} [e^{ikl_-} + e^{-ikl_-} - i\varphi_{\rm GW} (e^{ikl_-} - e^{-ikl_-})]$$
(3.28)

$$= r_0 e^{2ikl} (\cos kl_- + \varphi_{\rm GW} \sin kl_-) \tag{3.29}$$

$$t_{if} = \frac{1}{2} \left[e^{2ikl_x} r_0 (1 - \varphi_{\rm GW}) - e^{2ikl_y} r_0 (1 + i\varphi_{\rm GW}) \right]$$
(3.30)

$$=\frac{1}{2}r_0e^{2ikl}[e^{ikl_-} - e^{-ikl_-} - i\varphi_{\rm GW}(e^{ikl_-} + e^{-ikl_-})]$$
(3.31)

$$= r_0 e^{2ikl} (i\sin kl_- - i\varphi_{\rm GW}\cos kl_-)$$
(3.32)

となる. dark fringe での動作を考えると、 $kl_{-} = 2n\pi$ より

$$r_{if} = r_0 e^{2ikl_-} (3.33)$$

$$t_{if} = -ir_0\varphi_{\rm GW} \tag{3.34}$$

となる. これと腕の長さが変化した時とを比べると,

$$\varphi_{GW} = \frac{\varphi_{\rm FP-}}{2} \tag{3.35}$$

$$H_{\rm FP;GW}(\omega)h(\omega) = H_{\rm FP}(\omega)\frac{\delta L_{-}(\omega)}{2}$$
(3.36)

 $\psi = \frac{\omega L}{c} \ll 1$ であれば式 (2.129), (2.153) より

$$\frac{\alpha kL}{(1-r_1r_2)\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}|h(\omega)| = \frac{2\alpha k}{2(1-r_1r_2)\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}|\delta L_{-}(\omega)|$$
(3.37)

$$L|h(\omega)| = |\delta L_{-}(\omega)| \tag{3.38}$$

となる. すなわち,重力波による影響は両腕の共振器長の差が hL だけ変動するのと同じである. これは Michelson 干渉計のときと同様の性質である.

3.4 信号取得

Michelson を dark で動作させた時と同じく, Fabry-Perot Michelson を dark で動作させるには位相変調 を加える必要がある. 今入射光 $E_0 e^{-i\Omega t}$ に $\beta \sin \omega_m t$ の位相変調を加えると, $E_0 J_0(\beta) e^{-i\Omega t}$ の carrier と ± $E_0 J_1(\beta) e^{-i(\Omega \pm \omega_m)t}$ の sideband が生成する.

干渉計を一つの複合鏡と見た時, carrier の反射率, 透過率は上で求めたものと同じで $r_{if0} = r_{if}, t_{if0} = t_{if}$ である. 一方 sideband の反射率, 透過率は, arm cavity の反射率が carrier と異なるために変わってくる. sideband は共振から十分離れているとすれば, ほぼ反共振として良いから $r_x = r_y \simeq r_{anti} \simeq 1$ とみなせる. したがって, sideband における干渉計の反射率, 透過率は Michelson のそれと同じで

$$t_{if\pm} = \frac{1}{2} e^{2ik_{\pm}l} (e^{ik_{\pm}l_{-}} - e^{ik_{\pm}l_{-}}) = ie^{2ikl} \sin k_{\pm}l_{-}$$
(3.39)

$$r_{if\pm} = \frac{1}{2}e^{2ik\pm l}(e^{ik\pm l_{-}} + e^{-ik\pm l_{-}}) = e^{2ikl}\cos k\pm l_{-}$$
(3.40)

となる. ただし $k_{\pm} = k \pm k_m = \frac{\Omega \pm \omega_m}{c}$. ここで干渉計を dark で動作させることから, $kl_- = 2n\pi$ を代入して

$$t_{if\pm} = ie^{2ik\pm l}\sin(\pm k_m l_-) = \pm ie^{2ik\pm l}\sin k_m l_-$$
(3.41)

$$r_{if\pm} = e^{2ik_{\pm}l}\cos(\pm k_m l_{-}) = e^{2ik_{\pm}l}\cos k_m l_{-}$$
(3.42)

である.

次に、透過光から信号を取得することを考える。基本的には Michelson の dark の時と同じで、透過光強度は

$$P_{\rm AS} = P_0 \left| J_0(\beta) t_{if0} + J_1(\beta) t_{if+} e^{-i\omega_m t} - J_1(\beta) t_{if-} e^{i\omega_m t} \right|^2$$
(3.43)

$$= (DC term) + (2\omega_m term)$$
(3.44)

$$+ P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) (t_{if0} t_{if+}^* - t_{if0}^* t_{if-}) e^{i\omega_m t} + \text{c.c.}$$
(3.45)

であり、いっかで振動する項を復調して信号を得る。今

$$t_{if0}t_{if+}^* - t_{if0}^*t_{if-} = -ir_0\varphi_{\text{FPMI}}e^{2ikl}(-ie^{-2ik_+l}\sin k_m l_-)$$
(3.46)

$$-(-ir_0\varphi_{\rm FPMI}^*e^{-2ikl})(-ie^{-2ik_-l}\sin k_m l_-)$$
(3.47)

$$= -r_0 \sin k_m l_{-} (\varphi_{FP} e^{2ikl - 2ik_+ l} + \varphi_{FP} e^{-2ikl + 2ik_- l})$$
(3.48)

$$= -2r_0 \sin k_m l_- e^{-2ik_m l} \varphi_{\rm FPMI} \tag{3.49}$$

であるから, *12

$$(\omega_m \operatorname{term}) = -2r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \sin k_m l_- \varphi_{\text{FPMI}} e^{i\omega_m t - 2ik_m l} + \text{c.c.}$$
(3.50)

$$= -4r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \sin k_m l_- \varphi_{\text{FPMI}} \cos(\omega_m t - 2k_m l)$$
(3.51)

となる. したがって得られる信号は

$$P_{\rm sig} = -4r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \sin k_m l_- \varphi_{\rm FPMI} \langle \cos^2(\omega_m t - 2k_m l) \rangle \tag{3.52}$$

$$= -2r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \sin k_m l_- \varphi_{\rm FPMI} \tag{3.53}$$

である. もっとも効率良く信号を得るには, $k_m l_- = \frac{\pi}{2}$ すなわち $l_- = \frac{\lambda_m}{4}$ となるように腕の長さにマクロな差を つければ良い. このとき

$$P_{\rm sig} = -2r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \varphi_{\rm FPMI} \tag{3.54}$$

となる.

3.5 Power recycling

前節で Fabry-Perot Michelson の応答を求めたが、このとき SYM へ帰る光は全く見ていない. ほとんどの光は SYM へ帰っていくため、大半の光を捨てていることになる. これを再び干渉計へ打ち返して再利用するのが Power recycling である.

図のような構成を考える. 干渉計部分を 1 つの複合鏡と見れば, PRM を含めた干渉計全体は 1 つの共振器 (PRC) とみなすことができる. FM は PRM で反射率 r_p , 透過率 t_p で, EM は干渉計で反射率 r_{if} , 透過率 t_{if} の干渉計だと思って, 打ち返した光が最も効率よく使われるような条件を考える. まず,入射したレーザー光が そもそも共振器内にたまらないことには意味がないから, PRC では carrier も sideband も共振しなければなら ない. また PRC の反射光は無駄になるから, PRC は critically coupled な共振器にするのが良い. 以下で, こ れらの条件を満たす状況を考える. 簡単のため, PRM はロスがなく, $r_p^2 + t_p^2 = 1$ を満たすとする.

^{*&}lt;sup>12</sup> $H_{\text{FPMI}}^{*}(\omega) = H_{\text{FPMI}}(-\omega), \delta L_{i}^{*}(\omega) = \delta L_{i}(-\omega)$ であることを用いれば $\varphi_{\text{FPMI}}^{*} = \varphi_{\text{FPMI}}$ はすぐにわかる.

まず sideband について考えると、PRC の反射率、透過率は

$$r_{\rm PRC\pm} = \frac{r_p - (r_p^2 + t_p^2) r_{if\pm} e^{2ik_{\pm}l_p}}{1 - r_p r_{if\pm} e^{2ik_{\pm}l_p}}$$
(3.55)

$$=\frac{r_p - \cos k_m l - e^{2ik_{\pm}(l_p+l)}}{1 - r_p \cos k_m l_- e^{2ik_{\pm}(l_p+l)}}$$
(3.56)

$$t_{\text{PRC}\pm} = \frac{t_p t_{if\pm} e^{ik\pm l_p}}{1 - r_p r_{if\pm} e^{2ik_\pm l_p}}$$
(3.57)

$$=\pm i \frac{t_p \sin k_m l - e^{ik_{\pm}(2l+l_p)}}{1 - r_p \cos k_m l_- e^{2ik_{\pm}(l_p+l)}}$$
(3.58)

である. $r_{if\pm} = e^{2ik_{\pm}l}\cos k_m l_-$ を代入すると

$$r_{\rm PRC\pm} = \frac{r_p - \cos k_m l - e^{2ik_{\pm}(l_p + l)}}{1 - r_p \cos k_m l_- e^{2ik_{\pm}(l_p + l)}}$$
(3.59)

であるから、まず共振するためには

$$2ik_{\pm}(l+l_p) = 2n\pi \tag{3.60}$$

次に critically coupled である条件から

$$\cos k_m l_- = r_p \tag{3.61}$$

でなければならない. これらより

$$t_{\rm PRC\pm} = \pm i \frac{t_p \sqrt{1 - r_p^2 e^{-ik_{\pm}l_p}}}{1 - r_p^2} = \pm i \frac{t_p^2 e^{-ik_{\pm}l_p}}{1 - r_p^2} = \pm i e^{-ik_{\pm}l_p}$$
(3.62)

となる.

次に carrier を考える. PRC の反射率,透過率は

$$r_{\rm PRC0} = \frac{r_p - (r_p^2 + t_p^2)r_{if0}e^{2ikl_p}}{1 - r_p r_{if0}e^{2ikl_p}} = \frac{r_p - r_0 e^{2ik(l_p+l)}}{1 - r_p r_0 e^{2ik(l_p+l)}}$$
(3.63)

$$t_{\rm PRC0} = \frac{t_p t_{if0} e^{ikl_p}}{1 - r_p r_{if0} e^{2ikl_p}} = -i \frac{t_p r_0 \varphi_{\rm FPMI} e^{ik(2l+l_p)}}{1 - r_p r_0 e^{2ik_{\pm}(l_p+l)}}$$
(3.64)

である. これらより、共振する条件を考える. arm cavity が over coupled であることから $r_0 < 0$ に注意すると

$$2ik(l+l_p) = (2n+1)\pi \tag{3.65}$$

でなければならない. また critically coupled になる条件から

$$|r_0| = r_p = \cos k_m l - \tag{3.66}$$

でなければならない. これらより PRC の透過率を求めると

$$t_{\rm PRC0} = -i \frac{t_p r_p \varphi_{\rm FPMI} e^{-ikl_p}}{1 - r_p^2} = -i \frac{r_p}{t_p} \varphi_{\rm FPMI} e^{-ikl_p}$$
(3.67)

となる.

最後に、求めた t_{PRC} を用いて得られる信号を求める。やることは前節とほとんど同じであるから多少省略すると、

$$P_{\rm AS} = (\rm DC\,term) + (2\omega_m\,term) \tag{3.68}$$

 $+ P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) t_{\text{PRC0}} t_{\text{PRC+}}^* - t_{\text{PRC0}}^* t_{\text{PRC-}} + \text{c.c.}$ (3.69)

で,

$$t_{\rm PRC0} t_{\rm PRC+}^* - t_{\rm PRC0}^* t_{\rm PRC-} = -i \frac{r_p}{t_p} \varphi_{\rm FPMI} e^{-ikl_p} (-ie^{ik_+l_p}) - i\varphi_{\rm FPMI} e^{ikl_p} (-ie^{ik_-l_p})$$
(3.70)

$$= -\frac{r_p}{t_p} (\varphi_{\text{FPMI}} e^{-ikl_p + ik_+ l_p} + \varphi_{\text{FPMI}} e^{ikl_p - ik_- l_p})$$
(3.71)

$$= -2\frac{r_p}{t_p}e^{ik_m l_p}\varphi_{\rm FPMI} \tag{3.72}$$

より

$$P_{\rm sig} = -4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{r_p}{t_p} \varphi_{\rm FPMI} \langle \cos^2(\omega_m t + k_m l_p) \rangle$$
(3.73)

$$= -2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{r_p}{t_p} \varphi_{\text{FPMI}}$$
(3.74)

となる. 式 (3.74) と (3.54) を比較すると, PRC をすることで

$$\left|\frac{r_p}{t_p r_0}\right| = \frac{1}{t_p} \tag{3.75}$$

だけ信号が増幅される.また BS に入る carrier 光の強度を $P_{\rm PR}$ とおくと、式 (2.63) より

$$P_{\rm PR} = \frac{t_p^2}{|1 - r_p r_{if0}|^2} P_0 = \frac{t_p^2}{(1 - r_p^2)^2} P_0 = \frac{1}{t_p^2} P_0$$
(3.76)

である. この $P_{\rm PR}$ と P_0 との比を power recycling gain と呼ぶ:

$$G_{\rm PR} = \frac{1}{t_p^2} \tag{3.77}$$

4 量子雑音

この章でレーザーの量子雑音 (Shot noise, Radiation pressure noise) を見ていく.

4.1 古典的描像

まず,光の量子性は photon に全て押し込めて,その他は古典的に扱う.入射光を Poisson 過程でモデル化する. レーザーの周波数を Ω とすれば, photon1 個あたりのエネルギーは $\hbar\Omega$ であるから光の強度は

$$P(t) = \hbar \Omega \mathbf{x}(t) \tag{4.1}$$

のように書ける. ただし x は単位インパルスの Poisson 過程で

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i} \delta(t - t_i) \tag{4.2}$$

である. ランダムな時刻 $t = t_i$ にインパルスが発生し、 t_i は Poisson 過程で与えられるとする. このインパルス 列の長時間平均を考えると、

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \sum_{i} \delta(t - t_i)$$
(4.3)

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t_i \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} = \lim_{T \to \infty} \frac{N_T}{T}$$
(4.4)

ただし N_T は $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$ に含まれる t_i の個数. t_i は Poisson 過程であるから $\frac{N_T}{T}$ は $T \to \infty$ で収束し, これを r と おくと

$$\langle \mathbf{x}(t) \rangle = \mathbf{r} \tag{4.5}$$

となる. これを用いれば,

$$\langle P(t) \rangle = \hbar \Omega \mathbf{r} , \, \mathbf{r} = \frac{\langle P \rangle}{\hbar \Omega}$$

$$\tag{4.6}$$

とかける.

次に、光の強度の相関を考える. Poisson 過程 $\mathbf{x}(t)$ について、

$$C_{\mathbf{x}\mathbf{x}}(\tau) = \langle \mathbf{x}(t)\mathbf{x}(t+\tau) \rangle \tag{4.7}$$

$$= \left\langle \sum_{i,j} \delta(t - t_i) \delta(t + \tau - t_j) \right\rangle$$
(4.8)

$$= \left\langle \sum_{i} \delta(t - t_i) \delta(t + \tau - t_i) \right\rangle + \left\langle \sum_{i \neq j} \delta(t - t_i) \delta(t + \tau - t_j) \right\rangle$$
(4.9)

となるが、第2項は t_i が Poisson 過程であることから0 である。したがって

$$C_{\mathbf{xx}}(\tau) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} dt \sum_{i} \delta(t - t_i) \delta(t + \tau - t_i)$$
(4.10)

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \sum_{t_i \in [-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]} \delta(\tau) \tag{4.11}$$

$$= \lim_{T \to \infty} \frac{N_T}{T} \delta(\tau) = \mathbf{r} \,\delta(\tau) \tag{4.12}$$

これをフーリエ変換すれば、 $\mathbf{x}(t)$ のパワースペクトル $S_{\mathbf{xx}}(\omega)$ が得られる:

$$S_{\mathbf{xx}}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_{\mathbf{xx}}(\tau) e^{-i\omega\tau} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \mathbf{r} \,\delta(\tau) e^{-i\omega\tau} = \frac{\mathbf{r}}{2\pi}$$
(4.13)

周波数表示にすれば

$$S_{\mathbf{xx}}^2(f) = 2\pi S_{\mathbf{xx}}(\omega) = \mathbf{r}$$
(4.14)

$$S_{\mathbf{x}}(f) = \sqrt{S_{\mathbf{xx}}^1(f)} = \sqrt{2S_{\mathbf{xx}}(f)} = \sqrt{2\mathbf{r}}$$

$$(4.15)$$

となる.

次に、これを強度に換算すると、 $P(t) = \hbar \Omega \mathbf{x}(t)$ であるから

$$S_P(f) = \hbar\Omega S_{\mathbf{x}}(f) = \hbar\Omega \sqrt{2\mathbf{r}} \tag{4.16}$$

さらに式 (4.6) を用いて r を消せば

$$S_P(f) = \hbar \Omega \sqrt{2 \frac{\langle P \rangle}{\hbar \Omega}} = \sqrt{2\hbar \Omega \langle P \rangle}$$
(4.17)

となる.

4.2 Shot noise

Shot noise は PD に入射した光子数の揺らぎによる雑音である。 PD に DC で P_{DC} の光が入射すると、

$$P_{\rm shot}(f) = \sqrt{2\hbar\Omega}P_{\rm DC} \tag{4.18}$$

の雑音が混入する. この雑音と信号の大きさが同じになるような状況が Shot noise level である.

ここで腕の長さの変動による位相変化を δφ として, PD に入射する光が

$$P_{\rm PD} = P_{\rm DC} + \int_{\infty}^{\infty} df \, H(f) \delta\varphi(f) e^{2\pi f t}$$
(4.19)

のように与えられたとする. このとき Shot noise は式 (4.18) で与えられ, また信号は

$$P_{\delta\varphi}(f) = H(f)\delta\varphi(f) \tag{4.20}$$

であるから,

$$S_P(f) = |H(f)| S_{\delta\varphi}(f) \tag{4.21}$$

$$S_{\delta\varphi}(f) = \frac{S_P(f)}{|H(f)|} = \frac{\sqrt{2\hbar\Omega P_{\rm DC}}}{|H(f)|}$$
(4.22)

となる.

以下でいくつかの例を見ていく.

4.2.1 Michelson 干涉計

Michelson 干渉計の場合, $\delta \varphi$ は両腕の長さの差動 kl_{-} である. PD で受ける光は

$$P_{\rm AS} = P_0 \sin^2 k l_- + 2P_0 \delta \varphi(t - l/c) \sin k l_- \cos k l_-$$
(4.23)

である. 式 (4.19) にならえば,

$$P_{\rm DC} = P_0 \sin^2 k l_{-} \tag{4.24}$$

$$H(f) = 2P_0 e^{-2\pi i f l/c} \sin k l_{-} \cos k l_{-}$$
(4.25)

となるから, $\delta \varphi$ の shot noise は

$$S_{\delta\varphi}(f) = \frac{\sqrt{2\hbar\Omega P_0 \sin^2 k l_-}}{2P_0 \sin k l_- \cos k l_-} = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0}} \frac{1}{\cos k l_-}$$
(4.26)

であり、 kl_{-} の値で shot noise のレベルが変わることになる.

次に各 fringe での値を考える.bright の場合 $kl_{-} = (2n+1)\pi$ であるから $S_{\delta\varphi} = \infty$ と発散する.すなわち S/N 比は 0 である.mid の場合は $kl_{-} = 2n\pi + \frac{\pi}{4}$ であるから

$$S_{\delta\varphi} = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{P_0}} \tag{4.27}$$

である. dark の場合は $kl_{-} = 2n\pi$ であるから

$$S_{\delta\varphi} = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0}} \tag{4.28}$$

となり、最も感度が良い.以上の結果は1.4節の議論をより定量的にしただけである.

ただし、dark の場合には少し問題がある。上の式は P_{AS} を考えた上での式だが、実際には dark では変調をかけて信号を取得しているから、それに則って shot noise を考えないといけない。dark のときに PD で受ける光は、(1.67)、(1.78) から

$$P_{\rm AS} = 2P_0 J_1(\beta)^2 + 4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \delta\varphi \cos\left[\omega_m \left(t - \frac{l_+}{c}\right)\right] + (2\omega_m \,\text{term}) \tag{4.29}$$

である.^{*13} 信号を得るにはこれに $\cos[\omega_m(t - l_+/c)]$ をかけて復調するから,周波数 f の信号には P_{DC} の $\omega_m/2 \pm 2\pi f$ の周波数での雑音が寄与することになる.したがって,復調した後の信号に乗る雑音は

$$S_P(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2\hbar\Omega \cdot 2P_0 J_1(\beta)^2} = J_1(\beta)\sqrt{2\hbar\Omega P_0}$$
(4.30)

である. (係数 $\sqrt{2}$ は 2 つの周波数からの雑音の寄与を考慮したファクター. 1/2 は $\cos[\omega_m(t - l_+/c)]$ をかけて 復調したことでかかるファクター.) 一方, 復調した信号は式 (1.78) から $2P_0J_0(\beta)J_1(\beta)\delta\varphi(t)$ であるから

$$|H(f)| = 2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \tag{4.31}$$

である. よって, shot noise は

$$S_{\delta\varphi}(f) = \frac{J_1(\beta)\sqrt{2\hbar\Omega P_0}}{2P_0 J_0(\beta)J_1(\beta)} = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0 J_0(\beta)^2}}$$
(4.32)

となる. $\beta \rightarrow 0$ の極限を考えれば $J_0(\beta) \rightarrow 1$ であるから,式 (4.28)の結果と一致する.

4.2.2 Fabry-Perot 共振器

共振器の場合,位相変化 $\delta \varphi$ は共振器長の変動 $k\delta L$ である。共振器で信号を得るときは,Michelson の dark と 同様に PD で受けた光を復調するから,上でやったことと同様のことをすればいい。反射光の強度は式 (2.177), (2.197)より

$$P_r = P_0(J_0(\beta)^2 r_0^2 + 2J_1(\beta)^2) - 4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \varphi_{\rm FP} \sin \omega_m t$$
(4.33)

である. ただし

$$\varphi_{\rm FP} = \frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\delta\varphi(\omega) e^{i\omega t - i\omega L/c}}{1 + i\omega\tau}$$
(4.34)

*13 $|t_0| = O(\varphi^2)$ であるから $P_{\rm DC}$ においては無視した.

である. Michelsonの dark のときと同様に考えれば, DC の雑音は

$$S_P(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2\hbar\Omega(J_0(\beta)^2 r_0^2 + 2J_1(\beta)^2)} = \sqrt{\hbar\Omega(J_0(\beta)^2 r_0^2 + 2J_1(\beta)^2)}$$
(4.35)

であり、信号は

$$P_{\rm sig} = 4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \frac{t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\delta\varphi(\omega) e^{i\omega t}}{1 + i\omega\tau}$$
(4.36)

より

$$H(f) = \frac{4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{e^{-2\pi i f L/c}}{1 + i f/f_0}$$
(4.37)

となる. したがって, shot noise level は

$$S_{\delta\varphi} = \sqrt{\hbar\Omega P_0 (J_0(\beta)^2 r_0^2 + 2J_1(\beta)^2)} \frac{(1 - r_1 r_2)^2}{4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2} |1 + if/f_0|$$
(4.38)

$$=\sqrt{\frac{\hbar\Omega(J_0(\beta)^2 r_0^2 + 2J_1(\beta)^2)}{P_0 J_0(\beta)^2 J_1(\beta)^2}} \frac{(1 - r_1 r_2)^2 |1 + if/f_0|}{4t_1^2 r_2}$$
(4.39)

とかける. これより, 共振器の shot noise は Michelson の場合と異なり周波数依存性を持つことになる. また共振時の反射光の強度 r_0 が小さいほど, すなわち PD に入射する光が小さいほど良いこともわかる. 最も良いとき は critically coupled($r_0 = 0$)のときで, このとき

$$S_{\delta\varphi}(f) = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0 J_0(\beta)^2}} \frac{(1 - r_1 r_2)^2 |1 + if/f_0|}{2t_1^2 r_2}$$
(4.40)

となる. さらに透過率が十分小さければ, critically coupled で $T_1 \simeq T_2$ であるから

$$\frac{(1-r_1r_2)^2}{t_1^2r_2} = \frac{(1-\sqrt{1-T_1}\sqrt{1-T_2})}{T_1\sqrt{1-T_2}} \simeq \frac{(\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2)^2}{T_1(1-\frac{1}{2}T_2)}$$
(4.41)

$$\simeq \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1} \simeq \frac{(T_1 + T_2)^2}{2(T_1 + T_2)} = \frac{T_1 + T_2}{2} \simeq \frac{\pi}{\mathcal{F}}$$
(4.42)

とかけ,

$$S_{\delta\varphi}(f) = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0 J_0(\beta)^2}} \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \left| 1 + i\frac{f}{f_0} \right|$$
(4.43)

となる. これと式 (4.32) とを比べれば, $f \ll f_0$ では Fabry-Perot の方が Michelson よりも $\frac{\pi}{2F}$ だけ shot noise が小さくなっていることがわかる. これは, 雑音が同じ量なのに対して信号は $\frac{2F}{\pi}$ 倍大きくなっているから, と解釈できる.

4.2.3 Fabry-perot Michelson

Fabry-Perot Michelson の場合, $\delta \varphi$ は 2 つの arm cavity の長さの差動モード $k\delta L_{-}$ である. このときも Michelson の dark や Fabry-Perot の場合と同様のことをすればよく,式 (3.45), (3.54) より

$$P_{\rm AS} = 2P_0 J_1(\beta)^2 - 4r_0 P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \varphi_{\rm FPMI} \sin \omega_m t \tag{4.44}$$

ただし

$$\varphi_{\rm FPMI} = \frac{t_1^2 r_2}{2(1 - r_1 r_2)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\delta\varphi(\omega) e^{i\omega t - i\omega L/c}}{1 + i\omega\tau}$$
(4.45)

である.*¹⁴ したがって

$$S_P(f) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2\hbar\Omega \cdot 2P_0 J_1(\beta)^2} = J_1(\beta) \sqrt{2\hbar\Omega P_0}$$
(4.46)

$$H(f) = \frac{2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \frac{e^{-2\pi i f L/c}}{1 + i f/f_0}$$
(4.47)

から

$$S_{\delta\varphi}(f) = J_1(\beta)\sqrt{2\hbar\Omega P_0} \frac{(1-r_1r_2)^2}{2P_0J_0(\beta)J_1(\beta)t_1^2r_2} |1+if/f_0|$$
(4.48)

$$=\sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0J_0(\beta)^2}}\frac{(1-r_1r_2)^2|1+if/f_0|}{t_1^2r_2}$$
(4.49)

となる. Fabry-Perot Michelson の場合は overcoupled であるから,

$$\frac{(1-r_1r_2)^2}{t_1^2r_2} \simeq \frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1} \simeq \frac{T_1^2}{4T_1}$$
(4.50)

$$=\frac{T_1}{4} \simeq \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \tag{4.51}$$

である. したがって

$$S_{\delta\varphi}(f) = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0 J_0(\beta)^2}} \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \left| 1 + i\frac{f}{f_0} \right|$$
(4.52)

となる.式 (4.32) とを比べるとやはり $\frac{\pi}{2F}$ だけ小さくなっているが、これも Fabry-Perot の時と同様の理由で説明できる.

4.2.4 Power recycled FPMI

Power recycling をする場合も、前節とほぼ同じと考えてよくて

$$P_{\rm AS} = 2P_0 J_1(\beta)^2 + 4\frac{r_0}{t_p} P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \varphi_{\rm FPMI} \sin \omega_m t \tag{4.53}$$

である. したがって、 雑音レベルは同じで信号が t_p だけ大きくなっているから、 shot noise は

$$S_{\delta\varphi}(f) = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0 J_0(\beta)^2}} \frac{\pi}{2\mathcal{F}t_p} \left| 1 + i\frac{f}{f_0} \right| = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_0 J_0(\beta)^2 G_{\mathrm{PR}}}} \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \left| 1 + i\frac{f}{f_0} \right|$$
(4.54)

となる. ここで $G_{\text{PR}} = \frac{1}{t_p^2}$ は power recycling gain. BS に入射する前の光の強度 $P_{\text{PR}} = G_{\text{PR}}P_0$ を用いれば,

$$S_{\delta\varphi}(f) = \sqrt{\frac{\hbar\Omega}{2P_{\rm PR}J_0(\beta)^2}} \frac{\pi}{2\mathcal{F}} \left| 1 + i\frac{f}{f_0} \right|$$
(4.55)

4.3 Radiation pressure noise

Radiation pressre noise は光の輻射圧が揺らぐことによる雑音である。質量 mの鏡に強度 P(t)の光が入射すると、鏡は $F_{\rm rad}(t) = \frac{2P(t)}{c}$ の輻射圧を受ける。したがって力 Fのスペクトルは

$$S_F(f) = \frac{2}{c} S_P(f)$$
 (4.56)

^{*14} Michelson の dark のときと同様, $|t_{if0}| = O(\delta \varphi^2)$ であるから無視した.

で与えられる.一方変位と力の関係は、鏡の変位をxとすると鏡の共振周波数以上では^{*15} $m\ddot{x} = F$ である.パワースペクトルで考えれば

$$S_x(f) = \frac{1}{m\omega^2} S_F(f) = \frac{1}{m(2\pi f)^2} S_F(f)$$
(4.57)

であるから、光の強度の揺らぎによる鏡の変位の揺らぎは

$$S_x(f) = \frac{2}{mc(2\pi f)^2} S_P(f) = \frac{2}{mc(2\pi f)^2} \sqrt{2\hbar\Omega\langle P\rangle}$$
(4.58)

となる.

ここでは Fabry-Perot 共振器の場合についてだけ考える. *¹⁶ まず,入射光が揺らぎを持っていた場合に鏡に当たる光 (P_{\triangleright}) がどのように変化するのかを考える.入射光 $E_i(\omega)$ が

$$E_i(\omega) = E_0(1 + \epsilon e^{i\omega t})e^{-i\Omega t}$$
(4.59)

と揺らぎ成分 $\epsilon e^{i\omega t}$ を持っていたとする ($\epsilon \ll 1$). このとき入射光の強度は $O(\epsilon)$ で

$$P_{i}(\omega) = |E_{0}|^{2} (1 + 2\epsilon \cos \omega t) = P_{0} + P_{i}(\omega)$$
(4.60)

となる. ただし $P_0 = |E_0|^2$, $P_i(\omega) = \epsilon P_0 \cos \omega t$. 次に, EM の直前の電場 $E'_{\triangleright}(\omega)$ を考える. 式 (2.7) のように 考えて,

$$E'_{\triangleright}(\omega) = t_1 E_0 \left(e^{-i\Omega(t - \frac{L}{c})} + \epsilon e^{-i(\Omega - \omega)(t - \frac{L}{c})} \right)$$
(4.61)

$$+ t_1 r_1 r_2 E_0(e^{-i\Omega(t - \frac{3L}{c})} + \epsilon e^{-i(\Omega - \omega)(t - \frac{3L}{c})}) + \cdots$$

$$(4.62)$$

$$= t_1 E_0 e^{-i\Omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{i(2n+1)\varphi} + t_1 \epsilon E_0 e^{-i(\Omega-\omega)t} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{i(2n+1)(\varphi-\psi)}$$
(4.63)

$$=t_1 E_0 e^{-i\Omega t} \left(\frac{e^{i\varphi}}{1-r_1 r_2 e^{2i\varphi}} + \epsilon e^{i\omega t} \frac{e^{i(\varphi-\psi)}}{1-r_1 r_2 e^{2i(\varphi-\psi)}}\right)$$
(4.64)

である. 共振器が共振しているときは, $\varphi = 2n\pi$ を代入して

$$E_{\rhd}'(\omega) = t_1 E_0 e^{-i\Omega t} \left(\frac{1}{1 - r_1 r_2} + \epsilon e^{i\omega t} \frac{e^{-i\psi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}} \right)$$
(4.65)

である. これから EM に入射する光の強度 $P'_{\triangleright}(\omega)$ は

$$P'_{\rhd}(\omega) = |E'_{\rhd}(\omega)|^2 \tag{4.66}$$

$$= P_0 \left(\frac{t_1}{1 - r_1 r_2}\right)^2 + 2\epsilon P_0 \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} Re \left[\frac{t_1 e^{i\omega t - i\psi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}}\right] + O(\epsilon^2)$$
(4.67)

$$= P_0 G_{\triangleright} + 2\epsilon P_0 \frac{t_1^2}{1 - r_1 r_2} \frac{Re[(1 - r_1 r_2 e^{2i\psi})e^{i\omega t - i\psi}]}{(1 - r_1 r_2 \cos\psi)^2 + (r_1 r_2 \sin\psi)^2}$$
(4.68)

$$= P_0 G_{\triangleright} + 2\epsilon P_0 \frac{t_1^2}{1 - r_1 r_2} \frac{\cos(\omega t - \psi) - r_1 r_2 \cos(\omega t + \psi)}{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\psi}$$
(4.69)

である. ただし G_{\triangleright} は式 (2.63) で、 $O(\epsilon^2)$ 以上は無視した. radiation pressure に関係するのは $P'_{\triangleright}(\omega)$ の AC 成分であるから、 $P'_{\triangleright}(\omega) = P_0 G_{\triangleright} + \tilde{P}'_{\triangleright}(\omega)$ とおくと

$$\tilde{P}_{\rhd}'(\omega) = 2\epsilon P_0 \frac{t_1^2}{1 - r_1 r_2} \frac{\cos(\omega t - \psi) - r_1 r_2 \cos(\omega t + \psi)}{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\psi}$$
(4.70)

となる.

^{*15} 重力波検出器の場合鏡は自由質点とみなせる領域での観測を考えるから妥当な仮定.

^{*&}lt;sup>16</sup> なぜ Michelson が後回しかは後述.

これを用いて $P_i(\omega)$ から $\tilde{P}' \triangleright (\omega)$ への伝達関数 $H_{\triangleright}(\omega)$ を考える.

$$P_i(\omega) = 2\epsilon P_0 \cos \omega t = \epsilon (e^{i\omega t} + e^{-\omega t})$$
(4.71)

であるから

$$P_{\triangleright}'(\omega) = \epsilon P_0[H_{\triangleright}(\omega)e^{i\omega t} + H(-\omega)e^{-i\omega t}]$$
(4.72)

と比較して

$$H_{\triangleright}(\omega) = \frac{t_1^2}{1 - r_1 r_2} \frac{(1 - r_1 r_2 e^{2i\psi}) e^{-i\psi}}{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\psi}$$
(4.73)

である. また絶対値は

$$|H_{\rhd}(\omega)| = \frac{t_1^2}{1 - r_1 r_2} \frac{|1 - r_1 r_2 e^{2i\psi}|}{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\psi} = \frac{t_1^2}{1 - r_1 r_2} \frac{1}{\sqrt{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\psi}}$$
(4.74)

であるが, r_1, r_2 が十分1に近く, $\psi = \frac{\omega L}{c} \ll 1$ として近似すれば

$$1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\psi \simeq (1 - r_1 r_2)^2 (1 + (\omega \tau)^2)$$
(4.75)

となる. (ただし $\tau = \frac{2LF}{c\pi}$ は平均滞在時間) さらに overcoupled な共振器を仮定すれば

$$\frac{t_1^2}{(1-r_1r_2)^2} = \frac{T_1}{\left(1-\sqrt{1-T_1}\sqrt{1-T_2}\right)^2}$$
(4.76)

$$\simeq \frac{T_1}{\left[\frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2}T_2\right]^2} = \frac{4T_1}{(T_1 + T_2)^2} \simeq \frac{4}{T_1} \simeq \frac{2\mathcal{F}}{\pi}$$
(4.77)

と Finesse を使って書ける. したがって

$$|H_{\triangleright}(\omega)| = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$
(4.78)

となる.

今度は FM の受ける輻射圧を考える.まず共振器内の電場からの寄与を考えると, FM の直前の電場 $E_{\triangleleft}(\omega)$ は $E'_{\triangleright}(\omega)$ と比べて EM で振幅反射率 r_2 で反射してから距離 L だけ伝播しているから,強度は $H_{\triangleright}(\omega)$ から r_2^2 倍さ れ,位相は $\psi = \frac{\omega L}{c}$ だけ遅れる.したがって

$$H_{\triangleleft}(\omega) = r_2^2 e^{-i\psi} H_{\triangleright}\omega = \frac{t_1^2 r_2^2}{1 - r_1 r_2} \frac{(1 - r_1 r_2 e^{2i\psi}) e^{-2i\psi}}{1 + (r_1 r_2)^2 - 2r_1 r_2 \cos 2\psi}$$
(4.79)

となる. $H_{\triangleright}(\omega)$ の時と同様に近似すると,

$$\frac{t_1^2 r_2^2}{(1 - r_1 r_2)^2} = \frac{T_1 (1 - T_2)}{(1 - \sqrt{1 - T_1} \sqrt{1 - T_2})^2} \simeq \frac{T_1}{4(T_1 + T_2)^2} \simeq \frac{2\mathcal{F}}{\pi}$$
(4.80)

より

$$|H_{\triangleleft}(\omega)| = \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}} = |H_{\triangleright}(\omega)|$$
(4.81)

となる. すなわち, $H_{\triangleleft}(\omega)$ は $H_{\triangleright}(\omega)$ と正の相関がある. したがって, Fabry-Perot 共振器の radiation pressure noise の振幅は 1 つの鏡の影響の 2 倍になる. *¹⁷

最後に, radiation pressure noise は

$$S_x(f) = 2\frac{2}{mc(2\pi f)^2} H_{\triangleright}(f) S_P(f)$$
(4.82)

となる.

^{*&}lt;sup>17</sup> 実際には、FM は入射光から、EM は透過光からも輻射圧を受けている.しかし、 $f \ll f_0$ では共振器内の電場は反射光、透過光の強度に比べて $\sim \frac{2F}{\pi}$ 倍であるから、入射光や透過光の影響はほとんど無視できる.詳しい計算は補遺で.

4.4 Michelson 干渉計で radiation pressure noise は見えるか?

ここで Michelson 干渉計の radiatin pressure noise について考える. Michelson の場合,光は BS で2つに分割されてそれぞれの光が鏡に輻射圧を及ぼす. このとき分割されたそれぞれの光は相関をもち,それぞれの鏡での雑音は同相になる. したがって鏡で反射され BS で結合したときにこれらの雑音は互いに打ち消され, AS には radiatio pressure noise は見えないことになる.

このことについては [7] によって解決された. [7] によれば, 鏡に入射する光はレーザーから来たコヒーレント な光だけでなく AS から侵入してくる真空場の揺らぎもあり, この真空場の揺らぎが radiation pressure noise を 生み出している. さらに言えば, radiation pressure noise には入射光の揺らぎは全く関係がない.

4.4.1 Michelson 干涉計

Michelson 干渉計の場合,入射した光は BS で分けられた後に鏡にあたるため, $\langle P \rangle = \frac{P_0}{2}$ である.したがって,鏡の変動は

$$S_{\delta l_i}(f) = \frac{1}{m(2\pi f)^2} \sqrt{\frac{4\hbar\Omega P_0}{c^2}}$$
(4.83)

次にこれらが BS で再結合して PD に入射することを考える.以下の議論は [6] に依っている.(完璧に dark fringe になっていれば)腕の差は波長の半整数倍,往復で整数倍異なっているから,両腕での雑音は各周波数で同相で効く.したがって BS で結合する際に,互いに打ち消し合い結局雑音は現れないことになる.ところが,実際には入射光だけでなく PD の方から干渉計に侵入してくる真空場の揺らぎを考えなければならない.これを Svac(f) としよう.真空場の揺らぎは BS で分割され,もともとレーザーから出てきた光と結合する.このとき両腕で結合する真空場揺らぎの符号が異なるから,レーザー光と真空場の合わせた光の揺らぎは結局逆相で効き,PD で雑音として現れることになる.

 $\delta \varphi = k(\delta l_x - \delta l_-)$ であるから、両腕の長さの変動に相関がないとして^{*18}

$$S_{\delta\varphi}(f) = \sqrt{2k} S_{\delta l_x}(f) = \frac{2k}{m(2\pi f)^2} \sqrt{\frac{2\hbar\Omega P_0}{c^2}}$$
(4.84)

と与えられる. radiation pressure noise は shot noise と違い, 鏡に照射する光の強度に依存し PD で受ける光量 によらないから, どの fringe でも同じ値になる.

^{*&}lt;sup>18</sup> 厳密には BS で分けられた光は相関を持つが, dark port から入ってくる真空場揺らぎとの干渉の結果,相関を持つ部分はキャンセル されるから結果としては同じになる.

付録A 詳細な計算

A.1 反射光の複素平面上軌跡

式 (2.10) より

$$\begin{split} r_c - r_1 &= -\frac{r_2 t_1^2 e^{2ikL}}{1 - r_1 r_2 e^{2ikL}} \\ (1 - r_1 r_2 e^{2ikL})(r_c - r_1) &= -r_2 t_1^2 e^{2ikL} \\ r_c - r_1 &= e^{2ikL} (-r_2 t_1^2 + r_1 r_2 r_c - r_1^2 r_2) \\ |r_c - r_1|^2 &= r_2^2 |r_1 r_c - (t_1^2 + r_1^2)|^2 \\ |r_c|^2 + r_1^2 - r_1 (r_c + r_c^*) &= r_2 (r_1^2 |r_c|^2 + (t_1^2 + r_1^2)^2 - r_1 (t_1^2 + r_1^2)(r_c + r_c^*)) \\ (1 - r_1^2 r_2^2) |r_c|^2 - r_1 (1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2^2)(r_c + r_c^*) &= -r_1^2 + (t_1^2 + r_1^2) r_2^2 \\ (1 - r_1^2 r_2^2) \left|r_c - r_1 \frac{1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2^2}{1 - r_1^2 r_2^2}\right|^2 &= r_1^2 \frac{(1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2^2)^2}{1 - r_1^2 r_2^2} - r_1^2 + (t_1^2 + r_1^2)^2 r_2^2 \end{split}$$

ここで

$$\begin{split} r_1^2 (1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2^2)^2 &- (1 - r_1^2r_2^2)[r_1^2 - (t_1^2 + r_1^2)^2r_2^2] \\ &= r_1^2 - 2r_1^2r_2^2(t_1^2 + r_1^2) + r_1^2r_2^4(t_1^2 + r_1^2)^2 \\ &- r_1^2 + (t_1^2 + r_1^2)^2r_2^2 + r_1^4r_2^2 - r_1^2r_2^4(t_1^2 + r_1^2)^2 \\ &= -2r_1^2r_2^2(t_1^2 + r_1^2) + (t_1^2 + r_1^2)^2r_2^2 + r_1^4r_2^2 \\ &= r_2^2(r_1^2 - (t_1^2 + r_1^2))^2 = r_2^2t_1^4 \end{split}$$

よって

$$\left| r_c - r_1 \frac{1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2^2}{1 - r_1^2 r_2^2} \right|^2 = \frac{r_2^2 t_1^4}{(1 - r_1^2 r_2^2)^2}$$
(A.1)

とかける.

A.2 sideband 描像の行列計算

式 (2.167) を計算する. $D = 1 - r_1 r_2 M, N = r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2 M$ とおくと

$$\boldsymbol{E}_r = N D^{-1} \boldsymbol{E}_{ext} \tag{A.2}$$

と書ける.まず D^{-1} を求める. $D \epsilon \epsilon o 1 次までで書くと$

$$D = 1 - r_1 r_2 \begin{pmatrix} J_0(\epsilon) e^{2i\varphi} & 0 & 0\\ iJ_1(\epsilon) e^{2i\varphi + i\psi} & J_0(\epsilon) e^{2i(\varphi + \psi)} & 0\\ iJ_1(\epsilon) e^{2i\varphi - i\psi} & 0 & J_0(\epsilon) e^{2i(\varphi - \psi)} \end{pmatrix}$$
(A.3)

$$= \begin{pmatrix} 1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi} & 0 & 0\\ -i\epsilon r_1 r_2 e^{2i\varphi + i\psi} & 1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi + \psi)} & 0\\ -i\epsilon r_1 r_2 e^{2i\varphi - i\psi} & 0 & 1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)} \end{pmatrix}$$
(A.4)

である. $D = \{D_{ij}\}$ として、 $\det D = D_{11}D_{22}D_{33}$ であるから

$$D^{-1} = \frac{1}{\det D} \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{31} \\ \tilde{D}_{12} & \tilde{D}_{22} & \tilde{D}_{32} \\ \tilde{D}_{13} & \tilde{D}_{23} & \tilde{D}_{33} \end{pmatrix}$$
(A.5)

$$= \frac{1}{\det D} \begin{pmatrix} D_{22}D_{33} & 0 & 0\\ -D_{21}D_{33} & D_{11}D_{33} & 0\\ -D_{31}D_{22} & 0 & D_{11}D_{22} \end{pmatrix}$$
(A.6)

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{D_{11}} & 0 & 0\\ -\frac{D_{21}}{D_{11}D_{22}} & \frac{1}{D_{22}} & 0\\ -\frac{D_{31}}{D_{11}D_{33}} & 0 & \frac{1}{D_{33}} \end{pmatrix}$$
(A.7)

とかける.ただし $\tilde{D}ij$ はDの余因子.

次に ND^{-1} を求める.まずNを計算すると

$$N = r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2M \tag{A.8}$$

$$= \begin{pmatrix} r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i\varphi} & 0 & 0\\ -i\epsilon(t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i\varphi + i\psi} & r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i(\varphi - \psi)} & 0\\ -i\epsilon(t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i\varphi - i\psi} & 0 & r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i(\varphi - \psi)} \end{pmatrix}$$
(A.9)

である. $N = \{N_{ij}\}$ とすると, ND^{-1} は

$$ND^{-1} = \begin{pmatrix} N_{11} & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & 0 \\ N_{31} & 0 & N_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{D_{11}} & 0 & 0 \\ -\frac{D_{21}}{D_{11}D_{22}} & \frac{1}{D_{22}} & 0 \\ -\frac{D_{31}}{D_{11}D_{33}} & 0 & \frac{1}{D_{33}} \end{pmatrix}$$
(A.10)

$$= \begin{pmatrix} \frac{\overline{D_{11}}}{D_{11}} & 0 & 0\\ \frac{N_{21}}{D_{11}} - \frac{N_{22}D_{21}}{D_{11}D_{22}} & \frac{N_{22}}{N_{22}} & 0\\ \frac{N_{31}}{D_{11}} - \frac{N_{33}D_{31}}{D_{11}D_{33}} & 0 & \frac{N_{33}}{D_{33}} \end{pmatrix}$$
(A.11)

と求められる.

最後に E_r を計算すると,

$$\boldsymbol{E}_{r} = ND^{-1} \begin{pmatrix} E_{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{N_{11}}{D_{11}} \\ \frac{N_{21}}{D_{11}} - \frac{N_{22}D_{21}}{D_{11}D_{22}} \\ \frac{N_{31}}{D_{11}} - \frac{N_{33}D_{31}}{D_{11}D_{33}} \end{pmatrix} E_{0}$$
(A.12)

となる. 各成分を explicit に表すと,まず

$$E_{r0} = E_0 \frac{N_{11}}{D_{11}} = E_0 \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2 e^{2i\varphi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi}}$$
(A.13)

であるが、これは式 (2.3) と当然一致する. 次に upper sideband の方は

$$N_{21}D_{22} - N_{22}D_{21} = -i\epsilon(t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i\varphi + i\psi}(1 - r_1r_2e^{2i(\varphi - \psi)})$$
(A.14)

$$-(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i(\varphi - \psi)})(i\epsilon r_1 r_2 e^{2i\varphi + i\psi})$$
(A.15)

$$= -i\epsilon(t_1^2 + r_1^2)r_2e^{2i\varphi + i\psi} + i\epsilon(t_1^2 + r_1^2)r_1r_2^2e^{4i\varphi + 3i\psi}$$
(A.16)

$$+ i\epsilon r_1^2 r_2 e^{2i\varphi + i\psi} - i\epsilon (t_1^2 + r_1^2) r_1 r_2^2 e^{4i\varphi + 3i\psi}$$
(A.17)

$$= -i\epsilon t_1^2 r_2 e^{2i\varphi + i\psi} \tag{A.18}$$

であるから

$$\frac{N_{21}}{D_{11}} - \frac{N_{22}D_{21}}{D_{11}D_{22}} = \frac{N_{21}D_{22} - N_{22}D_{21}}{D_{11}D_{22}}$$
(A.19)

$$=\frac{-i\epsilon t_1^2 r_2 e^{2i\varphi + i\psi}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi + \psi)})}$$
(A.20)

となる.

lower sideband は upper の ψ を $-\psi$ に置き換えれば良いので, まとめて

$$E_{r\pm} = E_0 \frac{-i\epsilon t_1^2 r_2 e^{2i\varphi \pm i\psi}}{(1 - r_1 r_2 e^{2i\varphi})(1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi \pm \psi)})}$$
(A.21)

と式 (2.168), (2.169) が求まる.

A.3 入射光の揺らぎから反射光の揺らぎへの伝達関数

4.3 節と同様にして反射光による輻射圧を考えると,

$$E_r(\omega) = r_1 E_0 (e^{-i\Omega t} + \epsilon e^{-i(\Omega - \omega)t})$$
(A.22)

$$-t_1^2 r_2 E_0 \left(e^{-i\Omega(t - \frac{2L}{c})} + \epsilon e^{-i(\Omega - \omega)(t - \frac{2L}{c})} \right) + \cdots$$
(A.23)

$$= r_1 E_0 (e^{-i\Omega t} + \epsilon e^{-i(\Omega - \omega)t}) - t_1^2 r_2 E_0 e^{-i\Omega t} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{2i(n+1)\varphi}$$
(A.24)

$$+ t_1^2 r_2 \epsilon E_0 e^{-i(\Omega - \omega)t} \sum_{n=0}^{\infty} (r_1 r_2)^n e^{2i(n+1)(\varphi - \psi)}$$
(A.25)

$$= E_0 e^{-i\Omega t} \left(r_c + \epsilon e^{i\omega t} \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2 e^{2i(\varphi - \psi)}}{1 - r_1 r_2 e^{2i(\varphi - \psi)}} \right)$$
(A.26)

$$= E_0 e^{-i\Omega t} \left(r_c + \epsilon e^{i\omega t} \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2) r_2 e^{-2i\psi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}} \right)$$
(A.27)

となる. ただし最後の行には $\varphi = 2n\pi$ を代入した. したがって反射光の強度は

$$P_r(\omega) = P_0 r_0^2 + 2\epsilon P_0 r_0 Re \left[e^{i\omega t} \frac{r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2 e^{-2i\psi}}{1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}} \right]$$
(A.28)

であるから、伝達関数 $H_r(\omega)$ は

$$H_r(\omega) = r_0 \frac{(1 - r_1 r_2 e^{2i\psi})(r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2 e^{-2i\psi})}{|1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}|^2}$$
(A.29)

で与えられる. これの絶対値を考えると

$$|H_r(\omega)| = r_0 \frac{|r_1 - (t_1^2 + r_1^2)r_2 e^{-2i\psi}|}{|1 - r_1 r_2 e^{-2i\psi}|} = r_0 r_c \left(k = \frac{\omega}{c}\right)$$
(A.30)

である. すると $r_c \leq 1$ であるから $|H_r(\omega)| \leq 1$. したがって Finesse が十分大きければ $|H_{\triangleleft}(\omega)| \gg |H_r(\omega)|$ と なるから, FM に働く輻射圧は共振器内の電場が支配的であることがわかる.

次に透過光について考える. 透過光は共振器内の右向き電場 E/ に EM の透過率 t₂ がかかることから

$$H_t(\omega) = t_2^2 H_{\triangleright}(\omega) \ll H_{\triangleright}(\omega) \tag{A.31}$$

である.したがって、EM に働く輻射圧も共振器内電場の寄与が支配的であることがわかる.

付録B Michelson 干渉計の基線長変動の周波数応答

Michelson 干渉計の基線長変動に対する周波数応答を考える。各腕が $l_i + \delta l_i(t) (\delta l_i \ll l_i)$ で変動していたとする。まず x 腕で考えると、光が BS を出発した時刻を t_0 、EM に到達した時刻を t_1 、BS に帰ってきた時刻を t_2 とすれば

$$l_x(t1) = c(t_1 - t_0) = c(t_2 - t_1)$$
(B.1)

$$t_1 = t_2 - \frac{l_x(t_1)}{c}, t_0 = t_2 - 2\frac{l_x(t_1)}{c}$$
 (B.2)

よって $t_1 = t_2 - \frac{l_x}{c} + \frac{\delta l_x(t_1)}{c}$ であるから、 δl_x の一次で近似すれば

$$l_x(t_1) \simeq l_x + \delta l_x(t_2 - l_x/c) \tag{B.3}$$

これより

$$t_0 = t_2 - \frac{2l_x}{c} - \frac{2\delta l_x (t_2 - \frac{l_x}{c})}{c}$$
(B.4)

したがって,

$$E_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t_0} = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t + 2ikl_x} \exp\left[2ik\delta l_x \left(t - \frac{l_x}{c}\right)\right]$$
(B.5)

$$\simeq -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t + 2ikl_x} \left[1 + 2ik\delta l_x \left(t - \frac{l_x}{c} \right) \right]$$
(B.6)

となる. ただし $t_2 \rightarrow t$ とした.

次に $\delta l_x(t)$ のフーリエ変換を考える.

$$\delta l_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta l_x(\omega) e^{i\omega t}$$
(B.7)

として $\delta l_x(\omega)$ を定義すると, E_x は

$$E_x = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t + 2ikl_x} \left[1 + 2ik \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta l_x(\omega) e^{i\omega(t - \frac{l_x}{c})} \right]$$
(B.8)

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t + 2ikl_x} \left[1 + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_x(\omega) \delta l_x(\omega) e^{i\omega t} \right]$$
(B.9)

と書ける. ただし $H_x(\omega)$ は共振器変動 δl_x から位相変化への伝達関数で,

$$H_x(\omega) = 2ke^{-i\omega\frac{l_x}{c}} \tag{B.10}$$

である. これから位相変化は δl_x の周波数によらないことがわかる. y 腕に関しても同様で,

$$E_y = -\frac{1}{\sqrt{2}} E_0 e^{-i\Omega t + 2ikl_y} \left[1 + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_y(\omega) \delta l_y(\omega) e^{i\omega t} \right]$$
(B.11)

ただし

$$H_y(\omega) = 2ke^{-i\omega\frac{l_x}{c}} \tag{B.12}$$

である.

これらから, AS,SYM での電場を考える.

$$E_{\rm AS} = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\Omega t} \left[e^{2ikl_x} \left(1 + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_x(\omega) \delta l_x(\omega) e^{i\omega t} \right) \right]$$
(B.13)

$$-e^{2ikl_y}\left(1+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}H_y(\omega)\delta l_y(\omega)e^{i\omega t}\right)\right]$$
(B.14)

$$= -\frac{1}{2}E_0e^{-\Omega t + ikl_+} \left[e^{ikl_-} - e^{-ikl_-}\right]$$
(B.15)

$$+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left(H_x(\omega)\delta l_x(\omega)e^{ikl_-}-H_y(\omega)\delta l_y(\omega)e^{-ikl_-}\right)e^{i\omega t}\right]$$
(B.16)

$$= -\frac{1}{2}E_0e^{-i\Omega t + ikl_+}[e^{ikl_-} - e^{-ikl_-} + i\varphi_-]$$
(B.17)

$$E_{\rm SYM} = -\frac{1}{2} E_0 e^{-i\Omega t} \left[e^{2ikl_x} \left(1 + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} H_x(\omega) \delta l_x(\omega) e^{i\omega t} \right) \right]$$
(B.18)

$$+e^{2ikl_y}\left(1+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}H_y(\omega)\delta l_y(\omega)e^{i\omega t}\right)\right]$$
(B.19)

$$= -\frac{1}{2}E_0e^{-i\Omega t + ikl_+}[e^{ikl_-} + e^{-ikl_-} + i\varphi_+]$$
(B.20)

である. ただし

$$\varphi_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(H_x(\omega) \delta l_x(\omega) e^{ikl_-} \pm H_y(\omega) \delta l_y(\omega) e^{-ikl_-} \right) e^{i\omega t}$$
(B.21)

とおいた. これから, パワーは

$$P_{\rm AS} = \frac{P_0}{4} \left[2 - 2\cos 2kl_- + i\varphi_- (e^{-ikl_-} - e^{ikl_-}) - i\varphi_- (e^{ikl_-} - e^{-ikl_-}) \right]$$
(B.22)

$$= \frac{P_0}{4} \left[4\sin^2 k l_- + i\varphi_-(-2i\sin k l_-) - i\varphi_-^*(2i\sin k l_-) \right]$$
(B.23)

$$= \frac{P_0}{2} \left[2\sin^2 k l_- + (\varphi_- + \varphi_-^*) \sin k l_- \right]$$
(B.24)

$$P_{\rm SYM} = \frac{P_0}{4} \left[2 + 2\cos 2kl_- + i\varphi_+ (e^{-ikl_-} + e^{ikl_-}) - i\varphi_+ (e^{ikl_-} + e^{-ikl_-}) \right]$$
(B.25)

$$= \frac{P_0}{4} \left[4\cos^2 kl_- + i\varphi_+ (2\cos kl_-) - i\varphi_+^* (2\cos kl_-) \right]$$
(B.26)

$$= \frac{P_0}{2} \left[2\cos^2 k l_- + i(\varphi_+ - \varphi_+^*)\cos k l_- \right]$$
(B.27)

となる. ただし $\varphi_{\pm} = O(\delta l_i)$ であるから φ_{\pm} の 2 次以上は無視した. φ_{\pm} に各 $H_i(\omega)$ を代入すると,

$$\varphi_{\pm} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(2k\delta l_x(\omega) e^{ikl_- - ik\frac{\omega l_x}{c}} \pm 2k\delta l_y(\omega) e^{-ikl_- - ik\frac{\omega l_y}{c}} \right) e^{i\omega t}$$
(B.28)

$$=2k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left(\delta l_x(\omega)e^{ikl_--i\frac{\omega l_-}{2c}}\pm\delta l_y(\omega)e^{-ikl_-+i\frac{\omega l_-}{2c}}\right)e^{i\omega t-i\frac{\omega l_+}{2c}}$$
(B.29)

(B.30)

となる. ここで $\delta l_{\pm}(\omega) = \delta l_x(\omega) \pm \delta l_y(\omega), \theta = k l_- - \frac{\omega l_-}{2c}$ とおくと

$$\varphi_{\pm} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\frac{\delta l_{\pm}(\omega) + \delta l_{-}(\omega)}{2} e^{i\theta} \pm \frac{\delta l_{\pm}(\omega) - \delta l_{-}(\omega)}{2} e^{-i\theta} \right) e^{i\omega t - i\frac{\omega l_{\pm}}{2c}}$$
(B.31)

$$=2k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left[\frac{\delta l_{+}(\omega)}{2}(e^{i\theta}\pm e^{-i\theta})+\frac{\delta l_{-}(\omega)}{2}(e^{-\theta}\mp e^{-i\theta})\right]e^{i\omega t-i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.32)

であるから

$$\varphi_{+} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\delta l_{+}(\omega)\cos\theta + i\delta l_{-}(\omega)\sin\theta\right) e^{i\omega t - i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.33)

$$\varphi_{-} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(i\delta l_{+}(\omega)\sin\theta + \delta l_{-}(\omega)\cos\theta \right) e^{i\omega t - i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.34)

と書ける.また $\delta l_{\pm}^*(\omega) = \delta l_{\pm}(-\omega)$ であることを用いれば

$$\varphi_{+}^{*} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\delta l_{+}^{*}(\omega)\cos\theta - i\delta l_{-}^{*}(\omega)\sin\theta\right) e^{-i\omega t + i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.35)

$$=2k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left(\delta l_{+}(-\omega)\cos\theta - i\delta l_{-}(-\omega)\sin\theta\right)e^{-i\omega t + i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.36)

$$=2k\int_{\infty}^{-\infty}\frac{d(-\omega)}{2\pi}\left(\delta l_{+}(\omega)\cos\theta - i\delta l_{-}(\omega)\sin\theta\right)e^{i\omega t - i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.37)

$$=2k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\left(\delta l_{+}(\omega)\cos\theta - i\delta l_{-}(\omega)\sin\theta\right)e^{i\omega t - i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.38)

同様に

$$\varphi_{-}^{*} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(-i\delta l_{+}(\omega)\sin\theta + \delta l_{-}(\omega)\cos\theta \right) e^{i\omega t - i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.39)

と書ける.

よって

$$\varphi_{+} - \varphi_{+}^{*} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[\left(\delta l_{+}(\omega) \cos \theta + i \delta l_{-}(\omega) \sin \theta \right) \right]$$
(B.40)

$$-\left(\delta l_{+}(\omega)\cos\theta - i\delta l_{-}(\omega)\sin\theta\right)\right]e^{i\omega t - i\frac{\omega l}{2c}}$$
(B.41)

$$=4ik\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\delta l_{-}(\omega)\sin\theta e^{i\omega t-i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.42)

$$\varphi_{-} + \varphi_{-}^{*} = 2k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left[(i\delta l_{+}(\omega)\sin\theta + \delta l_{-}(\omega)\cos\theta) \right]$$
(B.43)

$$+ \left(-i\delta l_{+}(\omega)\sin\theta + \delta l_{-}(\omega)\cos\theta\right) e^{i\omega t - i\frac{\omega l}{2c}}$$
(B.44)

$$=4k\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\delta l_{-}(\omega)\cos\theta e^{i\omega t-i\frac{\omega l_{+}}{2c}}$$
(B.45)

である。以上より

$$P_{\rm AS} = \frac{P_0}{2} \left[2\sin^2 kl_- + 4k\sin kl_- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta l_-(\omega) \cos \theta e^{i\omega t - i\frac{\omega l_+}{2c}} \right]$$
(B.46)

$$= P_0 \left[\sin^2 k l_- + 2k \sin k l_- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta l_-(\omega) \cos \theta e^{i\omega t - i\frac{\omega l_+}{2c}} \right]$$
(B.47)

$$P_{\rm SYM} = \frac{P_0}{2} \left[2\cos^2 kl_- - 4k\cos kl_- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta l_-(\omega)\sin\theta e^{i\omega t - i\frac{\omega l_+}{2c}} \right]$$
(B.48)

$$=P_0\left[\cos^2 kl_- - 2k\cos kl_- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta l_-(\omega)\sin\theta e^{i\omega t - i\frac{\omega l_+}{2c}}\right]$$
(B.49)

となる. したがって、AS でも SYM でも、パワーを見ている限りは両腕の差動モード $\delta l_{-}(\omega)$ しか信号に現れな

い. *¹⁹またレーザー光を使えば一般に $\omega \ll \Omega$ あるから, $\theta = \frac{2\Omega - \omega}{2c} l_{-} \simeq k l_{-}$ と近似できる. この場合,

$$P_{\rm AS} \simeq P_0 \left[\sin^2 k l_- + 2k \sin k l_- \cos k l_- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta l_-(\omega) e^{i\omega t - i\frac{\omega l_+}{2c}} \right]$$
(B.50)

$$=P_0\left(\sin^2 kl_- + 2k\sin kl_-\cos kl_-\left[\delta l_x\left(t-\frac{l_+}{2c}\right) - \delta l_y\left(t-\frac{l_+}{2c}\right)\right]\right) \tag{B.51}$$

$$P_{\text{SYM}} \simeq P_0 \left[\cos^2 k l_- - 2k \sin k l_- \cos k l_- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta l_-(\omega) e^{i\omega t - i\frac{\omega l_+}{2c}} \right]$$
(B.52)

$$=P_0\left(\cos^2 kl_- - 2k\sin kl_-\cos kl_-\left[\delta l_x\left(t - \frac{l_+}{2c}\right) - \delta l_y\left(t - \frac{l_+}{2c}\right)\right]\right)$$
(B.53)

と、周波数依存性のない形と(腕の長さの分だけ位相が遅れる以外は)ほぼ同じに書くこともできる.

付録C 共振器内電場は定在波か

よく Fabry Perot 共振器では共振器内の電場が定在波になっている、という説明がなされるが、それは厳密に は正しくない、ということを見ていく.

C.1 定在波

そもそも定在波とは何かというと、時間を含んだ項と空間を含んだ項がほどけて積になっている波である。1次 元の波の場合、右方向と左方向で同じ周波数と波数、同じ振幅の波が重ね合わさるとできる。

共振器の場合, 共振時の右向き電場と左向き電場はそれぞれ

$$E_{\rhd}(z) = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} E_0 e^{i(-\omega t + kz)}$$
(C.1)

$$E_{\triangleleft}(z) = \frac{t_1 r_2}{1 - r_1 r_2} E_0 e^{i(-\omega t - kz)}$$
(C.2)

であるから,重ね合わせると

$$E_c = E_{\triangleright} + E_{\triangleleft} = \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} E_0 e^{-i\omega t} (e^{ikz} - r_2 e^{-ikz})$$
(C.3)

$$=Ae^{-i\omega t}(e^{ikz} - r_2e^{-ikz}) \tag{C.4}$$

である. EM で完全反射 $(r_2 = 1)$ する場合,

$$E_c = A e^{-\omega t} 2i \sin kz \tag{C.5}$$

であるから $z = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}$ に節のある定在波になる.

C.2 実際の電場

実際には EM の反射率は 1 ではないため、 $|E_{\triangleleft}| = r_2 |E_{\triangleright}| < |E_{\triangleright}|$ となり完全には定在波にはならない. EM の反射率を考慮して計算すると

$$E_c = Ae^{-i\omega t} [(1 - r_2)\cos kz + i(1 + r_2)\sin kz]$$
(C.6)

のようになる、複素表示から現実の波動にするには実部を取ればいいから、実際の電場は

$$E_c(z,t) = A[(1-r_2)\cos kz\cos\omega t + (1+r_2)\sin kz\sin\omega t]$$
(C.7)

^{*19} 後述する変調を用いれば両腕の同相モードも取得できる.



図 C.1 定在波の時間発展

と2つの定在波の重ね合わせのような状態になる.2つの定在波で節の位置が異なるため、 $z = \frac{n\pi}{k}$ でも完全には節にならずに一定の振幅で振動することになる.この"節"での電場は

$$E_c\left(\frac{n\pi}{k},t\right) = A[(1-r_2)\cos n\pi\cos\omega t + (1+r_2)\sin n\pi\sin\omega t]$$
(C.8)

$$= A(1 - r_2)\cos(\omega t + n\pi) \tag{C.9}$$

であるから,振幅 1 – r_2 で振動していることがわかる.したがって, r_2 が十分大きければこの振幅は無視できる ほど小さくなり,近似的に定在波とみなすこともできる.ちなみに,完全に定在波だとすると EM では節になっ ているから,境界条件から透過光は出てこない.完全に定在波になっておらず"節"でも振動しているからこそ, 透過光が現れると考えることもできる.実際 $r_2 = 1$ の場合は $t_2 = 0$ であるから $t_c = 0$ である.

また, "腹"で電場が0になる時刻 $t = \frac{n\pi}{\omega} = \frac{nT}{2}$ では

$$E_c\left(z,\frac{n\pi}{\omega}\right) = A[(1-r_2)\cos kz\cos n\pi + (1+r_2)\sin kz\sin n\pi] \tag{C.10}$$

$$= A(1 - r_2)\cos(kz + n\pi)$$
(C.11)

となり、"腹" $(z = \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{k})$ では確かに電場は0になるが、"節"では大きさが最大になるという、定在波とは異なる振る舞いを見せる.

最後に各点での平均パワーを見ると,

$$|E_c(z,t)|^2 = |A|^2 |(1-r_2)\cos kz + i(1+r_2)\sin kz|^2$$
(C.12)

$$= |A|^{2}[(1-r_{2})^{2}\cos^{2}kz + (1+r_{2})^{2}\sin^{2}kz] = |A|^{2}[(1+r_{2})^{2} - 4r_{2}\cos^{2}kz]$$
(C.13)

のようになり、"節"において完全に0にはなっていないことがわかる.

以下に $r_2 = 0.7, 0.9, 0.99$ の場合の重ね合わせ波の図を示す. 図をみれば, r_2 が十分 1 に近い状況ではほぼ定 在波とみなしても良さそうなことがよく分かる.

参考文献

[1] 安東正樹:東京大学 修士論文 (1995)

[2] 宗宮健太郎:内部資料 「干渉計型重力波検出器とその制御法」



図 C.2 $r_2 = 0.7$ の場合の重ね合わせ波



図 C.3 $r_2 = 0.9$ の場合の重ね合わせ波

- [3] Michele Maggiore: "Gravitational Waves vol.1", Oxford University Press (2008)
- [4] E. Black and R. Gutenkunst: "An introduction to signal extraction in interferometric gravitational wave detectors", Am. J. Phys., 71(2003), 365-378
- [5] E. Black: "An introduction to Pound Drever Hall laser frequency stabilization", Am. J. Phys., 69, 79 87 (2001)
- [6] 山元
- [7] caves



図 C.4 $r_2 = 0.99$ の場合の重ね合わせ波