Gaussian Beam 計算メモ

2017 年 8 月 12 日

Gaussian Beam に関する計算のメモ．前半は [1] を，後半は [2] を参考にした．

目次

1 基本モード

1.1 近軸近似の波動方程式

レーザー電場を

$$E(t, \boldsymbol{x}) = U(\boldsymbol{x}) E_0 e^{i\omega t} \tag{1.1}$$

の形で表す．(E は $\boldsymbol{E}$ の任意の成分) これを Maxwell 方程式，あるいは同じことだが Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 U(\boldsymbol{x}) - \frac{\omega^2}{c^2} U(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{1.2}$$

の解として求める．光軸を z 軸に取ると，レーザーは z 方向に伝搬する電磁波であるから，$U(\boldsymbol{x})$ をさらに

$$U(\boldsymbol{x}) = \psi(\boldsymbol{x}) e^{-ikz} \tag{1.3}$$

と分離する．($k = \omega/c$) これを式 (1.2) に代入すれば

$$\nabla^2 \psi(\boldsymbol{x}) - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \psi(\boldsymbol{x}) = 0 \tag{1.4}$$

となる．さらに，ψ の z 軸方向の変化は十分小さいとして，$|\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}| \ll |k \frac{\partial \psi}{\partial z}|$ を仮定すると (近軸近似)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(x, y, z) = 0 \tag{1.5}$$

の形になる．（近軸方程式）以下，この解を求める．

1.2 Gaussian の解

もっとも基本的な形として，以下のような Gaussian を仮定する．[*1]

$$\psi(x,y,z) = \exp\left\{-i\left(P(z) + \frac{k}{2q(z)}(x^2+y^2)\right)\right\} \tag{1.6}$$

従って

$$\begin{aligned}
\nabla_2^2\psi &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \exp\left\{-i\left(P(z) + \frac{k}{2q(z)}r^2\right)\right\} \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\cdot i\frac{kr}{q(z)}\exp\left\{-i\left(P(z)+\frac{k}{2q(z)}r^2\right)\right\}\right) \\
&= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(-i\frac{kr^2}{q(z)}\exp\left\{-i\left(P(z)+\frac{k}{2q(z)}r^2\right)\right\}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[-i\frac{k}{q(z)}2r - i\frac{k}{q(z)}r^2\left(-i\frac{kr}{q(z)}\right)\right]\exp\left\{-i\left(P(z)+\frac{k}{2q(z)}r^2\right)\right\} \\
&= \left(-2i\frac{k}{q(z)} - \frac{k^2}{q(z)^2}r^2\right)\psi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\exp\left\{-i\left(P(z)+\frac{k}{2q(z)}r^2\right)\right\} \\
&= \left(-i\frac{dP(z)}{dz} - \frac{ik}{2}r^2\cdot\frac{dq(z)}{dz}\frac{-1}{q(z)^2}\right)\exp\left\{-i\left(P(z)+\frac{k}{2q(z)}r^2\right)\right\} \\
&= \left(-i\frac{dP(z)}{dz} + i\frac{k}{2q(z)}r^2\frac{dq(z)}{dz}\right)\psi
\end{aligned}$$

これらを (1.5) に代入すると

$$\nabla_2^2\psi - 2ik\frac{\partial\psi}{\partial z} = \left(-2i\frac{k}{q(z)} - \frac{k^2}{q(z)^2}r^2 - 2k\frac{dP(z)}{dz} + \frac{k}{2q(z)r^2}\right)\psi = 0 \tag{1.7}$$

である．r の次数で比較すれば

$$-\frac{2ik}{q(z)} - 2k\frac{dP(z)}{dz} = 0,\ \ -\frac{k^2}{q(z)^2} + \frac{k^2}{q(z)^2}\frac{dq(z)}{dz} = 0 \tag{1.8}$$

すなわち

$$\frac{dP(z)}{dz} = -\frac{i}{q(z)}, \tag{1.9}$$

$$\frac{dq(z)}{dz} = 1 \tag{1.10}$$

(1.10) を積分して

$$q(z) = z + q_0 \tag{1.11}$$

ここで q_0 が実であるとする．この時，

$$|\psi| = |\exp\{-iP(z)\}\exp\{-ikr^2/2q(z)\}| = \exp\{\mathrm{Im}[P(z))]\} \tag{1.12}$$

[*1] (1.5) は，Schr ö dinger 方程式の t と z を入れ替えたものと同じ形をしている．最小不確定状態にある波動関数が Gaussian wave packet であることと類推して考えれば，この過程はそれなりに妥当であると思う．

であるから，ψ は r によらず振幅が一定で，かつ r が大きくなるにつれて位相が速く変化するようになる．これは物理的にありえない．[*2]従って q_0 は一般に複素数でなければならない．q_0 の実部は z の原点を取り直せばいつでも 0 にすることができるから，ここでは $q_0 = iz_R$ とおく (Z_R の意味については後ほど).

1.3 Beam Radius, Curvature

天下りだが $R(z), w(z)$ を次のように定義する．

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i\frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \tag{1.13}$$

ここで λ はレーザーの波長 ($\lambda = 2\pi/k$).

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_R} = \frac{z - iz_R}{z^2 + {z_R}^2} \tag{1.14}$$

と比較して，

$$\frac{\lambda}{\pi w(z)^2} = \frac{z_R}{z^2 + {z_R}^2} \tag{1.15}$$

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{z}{z^2 + {z_R}^2} \tag{1.16}$$

よって

$$w(z) = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}\left[1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right]} \tag{1.17}$$

$$R(z) = z\left[1 + \left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right] \tag{1.18}$$

とかける．さらに $w(0) = w_0$ と定義すれば，$w_0 = \sqrt{\frac{\lambda z_R}{\pi}}$ より $z_R = \frac{\pi {w_0}^2}{\lambda} = \frac{k{w_0}^2}{2}$ とかけて，これから

$$w(z) = w_0\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \tag{1.19}$$

と表せる．$w(z)$ を beam radius, $R(z)$ を Curvature と呼ぶ．(意味は後ほど)

1.4 TEM00 モード

次に，(1.9) を積分する．

$$i\frac{dP(z)}{dz} = \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{z + iz_R} \tag{1.20}$$

であるから

$$\begin{aligned} iP(z) &= \ln(z + iz_R) - \ln(iz_R) + iP(0) \\ &= \ln\left(1 - i\frac{z}{z_R}\right) + iP(0) \\ &= \ln\sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2} - i\tan^{-1}\frac{z}{z_R} + iP(0) \end{aligned}$$

[*2] このあたりの議論は理解がいまいち．

である．($P(0)$ は後で) $\zeta(z) = \tan^{-1}\frac{z}{z_R}$ と定義すると，

$$P(z) = -i\ln\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2} - \zeta(z) + P(0) \tag{1.21}$$

となる．この $\zeta(z)$ を Gouy phase と呼ぶ．

以上より，ψ は

$$\psi(r,z) = \exp\left\{-i\left(P(z) + \frac{k}{2q(z)}r^2\right)\right\} \tag{1.22}$$

$$= \exp\left\{-\ln\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2} + i\zeta(z) - iP(0) - ik\left(\frac{r^2}{2R(z)} - i\frac{\lambda r^2}{2\pi w(x)}\right)\right\} \tag{1.23}$$

$$= \frac{e^{-iP(0)}}{\sqrt{1+(z/z_R)^2}}e^{i\zeta(z)}\exp\left\{-i\frac{kr^2}{2R(z)} - \frac{k\lambda r^2}{2\pi w(z)^2}\right\} \tag{1.24}$$

であるが，ここで $\lambda = 2\pi/k$ であることを用いると

$$\psi = \frac{w_0 e^{-iP(0)}}{w(z)}e^{i\zeta(z)}\exp\left\{-i\frac{kr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{w(z)^2}\right\} \tag{1.25}$$

となる．$P(0)$ は任意だが，ここでは ψ を規格化する ($\int dxdy|\psi|^2 = 1$) ようにとると，

$$\int_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} dxdy\exp\left(-2\frac{x^2+y^2}{w(z)^2}\right) = \frac{2}{\pi w(z)^2} \tag{1.26}$$

であるから

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{\pi w(z)^2}}e^{i\zeta(z)}\exp\left\{-i\frac{kr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{w(z)^2}\right\} \tag{1.27}$$

となる．これを基本モード (TEM00 モード) と呼び，以降 ψ_{00} と書くことにする．

1.5 各関数の意味

ψ_{00} を記述する各関数を改めて書く．

$$w(z) = w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2} \tag{1.28}$$

$$R(z) = z\left[1+\left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right] \tag{1.29}$$

$$\zeta(z) = \tan^{-1}\frac{z}{z_R} \tag{1.30}$$

$w(z)$ は Gaussian の実部の分母であるから，ビームの電場分布の広がりを表している．ゆえに beam radius 呼ばれる．z を固定した時，$w(z)$ は電場が光軸の中心から $1/e \sim 0.368$ 倍になる位置である．強度で言えば，最大値から $1/e^2 \sim 0.135$ 倍になる点．$z = 0$ の時 $w(z) = w_0$ は最小であるから，$z = 0$ を beam waist, w_0 を baem waist radius と呼ぶまた $z = z_R$ の時，$w(z_R) = 2w_0$ であるから半径が 2 倍になる．この z_R を Rayleigh range と呼ぶ．z_R はビームを特徴付ける重要なパラメータである．

球面波 $f(R)=\frac{\exp(-ikR)}{R}$ を，近軸近似 $(z \gg x, y)$ して展開すると

$$e^{-ikR}=\exp\left\{-ik\sqrt{z^2+r^2}\right\}=\exp\left\{-ikz\sqrt{1+\left(\frac{r}{z}\right)^2}\right\} \tag{1.31}$$

$$\simeq \exp\left\{-ikz\left(1+\frac{r^2}{2z^2}\right)\right\}=\exp\left(-ikz-i\frac{kr^2}{2z}\right) \tag{1.32}$$

$$\simeq \exp\left(-ikz-i\frac{kr^2}{2R}\right) \tag{1.33}$$

となり，第 1 項は波の伝播する方向，第 2 項が曲率を表している．これと類推して，$R(z)$ はレーザーの波面の曲率を表していると言える．ゆえに Curvature と呼ばれる．また

$$R(z)=\begin{cases}\infty & (z=0)\\ 2 & (z=z_R)\\ z & (|z|\gg z_R)\end{cases} \tag{1.34}$$

であるから，ψ_{00} は waist 付近では平面波，十分遠くでは球面波とみなせて，z_R は平面波とみなせる範囲を表している．そしてレーザー電場はこの $R(z)$ のために，平面波とは位相がずれる，そのズレを表しているのが Gouy phase $\zeta(z)$ である．

2 高次モード

2.1 rescaling

式の形が見やすいよう，x, y, z を $w(z)$ で規格化する．Gaussian の肩の実部が $\frac{\xi^2+\eta^2}{2}$ に，Gouy phase はそのまま ζ として，(x, y, z) を (ξ, η, ζ) に変換すると

$$\xi=\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\,,\ \ \eta=\frac{\sqrt{2}}{w(z)}y\,,\ \ \zeta=\tan^{-1}\frac{z}{z_R} \tag{2.1}$$

逆変換は

$$x=\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\xi\,,\ \ y=\frac{w(z)}{\sqrt{2}}\eta\,,\ \ z=z_R\tan\zeta \tag{2.2}$$

ここで

$$w(z)=w_0\sqrt{1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2}=w_0\sqrt{1+\tan^2\zeta}=\frac{w_0}{\cos\zeta} \tag{2.3}$$

であるから，

$$x=\frac{w_0}{\sqrt{2}\cos\zeta}\xi\,,\ \ y=\frac{w_0}{\sqrt{2}\cos\zeta}\eta\,, \tag{2.4}$$

と書ける．また

$$R(z)=z(1+\cot^2\zeta)=\frac{z_R\tan\zeta}{\sin^2\zeta}=\frac{z_R}{\sin\zeta\cos\zeta} \tag{2.5}$$

より

$$\begin{aligned}-i\frac{kr^2}{2R(z)}-\frac{r^2}{w(z)^2}&=-i\frac{k\sin\zeta\cos\zeta}{2z_R}\cdot\frac{\rho^2w(z)^2}{2}-\frac{\rho^2w(z)^2}{w(z)^2}\\&=-i\frac{\sin\zeta\cos\zeta}{w_0^2}\cdot\frac{\rho^2w_0^2}{2\cos^2\zeta}-\frac{\rho^2}{2}\\&=-(i\tan\zeta+1)\frac{\rho^2}{2}=-\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\frac{\rho^2}{2}\end{aligned}$$

となる．($\rho^2 = \xi^2 + \eta^2$) 従って，

$$\psi_{00}(\xi,\eta,\zeta) = \sqrt{\frac{2\cos^2\zeta}{\pi w_0}} e^{i\zeta} \exp\left(-\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\right) \tag{2.6}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi w_0}} \cos\zeta e^{i\zeta} \exp\left(-\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\right) \tag{2.7}$$

次に，(1.5) を ξ, η, ζ で書き直す．

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\sqrt{2}}{w_0}\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\sqrt{2}}{w_0}\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\sqrt{2}}{w_0}\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\xi}\right)$$

$$= \frac{2}{{w_0}^2}\cos^2\zeta\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \tag{2.9}$$

同様に

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{2}{{w_0}^2}\cos^2\zeta\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{2.10}$$

また

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{2.11}$$

であり

$$\frac{\partial\xi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\sqrt{2}}{w(z)}x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{w(z)^2}x\cdot\frac{dw(z)}{dz} \tag{2.12}$$

$$= -\frac{\xi}{w(z)}\cdot w_0\frac{2z/z_R}{2\sqrt{1+(z/z_R)^2}} = -\frac{\xi}{w(z)}\cdot\frac{{w_0}^2 z/{z_R}^2}{w(z)} \tag{2.13}$$

$$= -\frac{\xi}{{w_0}^2}\cdot\cos^2\zeta\tan\zeta\frac{{w_0}^2}{z_R} = -\frac{1}{z_R}\xi\sin\zeta\cos\zeta \tag{2.14}$$

同様に

$$\frac{\partial\eta}{\partial z} = -\frac{1}{z_R}\eta\sin\zeta\cos\zeta \tag{2.15}$$

そして

$$\frac{\partial\zeta}{\partial z} = \frac{1}{z_R}\cdot\frac{1}{1+(z/z_R)^2} = \frac{1}{z_R}\cdot\frac{1}{1+\tan^2\zeta} \tag{2.16}$$

$$= \frac{1}{z_R}\cos^2\zeta \tag{2.17}$$

より

$$2ik\frac{\partial}{\partial z} = -\frac{2ik}{z_R}\xi\sin\zeta\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{2ik}{z_R}\eta\sin\zeta\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{2ik}{z_R}\cos^2\zeta\frac{\partial\xi}{\partial z} \tag{2.18}$$

$$= -\frac{4i}{{w_0}^2}\xi\sin\zeta\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{4i}{{w_0}^2}\eta\sin\zeta\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{4i}{{w_0}^2}\cos^2\zeta\frac{\partial\xi}{\partial z} \tag{2.19}$$

である．(2.9)，(2.10)，(2.19) を (1.5) に代入すると

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik\frac{\partial}{\partial z} = \frac{2}{{w_0}^2}\cos^2\zeta\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{2}{{w_0}^2}\cos^2\zeta\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} \tag{2.20}$$

$$+ \frac{4i}{{w_0}^2}\xi\sin\zeta\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{4i}{{w_0}^2}\eta\sin\zeta\cos\zeta\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{4i}{{w_0}^2}\cos^2\zeta\frac{\partial\xi}{\partial z} \tag{2.21}$$

$$= \frac{2}{{w_0}^2}\cos^2\zeta\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + 2i\tan\zeta\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) - 2i\frac{\partial}{\partial\zeta}\right] \tag{2.22}$$

従って，$\psi_{00}(\xi,\eta,\zeta)$ に対する方程式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+2i\tan\zeta\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)-2i\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]\psi_{00}(\xi,\eta,\zeta)=0 \tag{2.23}$$

となる．

2.2 Hermite-Gaussian mode

$\psi_{00}(\xi,\eta,\zeta)$ の重ね合わせを考える．$\psi(\xi,\eta,\zeta)=F(\xi,\eta,\zeta)\psi_{00}(\xi,\eta,\zeta)$ とおくと，

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\frac{\partial F}{\partial\xi}\psi_{00}+F\frac{\partial\psi_{00}}{\partial\xi} \tag{2.24}$$

$$=\frac{\partial F}{\partial\xi}\psi_{00}+F\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cos\zeta e^{i\zeta}\exp\left\{-\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\right\}\right) \tag{2.25}$$

$$=\psi_{00}\left\{\frac{\partial F}{\partial\xi}+F\left(-\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\xi\right)\right\}=\psi_{00}\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}-F\xi\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right) \tag{2.26}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-\frac{\partial F}{\partial\xi}\xi\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}+\left(\frac{\partial F}{\partial\xi}-F\xi\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right)\left(\xi\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right)\right\} \tag{2.27}$$

$$=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-\frac{\partial F}{\partial\xi}\xi\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}-\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}+F\xi^2\frac{e^{2i\zeta}}{\cos^2\zeta}\right\} \tag{2.28}$$

$$=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}+F\left(\xi^2\frac{e^{2i\zeta}}{\cos^2\zeta}-\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right)\right\} \tag{2.29}$$

同様に

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\psi_{00}\left(\frac{\partial F}{\partial\eta}-F\eta\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right) \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}+F\left(\eta^2\frac{e^{2i\zeta}}{\cos^2\zeta}-\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right)\right\} \tag{2.31}$$

これから

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2i\tan\zeta\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}+F\left(\xi^2\frac{e^{2i\zeta}}{\cos^2\zeta}-\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right)\right. \tag{2.32}$$

$$\left.+2i\tan\zeta\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}-2iF\tan\zeta\xi^2\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right\} \tag{2.33}$$

$$=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}\left(\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}-i\tan\zeta\right)\right. \tag{2.34}$$

$$\left.+F\xi^2\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\left(\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}-2i\tan\zeta\right)-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right\} \tag{2.35}$$

$$=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}(1+i\tan\zeta-i\tan\zeta)\right. \tag{2.36}$$

$$\left.+F\xi^2\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}(1+i\tan\zeta-2i\tan\zeta)-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right\} \tag{2.37}$$

$$=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}+F\xi^2\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}(1-i\tan\zeta)-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right\} \tag{2.38}$$

$$=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}+F\xi^2\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\frac{e^{-i\zeta}}{\cos\zeta}-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right\} \tag{2.39}$$

$$=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}+F\frac{\xi^2}{\cos^2\zeta}-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right\} \tag{2.40}$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+2i\tan\zeta\xi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}=\psi_{00}\left\{\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}+F\frac{\eta^2}{\cos^2\zeta}-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right\} \tag{2.41}$$

一方

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}&=\frac{\partial F}{\partial\zeta}\psi_{00}+F\frac{\partial\psi_{00}}{\partial\zeta} && (2.42)\\
&=\left\{\frac{\partial F}{\partial\zeta}\cos\zeta-F\sin\zeta+iF\cos\zeta+F\cos\zeta\left(-\frac{ie^{i\zeta}\cos\zeta+e^{i\zeta}\sin\zeta}{\cos^2\zeta}\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\right)\right\}\frac{\psi_{00}}{\cos\zeta} && (2.43)\\
&=\left\{\frac{\partial F}{\partial\zeta}\cos\zeta-iFe^{i\zeta}-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\frac{Fe^{i\zeta}}{\cos\zeta}(i\cos\zeta+\sin\zeta)\right\}\frac{\psi_{00}}{\cos\zeta} && (2.44)\\
&=\left(\frac{\partial F}{\partial\zeta}\cos\zeta-iFe^{i\zeta}-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\frac{Fe^{i\zeta}}{\cos\zeta}ie^{-i\zeta}\right)\frac{\psi_{00}}{\cos\zeta} && (2.45)\\
&=\psi_{00}\left(\frac{\partial F}{\partial\zeta}-iF\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}-\frac{\xi^2+\eta^2}{2}\frac{F}{\cos^2\zeta}\right) && (2.46)
\end{aligned}$$

これらを (2.23) に代入して

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}+2i\tan\zeta\left(\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)-2i\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]F(\xi,\eta,\zeta)\psi_{00}(\xi,\eta,\zeta) && (2.47)\\
&=\psi_{00}\left(\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}+F\frac{\xi^2}{\cos^2\zeta}-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}\right. && (2.48)\\
&\qquad\left.+\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}+F\frac{\eta^2}{\cos^2\zeta}-F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}-2i\frac{\partial F}{\partial\zeta}+2F\frac{e^{i\zeta}}{\cos\zeta}-F\frac{\xi^2+\eta^2}{\cos^2\zeta}\right) && (2.49)\\
&=\psi_{00}\left(\frac{\partial^2F}{\partial\xi^2}-2\xi\frac{\partial F}{\partial\xi}+\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial F}{\partial\eta}-2i\frac{\partial F}{\partial\zeta}\right) && (2.50)
\end{aligned}$$

従って，$F(\xi,\eta,\zeta)$ に対する式は

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi}-2\xi\frac{\partial}{\partial\xi}+\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-2\eta\frac{\partial}{\partial\eta}-2i\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)F(\xi,\eta,\zeta)=0 \tag{2.51}$$

となる．$F(\xi,\eta,\zeta)=X(\xi)Y(\eta)Z(\zeta)$ と変数分離すると．

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2}-2\xi\frac{d}{d\xi}+2l\right)X(\xi)=0 \tag{2.52}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2}-2\eta\frac{d}{d\eta}+2m\right)Y(\eta)=0 \tag{2.53}$$

$$\left(-2i\frac{d}{d\zeta}-2l-2m\right)Z(\zeta)=0 \tag{2.54}$$

(2.52)，(2.53) の解はは Hermite 多項式 $H_l(\xi),H_m(\eta)$．(2.54) を積分して

$$Z(\zeta)=\exp\{i(l+m)\zeta\} \tag{2.55}$$

以上より，

$$\psi_{lm}(\xi,\eta,\zeta)=\mathcal{N}H_l(\xi)H_m(\eta)\exp\{i(l+m)\zeta\} \tag{2.56}$$

と書ける ($\mathcal{N}$ は規格化定数)．$\int dxdy|\psi_{lm}|^2=1$ となるように規格化すると，$dxdy=\frac{w(z)^2}{2}d\xi d\eta$ であるから

$$\begin{aligned}
\int dxdy|\psi_{lm}|^2&=\frac{w(z)^2}{2}\int d\xi d\eta|\psi_{lm}|^2 && (2.57)\\
&=\frac{w(z)^2}{2}\frac{2}{\pi w(z)^2}\int d\xi e^{-\xi^2}H_l(\xi)^2\int d\eta e^{-\eta^2}H_m(\eta)^2 && (2.58)\\
&=\frac{1}{\pi}\pi 2^l l!2^m m!=2^l l!2^m m! && (2.59)
\end{aligned}$$

よって

$$\mathcal{N} = \sqrt{\frac{1}{2^l 2^m l! m!}} \tag{2.60}$$

$$\psi_{lm} = \sqrt{\frac{1}{2^l 2^m l! m!}} H_m(\eta) \exp\left\{i(l+m)\zeta\right\} \psi_{00}(\xi, \eta, \zeta) \tag{2.61}$$

(x, y, z) に戻せば

$$\psi_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{2^l 2^m l! m!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) e^{i(l+m)\zeta(z)} \tag{2.62}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi w(z)^2 2^l 2^m l! m!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_m\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \tag{2.63}$$

$$e^{i(1+l+m)\zeta(z)} \exp\left\{-i\frac{kr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{w(z)^2}\right\} \tag{2.64}$$

ここで

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w(z)^2}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \tag{2.65}$$

を定義すると，

$$\psi_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z) U_m(y, z) e^{i(1+l+m)\zeta(z)} \exp\left\{-i\frac{kr^2}{2R(z)} - \frac{r^2}{w(z)^2}\right\} \tag{2.66}$$

と書ける．これが Hermite-Gaussian の lm モード．lm は基本モードに比べて位相が $(l+m)\zeta$ だけずれていて，振幅に Hermite 多項式がかかる．

2.3 Laguerre-Gaussian mode

$\xi = \rho\cos\theta, \eta = \rho\sin\theta$ と変数変換すると

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{2.67}$$

$$\xi\frac{\partial}{\partial\xi} = \rho\cos\theta\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\theta}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.68}$$

$$= \rho\cos\theta\left(\frac{\xi}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\eta}{\xi^2}\frac{1}{1+(\eta/\xi)^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.69}$$

$$= \rho\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\eta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.70}$$

$$= \rho\cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.71}$$

$$= \rho\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{2.72}$$

$$\eta\frac{\partial}{\partial\eta} = \rho\sin\theta\left(\frac{\partial\rho}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.73}$$

$$= \rho\sin\theta\left(\frac{\eta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\xi}\frac{1}{1+(\eta/\xi)^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.74}$$

$$= \rho\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\xi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.75}$$

$$= \rho\sin\theta\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.76}$$

$$= \rho\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{2.77}$$

これから

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi} - 2\xi\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - 2\eta\frac{\partial}{\partial\eta} - 2i\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{2.78}$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2i\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{2.79}$$

$$- 2\left(\rho\cos^2\theta\frac{\partial}{\partial\rho} - \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \rho\sin^2\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \sin\theta\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{2.80}$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\rho\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial}{\partial\rho}\right) - 2\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2i\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{2.81}$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - 2\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2i\frac{\partial}{\partial\zeta} \tag{2.82}$$

従って，$F(\rho,\theta,\zeta) = F(\xi,\eta,\zeta)$ の満たす式は

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - 2\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - 2i\frac{\partial}{\partial\zeta}\right]F(\rho,\theta,\zeta) = 0 \tag{2.83}$$

ここで $F(\rho,\theta,\zeta) = L(\rho)\rho^l e^{il\theta}e^{ik\zeta}$ とおくと

$$\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}F = \frac{(il)^2}{\rho^2}F = -\frac{l^2}{\rho^2}F \tag{2.84}$$

$$2i\frac{\partial}{\partial\zeta}F = 2i\cdot ikF = -kF \tag{2.85}$$

また

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \left(\frac{1}{\rho} - 2\rho\right)\frac{\partial}{\partial\rho}\right](L(\rho)\rho^l) \tag{2.86}$$

$$= l(l-1)\rho^{l-2}L(\rho) + 2l\rho^{l-1}\frac{dL(\rho)}{d\rho} + \rho^l\frac{d^2L(\rho)}{d\rho} \tag{2.87}$$

$$+ \left(\frac{1}{\rho} - 2\rho\right)\left(l\rho^{l-1}L(\rho) + \rho^l\frac{dL(\rho)}{d\rho}\right) \tag{2.88}$$

$$= \rho^{l-2}\left(l(l-1) + 2l\rho\frac{d}{d\rho} + \rho^2\frac{d^2}{d\rho^2} + l - 2l\rho^2 + \rho\frac{d}{d\rho} - 2\rho^3\frac{d}{d\rho}\right)L(\rho) \tag{2.89}$$

$$= \rho^{l-2}\left(\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2} + ((2l+1)\rho - 2\rho^3)\frac{d}{d\rho} + l^2 - 2l\rho^2\right)L(\rho) \tag{2.90}$$

よって (2.83) は

$$\rho^{l-2}\left(\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}+((2l+1)\rho-2\rho^3)\frac{d}{d\rho}+l^2-2l\rho^2\right)L(\rho) \tag{2.91}$$

$$-\frac{l^2}{\rho^2}\rho^l L(\rho)-k\rho^l L(\rho) \tag{2.92}$$

$$=\rho^{l-2}\left(\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}+((2l+1)\rho-2\rho^3)\frac{d}{d\rho}+l^2-2\rho^2-l^2-k\rho^2\right)L(\rho) \tag{2.93}$$

$$=\rho^{l-2}\left(\rho^2\frac{d^2}{d\rho^2}+((2l+1)\rho-2\rho^3)\frac{d}{d\rho}+2(k-l)\rho^2\right)L(\rho) \tag{2.94}$$

$$=\rho^l\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\left(\frac{2l+1}{\rho}\rho-2\rho\right)\frac{d}{d\rho}+2(k-l)\right]L(\rho)=0 \tag{2.95}$$

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2}+\left(\frac{2l+1}{\rho}\rho-2\rho\right)\frac{d}{d\rho}+2(k-l)\right]L(\rho) \tag{2.96}$$

となる．ここで $\sigma=\rho^2$ とおくと，

$$\frac{d}{d\sigma}=\frac{d\rho}{d\sigma}\frac{d}{d\rho}=\frac{1}{2\sqrt{\sigma}}\frac{d}{d\rho}=\frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho} \tag{2.97}$$

$$\frac{d^2}{d\sigma^2}=\frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{1}{2\rho}\frac{d}{d\rho}\right)=\frac{1}{2\rho}\left(-\frac{1}{2\rho^2}\frac{d}{d\rho}+\frac{1}{2\rho}\frac{d^2}{d\rho^2}\right) \tag{2.98}$$

$$=-\frac{1}{4\rho^3}\frac{d}{d\rho}+\frac{1}{4\rho^2}\frac{d^2}{d\rho^2} \tag{2.99}$$

これらから

$$\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}=2\frac{d}{d\sigma}\,,\quad \rho\frac{d}{d\rho}=2\sigma\frac{d}{d\sigma} \tag{2.100}$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}=4\rho^2\frac{d^2}{d\sigma^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}=4\sigma\frac{d^2}{d\sigma^2}+2\frac{d}{d\sigma} \tag{2.101}$$

よって，

$$\frac{d^2}{d\rho^2}+\left(\frac{2l+1}{\rho}\rho-2\rho\right)\frac{d}{d\rho}+2(k-l) \tag{2.102}$$

$$=4\sigma\frac{d^2}{d\sigma^2}+2\frac{d}{d\sigma}+2((2l+1)-2\sigma)\frac{d}{d\sigma}+2(k-l) \tag{2.103}$$

$$=2\left(2\sigma\frac{d^2}{d\sigma^2}+(2l+2-2\sigma)\frac{d}{d\sigma}+k-l\right) \tag{2.104}$$

$$=4\left(\sigma\frac{d^2}{d\sigma^2}+(l+1-\sigma)\frac{d}{d\sigma}+\frac{k-l}{2}\right) \tag{2.105}$$

$p=\frac{k-l}{2}$，$L(\sigma)$ の満たす式は

$$\left(\sigma\frac{d^2}{d\sigma^2}+(l+1-\sigma)\frac{d}{d\sigma}+p\right)L(\sigma)=0 \tag{2.106}$$

これの解は Laguerre の陪多項式 $L_p^l(\sigma)$．以上より，

$$\psi_{lp}(\rho,\theta,\zeta)=\mathcal{N}\rho^l L_p^l(\rho^2)e^{il\theta}e^{i(2p+l)\zeta}\psi_{00}(\rho,\zeta) \tag{2.107}$$

Herimite-Gaussian と同様に規格化すれば

$$\psi_{lp}(r,\theta,z)=\sqrt{\frac{2}{\pi w(z)^2}\frac{l!}{(p+l)!}}\left(\frac{\sqrt{2}r}{w(z)}\right)^l L_p^l\left(\frac{2r^2}{w(z)^2}\right)e^{il\theta}e^{i(2p+l+1)\zeta(z)}\exp\left\{-i\frac{kr^2}{2R(z)}-\frac{r^2}{w(z)^2}\right\} \tag{2.108}$$

これが Laguerre-Gaussian モード．$e^{il\theta}$ のため，Laguerre-Gaussian はウェストでも複素数になるが，$e^{il\theta}$ の実部と虚部に分けることで実数にすることもできる [2].

参考文献

[1] H. Kogelnik and T. Li, Kogelnik, Herwig, and Tingye Li. "Laser beams and resonators." Proc. IEEE, **54**, 1312-1329(1966)
Gaussian Beam の基礎的なことが書かれている．HG モードや LG モードについては結果だけ書いてある．

[2] 森脇成典，重力波をとらえる, 中村卓, 三尾典克, 大橋正健 編著, 京都大学学術出版会, 1988, p.339-361
Gaussian Beam の細かい計算いついていろいろ書いてある．