特別実験レポート
Center of percussion を用いた感度向上の技術検証

高野哲 05-151539

2016 年 10 月 4 日

目次

1 はじめに 3

2 実験の原理 3
- 2.1 Center of percussion . . . 3
- 2.2 ねじれ振り子 . . . 4
- 2.3 並進と回転のカップリング . . . 4
- 2.4 COP における伝達関数 . . . 7

3 実験装置 8
- 3.1 ねじれ振り子 . . . 8
- 3.2 feedback 制御系 . . . 11

4 測定方法 13
- 4.1 open loop 伝達関数の測定 . . . 13
- 4.2 振り子の並進の共振のピークの測定 . . . 14

5 実験結果 14
- 5.1 伝達関数の測定 . . . 14
- 5.2 PD1 の取得した信号 . . . 16

6 今後の展望 18

7 謝辞 18

補遺 回路図 20
- A.1 filter 回路 . . . 20
- A.2 コイルドライバー . . . 20
- A.3 PD . . . 20

1　はじめに

今年 2 月、アメリカの LIGO が重力波の直接検出に成功したことを発表し、さらに同年 6 月に 2 つ目の検出も発表された。重力波天文学がいよいよ幕を開けたと言えるだろう。

LIGO のような大型の重力波望遠鏡は現在世界各地で建設されており、ヨーロッパの VIRGO、日本の KAGRA などがそうである。これらの望遠鏡は 100Hz のオーダーの周波数帯においてもっとも感度が良い。一方で、ねじれ振り子を用いた TOBA のような小型の望遠鏡も開発されていて、こちらは 1Hz のオーダーに感度をもつ。

重力波観測において問題となるのは、地面振動や磁場変動、レーザーの輻射圧や鏡の熱振動などによる雑音である。今回は、とりわけ地面振動を取り上げる。ねじれ振り子は並進方向の変位を見るのではないが、回転と並進がカップリングすると、回転方向の変位に地面振動由来の雑音が乗ることになる。このカップリングを、center of percussion という点を用いることで軽減させることができる、という示唆がなされている。[1] そこで、この実験では論文で提言されたように、実際にカップリングが低減できるかを検証する。

2　実験の原理

2.1　Center of percussion

Center of percussion とは、剛体全体は運動しているが、並進と回転が打ち消されまったく動かないような点である。

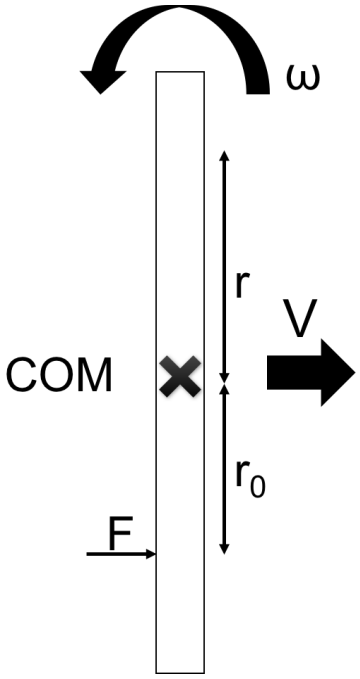

図 1　center of percussion

図 2.1 のように、質量 m、慣性モーメント I の物体に、重心 G からの距離 r_0 の点 P_0 に力 F を加えたとする。並進と回転の運動方程式は

$$m\dot{v} = F$$

$$I\dot{\omega} = Fr_0$$

となる。ここで重心から r 離れた点 P の運動を考 える。(P と P_0 は G に関して反対側とする) P の速度 V は $V = v - r\omega$ であるから、式 (2.1)、(2.1) より

$$V = \left(\frac{1}{m} - \frac{rr_0}{I}\right)\int F\,dt$$

で与えられる。これより、$r = I/mr_0$ のような点 P は $V = 0$ になりまったく動かないことがわかる。この点 P を center of percussion(COP) と呼ぶ。また、P と P_0 は互いに共役で、P に力を加えれば P_0 が COP になる。

2.2 ねじれ振り子

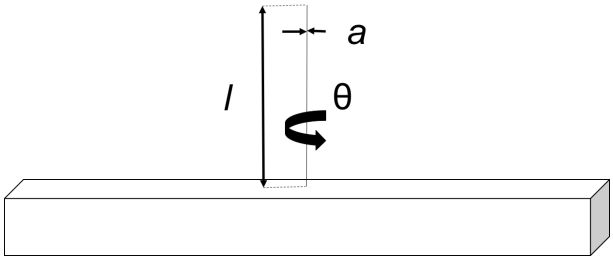

図 2 ねじれ振り子

図 2 に示すようなねじれ振り子を考える。バネ定数に相当するものはねじれ剛性と呼ばれ、

$$k_r = \frac{\pi E a^4}{64l(1+\nu)}$$

で与えられる。ただし a、l、E、ν はそれぞれワイヤーの直径、長さ、ヤング率、ポアソン比である。棒の慣性モーメントを I、棒のねじれた角度を θ、外乱によるトルクを τ とすると、運動方程式は以下のようになる。

$$I\ddot{\theta} = -\gamma_r\dot{\theta} - k_r\theta + \tau$$

ここで γ_r は回転方向の減衰係数。これより、外乱 τ からねじれ θ への伝達関数は

$$H_r(\omega) = \frac{\omega_r}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\omega_r\omega/Q_r}$$

となる。ここで ω_r はねじれ振り子の共振周波数で $\omega_r = \sqrt{k_r/I}$ である。また Q_r は Q 値で、$Q_r = I\omega_r/\gamma_r$ である。

これをプロットすると図 3 のようになる。ただしグラフは ω を f に変換し、$f_0 = \omega_0/(2\pi) = 0.001$Hz とした。

2.3 並進と回転のカップリング

前節では回転運動のみを見たが、実際には並進 3 自由度、回転 3 自由度の 6 自由度があり、これらがカップリングする。今回着目するのは、懸架点と重心がずれている際に起こる、x 方向の並進と yaw 方向の回転のカップリングである。以下、並進の座標は慣性系 (実験室) に、回転の座標は棒の上に取る。(図 4 参照)

ねじれ振り子の支点の変位、棒の懸架点の変位、棒の重心の変位をそれぞれ x_t、x_s、x_m、yaw 方向の角度を θ とする。重心と懸架点の距離を r とすると、$x_s = x_m - r\theta$ である。棒の質量を m、重心周りの慣性モーメントを I、懸架点周りの慣性モーメントを I_z とすると、$I_z = I + mr^2$ となる。振り子の並進方向、回転方向

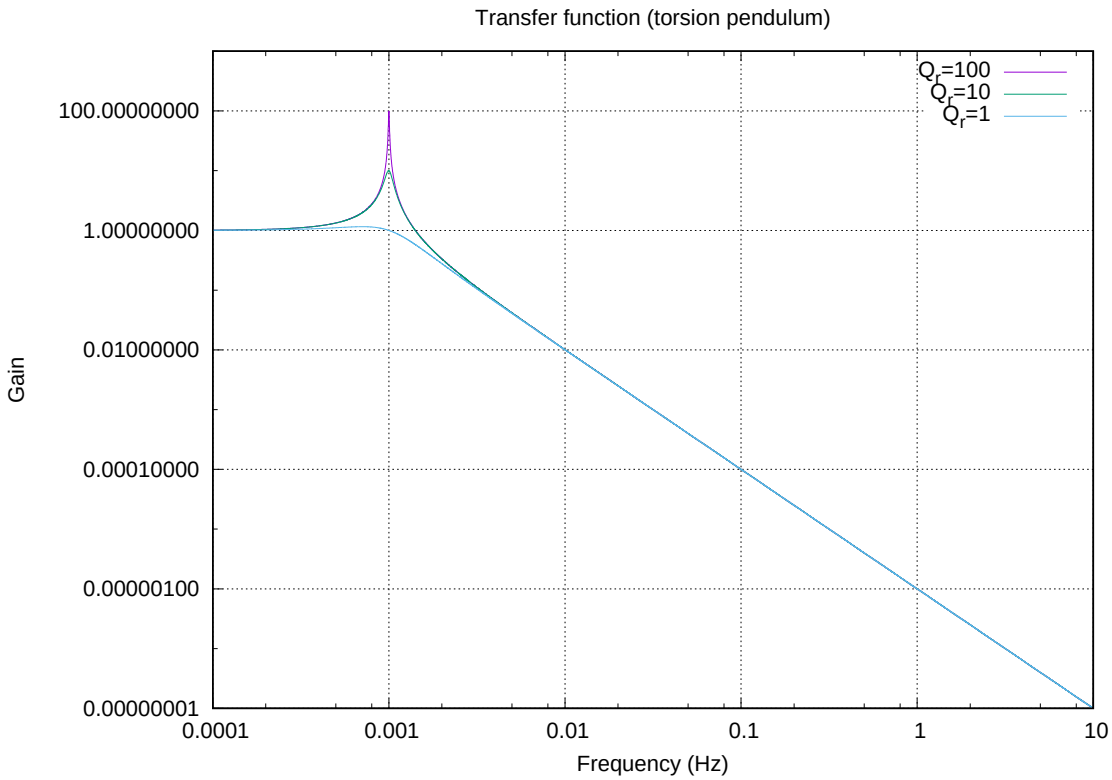

図 3　$H_r(f)$ のグラフ (ω を f に換算した)

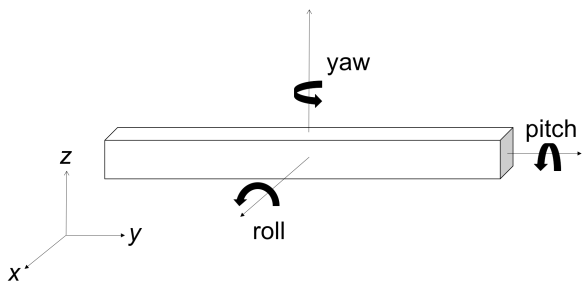

図 4　ねじれ振り子の座標

の共振周波数をそれぞれ ω_0、ω_r、Q 値を Q_0、Q_r とする。以上の設定で、重心において x 方向の並進と yaw 方向の回転の運動方程式は以下のようになる。

$$m\ddot{x}_m = -m\omega_0(x_s - x_t) - \frac{m\omega_0}{Q_0}\dot{x}_m + F_{ex}$$

$$I\ddot{\theta} = -\frac{I\omega_r}{Q_r}\theta - mr\omega_0(x_s - x_t) - I_z\omega_r\theta + \tau_{ex}$$

これらをフーリエ変換して、x_t から x_m への伝達関数 $H_0(\omega)$ を求める。パラメータ κ を $\kappa = I_z/I = mr^2/I + 1$ と定義すると、

$$-\omega^2\tilde{x}_m = -i\frac{\omega_0\omega}{Q_0}\tilde{x}_m - \omega_0^2(\tilde{x}_m - \tilde{x}_t + r\tilde{\theta}) + \frac{\tilde{F}_{ex}}{m}$$

$$-\omega^2\tilde{\theta} = -i\frac{\omega_r\omega}{Q_r}\tilde{\theta} - \kappa\omega_r^2\tilde{\theta} - \frac{(\kappa-1)}{r}(\tilde{x}_m - \tilde{x}_t + r\tilde{\theta}) - \frac{\tau_{ex}}{I}$$

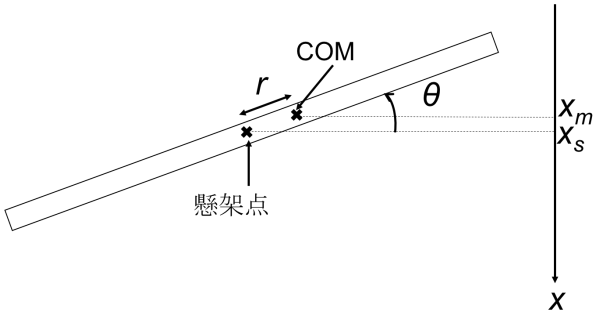

図 5　ねじれ振り子の変位とねじれた角度

これらより、$H_0(\omega)$ は

$$H_0(\omega) = \frac{-\omega_0^2(\omega^2 - \kappa\omega_r^2 - i\frac{\omega_r\omega}{Q_r})}{D(\omega)}$$

ただし

$$D(\omega) = \omega^4 - \left(\kappa(\omega_0^2 + \omega_r^2) + \frac{\omega_0\omega_r}{Q_0Q_r}\right)\omega^2 + \kappa\omega_0^2\omega_r^2 - i\left(\frac{\omega_0}{Q_0} + \frac{\omega_r}{\omega_r}\right)\omega^3 + i\left(\frac{\omega_r\omega_0}{Q_r} + \frac{\kappa\omega_r^2 + (\kappa-1)\omega_0^2}{Q_0}\right)$$

である。これをプロットしたのが図 6 である。

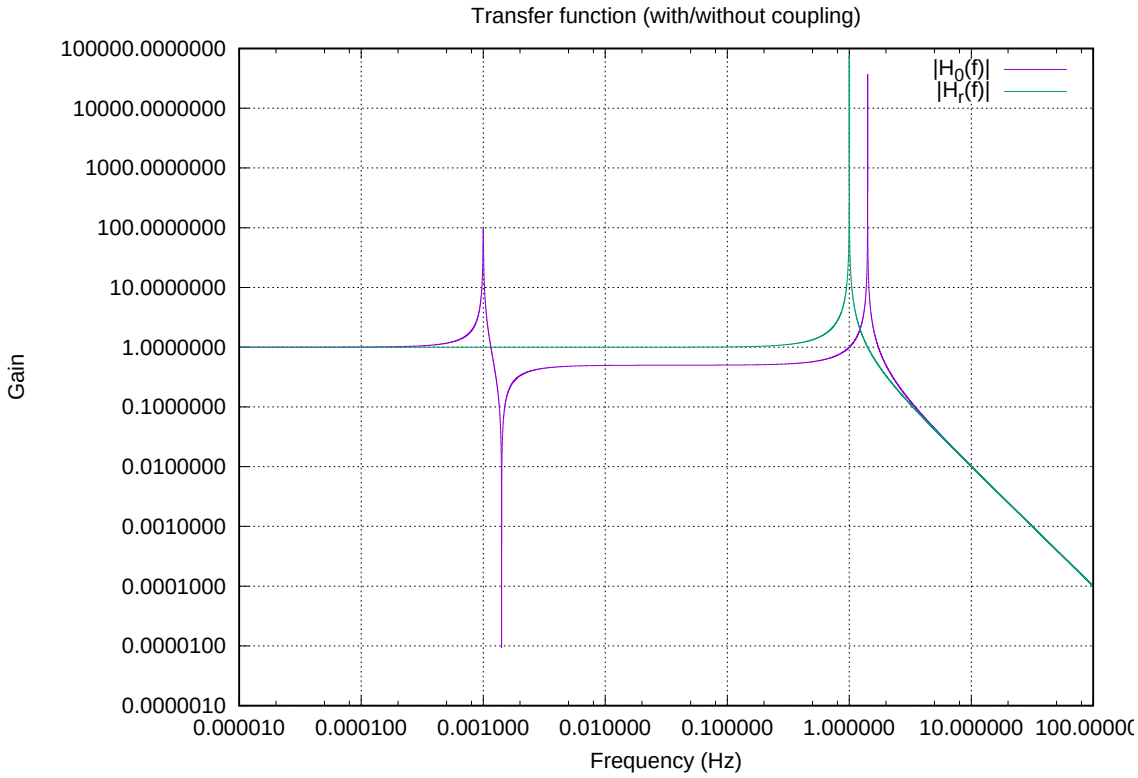

図 6　$H_0(f)$ のグラフ (比較のため $H_r(f)$) も載せた。$Q_r = 10^5, Q_0 = 10^5, f_r = 0.001\mathrm{Hz}, f_0 = 1\mathrm{Hz}$

2.4 COP における伝達関数

次に、重心から離れた位置における並進の伝達関数を求める。変位を測定する点と重心との距離を δr とし、変位を x_p とすると、$x_p = x_m - \delta r\theta$ と表される。

x_t から x_p への伝達関数を $H(x)$ とすれば

$$H(\omega) = \frac{\tilde{x}_p}{\tilde{x}_t} = H_0(\omega) - \delta r H_r(\omega)$$

となる。ここでパラメータ ω_p を

$$\delta r = \frac{r}{\kappa - 1}\left(1 - \frac{\omega_r^2}{\omega_p^2}\right)$$

となるように定義すると、

$$H(\omega) = \frac{\kappa\omega_0^2\omega_r^2(\omega_p^2 - \omega^2) + i\omega_0^2\omega(\frac{\omega_0}{Q_0}(\kappa\omega_r^2 - \omega_p^2) + \frac{\omega_r}{Q_r}\omega_p^2)}{\omega_p^2 D(\omega)}$$

となる。これをプロットしたのが図 7 である。

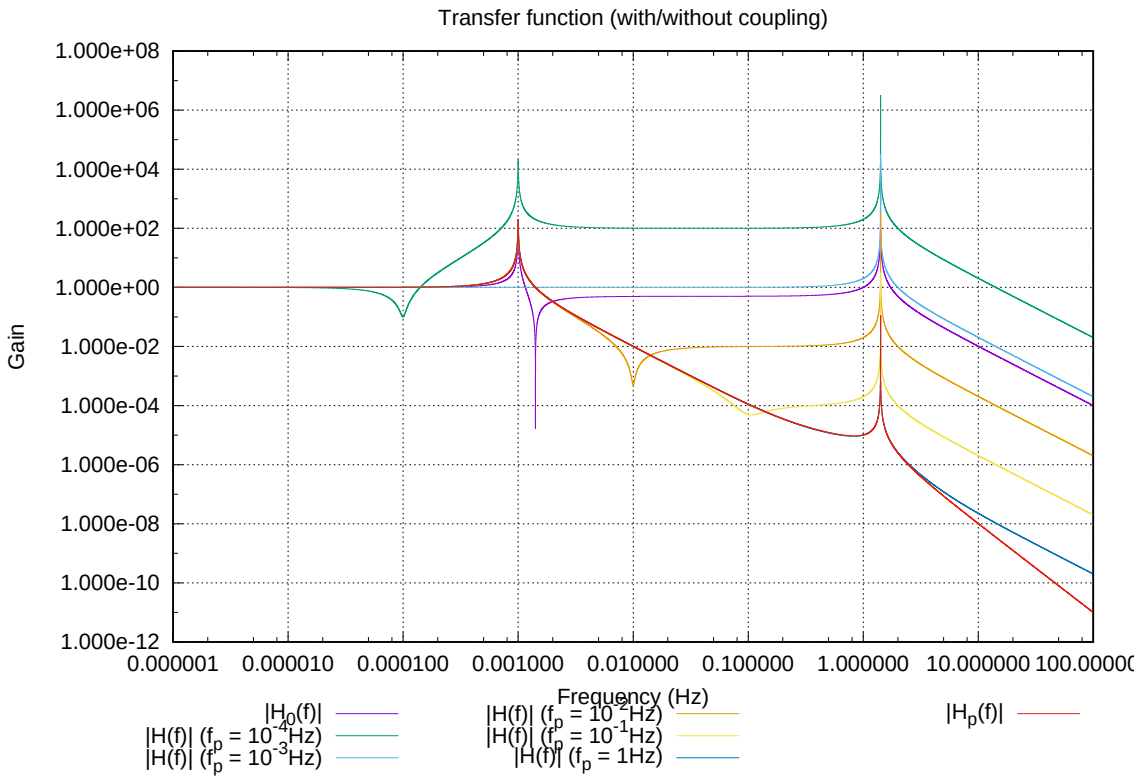

図 7　$H(f)$ のグラフ

ω_p を大きくしていく、すなわち δr を $r/(\kappa - 1)$ に近づけると、並進の共振周波数に近いピークが、下がっていくのがわかる。これは、y 方向の並進と yaw の回転が打ち消されていることを表している。もっともピークが下がるところが COP であり、$\omega_p \to \infty$ に対応する。この時、伝達関数は

$$H_p(\omega) = \frac{\omega_0^2\left(\kappa\omega_r^2 + i\left(-\frac{\omega_0}{Q_0} + \frac{\omega_r}{Q_r}\right)\right)}{D(\omega)}$$

となる。

今回の実験では、測定する位置を COP に近づけるにつれ、$\omega \sim \omega_0$ での共振のピークが下がっていく様子を観測する。

3　実験装置

3.1　ねじれ振り子

今回使用した実験装置の概要を図 8、図 9 に示す。

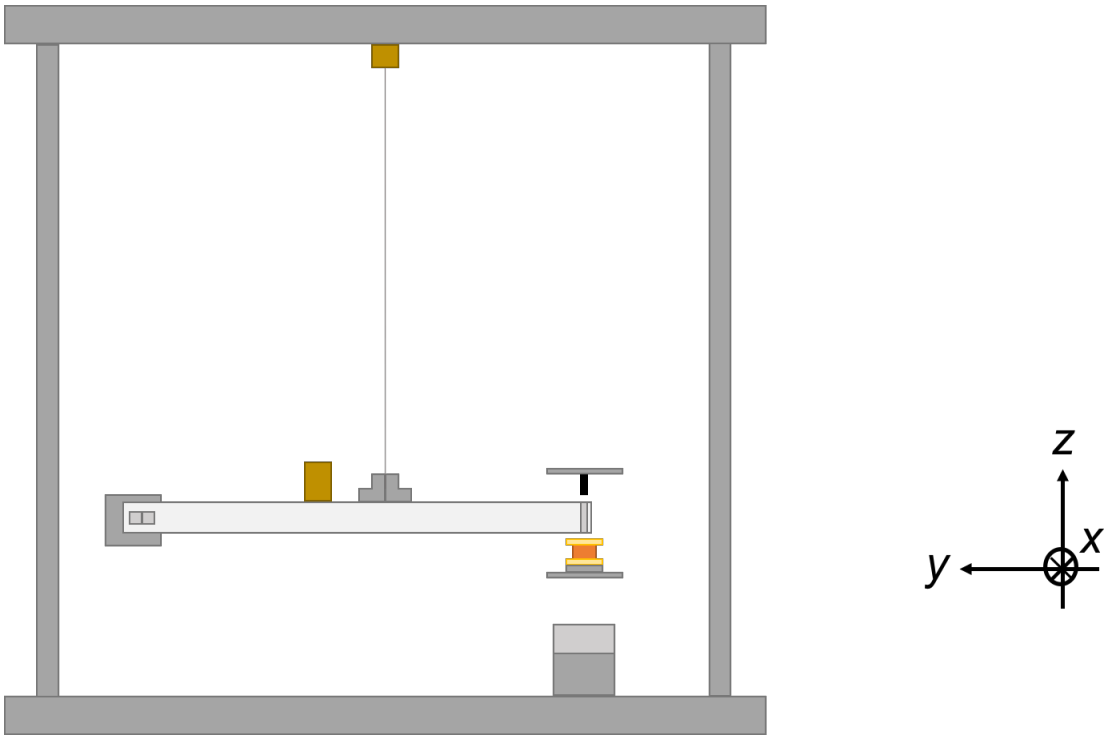

図 8　実験装置前面 (一部省略)

3.1.1　振り子本体

振り子の概要を図 10 に示す。振り子は本体と試験マスからなっている。試験マスは重心の位置をずらし、COP が振り子の上に乗るように調整するためのものである。本体の素材としてアクリルを用いることにした。これは、後述するように、振り子の水平制御には磁石を用いており、磁場中を金属が動くことで eddy current が生じるのを防ぐためである。試験マスは銅で出来ている。そのため eddy current は生じるが、マスと磁石の距離は十分大きいため影響は無視できるとする。

振り子本体および試験マスのパラメータを表 1 に示す。

3.1.2　懸架システム

振り子は、タングステンワイヤーによってやぐらの上部から懸架される。ワイヤーのパラメータを表 2 に示す。

振り子の重心と懸架点は大きくずれているため、このままでは振り子は試験マスのある側が下がる。そこで、2 つ永久磁石を振り子の先端と振り子の下に設置し、磁石同士の引力によってトルクを加えて水平を保つよう

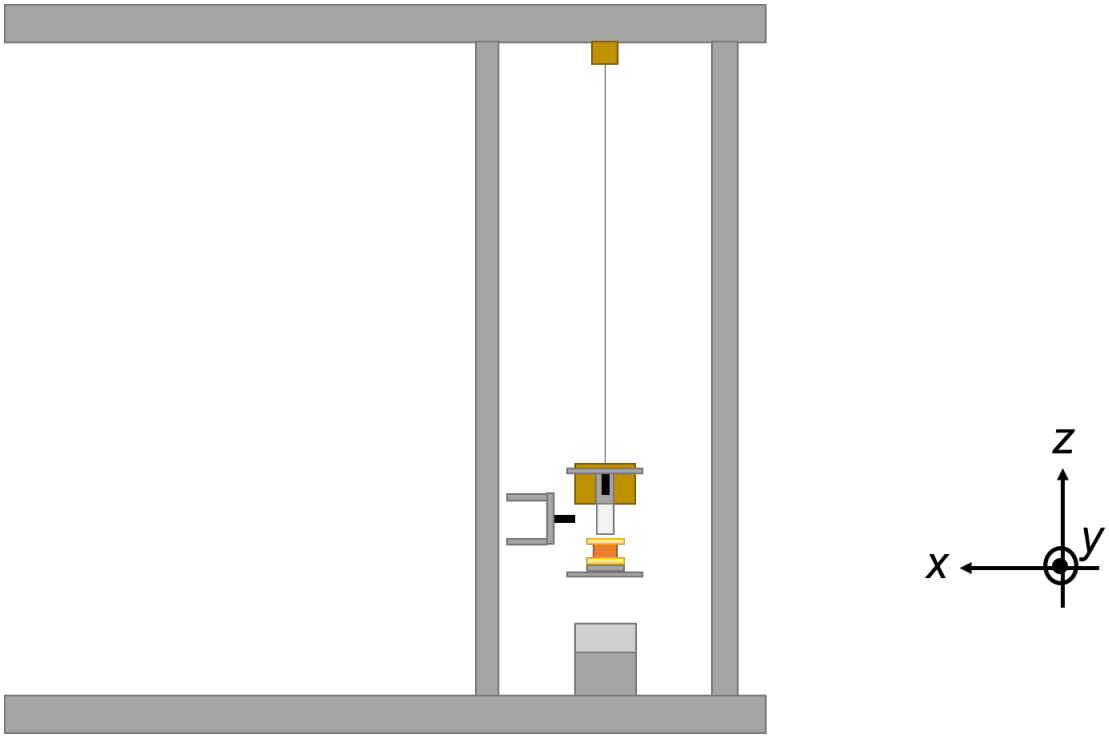

図 9　実験装置側面 (一部省略)

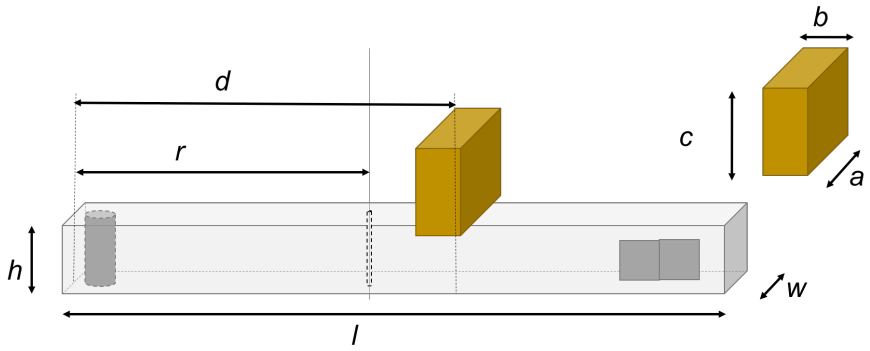

図 10　振り子本体と試験マスの詳細

にした。しかし、アーンショーの定理により、静磁場のみでは安定した釣り合いを保つことができない。そのため電磁石による feedback 制御を加える必要がある。feedback 制御については後述する。振り子の先端に埋め込んだ磁石を M1、振り子の下部に設置した磁石を M2 とする。M1 上部にはフォトディテクターがあり、これによって振り子の z 方向の動きを読み取る。M1、M2 はどちらもネオジム磁石であり、M1 は円柱型、M2 は直方体である。電磁石はソレノイドコイルで、コイルドライバーによって電流を供給する。M1、M2、コイルのパラメータを表 3 に示す。

磁石同士に働く力をメトラーを用いて図 11 のように測定した。測定結果を図 12、図 13 に示す。

3.1.3　フォトディテクター

距離の測定にはフォトディテクター (PD) を用いた。PD は振り子の上部に設置して振り子の制御に用いるものと、振り子の磁石と反対側の端に設置し、振り子の x 方向の変位を読み取るものの 2 種類がある。以

表 1　振り子の各パラメータ

文字	パラメータ	値
l	振り子の長さ	200 mm
h	振り子の高さ	20 mm
w	振り子の幅	10 mm
m	振り子の質量 (クランプ含む)	54.4 g
a	試験マスの x 方向の長さ	300 mm
b	試験マスの y 方向の長さ	180 mm
c	試験マスの z 方向の長さ	250 mm
M	試験マスの質量	118 g
r	振り子の懸架点	900 mm
d	試験マスの固定位置	1150 mm
I	振り子全体の重心における慣性モーメント	2000 g·cm^2
κ	κ パラメータ	1.24

表 2　ワイヤーの各種パラメータ

文字	パラメータ	値
a	ワイヤーの直径	0.1 mm
l	ワイヤーの長さ	195 mm
E	ヤング率	400 GPa
ν	ポアソン比	0.28
f_0	並進の共振周波数	1.1 Hz
f_r	回転の共振周波数	0.031 Hz

表 3　磁石の各種パラメータ

パラメータ	値
M1 の寸法	直径 0.6 mm 長さ 200 mm
M2 の寸法	254 mm × 254 mm × 127 mm
コイルの寸法	直径 204 mm 長さ 133 mm
コイルの内部抵抗	36.2 Ω
コイルの自己インダクタンス	18 mH

下、前者を PD1、後者を PD2l、PD2r と呼ぶことにする。どの PD も同じ構造をしており、LED と検出器から成る。LED から出た光は物体に反射され、帰って来た光は検出器で検知され、電圧に変換される。PD と物体間の距離と、得られる電圧の関係は、物体の反射率や外部光源など環境に依存する。そのため、測りたい物体との距離と出力電圧をあらかじめ測定し、線形になるような領域のみを用いる。PD1 は振り子に付けた磁石、PD2l/r は振り子に付けた鏡で光を反射させ、測定した。これら PD のキャリブレーション結果を図に示す。PD1 については、1.0mm から 2.0mm の領域を使うことにした。この部分で線形近似をすると、$V_{out} = -0.857\mathrm{V/mm} \times z + 2.853\mathrm{V}$ となった。一方、PD2 については、PD2l が 2.0mm よりも近い距離ではサチってしまうため改良が必要であったが、そこまでは時間がなく出来なかった。

3.2 feedback 制御系

feedback 制御の基本的なブロック図は図 16 のようである。

x_0 は外乱、x の変位、S、A、F はそれぞれ System、Amplifier、Filter の伝達関数である。制御の安定性は、x_0 に対して x がどう振る舞うかによって確かめられる。ブロック図から

$$x = S(x_0 - AFx)$$

$$x = \frac{Sx_0}{1 + SAF}$$

であることがわかる。open loop 伝達関数を $G = SAF$ と定義すると、

$$x = \frac{Sx_0}{1 + G}$$

と書ける。これより、$G = -1$ の時に x は発散し、不安定になると考えられる。したがって $|G| = 1$ の時に位相が-180 度からどれだけ離れているかをみれば、安定性の指標となる。$|G| = 1$ となる周波数を UGF(Unity Gain Frequency) と呼び、G の位相が $-180°$ より進んでいる角度を位相余裕と呼ぶ。$\angle G = -180 + 40\sim60°$ 程度であるのが良い制御系であると言われている。

今回用いる制御のブロック図を図 17 に示す。各回路の回路図は補遺に示す。

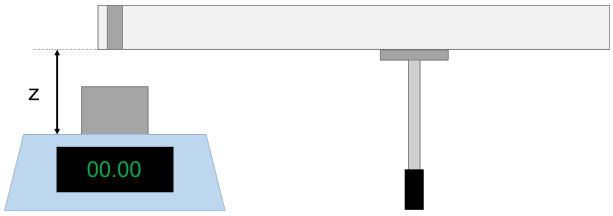

図 11　磁石同士の間に働く力の測定方法 (図は直方体の永久磁石の例)

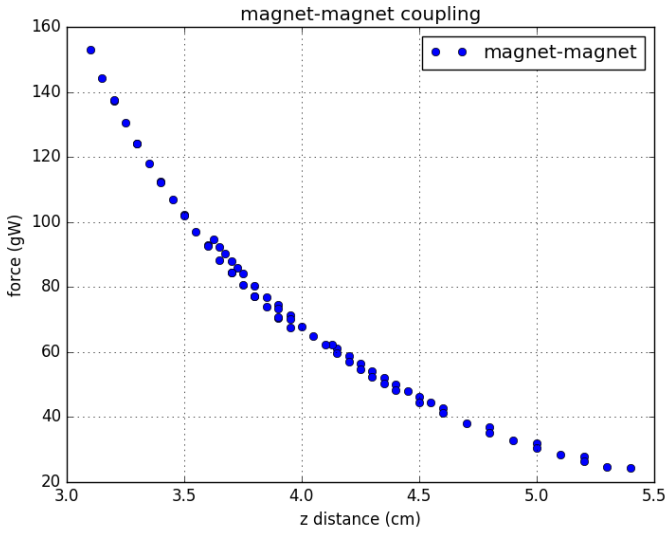

図 12　永久磁石同士に働く力 (鉛直下向きが正)

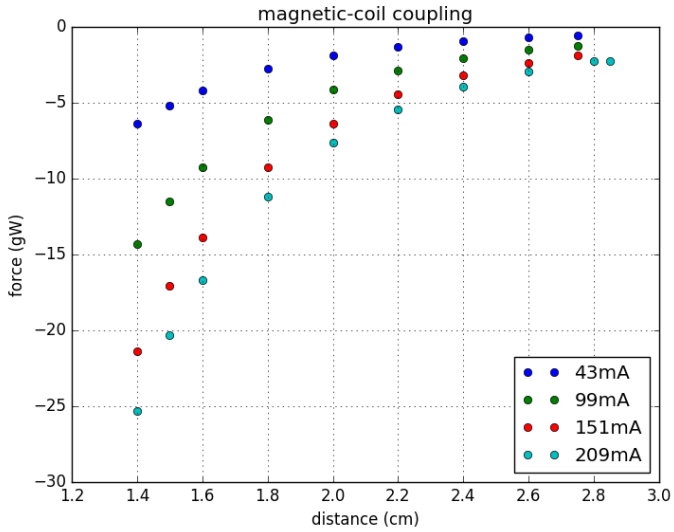

図 13　永久磁石とコイルに働く力 (鉛直下向きが正)

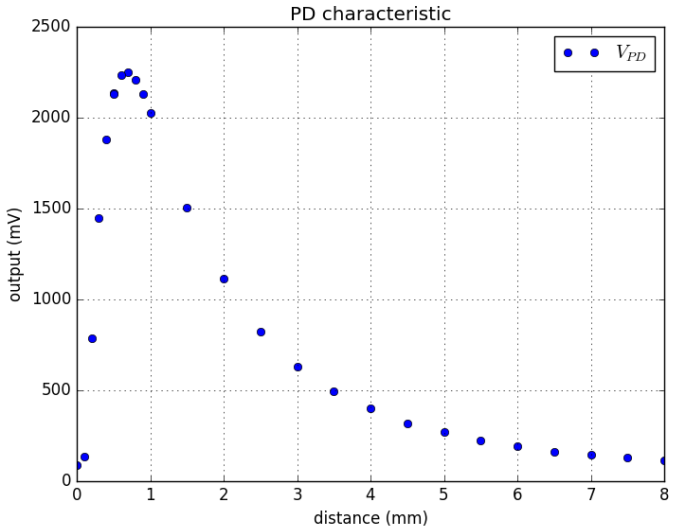

図 14　PD1 のキャリブレーション

3.2.1　offset 回路

offset 回路は、PD1 の出力に適切な電圧を加え、filter 回路に出力する。offset の値を変えることで、浮上させる高さを調整できる。

3.2.2　filter 回路

filter 回路は、PD1 と offset 回路からの出力をコイルにかける電圧に還元する。また発振の原因になりうる周波数を取り除く役割もある。ゲインを調整できるようになっており、20dB まで上げることができる。

3.2.3　コイルドライバー

コイルドライバーは、filter 回路からの出力をコイルに流す電流に変換する。出力された電圧を電流に変換してコイルに流し、力に還元する。

4　測定方法

4.1　open loop 伝達関数の測定

図 18 に示すように、ループの途中に信号 s を加えて open loop 伝達関数 G を測定する。

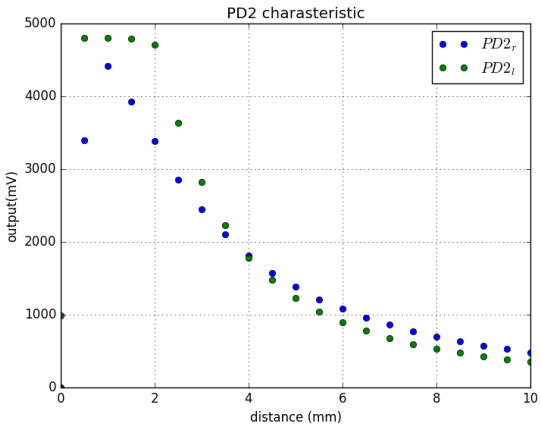

図 15　PD2l/r のキャリブレーション

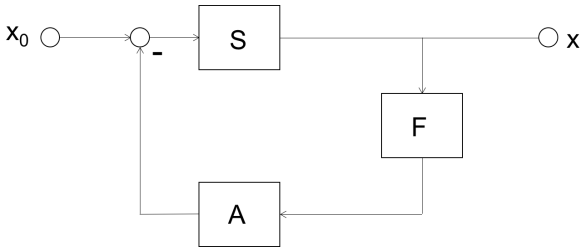

図 16　feedback 制御のブロック図

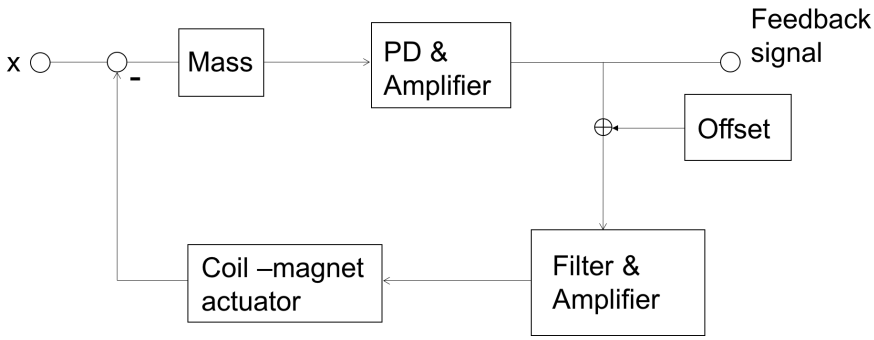

図 17　磁気浮上制御のブロック図

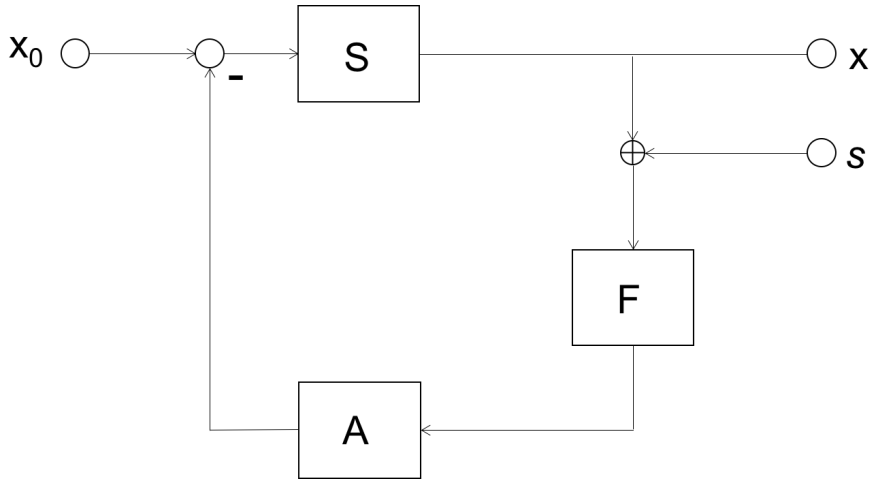

図 18　open loop 伝達関数の測定

信号 s を加えた場合、x は

$$x = \frac{Sx_0 - SAFs}{1 + SAF}$$

となる。ここで s を加える前後の信号の比を取れば

$$\frac{x}{x+s} = \frac{\frac{Sx_0 - SAFs}{1+SAF}}{\frac{Sx_0 - SAFs}{1SAF} + s} = \frac{Sx_0 - SAFs}{Sx_0 + s}$$

となる。加える信号を外乱より十分大きく ($s \gg Sx_0$) すれば、

$$\frac{Sx_0 - SAFs}{Sx_0 + s} \simeq -SAF = -G$$

とできるから、open loop 伝達関数 $G = SAF$ が求まる。

4.2　振り子の並進の共振のピークの測定

並進の変位の測定は PD2l/r の出力を用いて行う。鏡と PD の距離を 2.0mm に固定し、出力の電圧をキャリブレーションから求めた近似式で距離に変換する。

今回の実験では、並進の測定までには至らなかった。

5　実験結果

5.1　伝達関数の測定

伝達関数の測定にはスペクトルアナライザーのサーボ機能を用いた。

5.1.1　filter 回路の伝達関数

filter 回路の伝達関数の測定結果を図 19、図 20 に示す。ゲインは最大 (20dB) で測定した。これより、filter 回路は設計通りに動作していたと考えられる。

5.1.2　open loop 伝達関数

open loop 伝達関数の測定結果を図 21、図 22 に示す。UGF はおよそ 23Hz である。位相余裕はおよそ 40° であるから、十分に余裕はあると考えられる。しかし実際には、振り子は 2Hz 程度で yaw 方向に振動してい

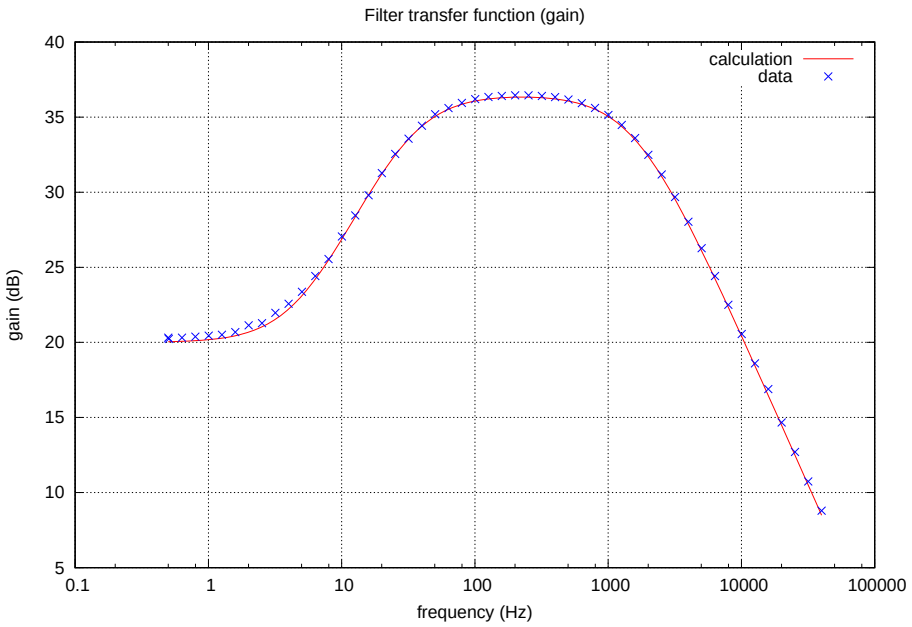

図 19　filter の伝達関数 (ゲイン)

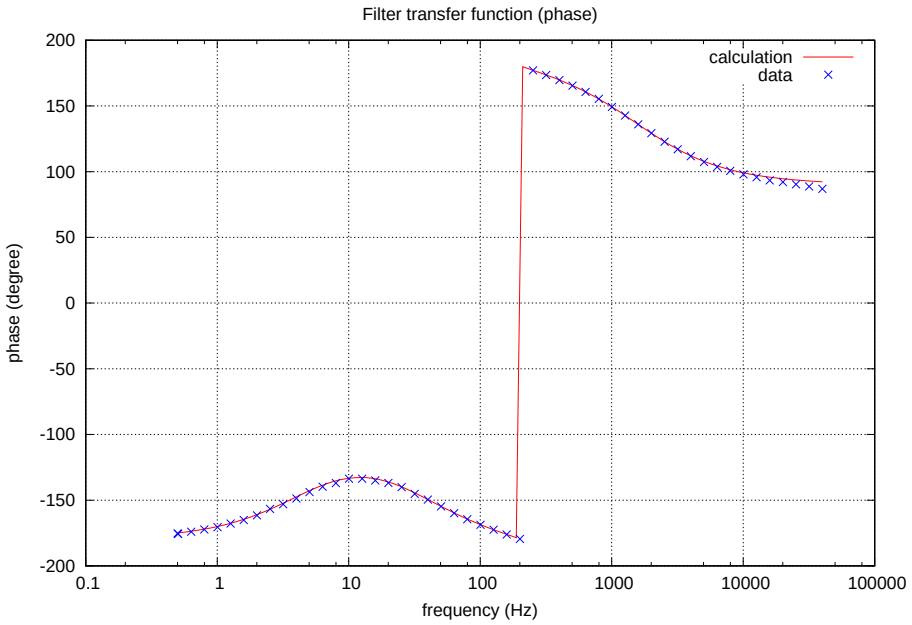

図 20　filter の伝達関数 (位相)

た。長時間測定しているとこの周波数で発振し、制御から外れることもあった。発振の原因は特定できなかったが、磁気浮上により振り子がある程度固定されることで回転方向が固くなり、回転の共振周波数が 2Hz 程度まで上がった、ということが考えられる。1Hz のオーダーでの位相余裕は 20〜30° と、UGF に比べて小さい。したがって、この周波数で揺れた場合に発振が起こることは理解できる。

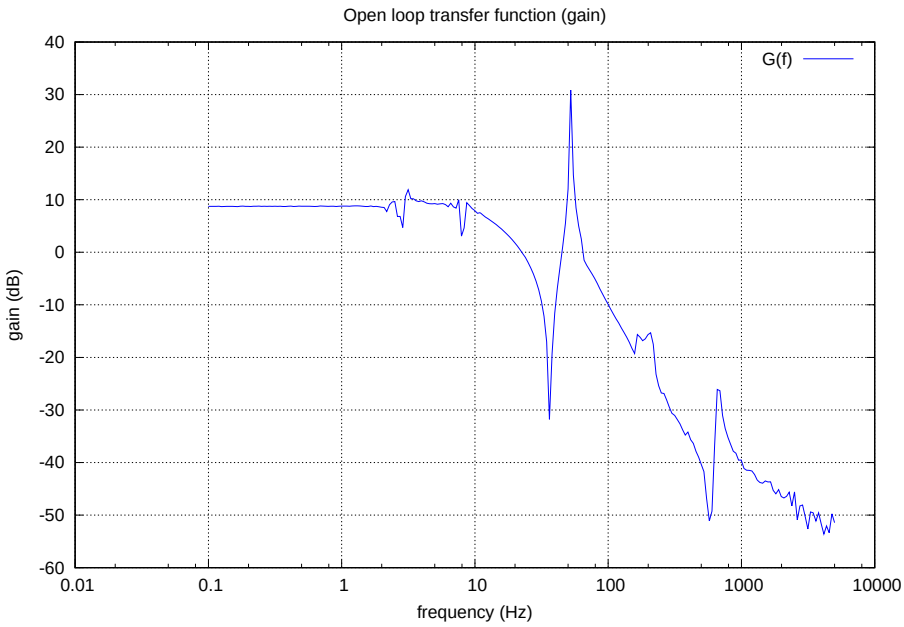

図 21　open loop 伝達関数 (ゲイン)

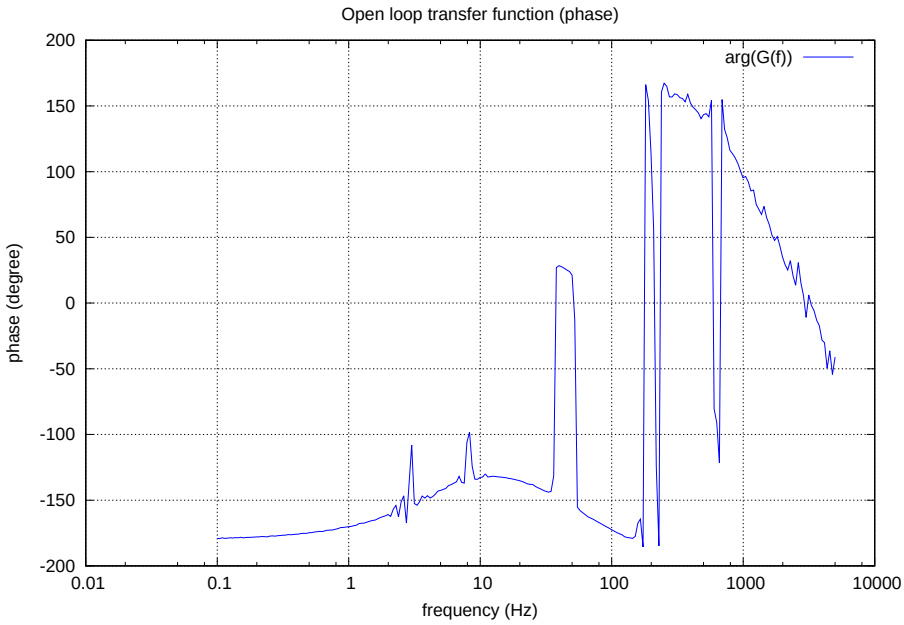

図 22　open loop 伝達関数 (位相)

5.2　PD1 の取得した信号

スペクトルアナライザーの FFT 機能を用いて、PD1 の取得した信号のパワースペクトルを測定した。これを図 23 と図 24 に示す。

PD1 の出力は、PD1 と振り子の z 方向の変位だけでなく x、y 方向の変位にも依存する。そのため、パワースペクトルは z 方向の振動だけでなく x、y 方向の並進や回転のスペクトルも含んでいると考えられる。特に、

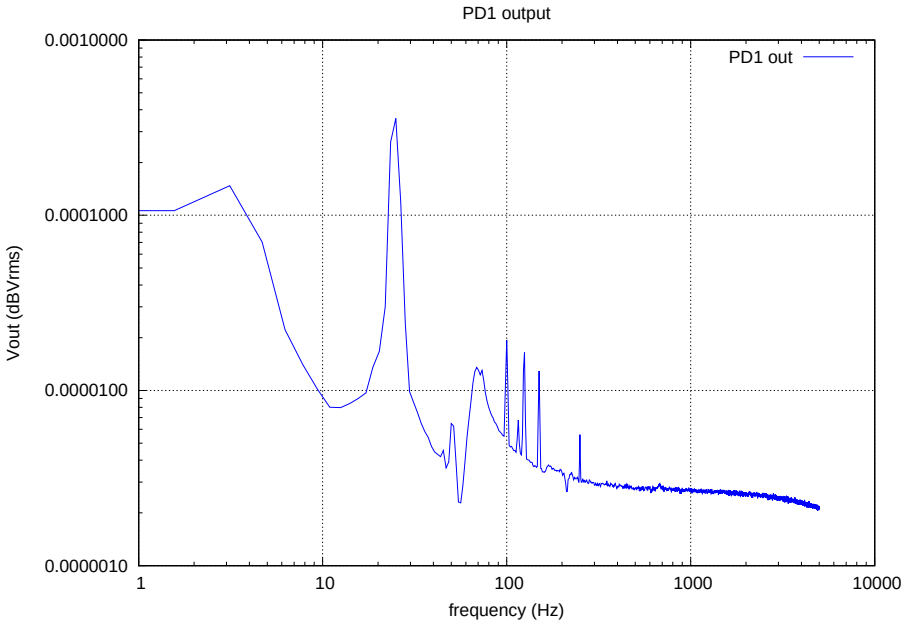

図 23　PD1 出力のパワースペクトル (広域)

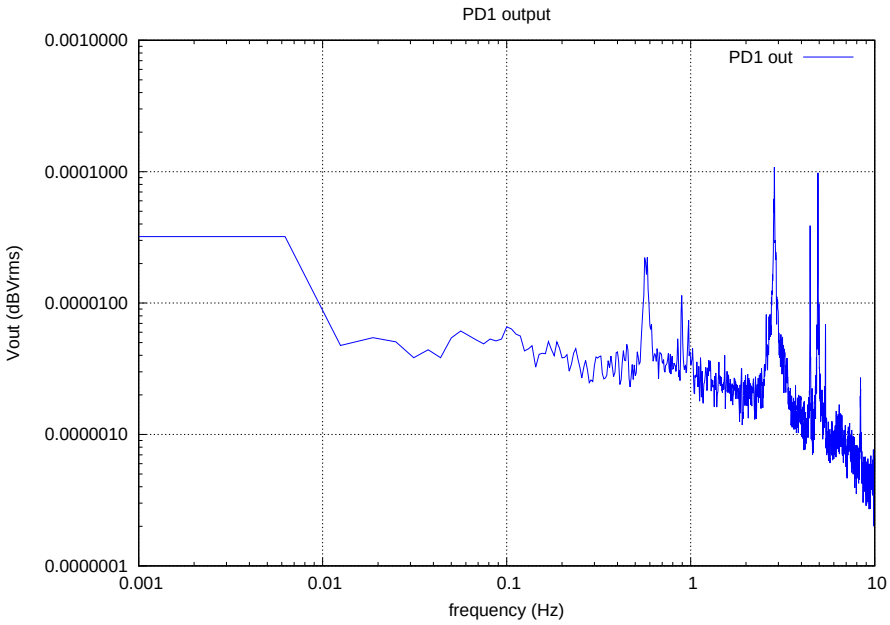

図 24　PD1 出力のパワースペクトル (低周波数帯)

前に述べた通り yaw 回転の振動は肉眼で十分確認できるレベルの大きな振動をしていたため、大きなピークが見られるはずである。

3Hz、6Hz あたりに鋭いピークがあるが、これが yaw 回転の振動だと考えられる。実際、回転はこの辺りの周波数で振動していたため、確実であろう。1Hz 付近のなだらかなピークは、x,y 並進の振動だと考えられる。ピークが小さいのは、磁気浮上による固定や空気抵抗などによるダンンピングの影響であると予想される。ワイヤーの z 方向の伸縮による振動の周波数は、$\omega_z = \sqrt{\pi E a^2/(4l(m+M)}$ で与えられる。これより共振周波数は $f_z = \omega_z/(2\pi \sim 100$ と見積もられる。したがって、100Hz 付近のピークは z 方向の共振によるものと考

えられる。30Hz あたりにあるピークについては、原因を特定できなかった。

6　今後の展望

今回は磁気浮上までしかできず、肝心の x 方向の変位を測ることができなかった。しかしその中でも改善点が出てきたため、以下に列挙していく。

まず、磁気浮上により回転の共振周波数が固くなることである。今回のセットアップでは磁場が回転方向に一様でなく、本来 $o(1)$Hz であるような回転の共振周波数が大きくなり、$O(1)$Hz の振動が現れてしまった。改善策としては、磁場の分布をドーナツ型のように回転方向には一様になる形状にすることが考えられる。その上で、y、z 方向は非常に固く、x 方向はある程度自由に動けるような浮上機構が理想だろう。

また、アラインメントをより正確にする必要がある。磁気浮上の制御を掛ける際、今回はかなり大雑把にアラインメントをした。それでもたまたま上手く浮上したが、より精密な測定をするためにマイクロメーターなどを使って微調整できるようにするべきだろう。特に、振り子の水平さを測るのが重要になる。振り子が水平からずれていると、その分 COP は移動する。また傾きによって他の自由度とのカップリングも大きくなるため、振り子はできるだけ水平に保つのが好ましい。振り子に水準器をつけるようなことはできないため、光てこなどを使って測定するのが良いだろう。

実際に x 方向の変位を測定するには、他の 2 成分の並進をどれだけ抑えられるかが問題になる。特に、COP を的確に抑えるには y 方向について 100μm の精度が要求され、当然 y 方向の変位をそれ以下に抑えなければならない。今回は z 方向と x 方向の変位のみを測定するものだったが、y 方向も含めた変位を測定できるのが好ましいだろう。yaw 方向の振動が y 方向の振動にカップリングして y 方向が大きく揺れ出す、といったことも見られたため、回転方向の変位も測定できるようにするべきだろう。

7　謝辞

今実験は、初めて一人で設計から組み立て、測定までを行いました。実験の辛さ、大変さ、泥臭さを直に体験した数ヶ月でした。途中、磁気浮上の設計を根本から変えなければならないことがわかったのが 7 月の下旬、そこから院試を挟み、締め切りに間に合うかどうかというところでようやく浮上に成功し、安堵しています。とはいうものの、当初の目的であった並進の測定はできていないため、満足が出来るものではないです。また、データの解析などは大してできなかったため、悔いは残っています。無事院進できれば、このテーマを最後までやりきりたいと思っています。

今実験は今年が初めてで参考資料が先行論文しかないために、手探りで進めていきました。その結果非常に拙い部分も出てしまいましたが、のちに同じテーマをやる人は (もしいれば)、このレポートがあるだけ、幾分かはやりやすくなるでしょう。

本実験を通して、安東研究室の皆様には非常にお世話になりました。厚く御礼を申し上げます。担当教員である安東正樹准教授にはこのようなチャレンジングな実験課題をいただきました。道村唯太助教授には多くのアドバイスをいただき、実験の方向性を決める上で大変参考になりました。下田智文氏には、CAD の使い方からドリルの穴の開け方、スペアナの使い方まで、非常に多くのことを教えていただきました。その他研究室の皆様にも、声をかけていただき、進捗を気にかけていただきました。また試作室の大塚茂巳さんには、お忙しい中で多くの部品を作成していただきました。

最後に、実験のパートナーの上野智久氏には、実験テーマこそ違えど、いろいろな話を聞き、参考になりました。ありがとうございました。

参考文献

[1] Thrane, Anderson,et al. "Toward terrestrial detection of millihertz gravitational waves with magnetically assisted torsion pendulums", arXiv:1512.03137 [gr-qc]

[2] 穀山渉 坪野研究室 4 年生特別実験レポート 「 低周波重力波検出器開発のための 磁気浮上の基礎実験」(2006)

[3] 竹迫和博 坪野研究室 4 年生特別実験レポート 「磁気浮上の実験」 (2008)

[4] 片山徹 新版フィードバック制御の基礎 朝倉書店 (2002)

補遺　回路図

A.1　filter 回路

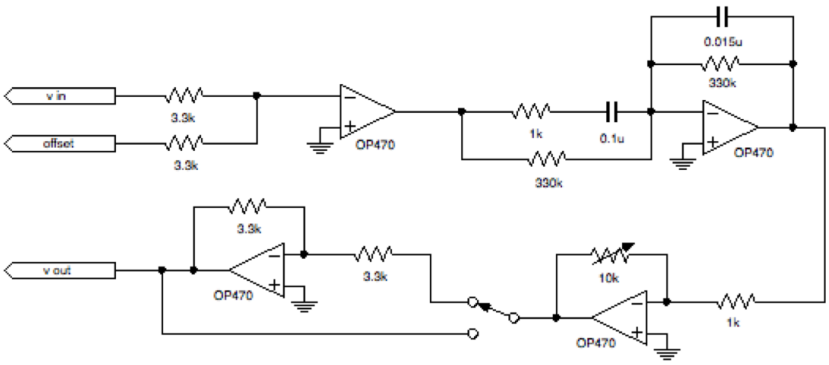

図 25　filter 回路

A.2　コイルドライバー

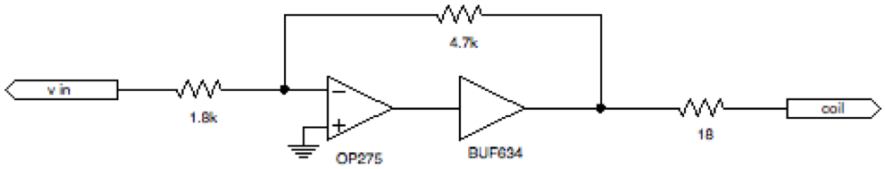

図 26　コイルドライバー

A.3　PD

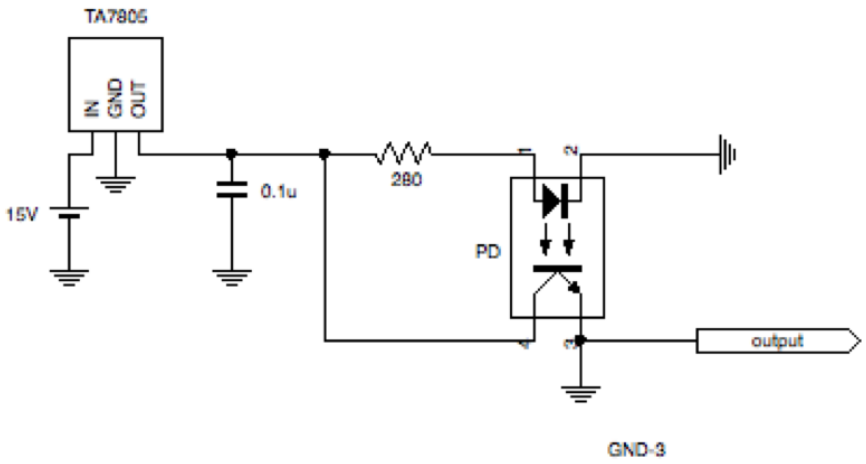

図 27　PD