

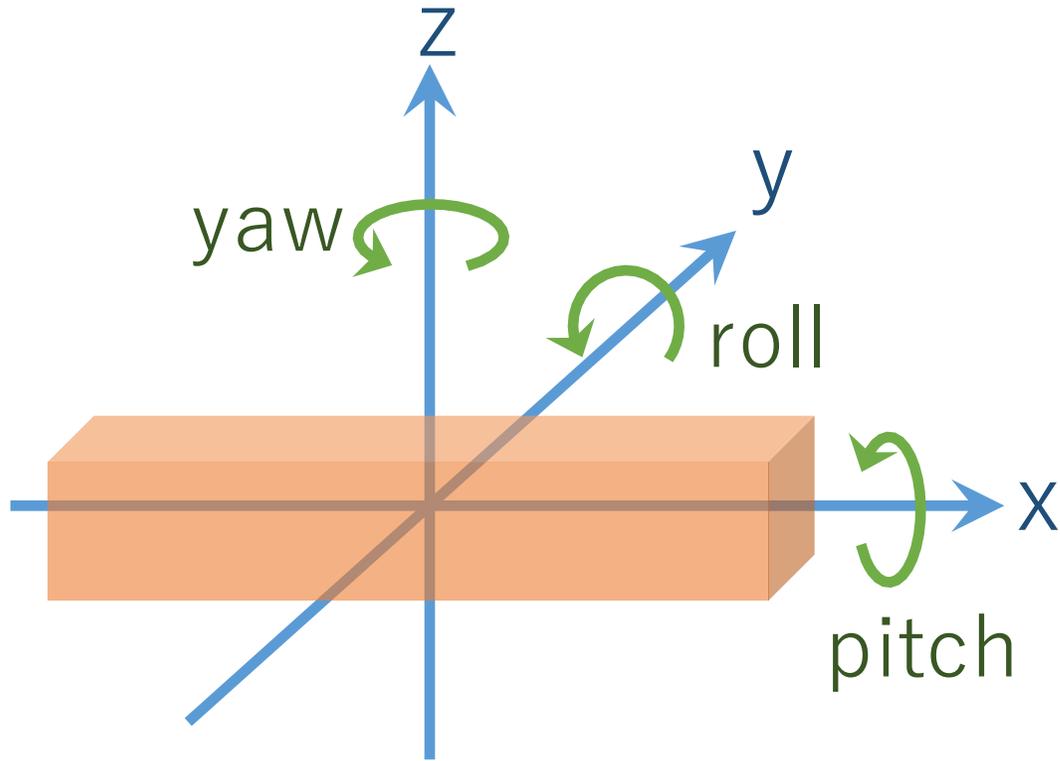
ねじれ振り子における 並進カップリング雑音

安東研輪講 2016.1.28

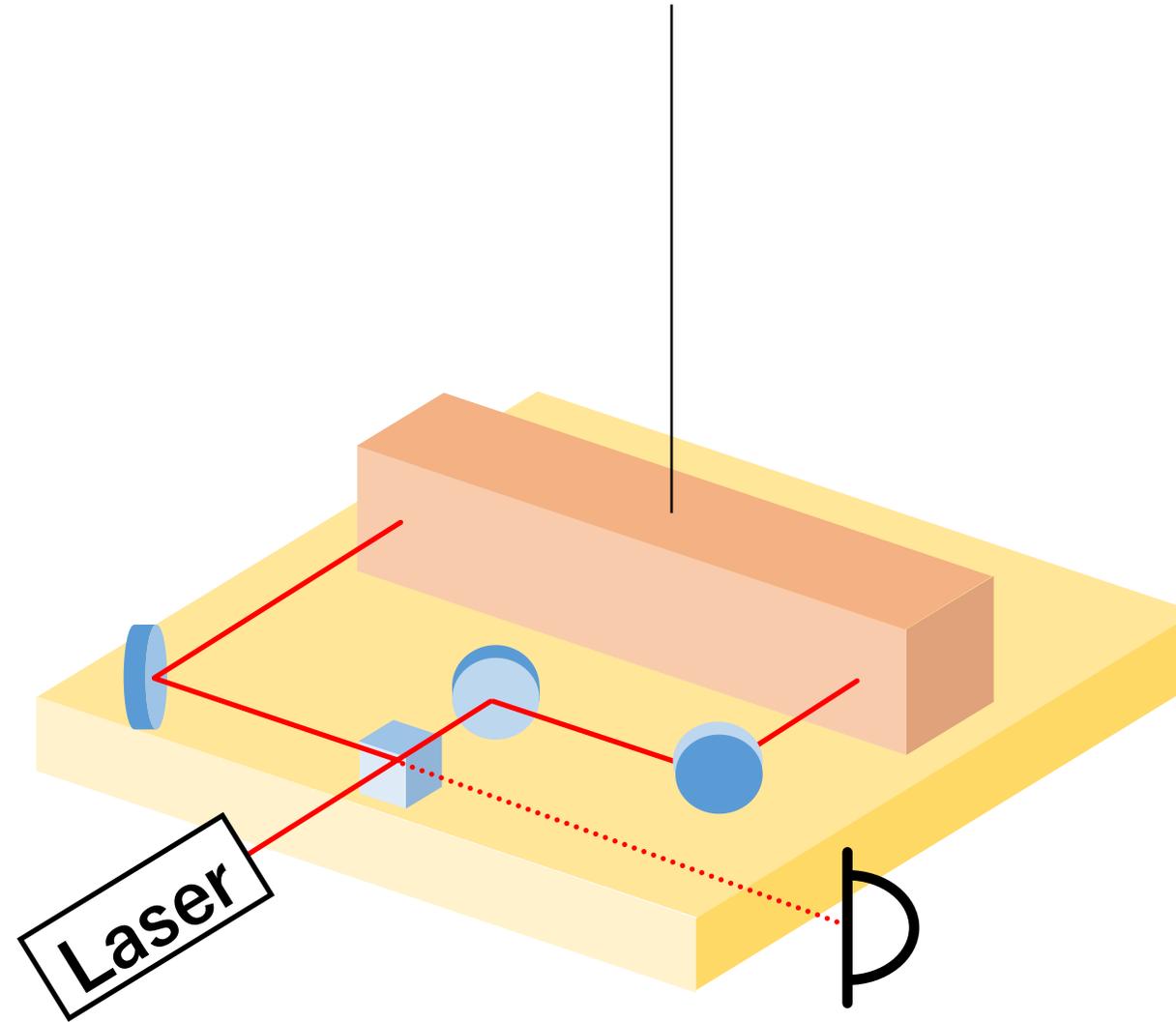
下田智文

1段振り子のカップリング

座標系・モデル



※マスではなく地面に固定した座標系を用いる

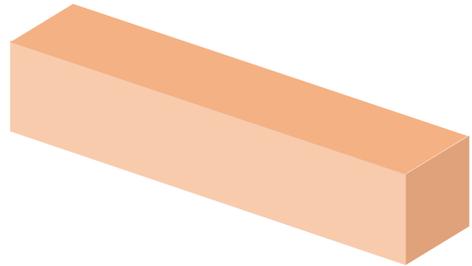


- 試験マス&OpticalBench懸架
- 読み取り光学系：マイケルソン干渉計

計算に用いるパラメータ

- 具体的な値を計算する際は基本的に次のパラメータを用いる

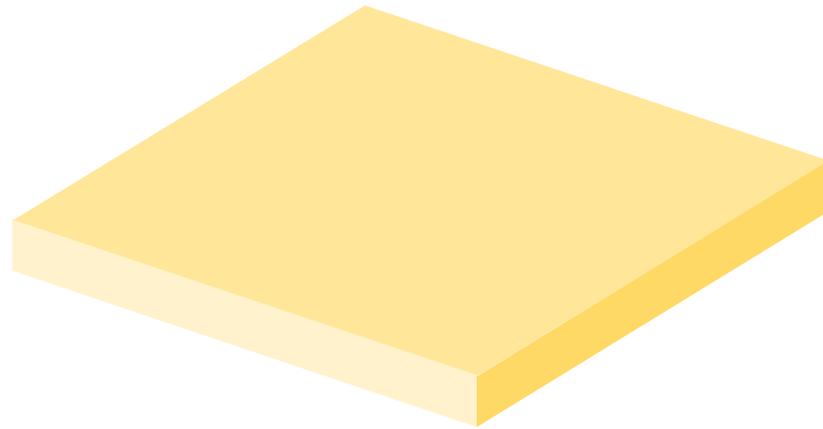
機械系



試験マス (TM)

サイズ : $20 \times 3 \times 3$ cm

質量 : 0.4kg (FusedSilica)

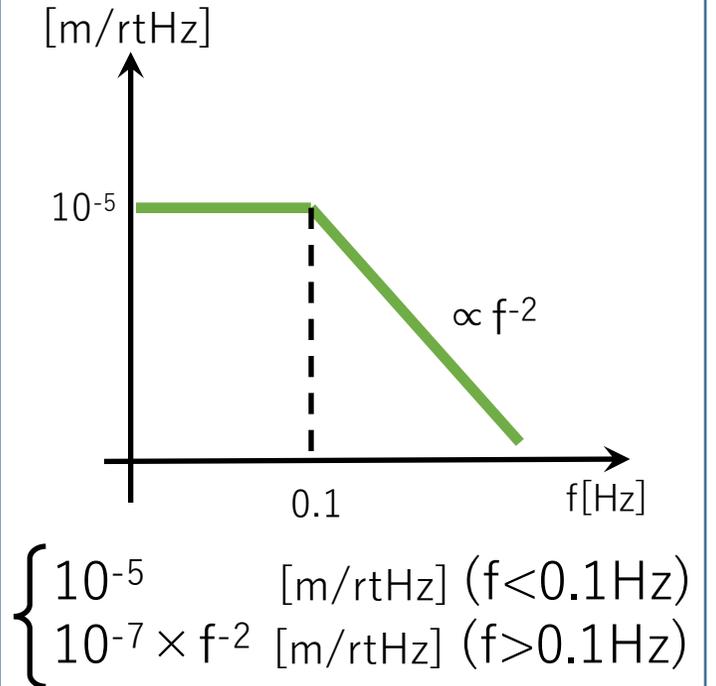


OpticalBench (OB)

サイズ : $20 \times 20 \times 2$ cm

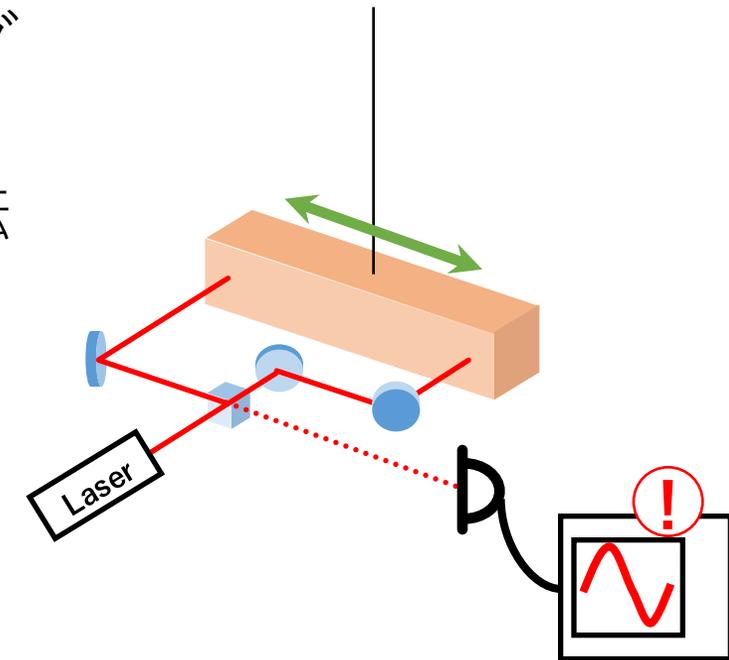
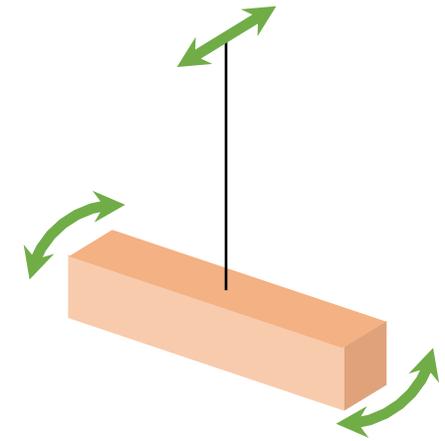
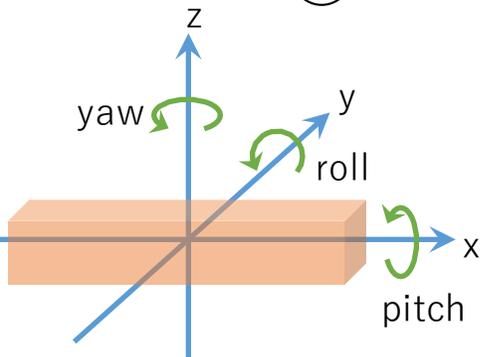
質量 : 1.8kg (FusedSilica)

地面振動 (x,y,z)



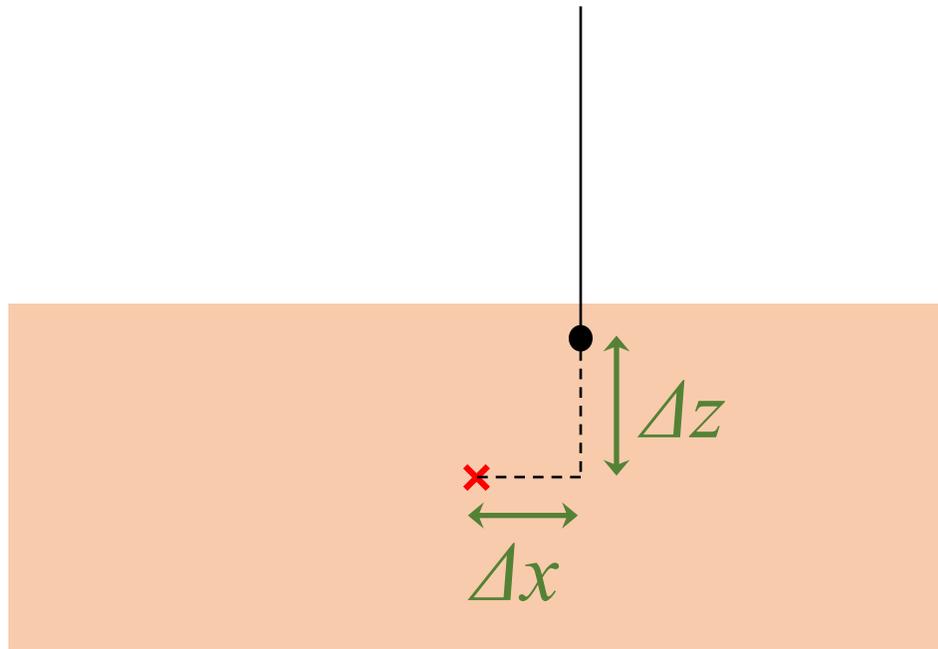
カップリング経路

- 並進地面振動→試験マスYaw回転
 - ① 懸架点と重心の水平ズレ
 - ② 地面振動xy成分の合計の寄与
- Yaw回転以外が基線長変動を生むカップリング
 - ③ 鏡面精度 × x,z並進 & Roll回転
 - ④ 2つのビームスポットの高さズレ × Pitch回転
 - ⑤ Pitch傾き × Roll回転

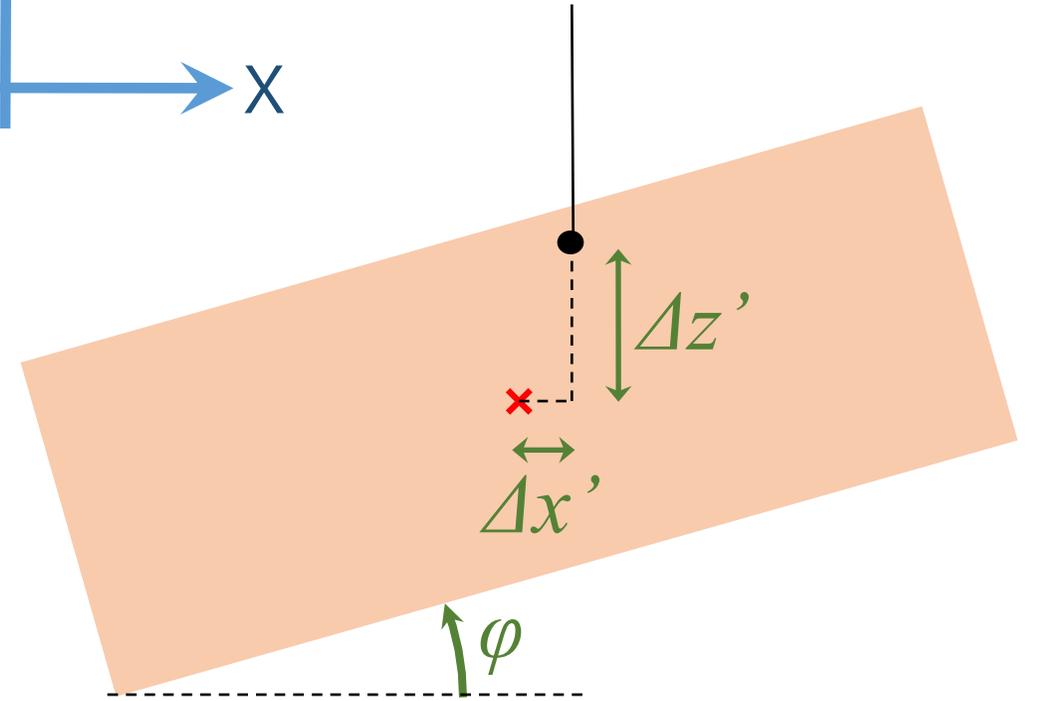
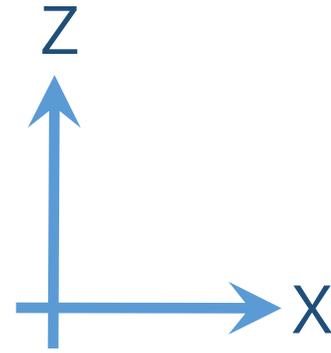


カップリング経路①：
懸架点と重心の水平位置ズレ

懸架点ズレ

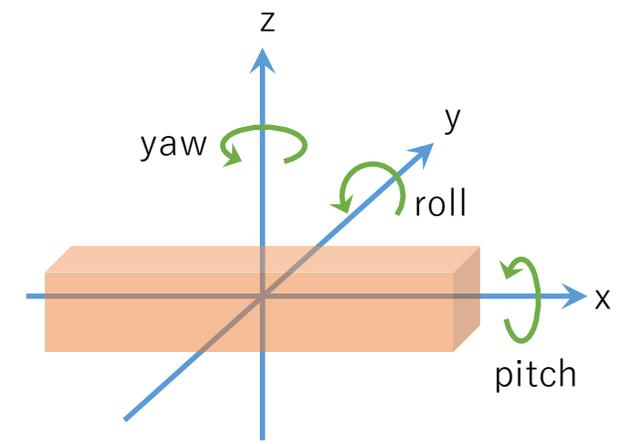


- 懸架点と試験マス重心のズレ



- ワイヤの弾性と釣合う位置まで傾く
(典型的には $\Delta x' \sim 10^{-3 \sim 4} \Delta x$ 程度)

懸架点ズレによるカップリング



地面振動y成分: $y_0 \rightarrow$ 試験マスYaw回転: θ_y の伝達関数

$$\frac{\tilde{\theta}_y}{\tilde{y}_0} = \frac{M (I_p \Delta x' - \varphi (I_y - I_p) \Delta z') \omega^4}{(\kappa_y - I_y \omega^2) (1 - \frac{l}{g} \omega^2) (Mg \Delta z' - I_p \omega^2)}$$

Yaw回転共振

並進振り子共振

Pitch回転共振

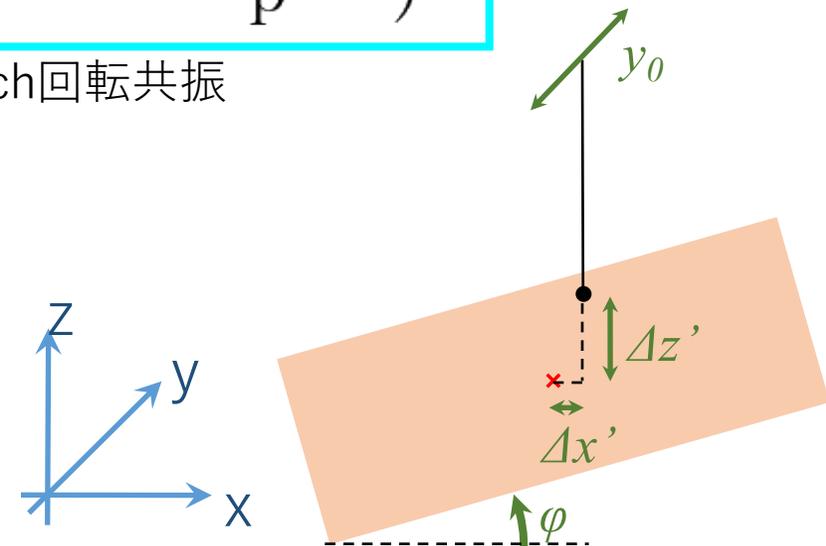
M : 質量

I : 慣性モーメント (p,yはそれぞれpitch,yaw)

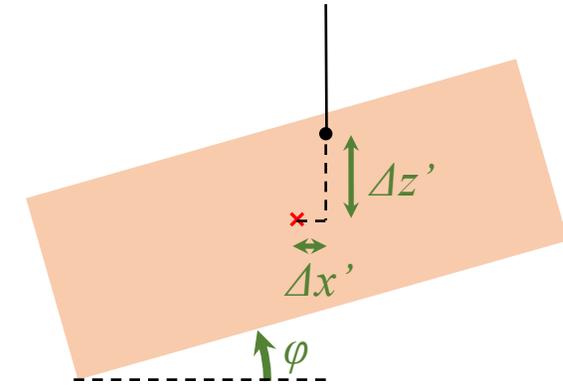
κ_y : ワイヤ弾性によるバネ定数(yaw)

l : ワイヤ長

g : 重力加速度



懸架点ズレによるカップリング経路

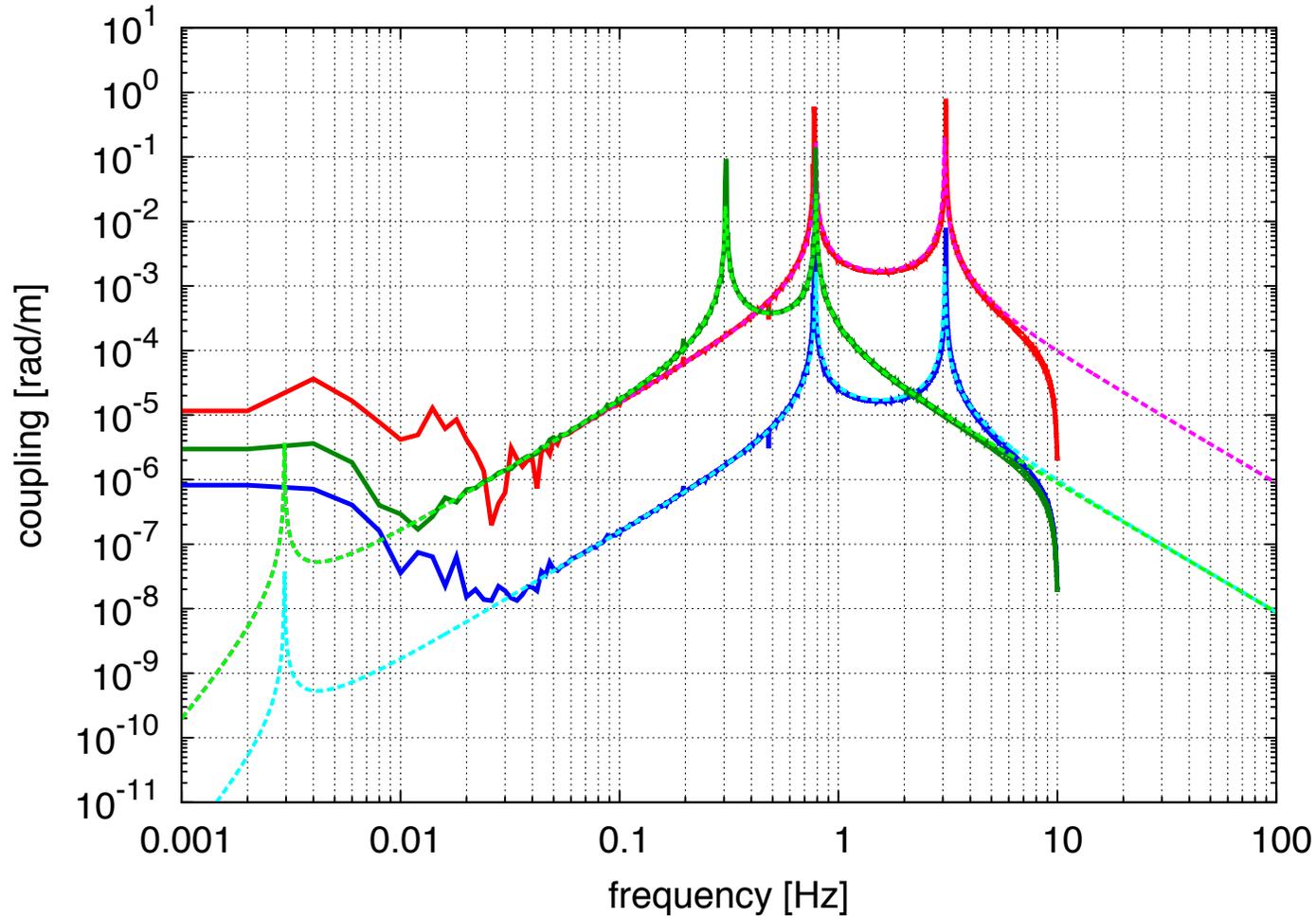


重心からずれた位置にワイヤの張力がかかることによるトルクの寄与

$$\frac{\tilde{\theta}_y}{\tilde{y}_0} = \frac{M (I_p \Delta x' - \varphi (I_y - I_p) \Delta z') \omega^4}{(\kappa_y - I_y \omega^2) (1 - \frac{l}{g} \omega^2) (Mg \Delta z' - I_p \omega^2)}$$

傾いたマスを振ることによりYaw回転が励起される寄与

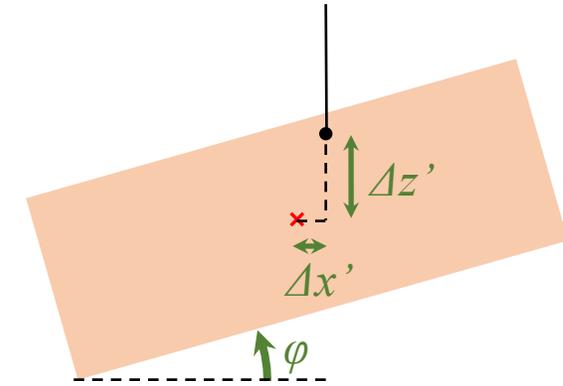
シミュレーションとの比較



SimMechanicsによる
シミュレーション結果と
ほぼ一致

異なる懸架点位置に対するカップリング
(実線：シミュレーション結果 点線：理論式)

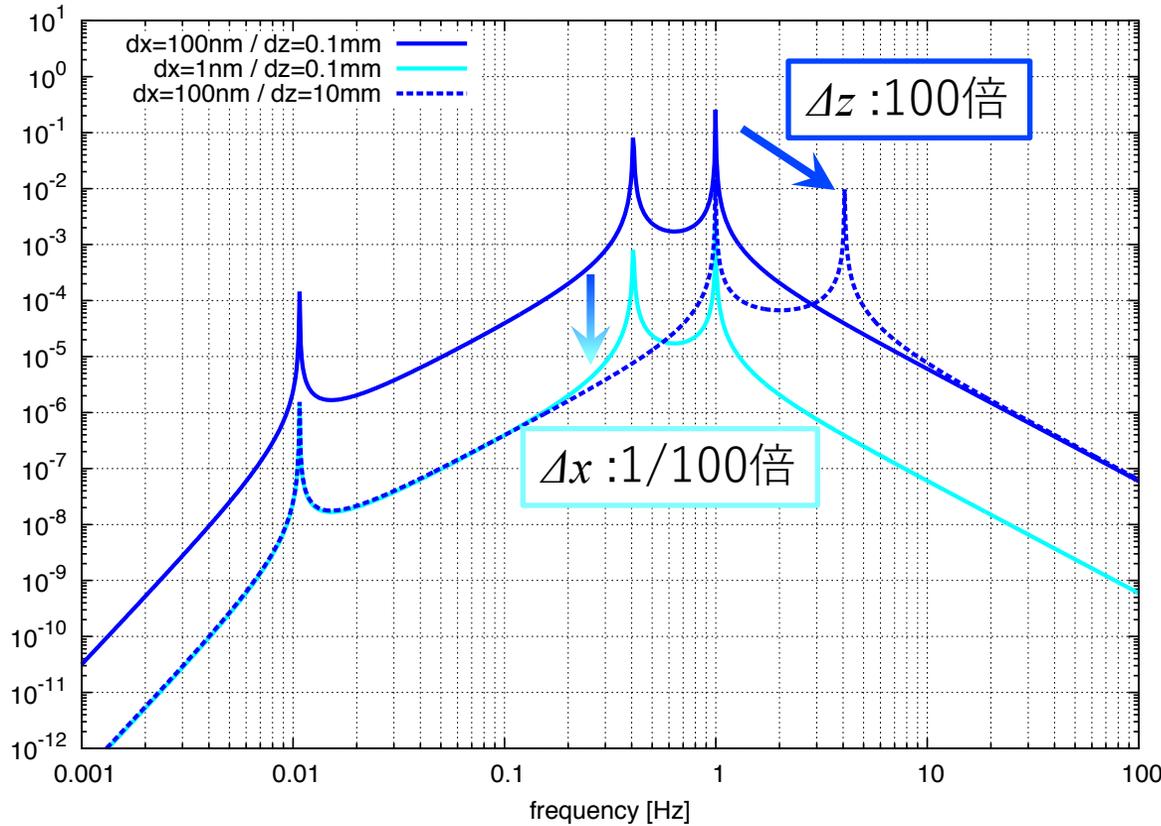
カップリング低減方法



$$\frac{\tilde{\theta}_y}{\tilde{y}_0} = \frac{M (I_p \Delta x' - \varphi (I_y - I_p) \Delta z') \omega^4}{(\kappa_y - I_y \omega^2) (1 - \frac{l}{g} \omega^2) (M g \Delta z' - I_p \omega^2)}$$

- (i) 懸架点と重心のズレ Δx を小さくする
- (ii) アクチュエートにより傾き φ を調整する
- (iii) 慣性モーメント I_y と I_p を等しくする

(i) 懸架点の位置調整



20cm試験マスの場合のカップリング

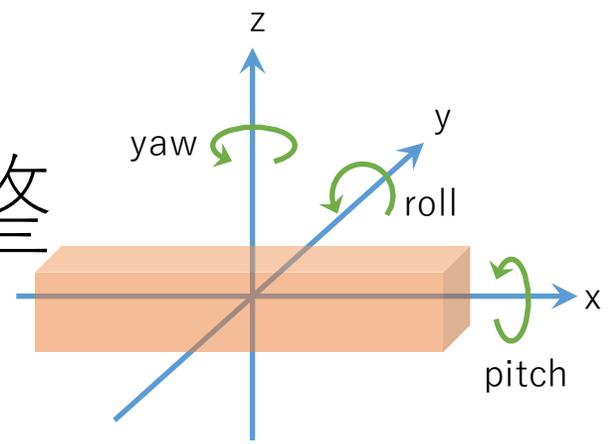
- カップリング@0.1Hz $\propto \Delta x / \Delta z$
- Δz が大きい方が Δx に要求される精度は小さくて済む
 $\Delta z=0.1\text{mm}$ のとき $\Delta x < 1\text{pm}$
 $\rightarrow \Delta z=10\text{mm}$ なら $\Delta x < 0.1\text{nm}$

※可動マスによる重心位置調整

$$\Delta x_{cm} = M_{cw} / M_{TM} \times \Delta x_{cw}$$

- 例：試験マス $M_{TM}=0.4\text{kg}$, 可動マス $M_{cw}=10\text{mg}$,
可動マス位置精度 0.1mm
 \rightarrow 重心位置精度： 2.5nm

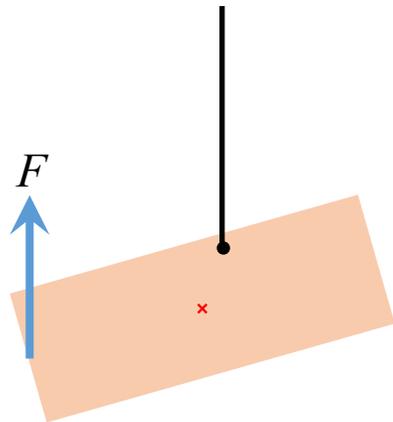
(ii) アクチュエートによる傾き調整



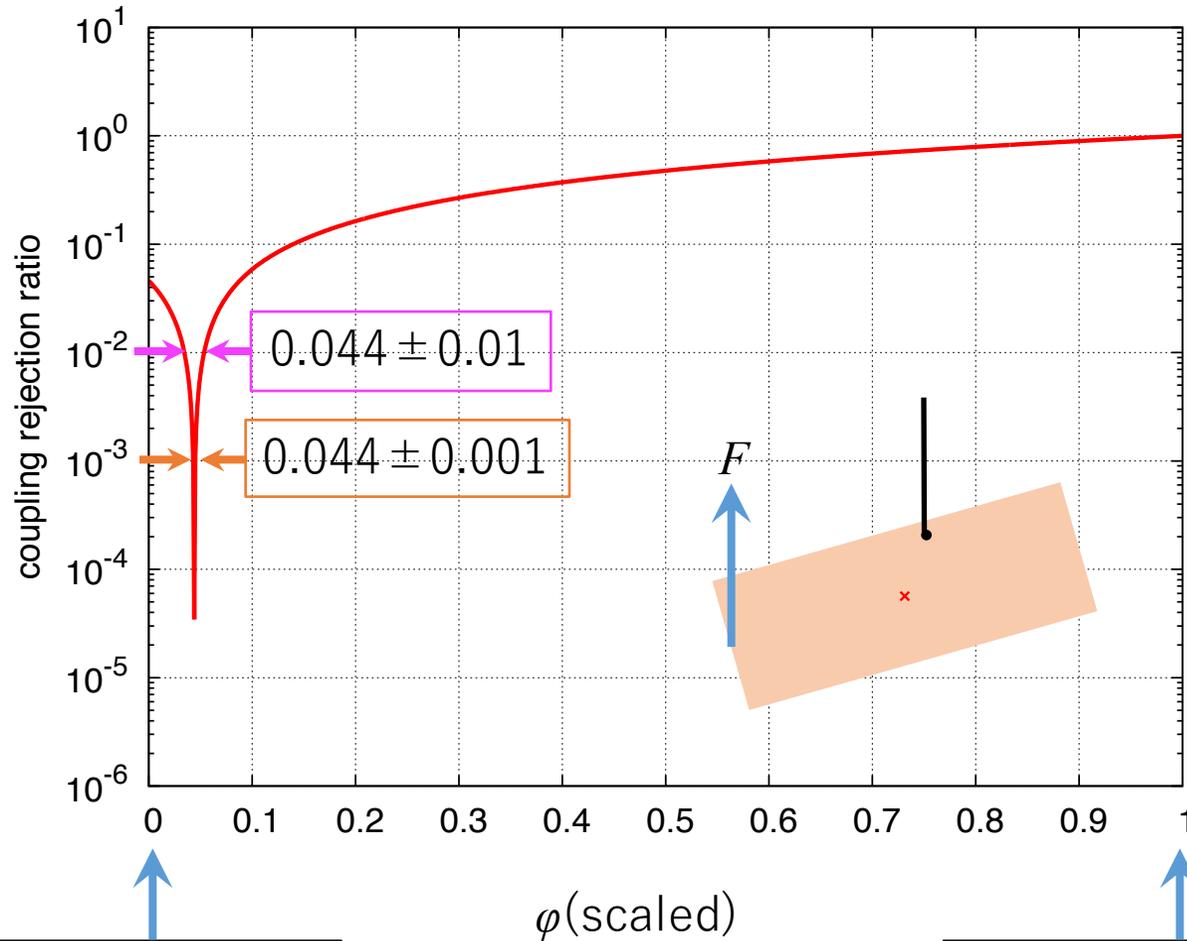
(カップリング伝達関数の別表現)

$$\frac{\tilde{\theta}_y}{\tilde{y}_0} = \frac{M (I_p \Delta x - \varphi I_y \Delta z) \omega^4}{(\kappa_y - I_y \omega^2)(Mg \Delta z - I_p \omega^2)(1 - \frac{l}{g} \omega^2)}$$

➡ φ の調整で2経路のカップリングを互いに打ち消すことが可能



傾き調整によるカップリングの低減



試験マス水平時

アクチュエート無し

水平に保つために必要な
アクチュエート力：**0.1 mN**
($M=0.4\text{kg}$, $\Delta x=1\mu\text{m}$)

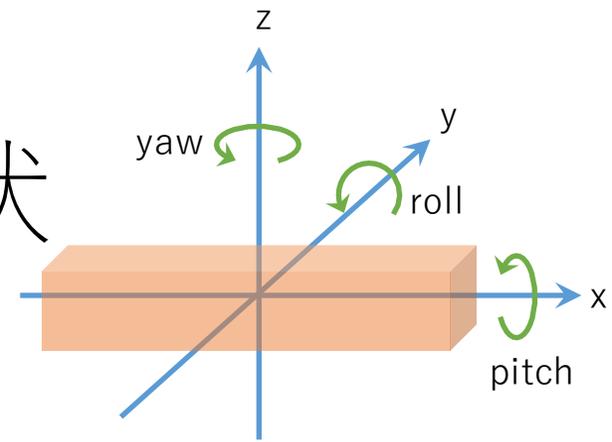


アクチュエート力精度と
カップリング低減率：

力精度：**1 μN** → カップリング： 10^{-2} 倍

力精度：**0.1 μN** → カップリング： 10^{-3} 倍

(iii) カップリングの小さいマス形状



- 地面振動y成分に対して→ I_p と I_y を合わせる



地面振動x成分も考慮すると

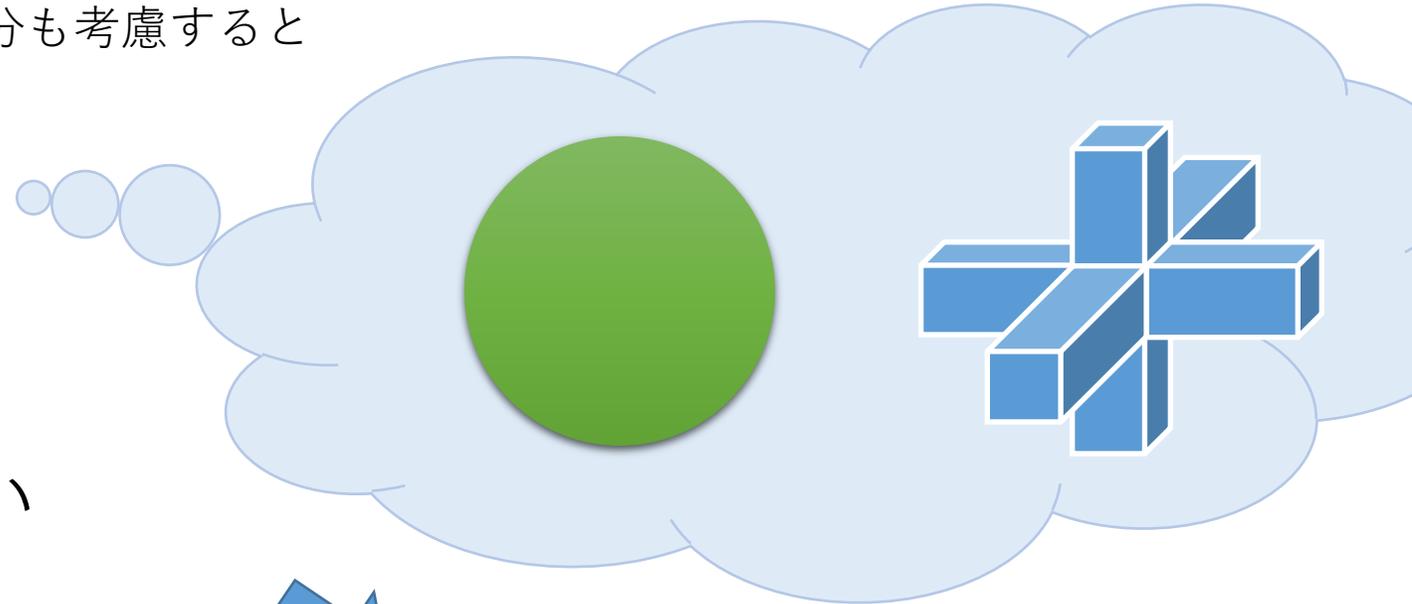
$$I_y = I_p = I_r$$



重力波に感度を持たない

四重極モーメント

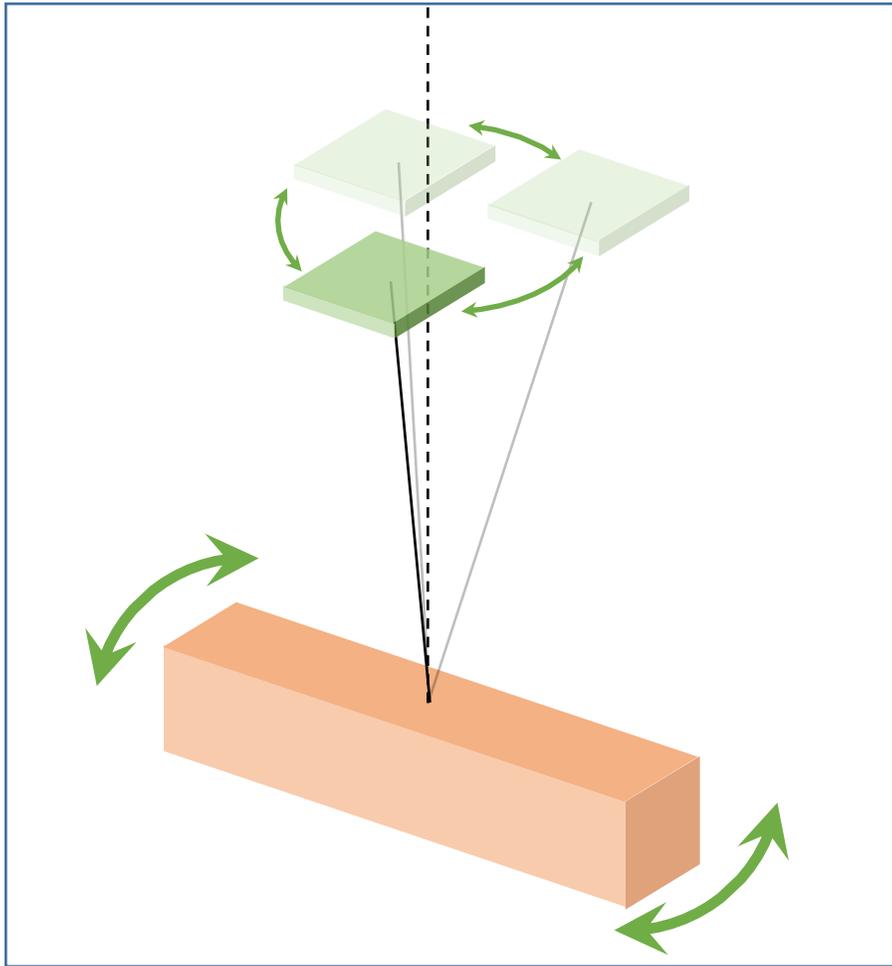
$$q_{\times} = - \int \rho(x^2 - y^2) dV = I_p - I_r$$



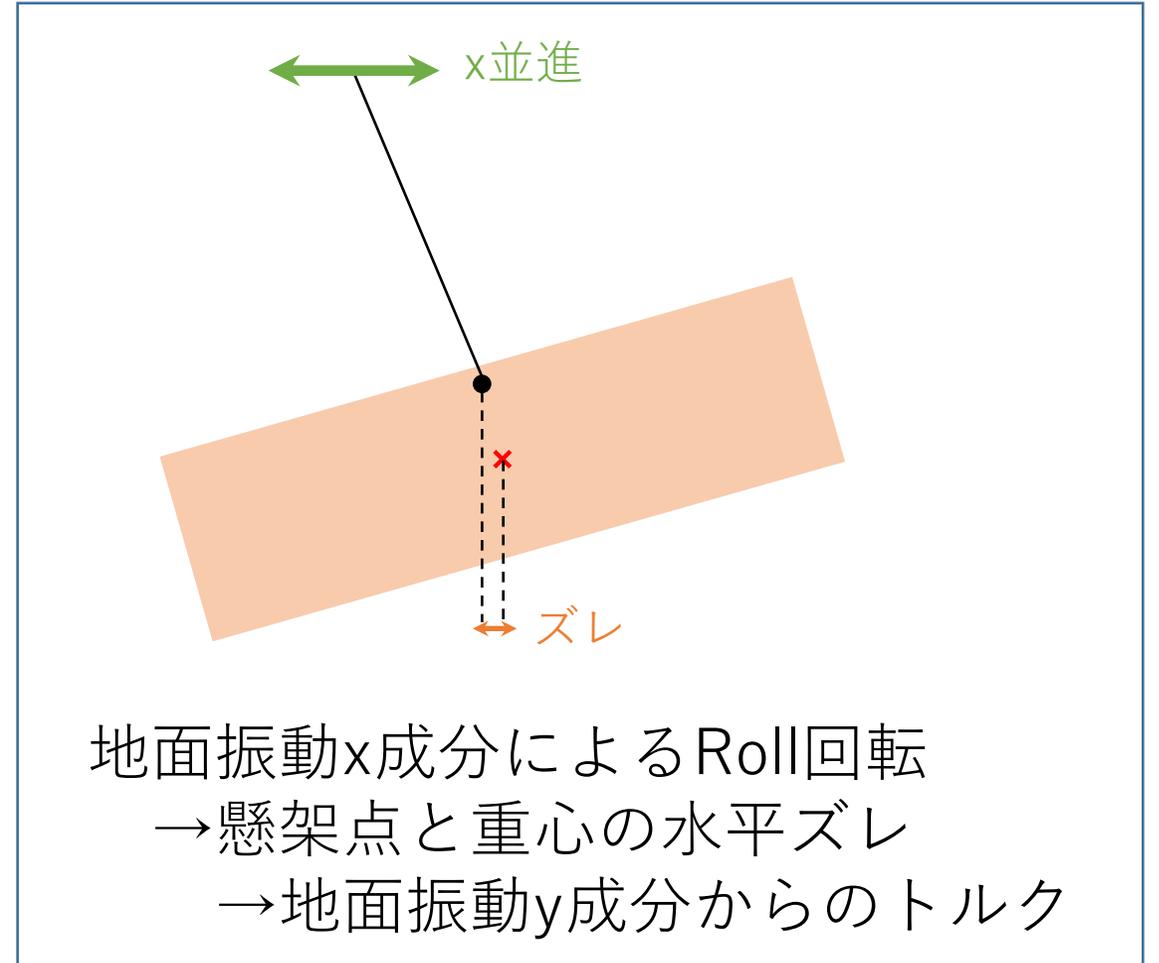
逆二乗則検証実験など

カップリング経路②：
地面振動xy成分の合計の寄与

x 並進 + y 並進

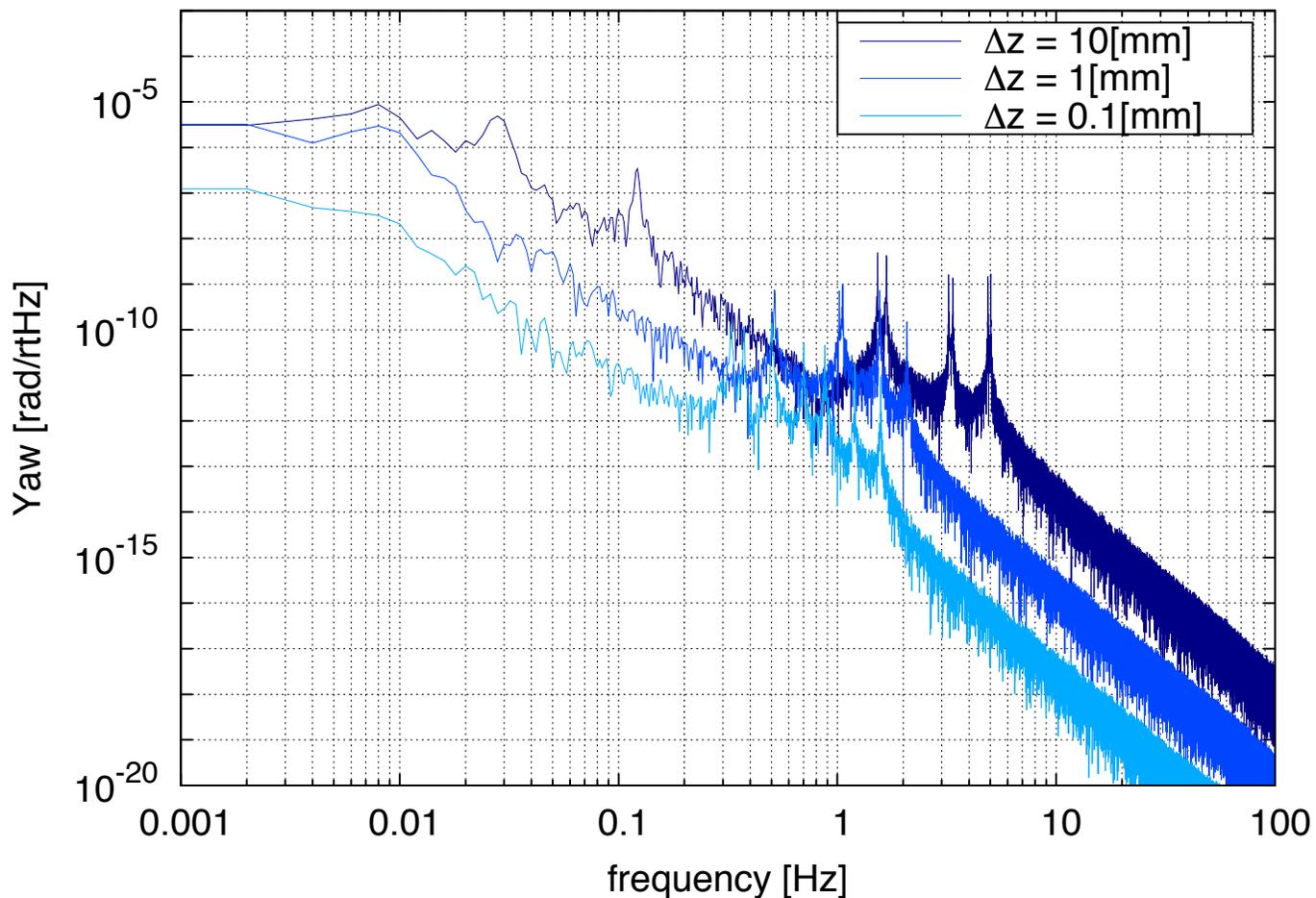


又は



- 懸架点が重心の真下にある場合 ($\Delta x = \Delta y = 0$) でも存在する

SimMechanicsによるシミュレーション



Yaw回転のパワースペクトル密度

（仮定した地面振動：
 $\begin{cases} 10^{-5} & [\text{m/rtHz}] \quad (f < 0.1 \text{ Hz}) \\ 10^{-7} \times f^{-2} & [\text{m/rtHz}] \quad (f > 0.1 \text{ Hz}) \end{cases}$

カップリング $\propto (\Delta z)^{1 \sim 2}$
→ 懸架点は低いほうが良い

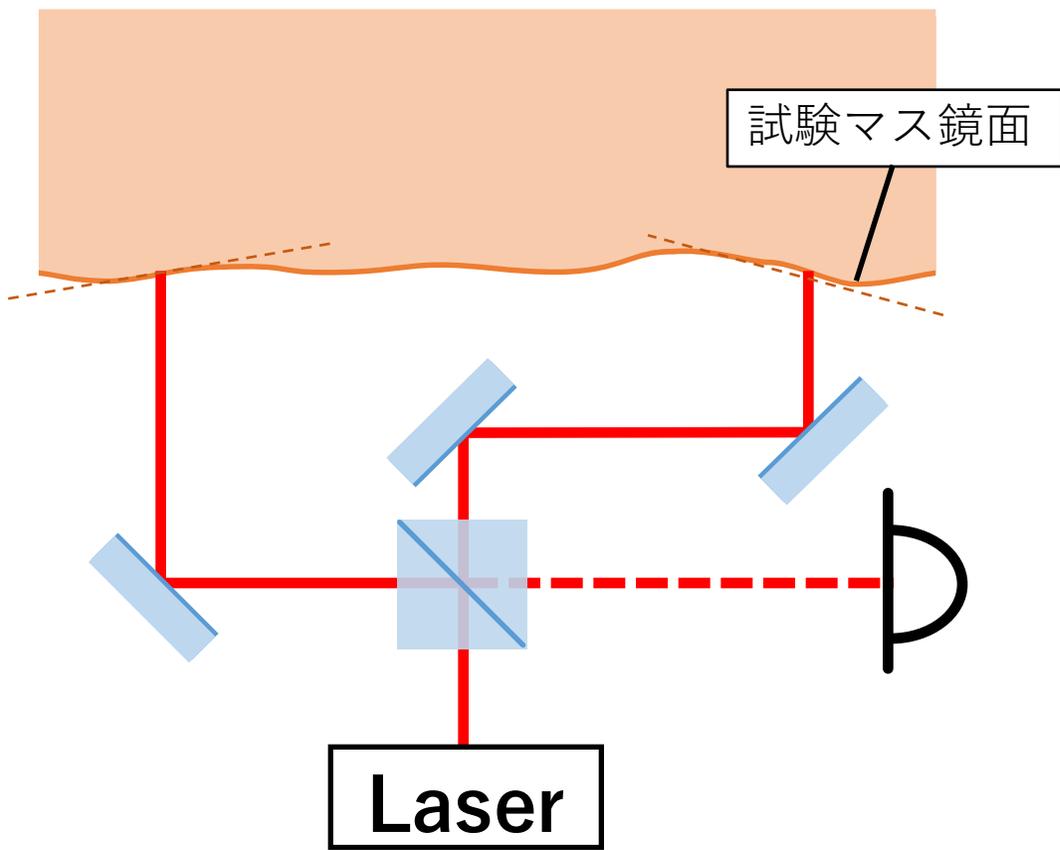
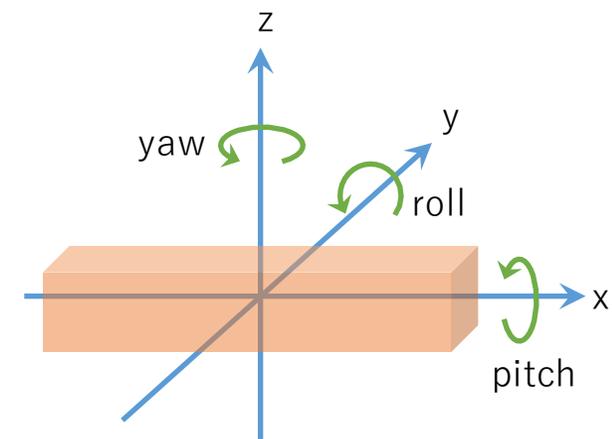
※試験マスの傾き制御により
カップリングが低減できる可能性

$\theta_y < 10^{-15} [\text{rad/rtHz}]$ のためには傾き変動を
7桁抑える必要がある ($\Delta z = 10 \text{ mm}$ の場合)

カップリング経路③：

鏡面精度 × x,z並進 & Roll回転

鏡面精度 × x,z並進 & Roll回転



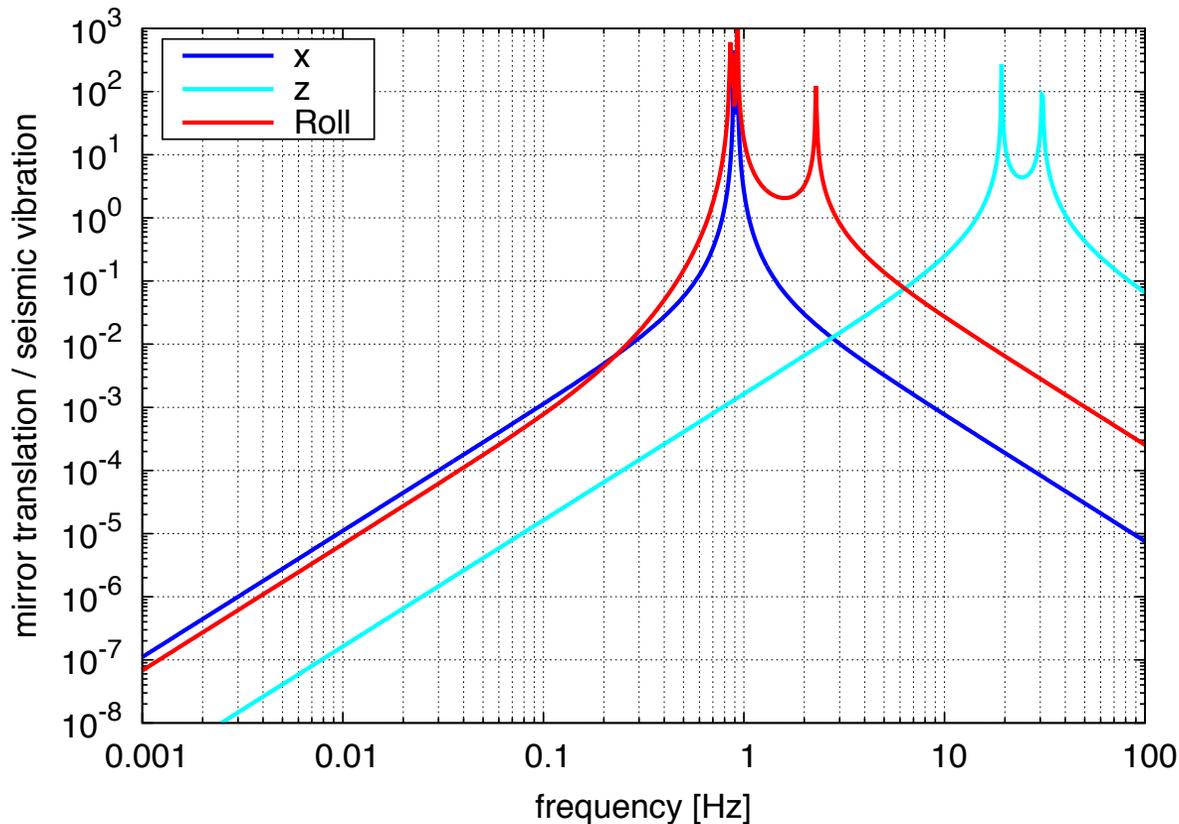
2つのビームスポットでの鏡面のローカルな傾きが異なる



鏡面と光学系の相対並進 → 基線長変動

x並進, z並進, Roll回転

鏡面の並進 (x,z並進 & Roll回転)



$10^{-3}[\text{m/m}] @0.1\text{Hz}$

制御を行う場合、そのゲイン倍だけ相対変動が減少しカップリングも小さくなる

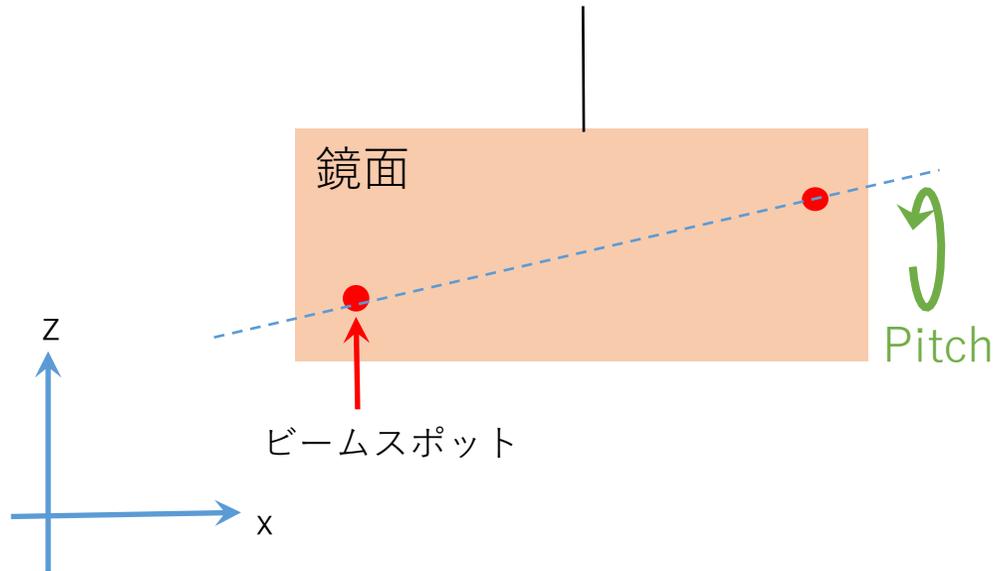
$$\theta_y = (\text{鏡面非平行度}) \times (\text{鏡面並進}) / (\text{試験マス長}) \div (\text{制御ゲイン})$$

例： $\theta_y < 10^{-15}[\text{rad/rtHz}]$ のためには
(鏡面非平行度) \div (制御ゲイン) $< 10^{-8}$

地面振動→鏡面相対並進の伝達関数
(青：x並進、水色：z並進、赤：Roll回転)

カップリング経路④：
ビーム高さズレ × Pitch回転

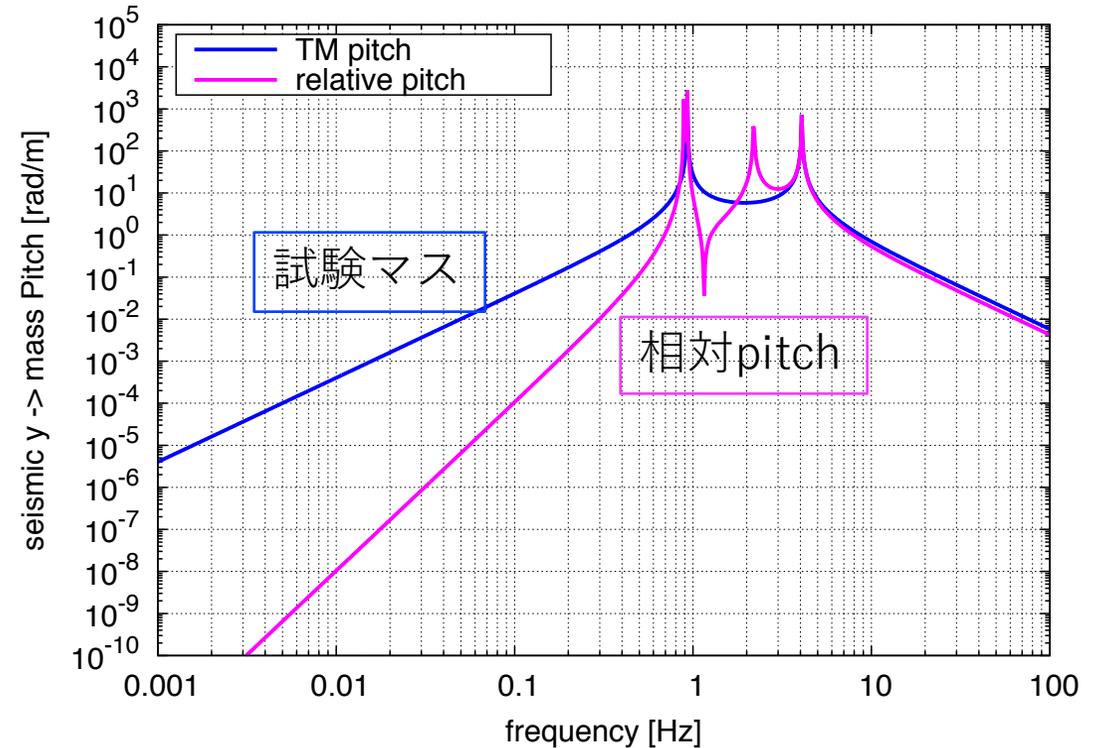
ビームスポット高さズレ × Pitch回転



$$\theta_y = (\text{ビームスポット傾き}) \times \text{相対}\theta_p$$

相対 $\theta_p \sim 10^{-9}$ [rad/rtHz] @0.1Hz

例： $\theta_y < 10^{-15}$ [rad/rtHz] のためには
(ビームスポット傾き) $< 10^{-6}$ [rad]



地面振動により励起される θ_p
(青：試験マス、ピンク：相対)

SimMechanicsによるシミュレーション

地面振動によるOpticalBenchの振動のためビームスポットの高さが変動する寄与もある（非線形なカップリング）

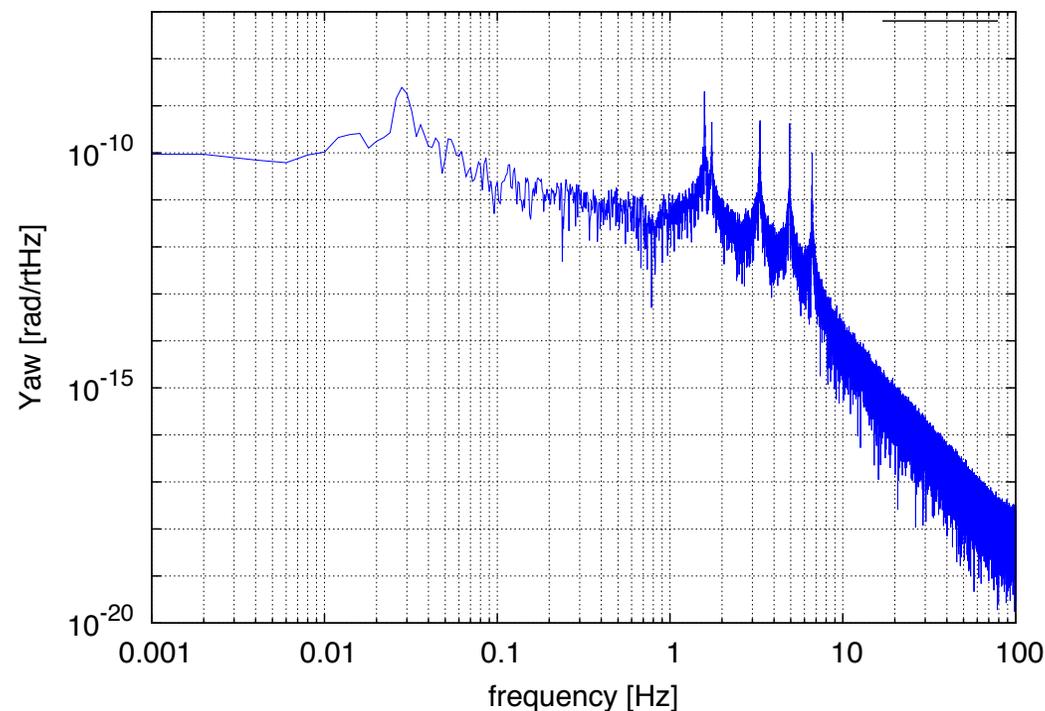
→ シミュレーション

$$\theta_y \sim 10^{-11} [\text{rad/rtHz}] @ 0.1 \text{ Hz}$$

※Pitchの同相雑音除去を考慮すると2桁程度下がるか



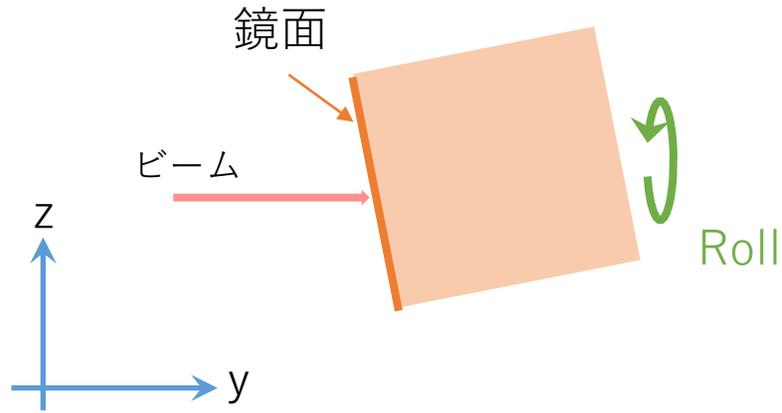
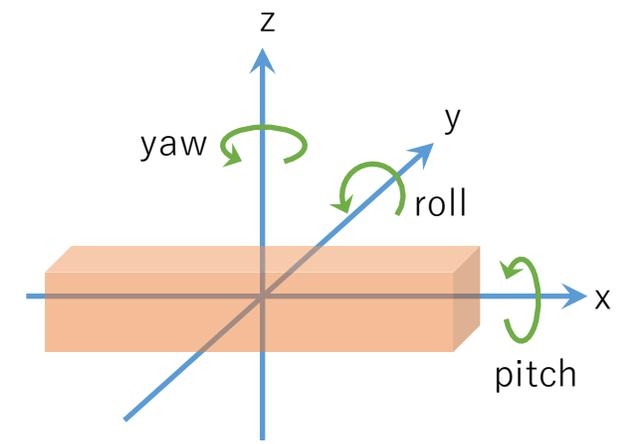
制御による相対Pitch回転の抑制が必要



試験マスのPitch回転とOpticalBenchのRoll回転を与えた場合の干渉計信号(Pitchの同相雑音除去なし)

カップリング経路⑤：
試験マスPitch傾き × Roll回転

試験マスPitch傾き × Roll回転

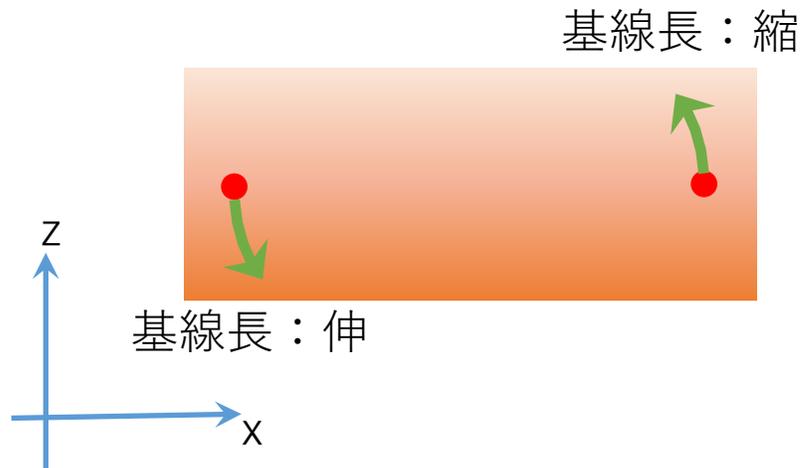


$$\theta_y = (\text{試験マスPitch傾き}) \times \text{相対}\theta_r$$

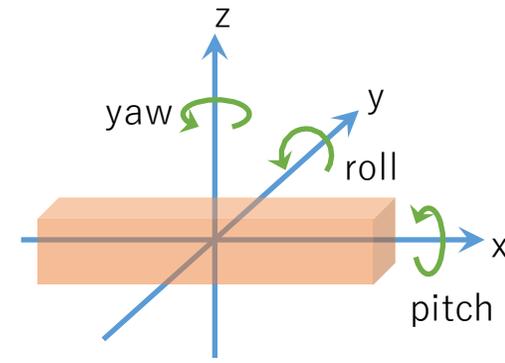
鏡面精度によるカップリングと同様
(Pitch傾き ⇔ 鏡面精度)



鏡面精度と同程度まで試験マス傾きを
抑える必要がある (懸架点調整・制御)



カップリング経路と対策まとめ



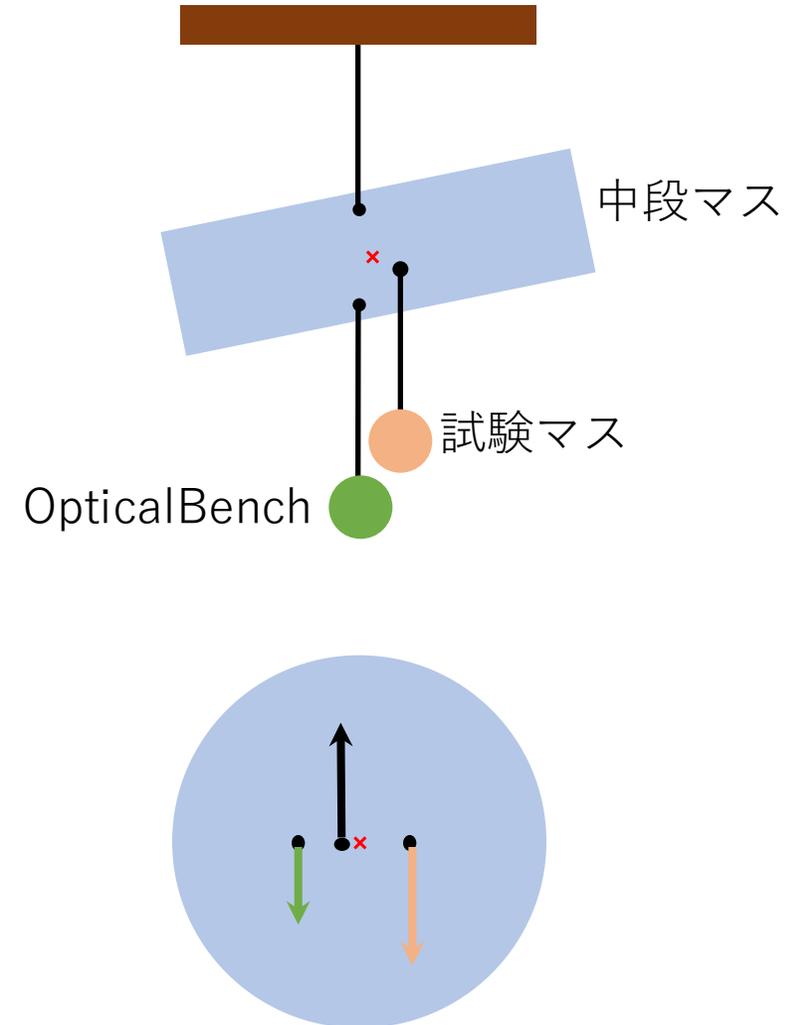
- 並進地面振動→試験マスYaw回転
 - ① 懸架点と重心の水平ズレ
 - 重心調整、アクチュエートによる傾き調整
 - ② 地面振動xy成分の合計の寄与
 - 懸架点を低くする、制御による試験マス傾きの抑制
- Yaw回転以外が基線長変動を生むカップリング
 - ③ 鏡面精度 × x,z並進 & Roll回転
 - 一体研磨、制御による鏡面並進の抑制
 - ④ 2つのビームスポットの高さズレ × Pitch回転
 - ビームスポット高さ調整、制御による相対Pitch回転の抑制
 - ⑤ Pitch傾き × Roll回転
 - 重心調整、制御による相対Roll回転の抑制

中段マス由来のカップリング

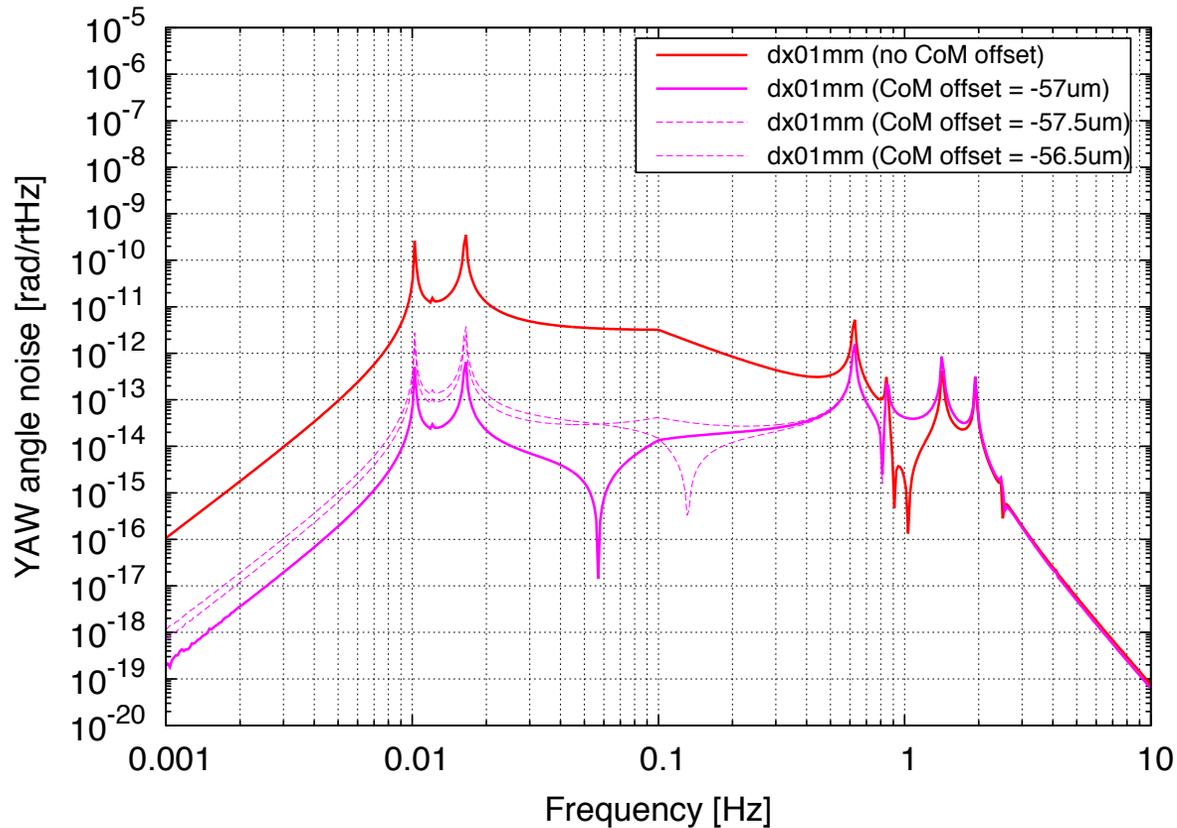
中段マスのカップリング経路

基本的に試験マスのカップリングと同じ

- 傾いた状態で振ることによるYaw回転
- ワイヤから受ける張力によるトルク
中段マス並進, Pitch回転→上下段への振動伝達時の反作用
理想的には打ち消すが、ワイヤ長・ワイヤ曲げ弾性・懸架点高さの違いにより振動伝達に差が生まれトルクは残る



カップリングと重心調整



中段マス懸架点ズレに由来する試験マスYaw回転

~ 10^{-12} [rad/rtHz] @0.1Hz

重心位置の調整により0.1Hzでの
カップリングを2~3桁低減することが可能

(異なるカップリング経路の
打消し合いか?)

必要な重心位置精度は~ $1\mu\text{m}$ 程度

中段マス回転から試験マス・
OpticalBench回転への伝達の
同相雑音除去によりさらに2桁程度低減

並進防振

Magnetically assisted torsion pendulum

Magnetically assisted torsion pendulum

鏡の並進を共振周波数 $\sim 1\text{mHz}$ で防振

Eric Thrane et al., 2015 (<http://arxiv.org/abs/1512.03137>)

Toward terrestrial detection of millihertz gravitational waves with magnetically assisted torsion pendulums

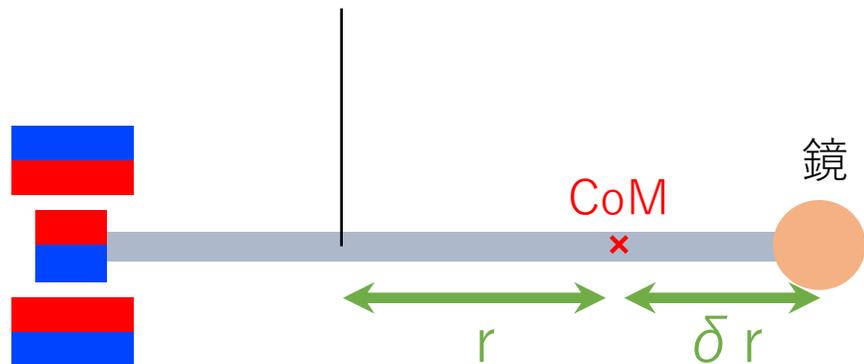
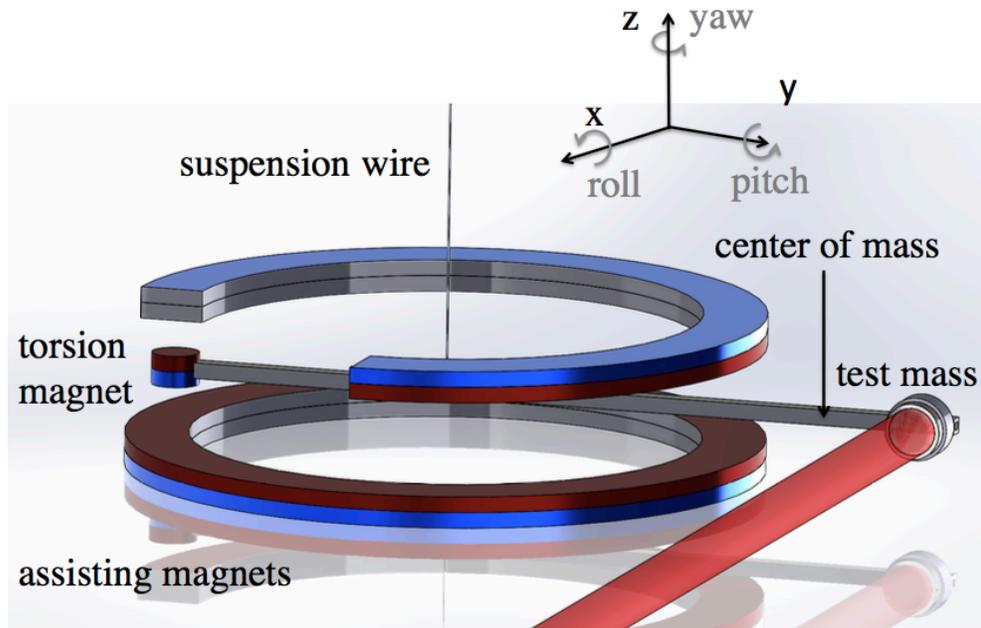
Eric Thrane,^a R. P. Anderson, Yuri Levin, and L. D. Turner

School of Physics and Astronomy, Monash University, Clayton, Victoria 3800, Australia

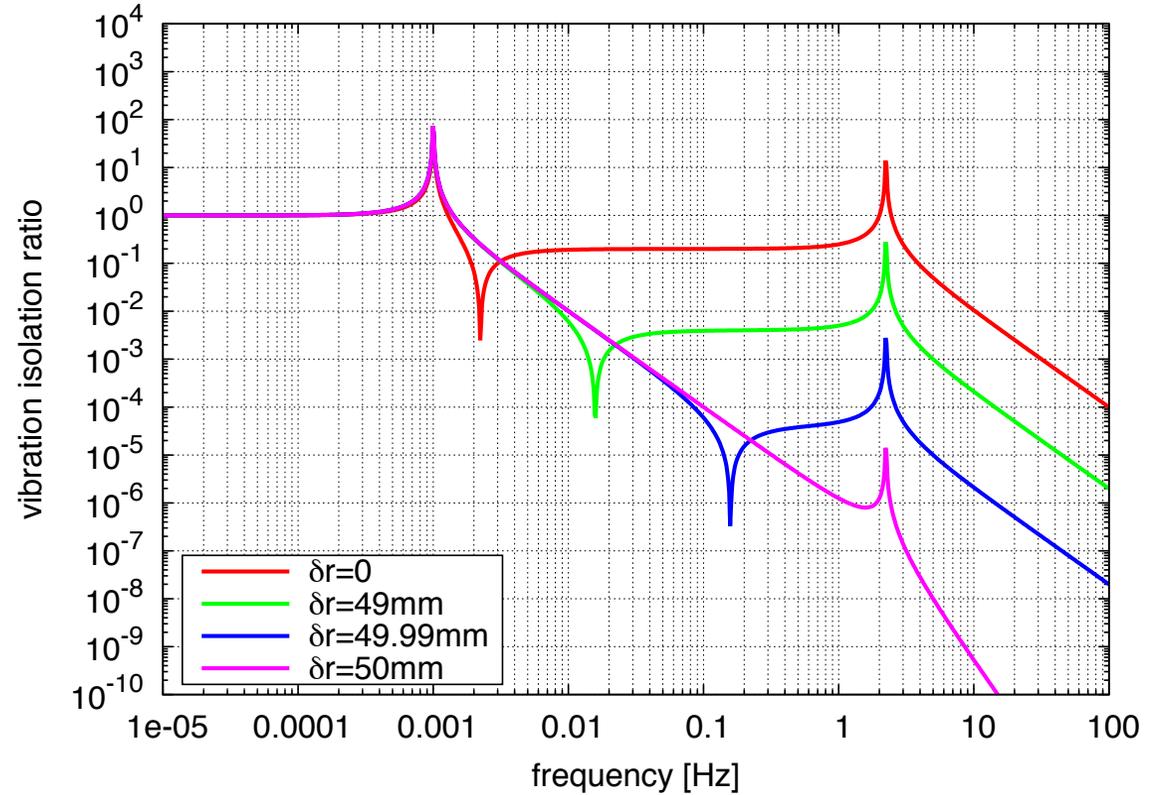
(Dated: December 11, 2015)

Current terrestrial gravitational-wave detectors operate at frequencies above 10 Hz. There is strong astrophysical motivation to construct low-frequency gravitational-wave detectors capable of observing $10\text{--}10^4$ mHz signals. However, there are numerous technological challenges. In particular, it is difficult to isolate test masses so that they are both seismically isolated and freely falling under the influence of gravity at mHz frequencies. We propose a Magnetically Assisted Gravitational-wave Pendulum Intorsion (MAGPI) suspension design for use in low-frequency gravitational-wave detectors. We construct a noise budget to determine the required specifications. In doing so, we identify what are likely to be a number of limiting noise sources for terrestrial mHz gravitational-wave suspension systems. We conclude that it may be possible to achieve the required seismic isolation and coupling to gravitational waves necessary for mHz detection, though, there are significant

構成

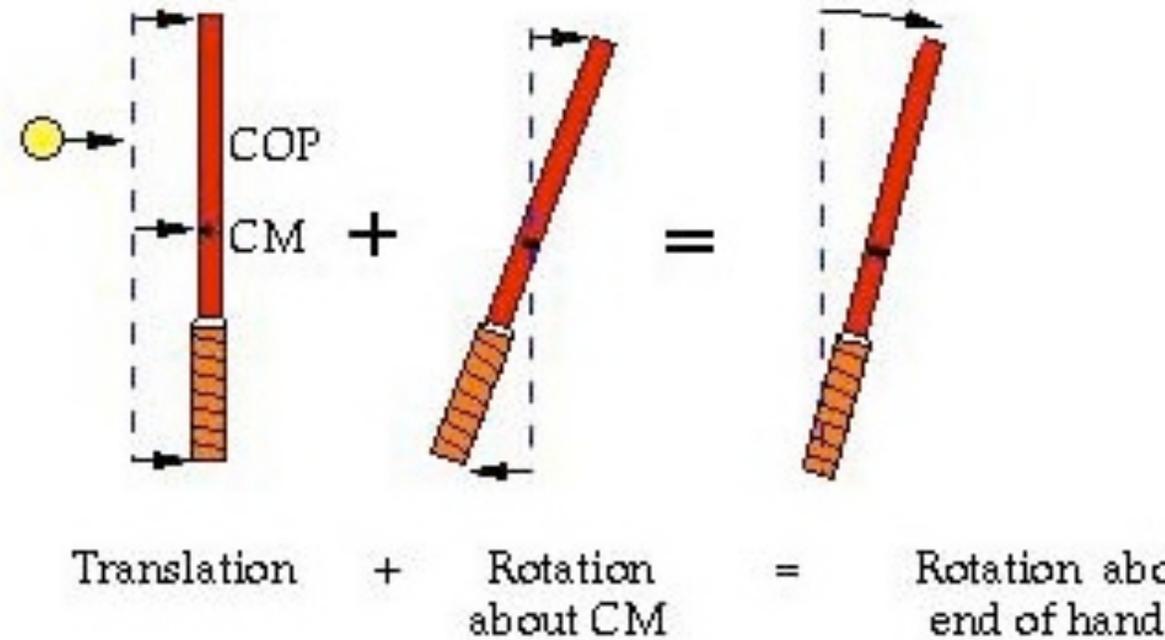


地面振動x成分 → 鏡のx並進 の伝達関数
($M=5\text{kg}$, $r=200\text{mm}$)



0.1Hzでの防振比を損なわないためには
 δr を0.01mm程度の精度で合わせる必要がある

Center of percussion

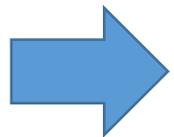


ある点 P_1 に力を加える



重心を挟んで反対側のある点 P_2 で
並進と重心周り回転がちょうど打ち消す

点 P_1 (または P_2) をCenter of Percussion(CoP)と呼ぶ (※ P_1 と P_2 は共役)



P_1, P_2 に懸架点と鏡を配置

雑音源

強力磁石による傾きの支持を行うため、

- eddy current散逸による熱雑音
- 磁石による磁場雑音

END