

# 光学浮上鏡の可能性

道村唯太

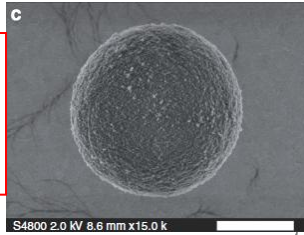
東京大学大学院理学系研究科物理学専攻

安東研究室 博士課程2年

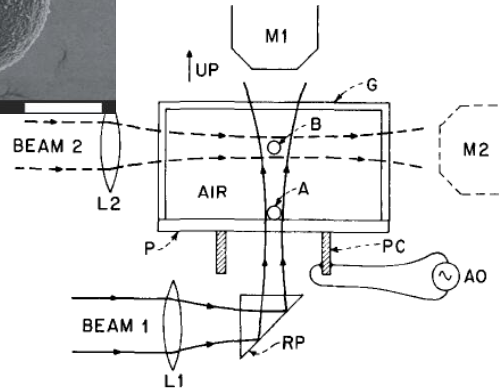
# 光学浮上が熱い

sensitivity(m/rHz)

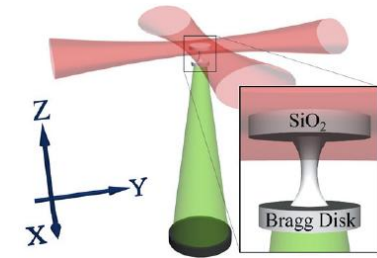
Y. Arita+: [Nature Communications 4, 2374 \(2013\)](#)  
tweezer / 4.4um / 0.1ng? / 40K, 1e-10 m/rHz, gyroscope



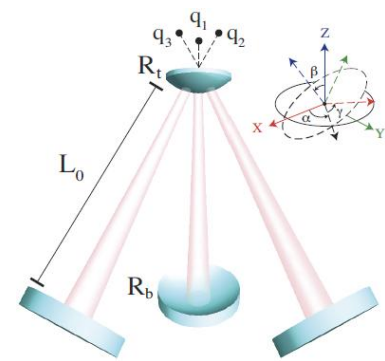
A. Ashkin+: [Appl. Phys. Lett. 19, 283 \(1971\)](#)  
tweezer / 20um / 10ng? / ?? m/rHz



S. Singh+: [PRL 105, 213602 \(2010\)](#)  
cavity+tweezer / 60um / 40ng / 1e-10m/rHz

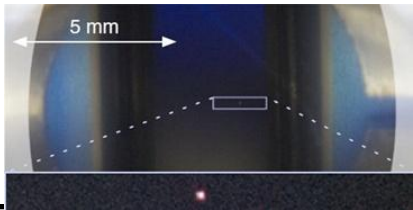


G. Guccione+: [arXiv:1307.1175](#)  
cavity / 2mm / 0.3mg / ?? m/rHz



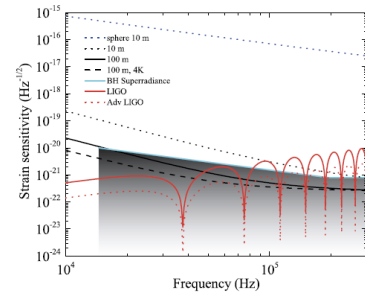
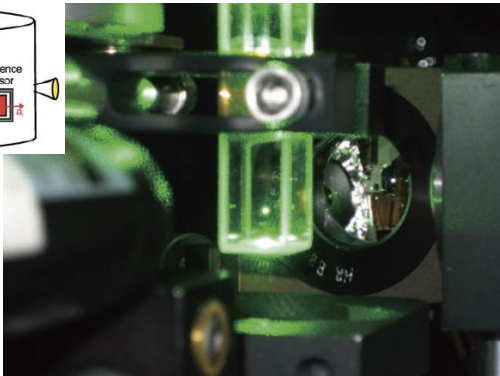
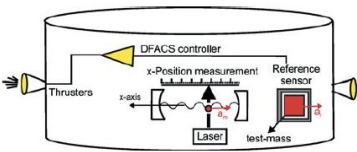
mass scale

N. Kiesel+: [PNAS 110, 14180 \(2013\)](#)  
cavity / 0.15um / 10fg? / 64K, 4e-12 m/rHz

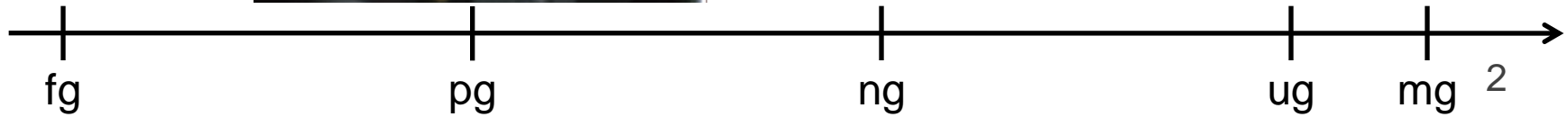


A. Arvanitaki, A. A. Geraci : [PRL 110, 071105 \(2013\)](#)  
cavity / 0.2~75um / fg~pg / ~1e-14m/rHz, GW

R. Kaltenbaek+ : [Experimental Astronomy 34, 123 \(2012\)](#)  
cavity / 0.1um / 10fg? / ~1e-12m/rHz?, MAQRO

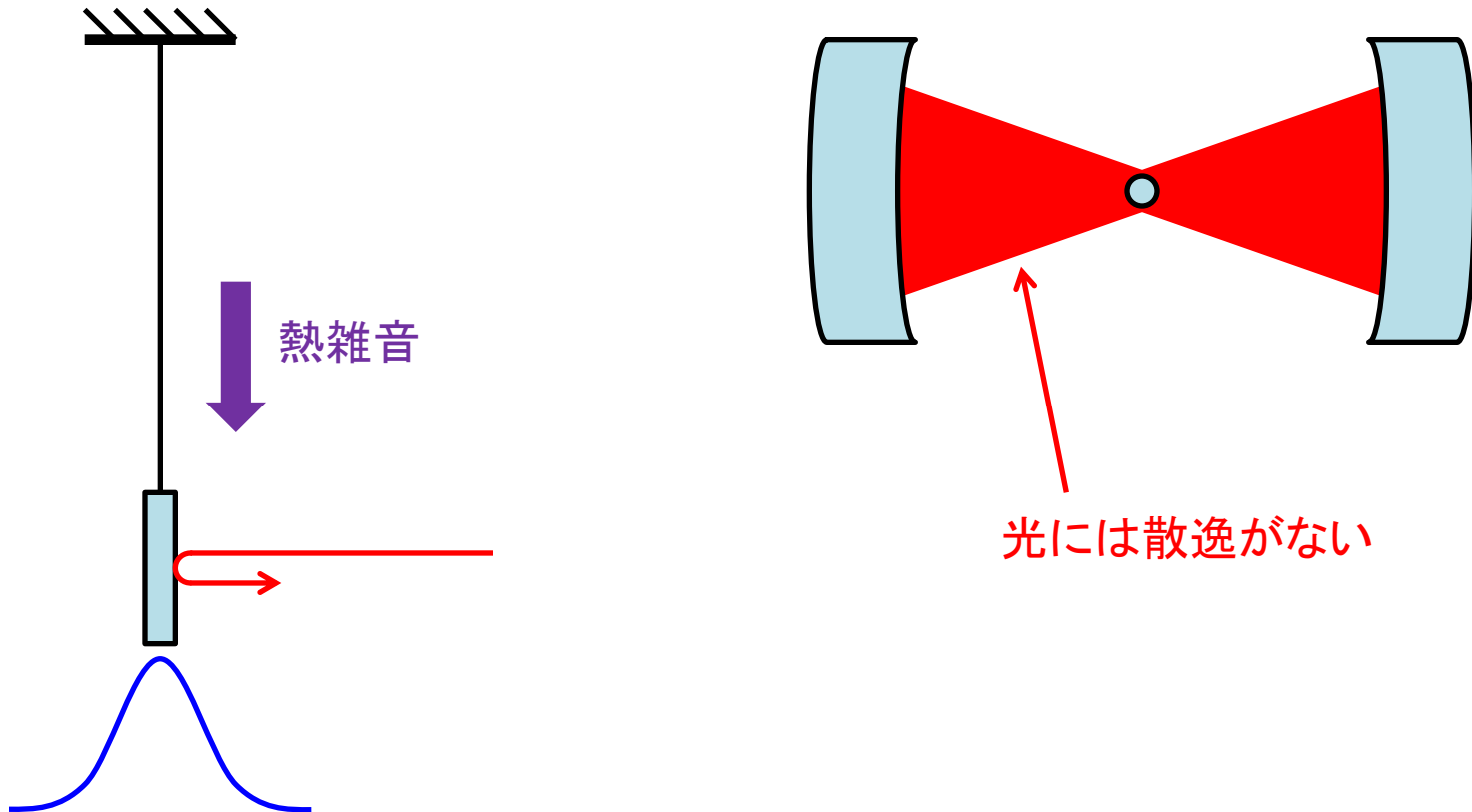


T. Li+: [Science 328, 1673 \(2010\)](#)  
T. Li+: [Nature Physics 7, 527 \(2011\)](#)  
tweezer / 1um / 1pg / 1.5mK, 1e-13 m/rHz, Brownian velocity



# 光学浮上の利点

- 機械的接点がないので  
熱的デコヒーレンス、熱雑音の影響が小さい  
振動周波数を自由に変えられる



# 光学浮上の応用先

- 古典力学と量子力学を繋ぐモデルの検証  
R. Penrose: [Gen. Rel. Grav. 28, 1572 \(1996\)](#)  
A. Bassi+: [Rev. Mod. Phys. 85, 471 \(2013\)](#)
- 重力デコヒーレンスの観測  
R. Kaltenbaek+: [Experimental Astronomy 34, 123 \(2012\)](#)
- 巨視的量子現象  
エンタングルメント、Schrödingerの猫 etc.
- 超高精度力センサ( $\sim 10^{-20}$  N/rtHz)  
重力逆二乗則の検証、Casimir力  
A. A. Geraci+: [PRL 105, 101101 \(2010\)](#)  
重力波検出  
A. Arvanitaki, A. A. Geraci: [PRL 110, 071105 \(2013\)](#)
- 量子情報的な応用(回転の自由度を利用)

# 目次

- 先行研究紹介
- 鏡の光学浮上実験提案
  - 光学浮上の安定性計算
  - 目標
  - 実験装置概要
  - 予想感度
  - 必要な物品
  - スケジュール
  - 懸念事項
  - まとめ

# 光学浮上の安定性計算方法

- まずは本当に安定に浮くのか、その条件は何かの計算が必要
- 浮上鏡の微小変動(6自由度)に対して力やトルクがどう変化するか調べる

$$\begin{array}{l} \text{force} \\ \text{vector} \\ \text{torque} \\ \text{vector} \end{array} \begin{pmatrix} d\mathbf{F} \\ d\mathbf{N} \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} d\mathbf{x} \\ d\boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}$$

displacement vector  
tilt vector

- 運動方程式

$$M \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \ddot{\boldsymbol{\alpha}} \end{pmatrix} = -K \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{pmatrix}$$

の安定性を判定し、安定ならOK

# 記号の定義

- FPを表す  $j = 1, 2, 3, \dots$

- 浮上鏡に当たる点  $(r_j, \phi_j)$

- 浮上鏡曲率半径  $R$   
下に凹で正

- 共振器長  $L_j$

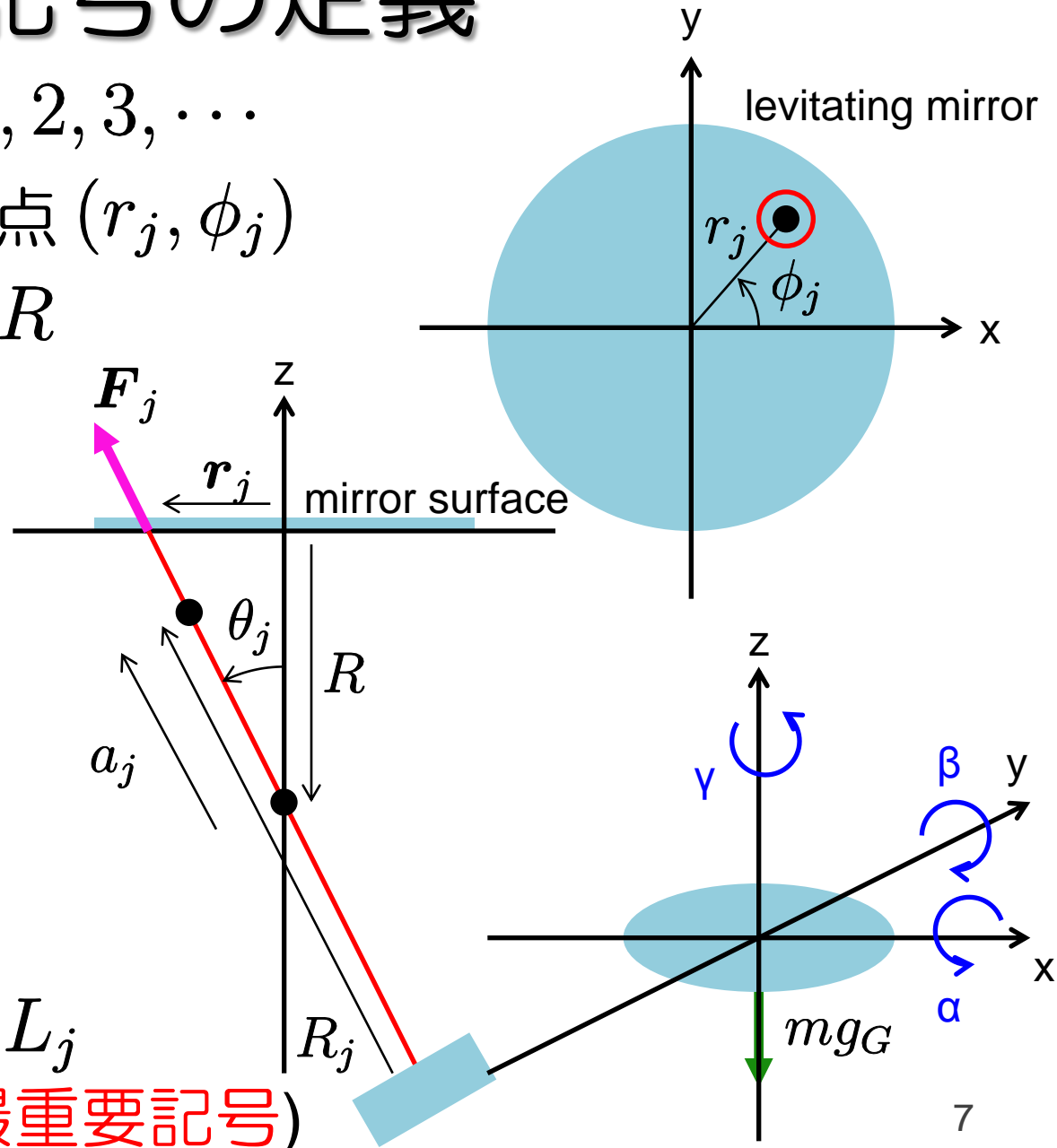
- 輻射圧力

$$F_j = \frac{2P_{\text{circ},j}}{c}$$

- 浮上鏡→下鏡の  
曲率中心間距離

$$a_j = R_j + R - L_j$$

(上向きで正、**最重要記号**)



# カ/トルクのつりあい

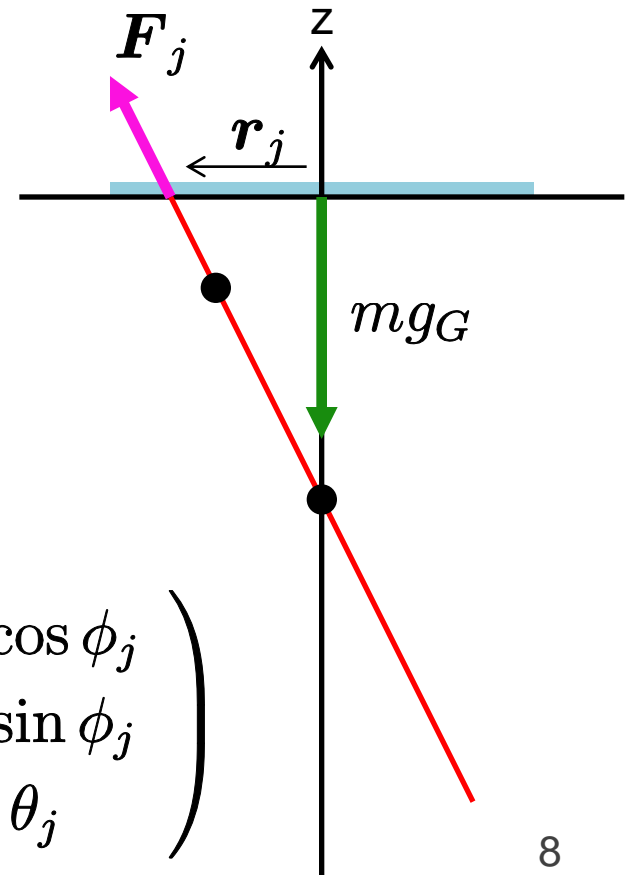
- 独立な等式は下記の3つのみ(力のつり合いがとれたらトルクのつり合いもとれる)

$$\sum_j F_j \cos \theta_j = mg_G$$

$$\sum_j F_j \sin \theta_j \cos \phi_j = 0$$

$$\sum_j F_j \sin \theta_j \sin \phi_j = 0$$

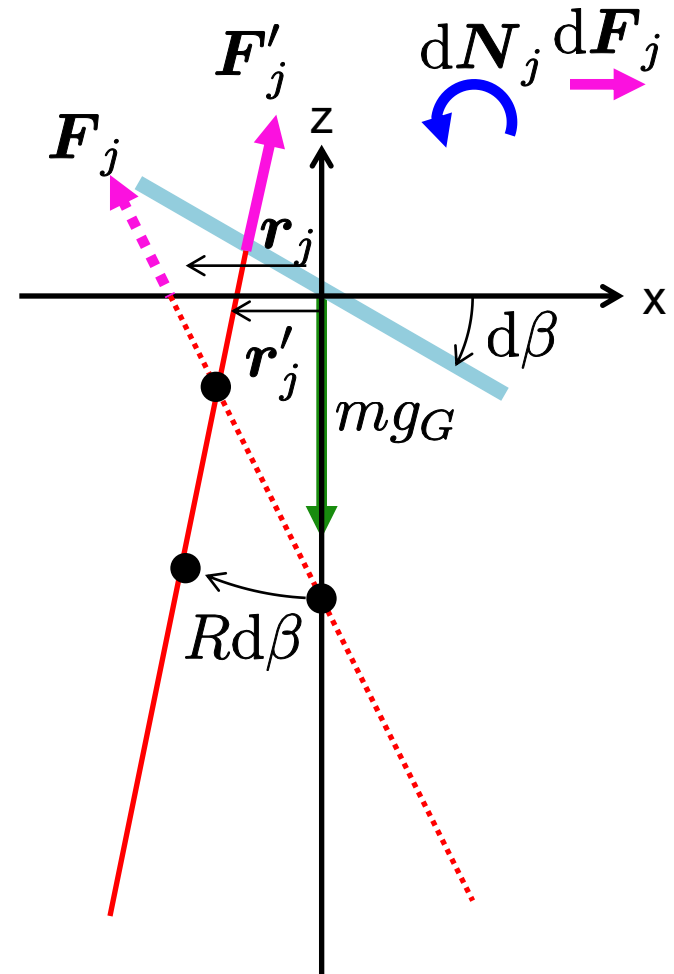
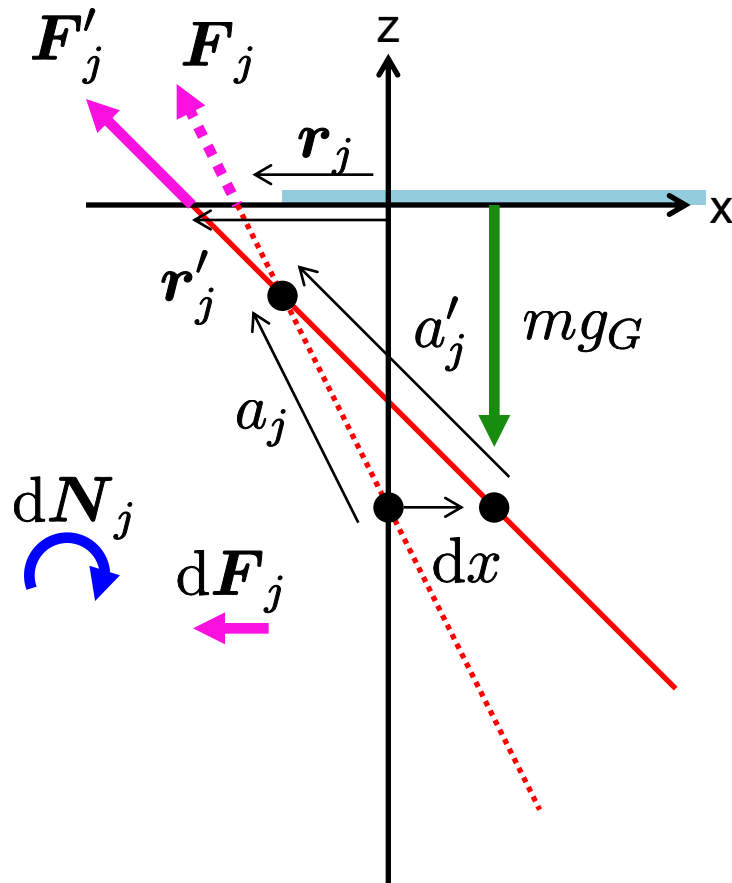
$$\mathbf{F}_j = F_j \begin{pmatrix} \sin \theta_j \cos \phi_j \\ \sin \theta_j \sin \phi_j \\ \cos \theta_j \end{pmatrix}$$





# 微小変位に対する力/トルク変化

- 作図で求める(下図はnegative-gだが、表式はどんなgでも同じになる)
- 共振器長変化  $dL_j = a_j - a'_j$



# 一般式

- 微小変動の1次までで

$$d\mathbf{r}_j = \begin{pmatrix} 1 - \frac{R}{a_j \cos \theta_j} & 0 & \frac{R \sin \theta_j \cos \phi_j}{a_j \cos^2 \theta_j} \\ 0 & 1 - \frac{R}{a_j \cos \theta_j} & \frac{R \sin \theta_j \sin \phi_j}{a_j \cos^2 \theta_j} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} d\mathbf{x} + \begin{pmatrix} \tan^2 \theta_j \cos \phi_j \sin \phi_j & -\frac{a_j(1 - \sin^2 \theta_j \sin^2 \phi_j) - R \cos \theta_j}{a_j \cos^2 \theta_j} & 0 \\ -\frac{a_j(1 - \sin^2 \theta_j \cos^2 \phi_j) - R \cos \theta_j}{a_j \cos^2 \theta_j} & -\tan^2 \theta_j \cos \phi_j \sin \phi_j & 0 \\ \tan \theta_j \sin \phi_j & -\tan \theta_j \cos \phi_j & 0 \end{pmatrix} R d\alpha$$

$$d\mathbf{F}_j = G_j d\mathbf{x} + G_j \begin{pmatrix} 0 & -R & 0 \\ R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\alpha$$

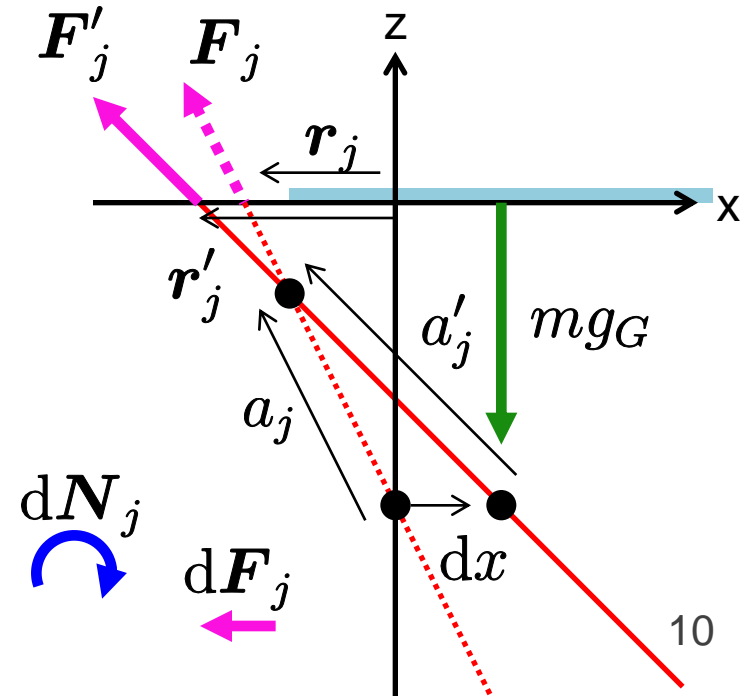
$$G_j \equiv -\frac{F_j}{a_j} + \frac{\mathbf{F}_j \mathbf{F}_j^T}{F_j^2} \left( -K_{\text{opt},j} + \frac{F_j}{a_j} \right)$$

$$dN_j = d\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j + \mathbf{r}_j \times d\mathbf{F}_j$$

- 全ての和をとると、  
重心移動の効果も考えて

$$d\mathbf{F} = \sum_j d\mathbf{F}_j$$

$$dN = \sum_j dN_j + \begin{pmatrix} 0 & -mg_G & 0 \\ mg_G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} d\mathbf{x}$$



# 対称性がよい場合

- 下記のように単純化できる

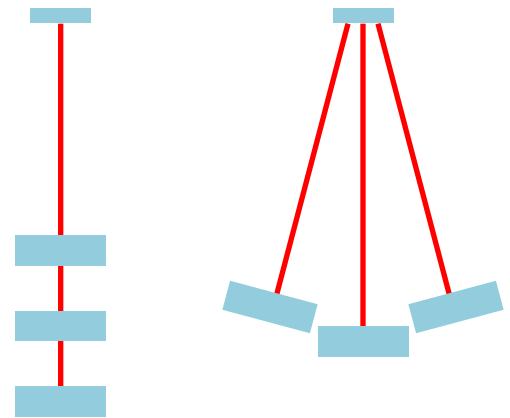
$$\begin{pmatrix} d\mathbf{F} \\ d\mathbf{N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w & 0 & 0 & 0 & +Rw & 0 \\ 0 & -w & 0 & -Rw & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -v & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -Rw & 0 & +R(mg_G - Rw) & 0 & 0 \\ +Rw & 0 & 0 & 0 & +R(mg_G - Rw) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ d\alpha \end{pmatrix}$$

- 浮上鏡の中心に何本も当てる場合

$$w = \sum_j \frac{F_j}{a_j} \quad v = \sum_j K_{\text{opt},j}$$

- 正三角形状に当てる場合

$$w = \frac{3F_1}{a_1} + \frac{3}{2} \left( K_{\text{opt},1} - \frac{F_1}{a_1} \right) \sin^2 \theta_1 \quad v = \frac{3F_1}{a_1} + 3 \left( K_{\text{opt},1} - \frac{F_1}{a_1} \right) \cos^2 \theta_1$$

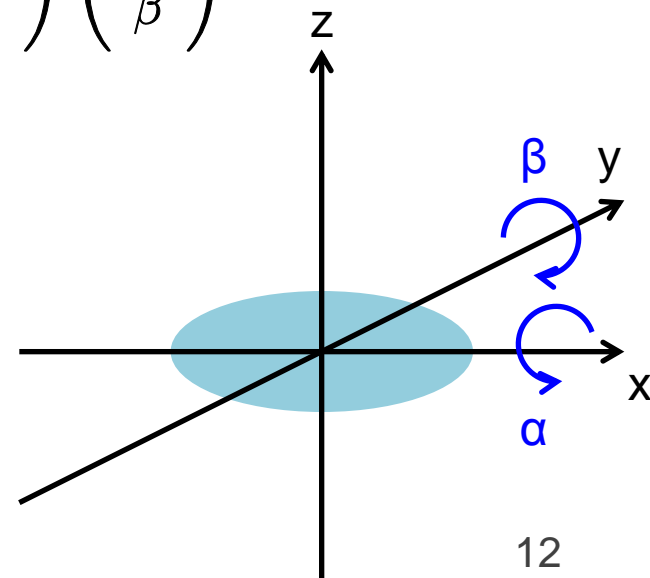


# x- $\beta$ (y- $\alpha$ )カップリング

- z並進は独立なので、まず $v > 0$ が安定条件の1つ
- あとはx- $\beta$ (y- $\alpha$ )カップリングだけを考えればよい
  - x並進  $\leftrightarrow$  y軸回りの $\beta$ 回転
  - y並進  $\leftrightarrow$  x軸周りの $\alpha$ 回転
- x- $\beta$ の運動方程式

$$\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -w & +Rw \\ +Rw & +R(mg_G - Rw) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix}$$

の安定性を見ればよい



# 微分方程式の安定性

- 微分方程式  $\dot{\mathbf{u}} = A\mathbf{u}$  は  $A$  が対角化可能で、全ての固有値の実部がゼロか負なら安定

( $A = T^{-1}\Lambda T$ 、 $T\mathbf{v} = \mathbf{u}$  として  $\dot{\mathbf{v}} = \Lambda\mathbf{v}$  と対角化できるから、1自由度の安定性判定に帰着)

- 微分方程式  $M\ddot{\mathbf{u}} + \gamma\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = 0$  は  $\mathbf{v} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{pmatrix}$  とすれば、 $\dot{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}\gamma \end{pmatrix} \mathbf{v}$  となって上に帰着

- $A$  が2x2行列の時は  $\text{tr}(A) \leq 0$  かつ  $\det(A) \geq 0$  なら安定

# x-βの安定条件

- 運動方程式 
$$\underbrace{\begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & I_y \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\beta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -w & +Rw \\ +Rw & +R(mg_G - Rw) \end{pmatrix}}_{-K} \begin{pmatrix} x \\ \beta \end{pmatrix}$$
- $A \equiv M^{-1}(-K)$  として
$$\text{tr}(A) \leq 0 \iff w \geq \frac{m^2 g_G R}{mR^2 + I_y}$$
$$\text{det}(A) \geq 0 \iff wR \leq 0$$
- $R > 0$  (下に凹)の時、同時に満たす解はない
- $R < 0$  (下に凸)の時、 $w \geq 0$ が安定条件  
→  $R < 0$  かつ  $w \geq 0$  が安定条件

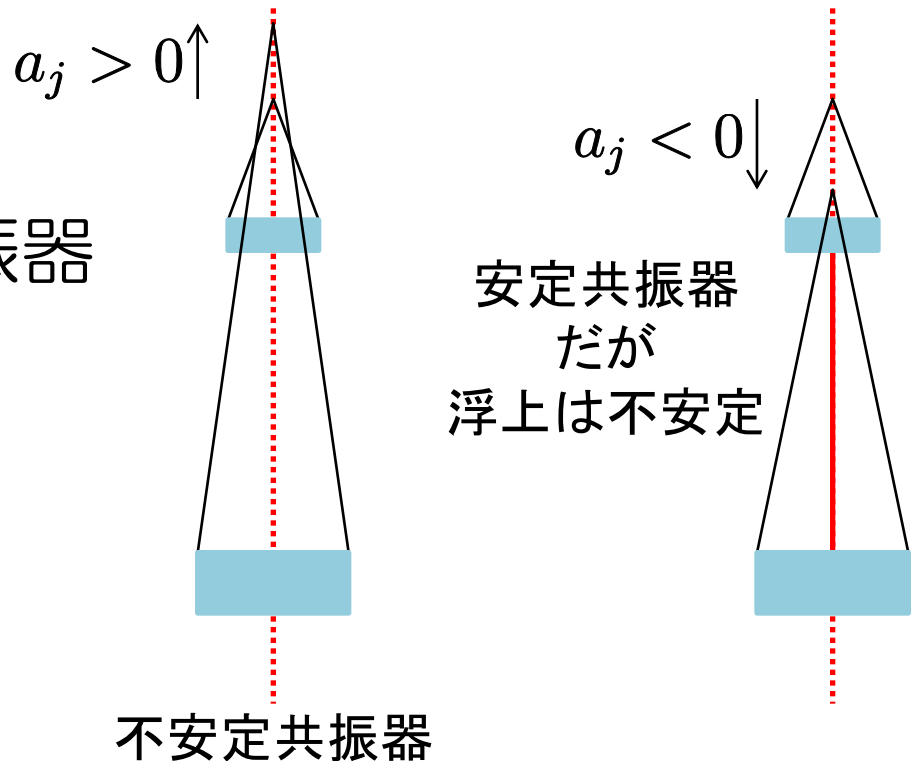
# 真ん中に当てた場合

- 浮上鏡が下に凸( $R < 0$ )で、 $w = \sum_j \frac{F_j}{a_j} \geq 0$

となる解は存在しない

- 共振器の安定性から、 $a_j < 0$  でないとだめなので

- ただし、上にも共振器を作れば話は別



# 上からも光を当てる場合

- 上から光を当てる場合は浮上鏡の曲率の正負が逆転するので、

$$a_j = R_j + s_j R - L_j \quad (\text{下なら } s_j = 1 \\ \text{上なら } s_j = -1)$$

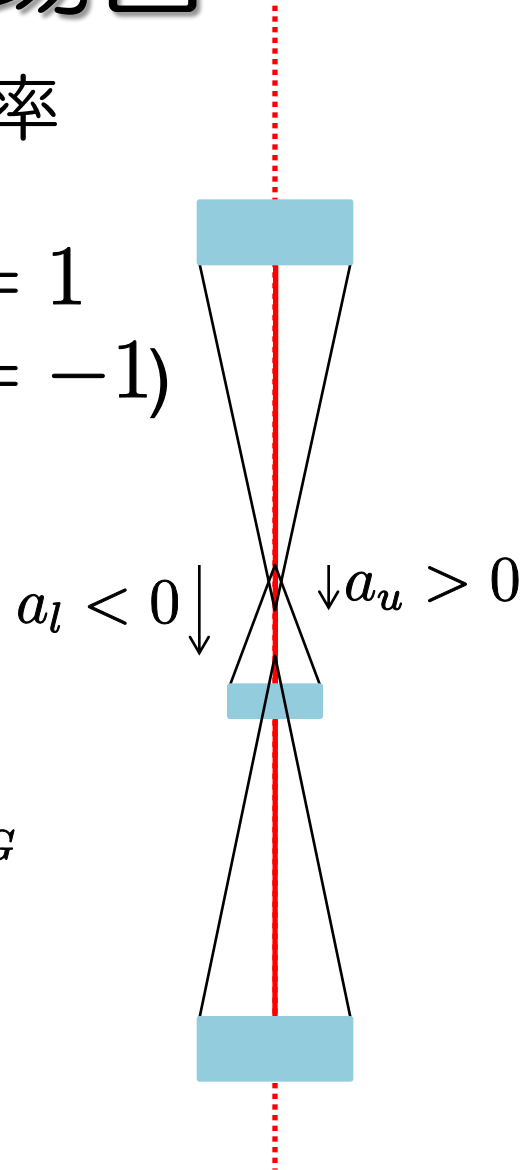
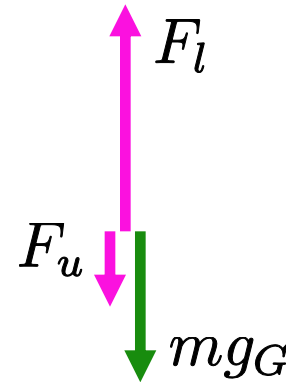
として拡張できる

- 上下1本ずつで考えると

$$w = \frac{F_l}{a_l} + \frac{F_u}{a_u} \geq 0$$

が安定条件

- つまり  $\frac{-a_l}{a_u} \geq \frac{mg_G + F_u}{F_u} \quad (\geq 1)$





# 正三角形形状に当ててる場合

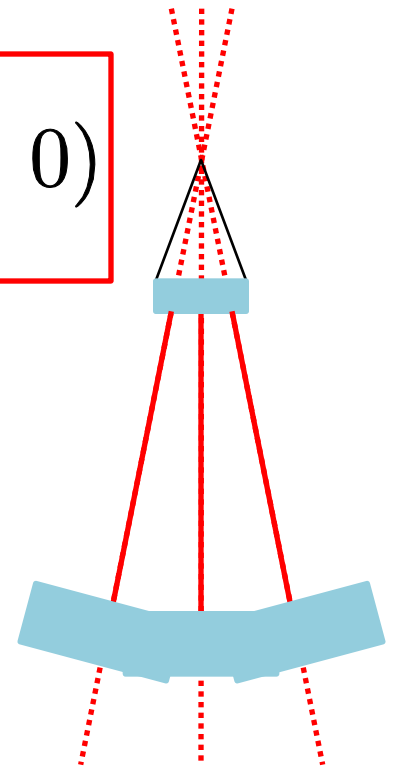
- 下記の不等式を満たすようなoptical springが作れば安定

$$w = \frac{3F_1}{a_1} + \frac{3}{2} \left( K_{\text{opt},1} - \frac{F_1}{a_1} \right) \sin^2 \theta_1 \geq 0$$

$$\rightarrow K_{\text{opt},1} \geq \frac{F_1(3 + \cos 2\theta_1)}{-a_1(1 - \cos 2\theta_1)} \quad (> 0)$$

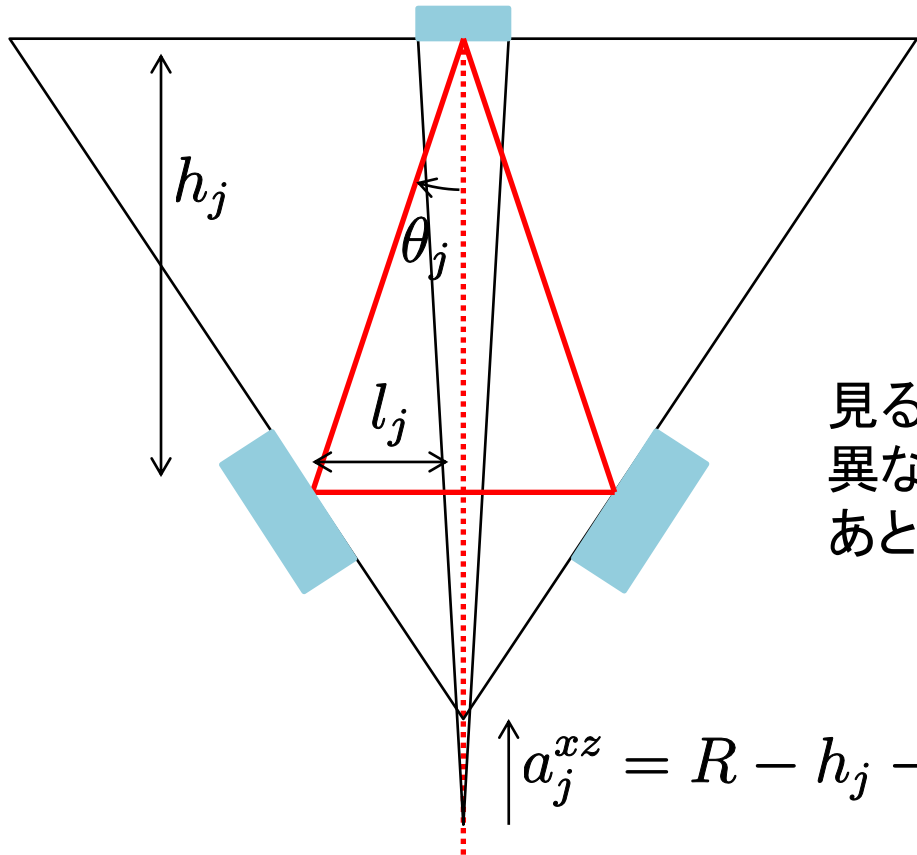
- 光バネは  $K_{\text{opt},1} \sim O \left( \frac{F_1 \mathcal{F} \Delta}{\lambda \kappa} \right)^{\leftarrow \text{detune}}$

なのでこれを満たすのは容易



# ちなみに三角共振器

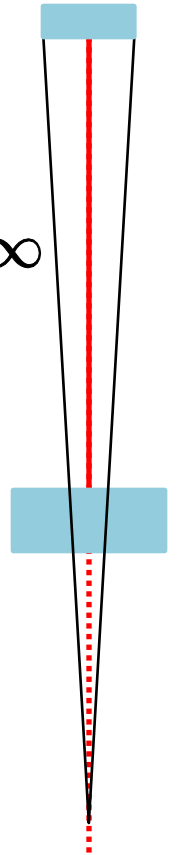
- 二等辺三角形で頂点を浮上鏡にするならだめ



見る方向によって  $a_j$  が異なるだけで、あとはFPと同様のふるまい

$$a_j^{yz} = \infty$$

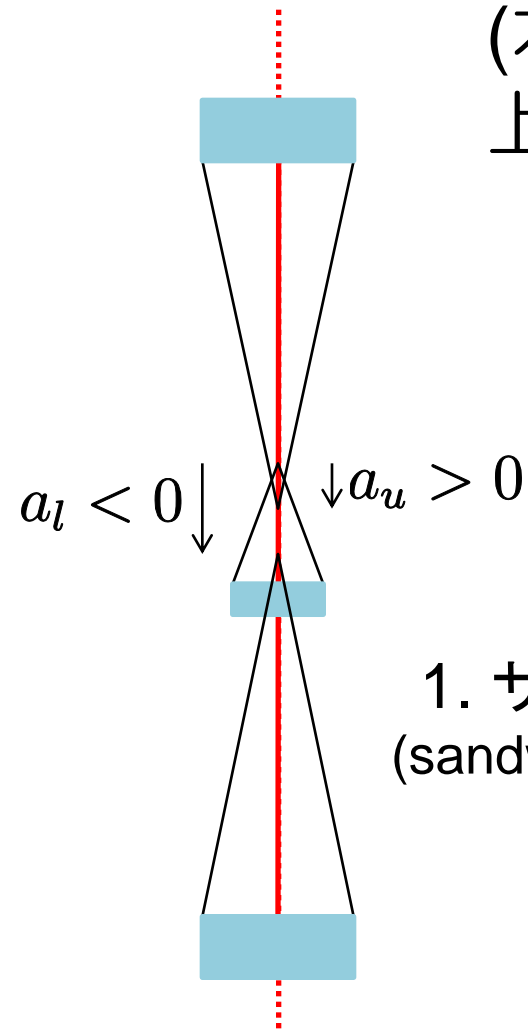
$$\uparrow a_j^{xz} = R - h_j - l_j \tan(\pi/4 + \theta_j/2)$$



- その他の構成ならありかもしれないけど、複雑化するだけなので考えてない

# 安定な構成のまとめ

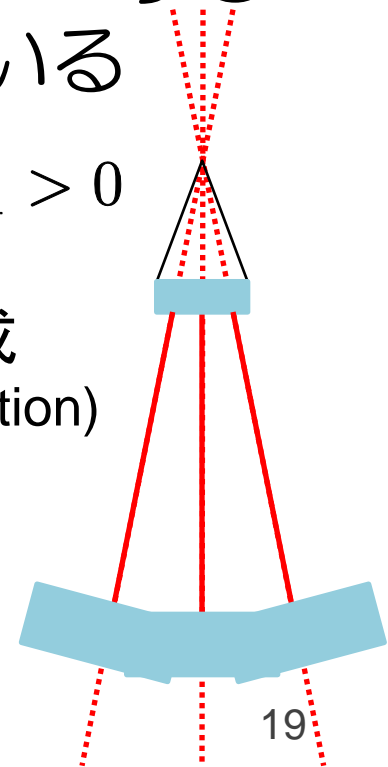
- 浮上鏡が下に凸( $R < 0$ )で、
  1. 中心に上下から、強度比を考えて当てる  
(本来不安定な下のpositive-g共振器を上  
のnegative-gが補強している感じ)
  2. 正三角形形状に当てて、detuneする  
(optical springで補強している  
感じ)



1. サンドイッチ構成  
(sandwich configuration)

$$K_{\text{opt},1} > 0$$

2. 三脚構成  
(tripod configuration)



# Sandwich or Tripod?

- サンドイッチ

- 浮上鏡のz並進を直接測定できる
- 浮上鏡の中心に当てられるので有効口径を小さくできる
- 光学系の配置は比較的容易
- 上下の共振器軸と重力方向を合わせる機構が必要
- 2つのFPが干渉しないよう、光の周波数をずらすなど工夫が必要
- 鏡の質量分以上の光量が必要
- 共振器内パワーが大きくなる

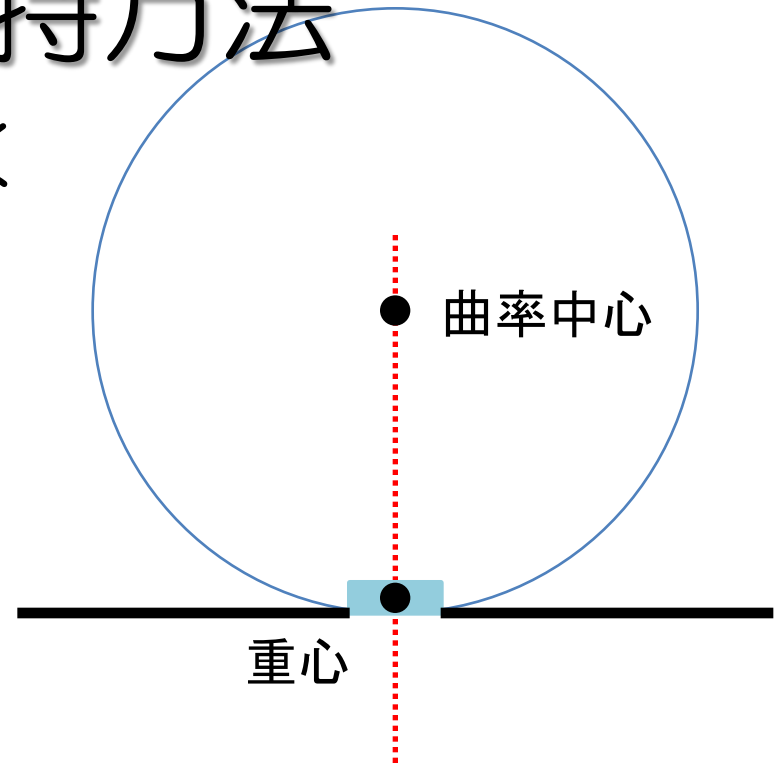
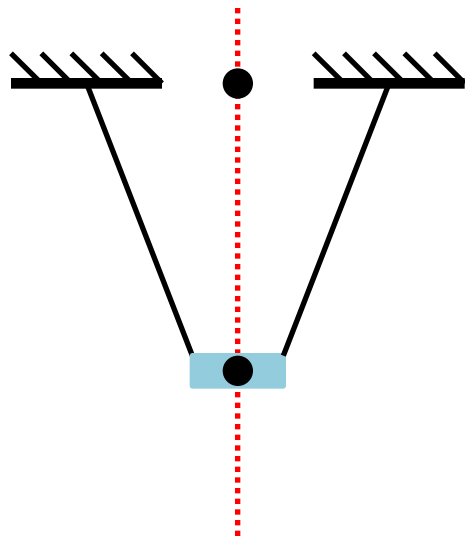
- 三脚

- 浮上鏡のz並進を直接測定できない
- 浮上鏡中心からずらして当てるので、ある程度の有効口径が必要
- 下が狭くなるので、下鏡の配置が大変
- 3つのFPの光量バランスを取る機構が必要
- double optical springを3つのFPに導入する必要がある
- ほぼ鏡の質量分だけの光量でいい

- 三脚の場合の構成を先に話す。光量とoptical spring  
以外は大体共通。

# 浮上前の支持方法

- 懸架 or 穴の空いた台に置く

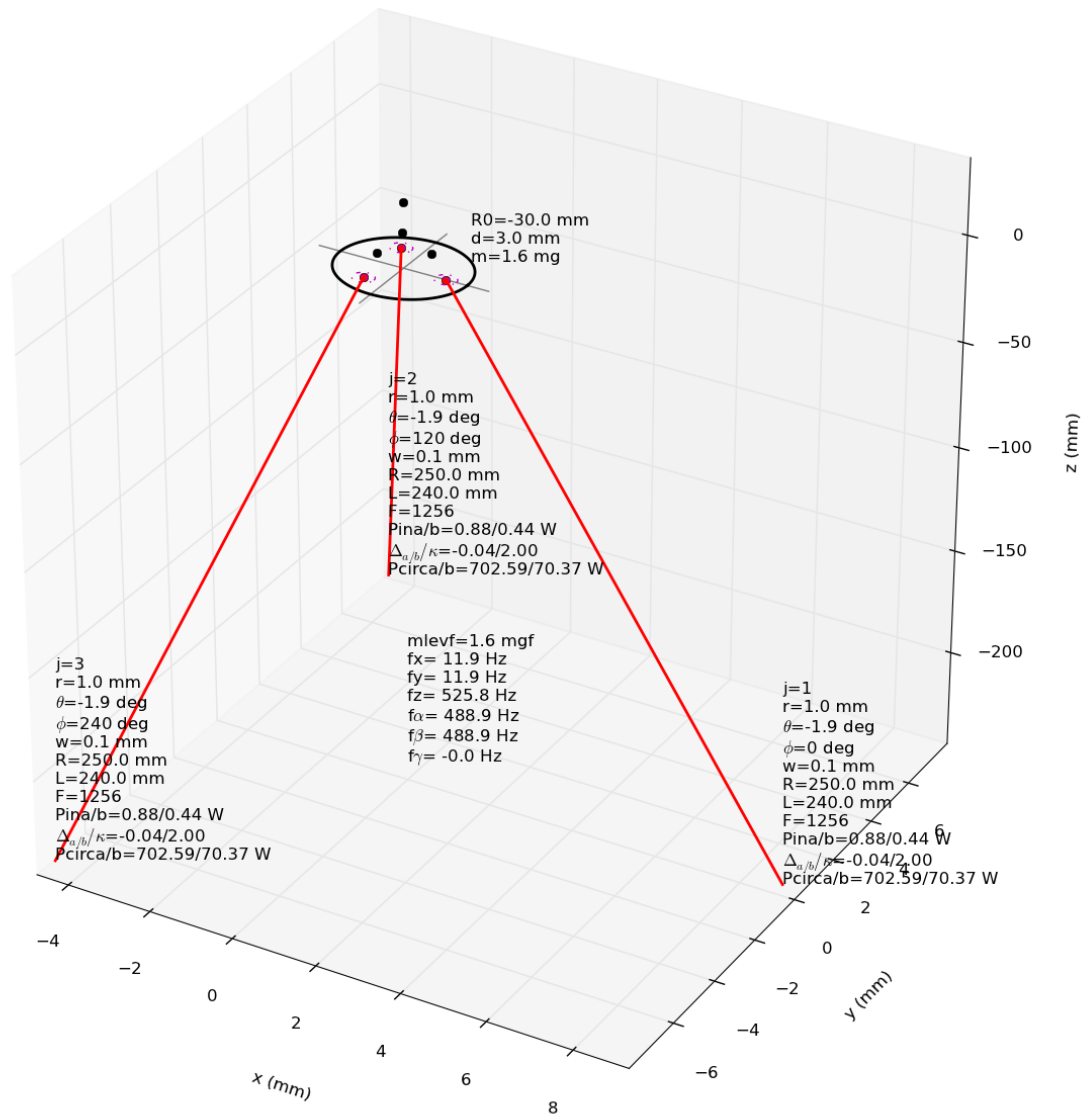


- 曲率中心と重心を結ぶ軸が重力方向と一致しているとは限らない
- 安定な浮上点に持って行くまでの手順については別途考察が必要

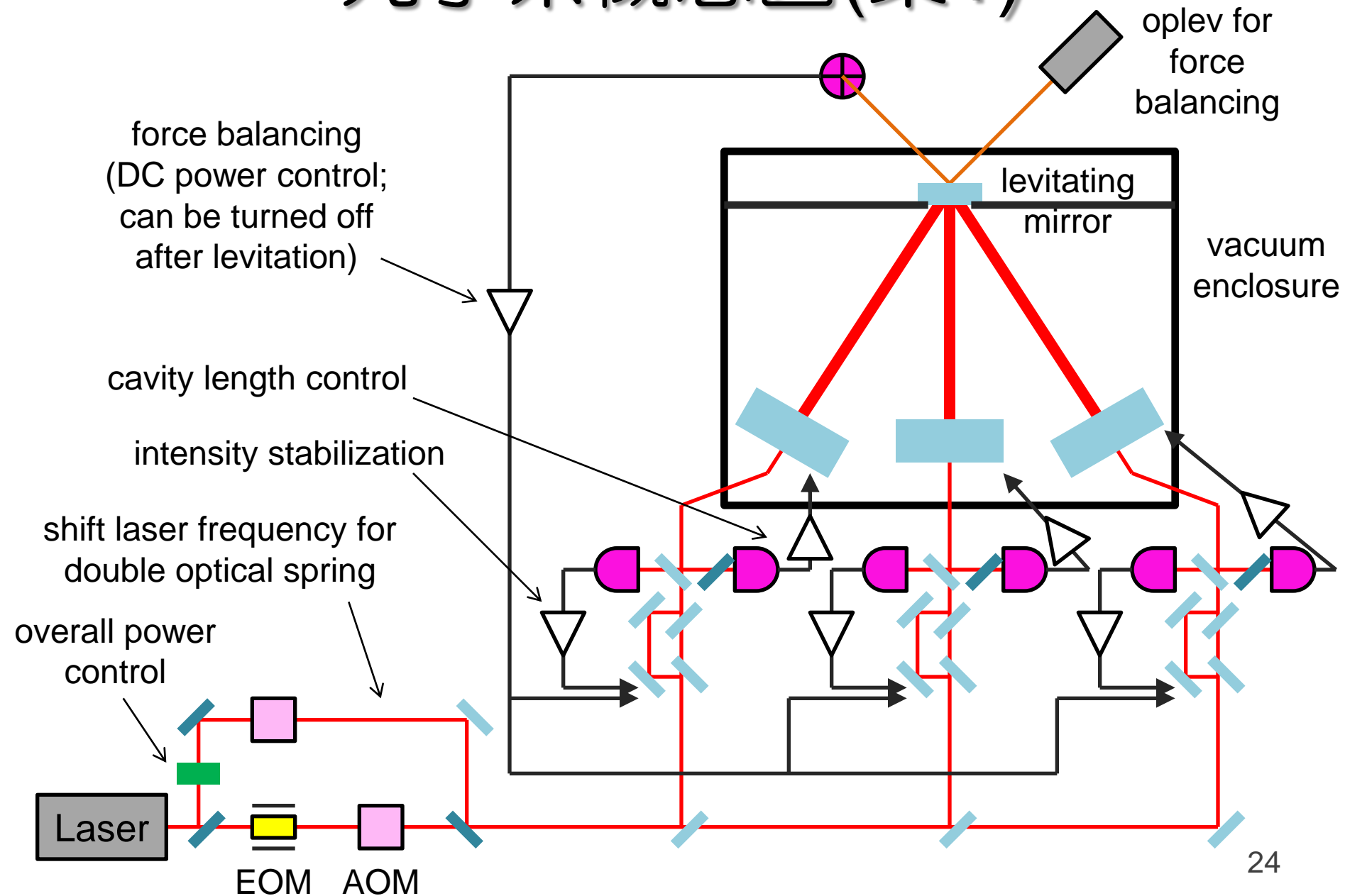
# 光学浮上実験の目標

- Planck質量(22 ug)程度以上の鏡を光輻射圧だけを用いて浮かし、何らかのサイエンスを得る
- 何をすればどんなことができるかの検討が必要だが、とりあえず
  - 「広帯域に渡って量子輻射圧雑音で制限される」
  - 「さらにBAEで(free mass)SQL超えが狙える」ような感度が達成できる装置を作る

# 三脚構造の場合

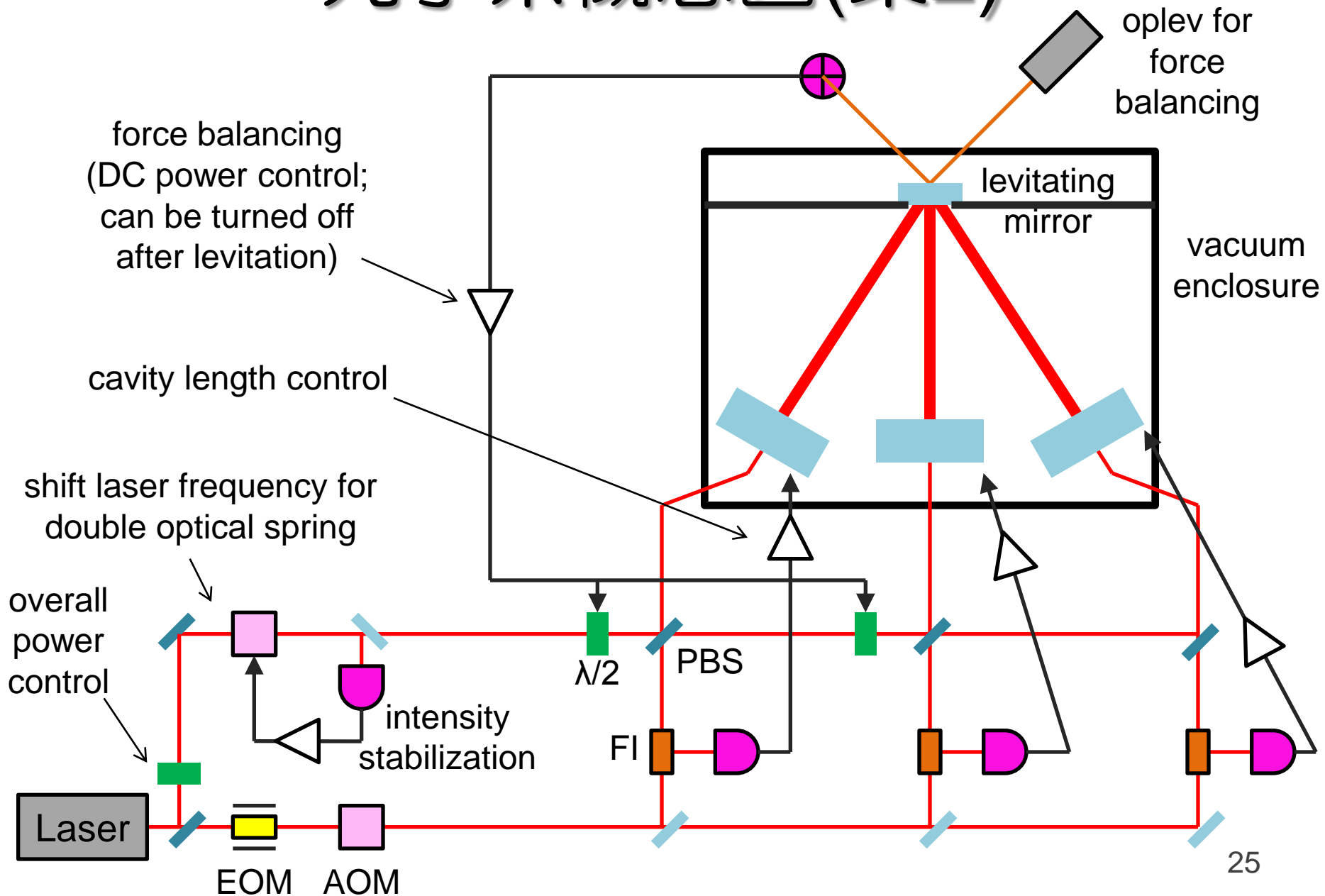


# 光学系概念图(案1)





# 光学系概念图(案2)



# 浮上の手順

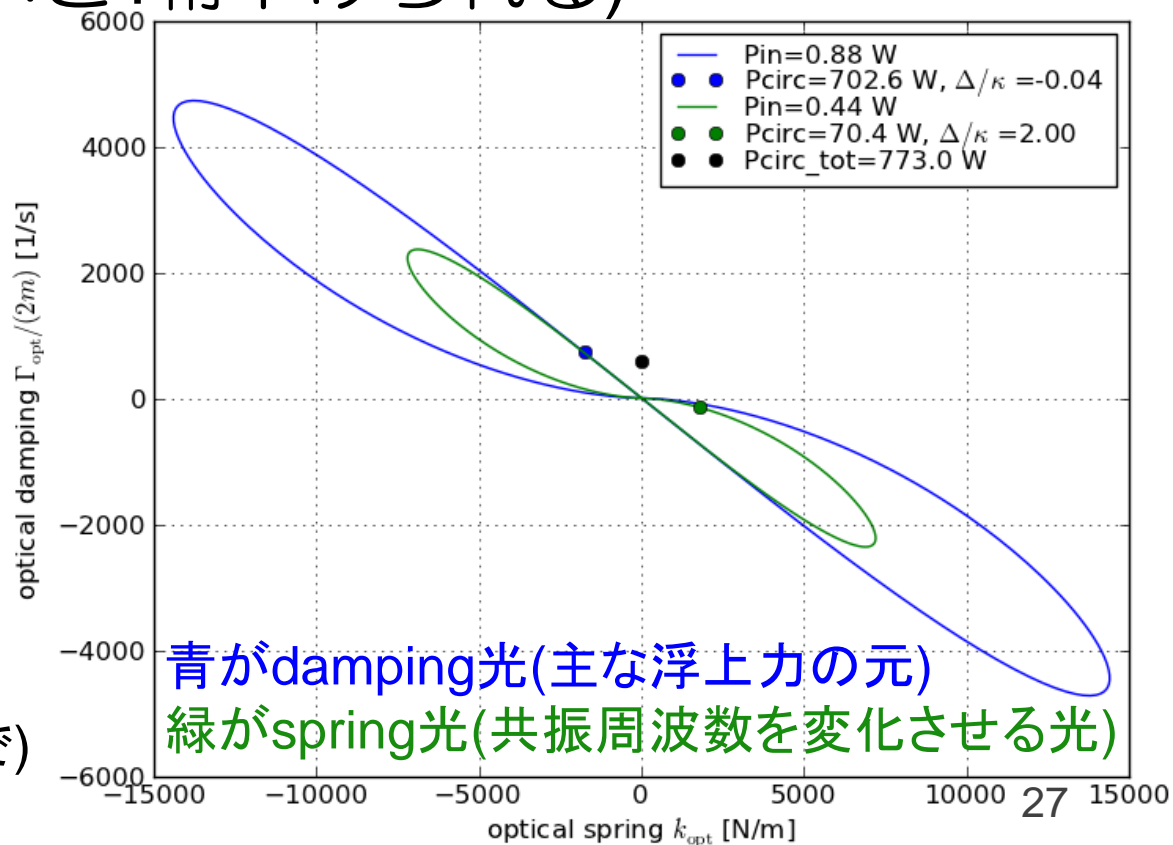
- 浮上鏡は穴のあいた台の上においておく
- spring光で共振器長を3つのFPそれぞれ制御
- 3つのFPへのdamping光の入射光量を増やしていく
- あるFPへの強度が強すぎると鏡が傾くので、そのFPへの強度を下げ、他の2つへの光量が増えるような制御をoplevでかけておく
- ある時点で鏡が浮く(共振周波数でわかる?)
- さらに光量を増やしても、その分共振器長が伸びて光量が減るのでOK(たぶん)
- 感度を出すときは浮上後oplevを切ってもよい

# レーザー強度とoptical spring

- 直径3 mm、厚さ0.1 mmの石英鏡で1.6 mg
- 3本のFPの共振器内強度それぞれ 780 W必要  
→ フィネス1300、入射光強度1 W程度必要  
(重さが1桁軽いと1桁下げられる)

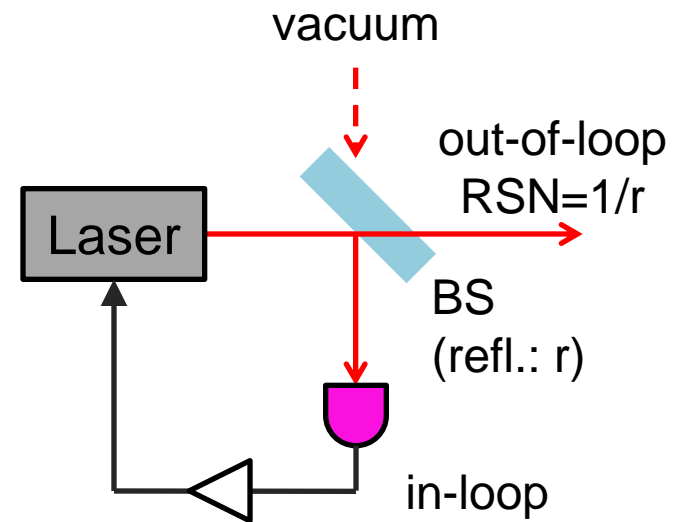
- double optical spring
- 更に強度安定化のための光量が必要

cf. gas dampingは  
 $\gamma_{\text{gas}}=6\text{e-}6 \text{ 1/s}$  (1e-4 Paで)



# 強度安定化

- 強度安定度に対する要求値は相対散射雑音で  
damping光: 2.0 dB (0.88 W)  
( $RIN = 8.2e-10$  /rtHz)  
spring光: 23 dB (0.44 W)  
( $RIN = 1.3e-8$  /rtHz)
- つまり  
damping光安定化に 1.5 W  
spring光安定化に 2.3 mW  
の光量が必要
- まとめると  
浮上に 4 W  
強度安定化に 4.5 W  
必要



optical springで測定帯域を上げて  
強度安定化を楽にすることは可能

# 周波数安定化

- 量子輻射圧雑音達成には  $1 \text{ Hz}/\text{rtHz} @ 0.1\text{-}1 \text{ kHz}$
- SQL超えには  $1 \text{ mHz}/\text{rtHz} @ 0.1\text{-}1 \text{ kHz}$  程度必要
- 強度安定化への要求値も考えると、将来的には  
2つ鏡を浮上させるべき

# 真空容器

- 強度/周波数安定化まで真空槽に入れるなら大きなのが必要
- とりあえず浮上させるだけなら共振器部分だけの小さな真空槽でも可  
(直径30cm、高さ30cm程度の円筒形+上下に窓で十分)
- 右のようなものを組み合わせればいいかも
- 真空度  $1e-4$  Pa で SNR=20  
 $1e-6$  Pa で SNR=200
- できればイオンポンプ  
(低振動)



# 防振系

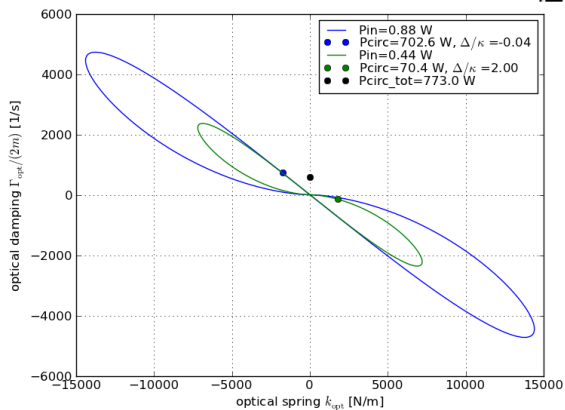
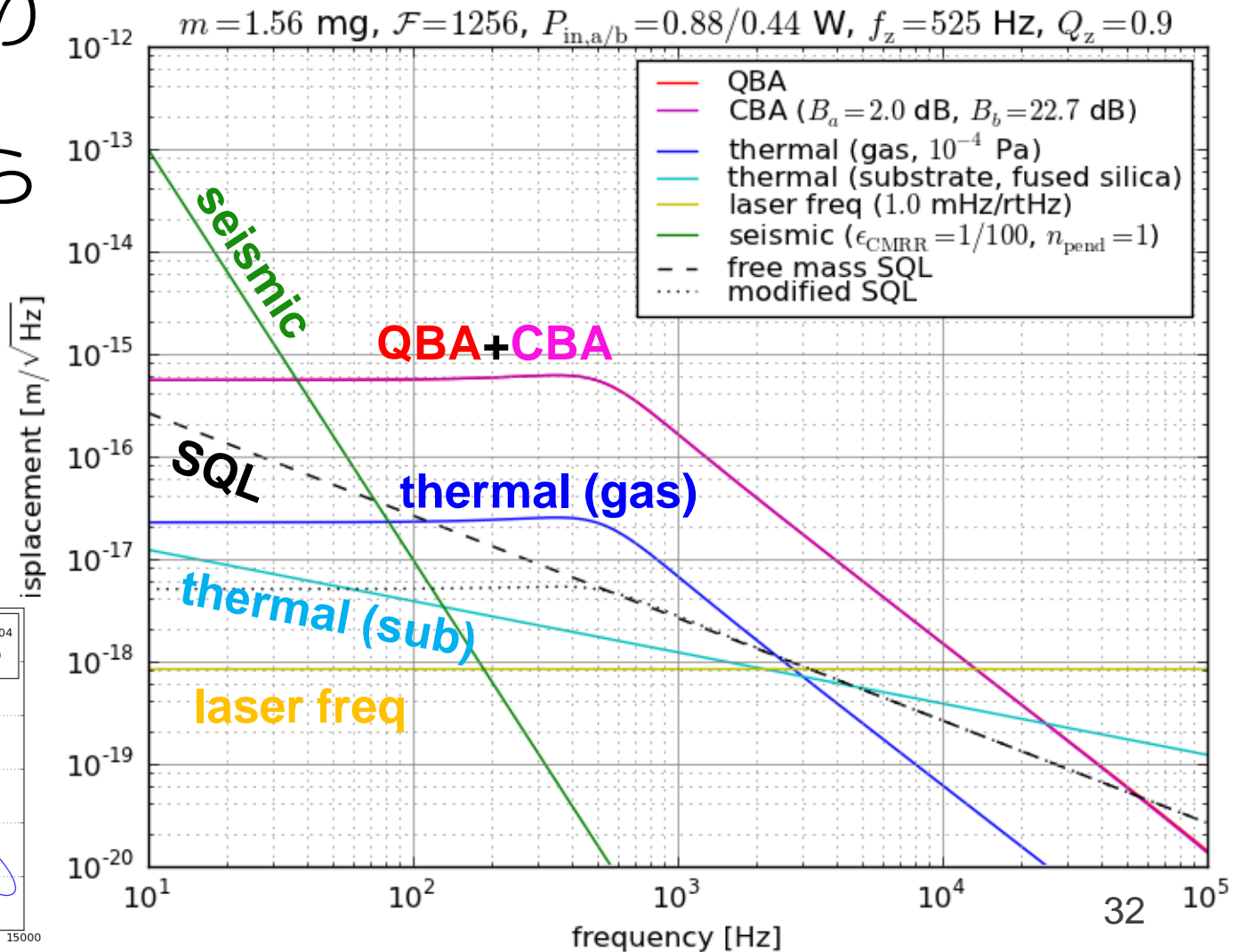
- 要求値: -50 dB @ 1kHz 程度
- -40 dBはCMRRでいけそう？
- あとは 1段振り子 か minus-K のような除振台
- 高いし、とりあえずなしでやりたい



<http://www.minusk.com/>

# 変位感度(1.6mg鏡)

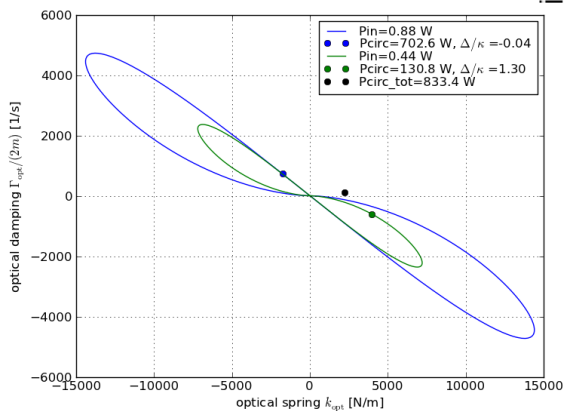
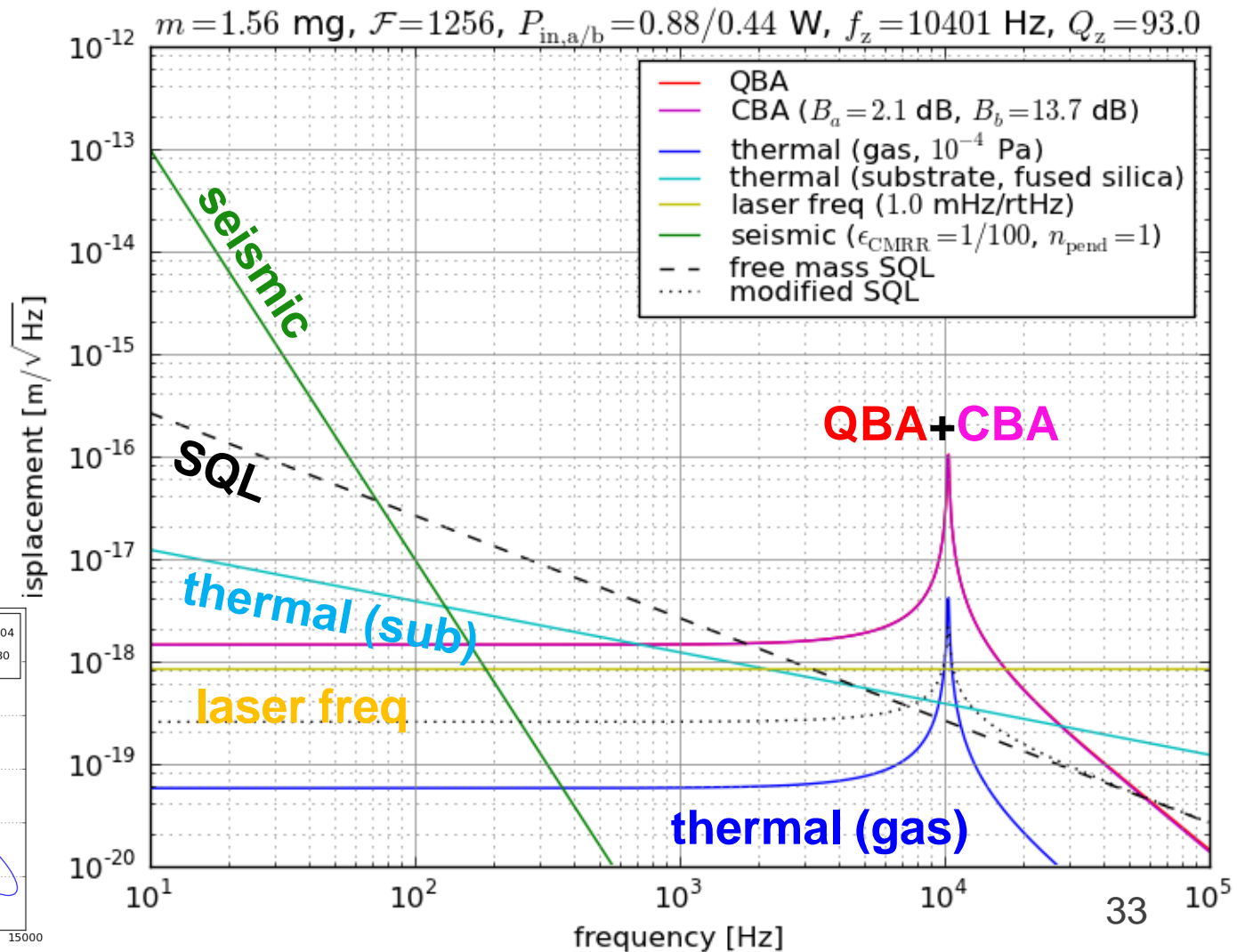
- デフォルト案(moderate optical spring)
- QBAはとりやすいが SQL超えられない





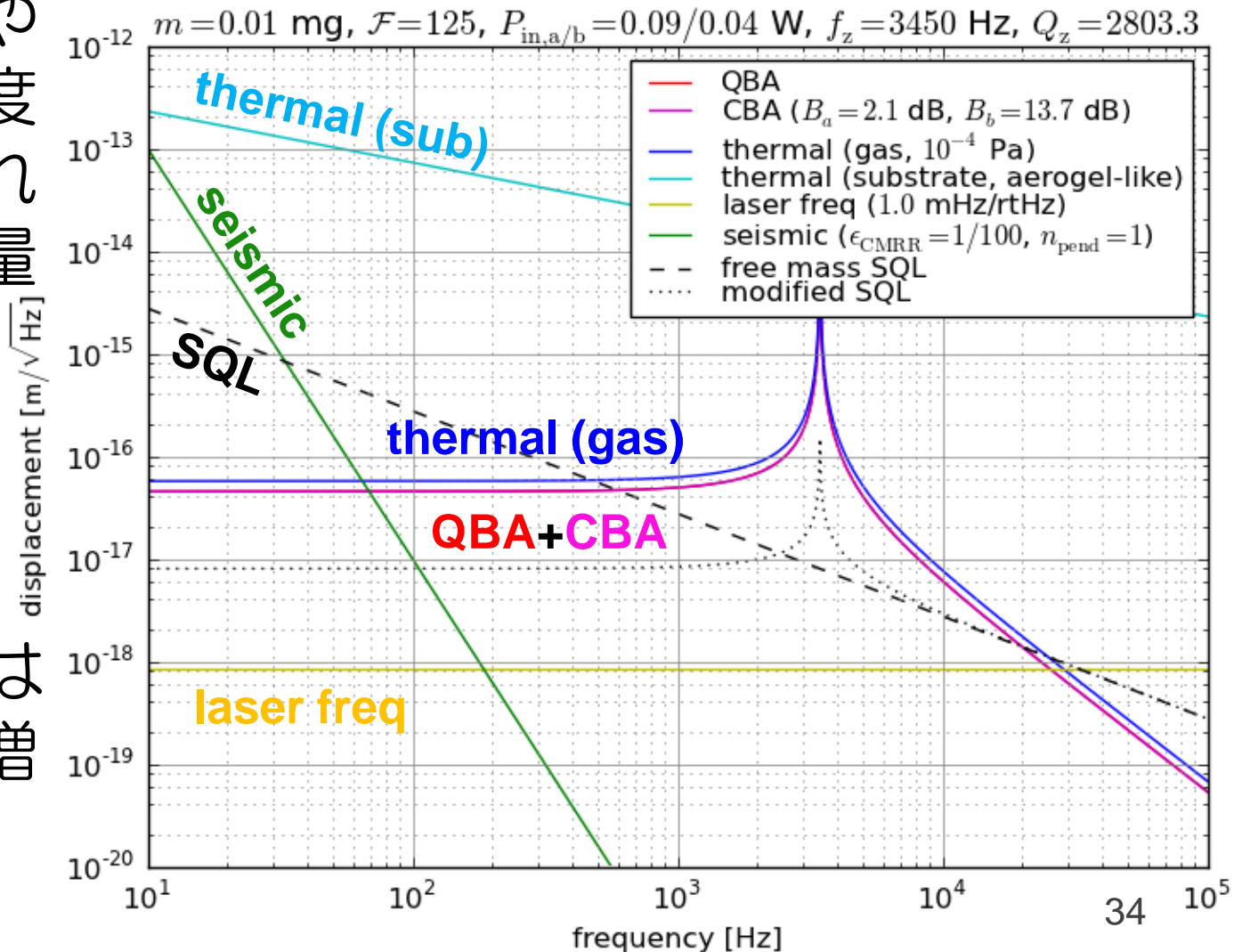
# 変位感度(1.6mg鏡)

- デフォルト案(stronger optical spring)
- SQLは超える

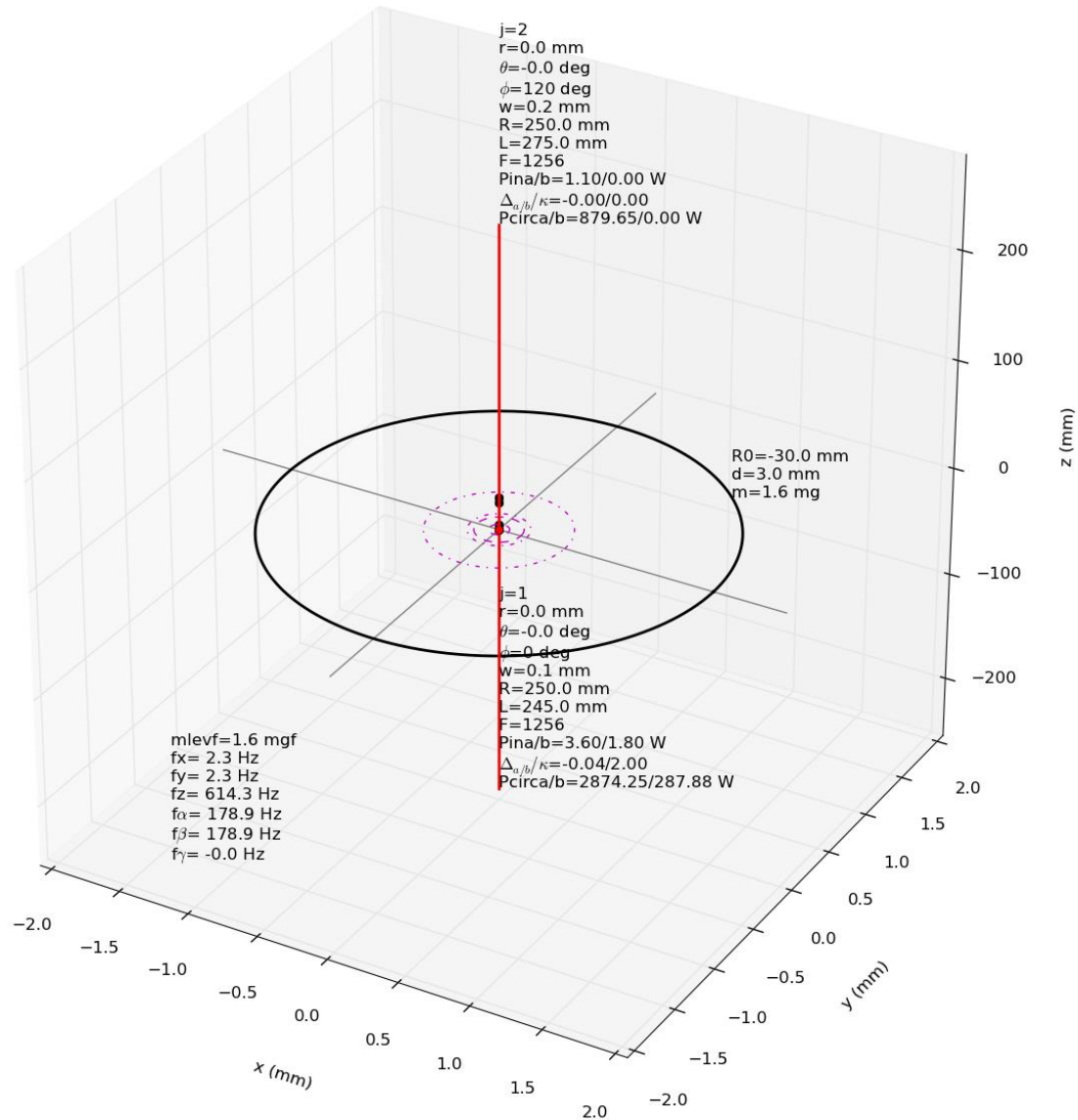


# 変位感度(16 $\mu$ g鏡)

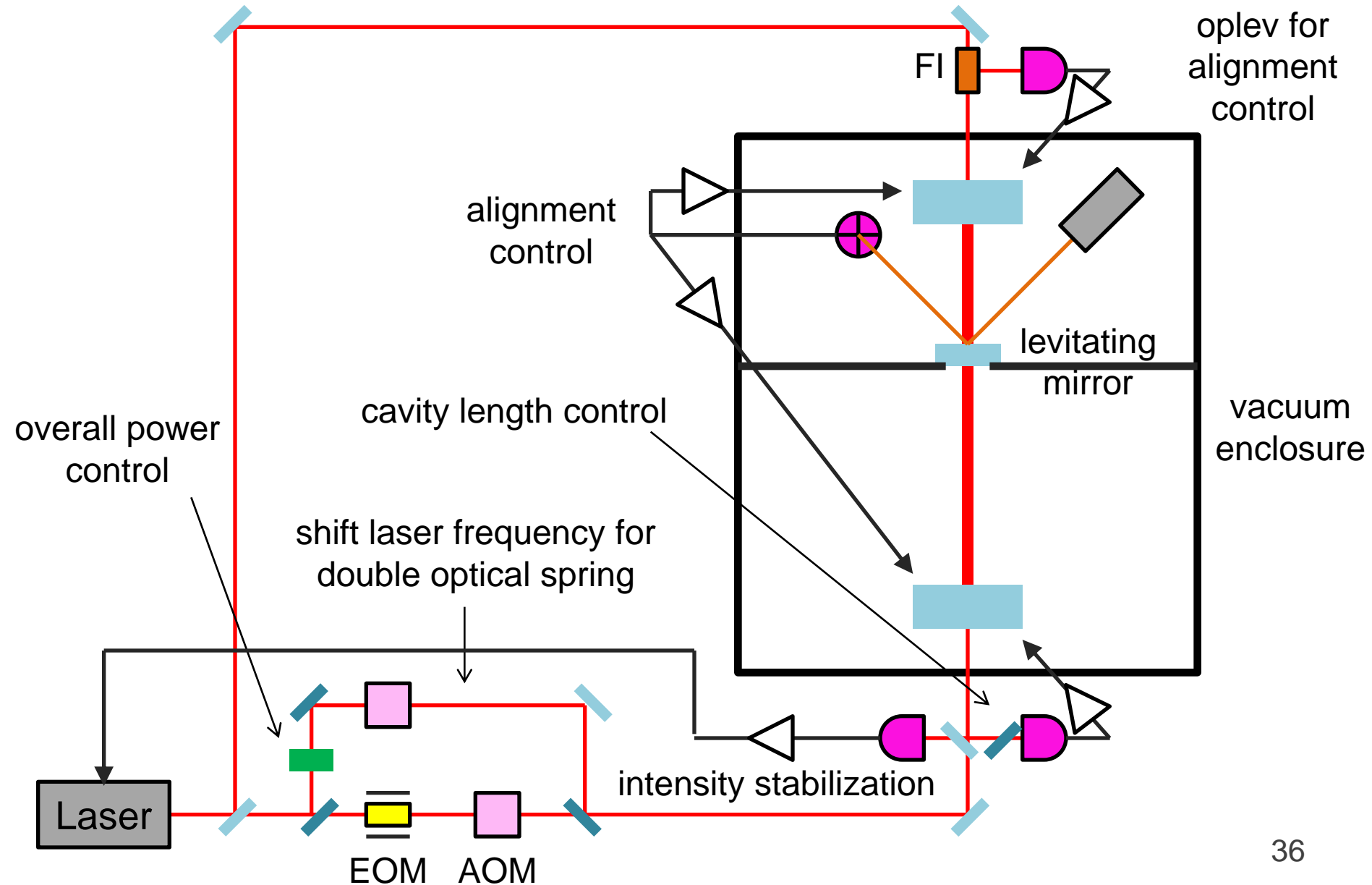
- 密度が石英の1/100 or 厚さが1 $\mu$ m
- フィネスや入射光強度を下げられるが、質量減ってガス熱雑音が増える
- 光量減るのでQBAはそこまで増えない



# サンドイッチ構造の場合



# 光学系概念图



# 三脚構造との違い

- 浮上手順

上共振器の共振器長を制御(detuneなし)

下共振器の共振器長をspring光で制御

下共振器のdamping光の光量のみ上げていく  
光てこでアライメント制御？

上にspring光4.0 W、下にdamping光3.6 W入射でも可だが、  
入射光量がたくさん必要(spring光は共振器内光量小さいが、  
上にもある程度の共振器内パワーが必要のため)

上記構成だと上に1.1W、下にdamping光3.6W+spring光1.1W

- 真空容器

直径20cm、高さ50cm程度

(直径は小さくてよいが、高さが必要になる)

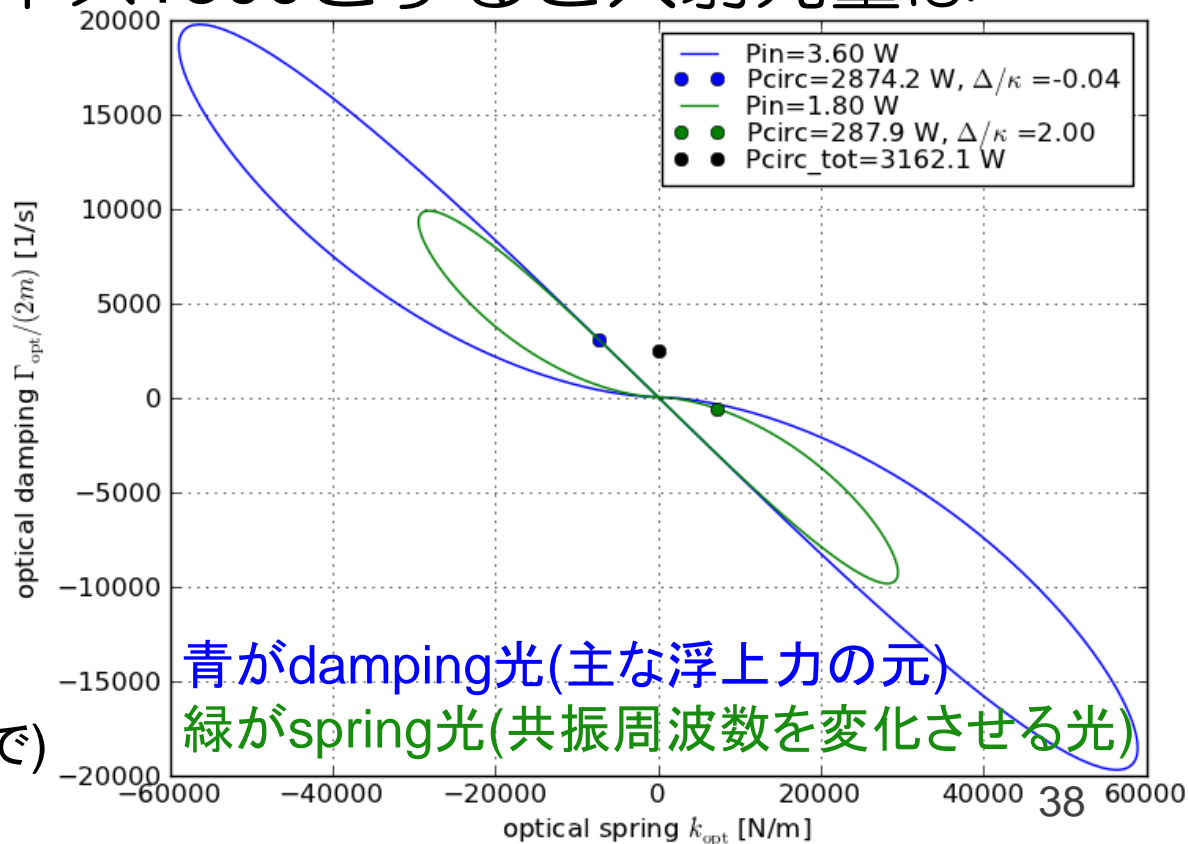
- レーザー強度、optical spring、強度安定化

光量が大きい、強度安定度への要求値は不変

# レーザー強度とoptical spring

- 共振器の構成にもよるが、  
上共振器に共振器内光量900W  
下共振器に共振器内光量3200W 程度必要
- 両共振器のフィネス1300とすると入射光量は  
上 1W  
下 5W  
程度必要
- 下はdouble optical spring

cf. gas dampingは  
 $\gamma_{\text{gas}}=6\text{e-}6 \text{ 1/s}$  ( $1\text{e-}4 \text{ Pa}$ で)

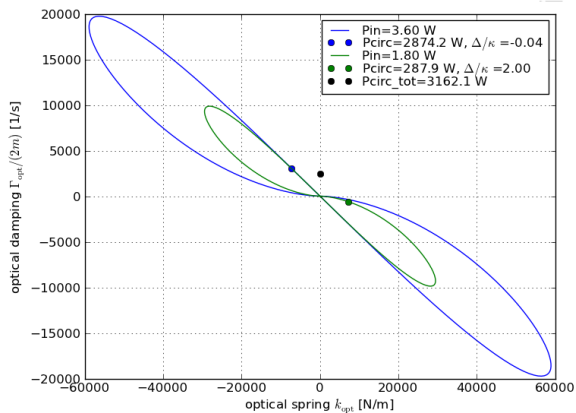
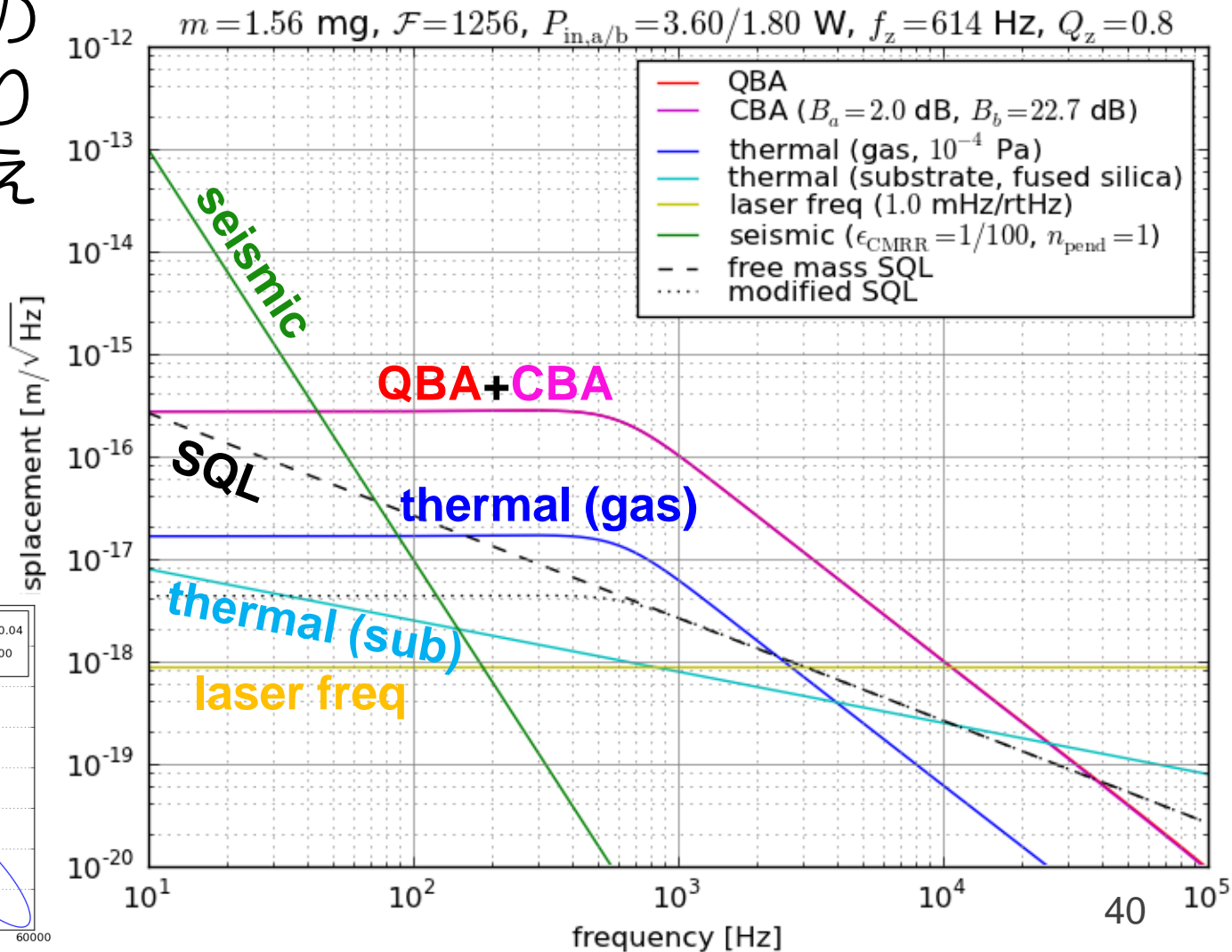


# 強度安定化

- 強度安定度に対する要求値は相対散射雑音で  
damping光: 2.0 dB (3.6 W)  
(RIN =  $4.0e-10$  /rtHz)  
spring光: 23 dB (1.8 W)  
(RIN =  $6.2e-9$  /rtHz)
- つまり  
damping光安定化に 6.3 W  
spring光安定化に 10 mW  
の光量が必要
- まとめると  
浮上に 6 W  
強度安定化に 6 W  
必要

# 変位雑音(1.6mg鏡)

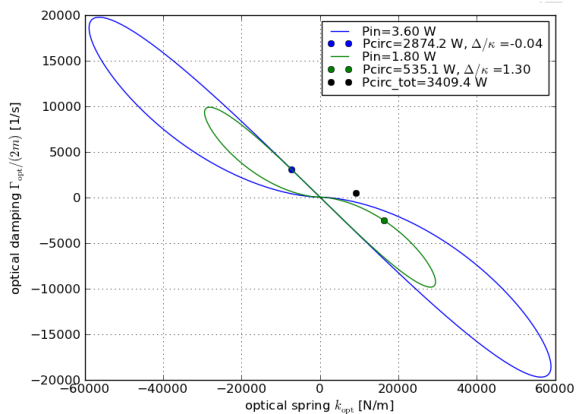
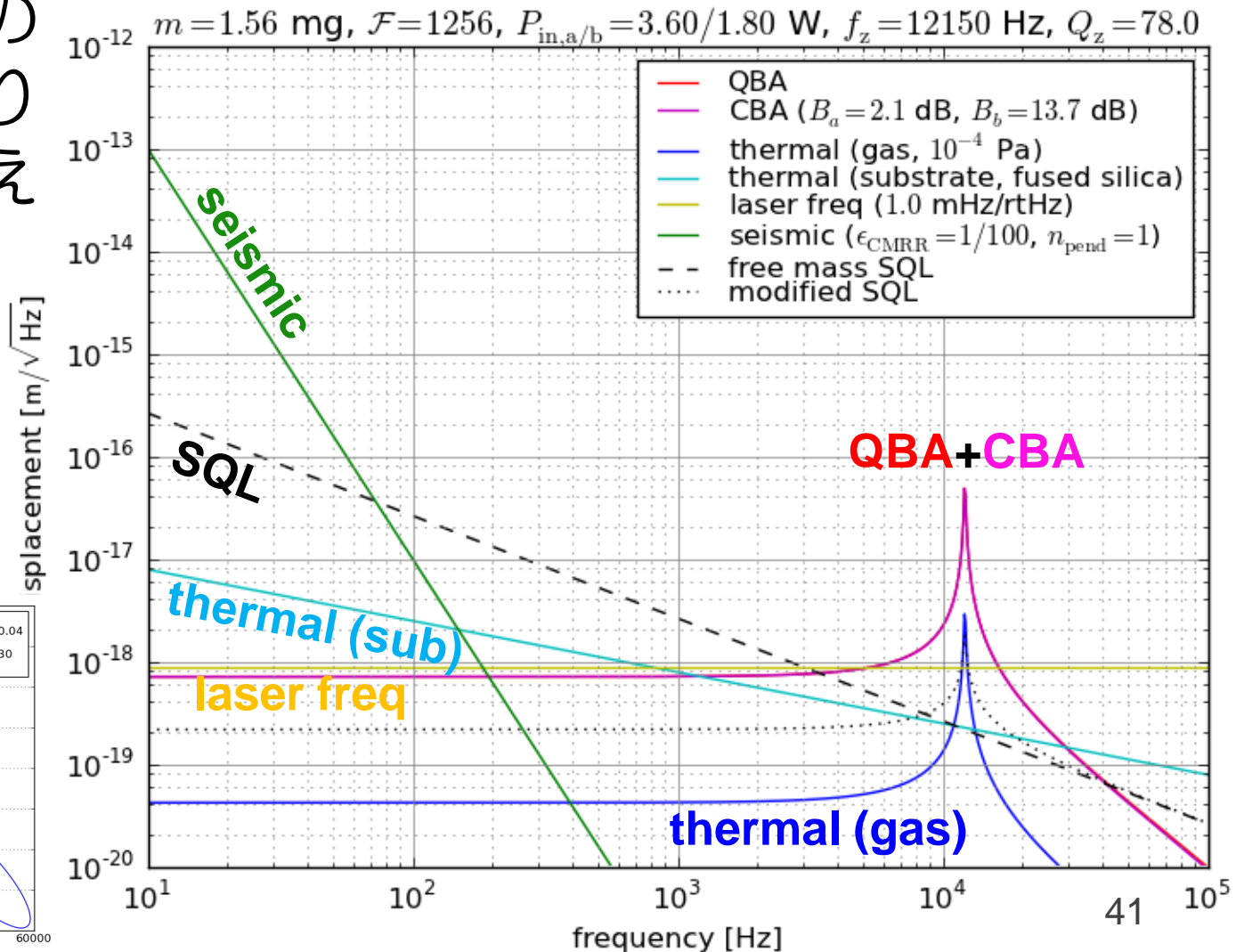
- デフォルト案(moderate optical spring)
- 上共振器の寄与はとりあえず考えてない
- だいたい同じ感度





# 変位雑音(1.6mg鏡)

- デフォルト案(stronger optical spring)
- 上共振器の寄与はとりあえず考えてない
- だいたい同じ感度



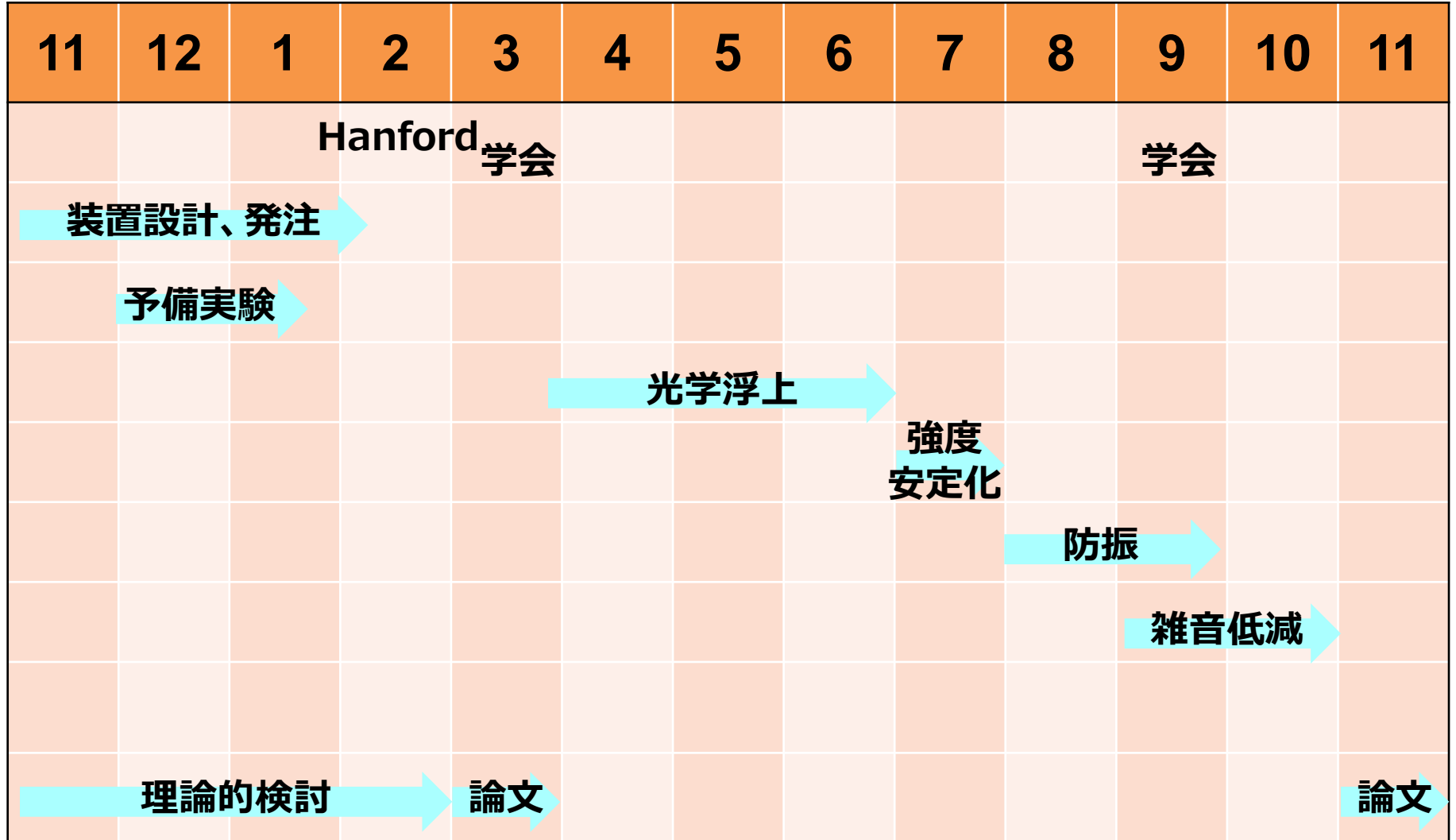
# 感度について

- 大して変わらないように見えるが、サンドイッチだと共振器内光量を増やせるので、QBAを大きくすることが可能。三脚だと光量は増やせない。  
→ より軽い鏡ではサンドイッチの方が有利
- レーザー周波数雑音をよく見積もりすぎている

# 必要なものまとめ

- レーザー(浮上には~5W、強度安定化込みで~10W)  
まずは2Wレーザー数台 → TAMAレーザー？
- 真空槽(浮上には机上、強度安定化込みで大型)  
真空容器製作？ 元逆二乗？ 天文台TOBA？
- 防振系  
1段振り子 or minus-K
- 場所  
できれば本郷、あるいは国立天文台
- 浮上鏡(厚さ0.1mm以下、凸面鏡)  
シグマ光機と検討中
- その他もろもろ光学部品  
EOM x1(+1)、AOM x2、FI x4(+1)、cavity mirror x3、PBS x4(+4)、  
HWP x3(+4)、QPD x1、RF PD x3、DC PD x1(+4) .....

# スケジュール



# その他の懸念事項

- 浮上鏡の製作可能性  
感度や共振器の構成、必要なレーザー強度がこれで決まる
- 強度変動に対して浮上鏡は本当に安定か？
- 浮上鏡を置いておくだけだと、ちょっとした振動/輻射圧ですれちゃうかも

# まとめ

- 安定に浮上させる構成について考察した
  - 浮上の条件と可能な構成がわかった
- 浮上手順についてはさらに考察が必要
- 軽量鏡と高強度レーザーが必要
  - 1桁軽くすると1桁強度(orフィネス)を下げられるが、真空度に対する要求値は2桁上がる
- 量子雑音レベルの感度を出すには結構大変そう
  - 強度/周波数安定化、真空度、防振
- その先のサイエンスについて調べていく必要あり
- お金を下さい