

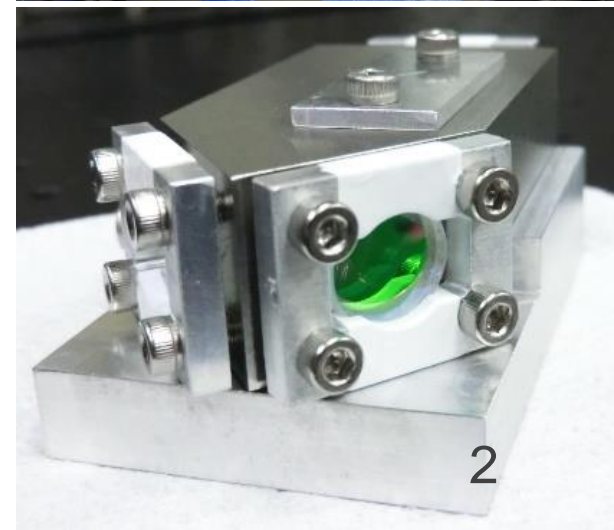
レーザー干渉計による精密距離計測

道村唯太

東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻

自己紹介

- 道村 唯太 (みちむら ゆうた)
東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻 助教
- **重力波望遠鏡**の開発とその
精密距離計測技術を利用した
基礎物理実験
 - 大型低温重力波望遠鏡KAGRA
のレーザー干渉計開発
 - 宇宙重力波望遠鏡DECIGO
 - Lorentz不変性の検証実験
 - 巨視的量子力学の検証実験
 - アクシオンの探査実験
などなど

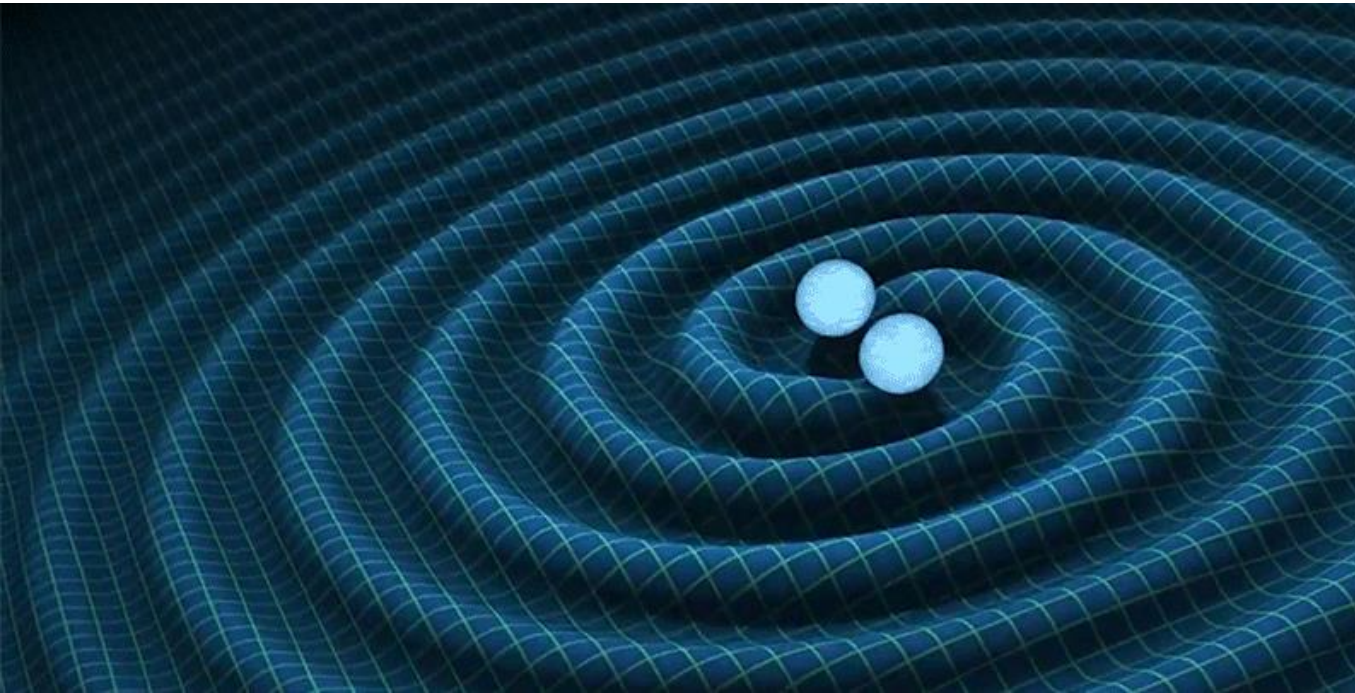
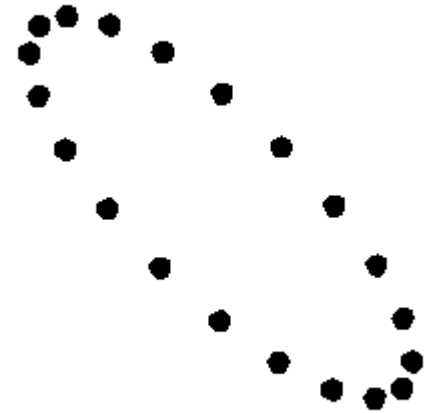
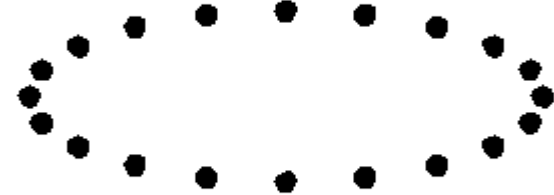


今回の目的

- 重力波検出を可能とするレーザー干渉計による精密距離計測の原理を知ってもらう
- できれば新しいアイデアを！
- 重力波の簡単な紹介
- レーザー干渉計の原理と雑音(特に量子雑音)
 - Michelson干渉計
 - Fabry-Pérot共振器
 - RSE干渉計
 - Sagnac干渉計 (Speedmeter方式)

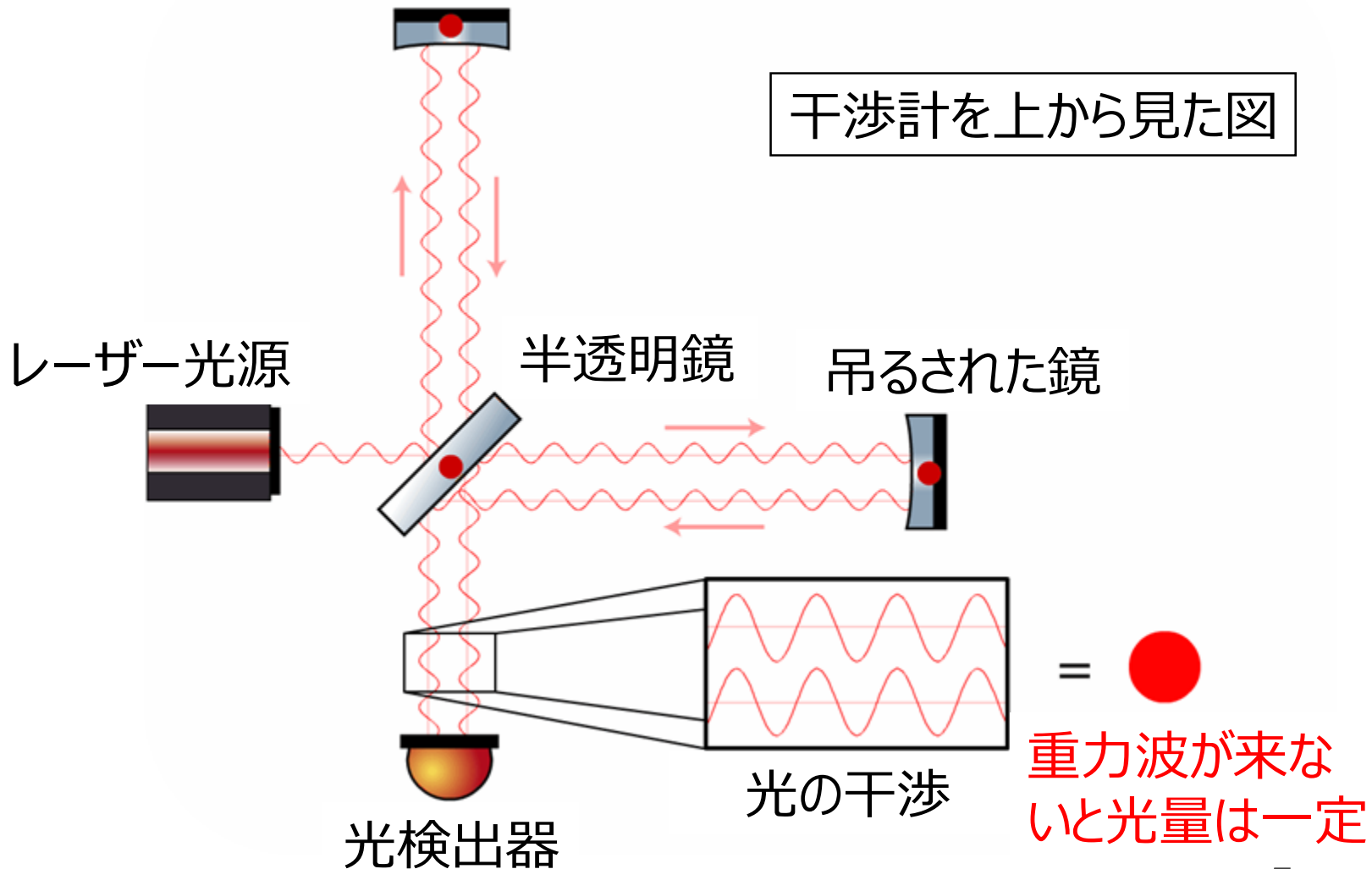
重力波とは？

- 光速で伝播する時空の歪み
- 質量を持つ物体の運動で生じる
- 四重極放射
- +モードとxモードの2つの偏極



レーザー干渉計型重力波望遠鏡

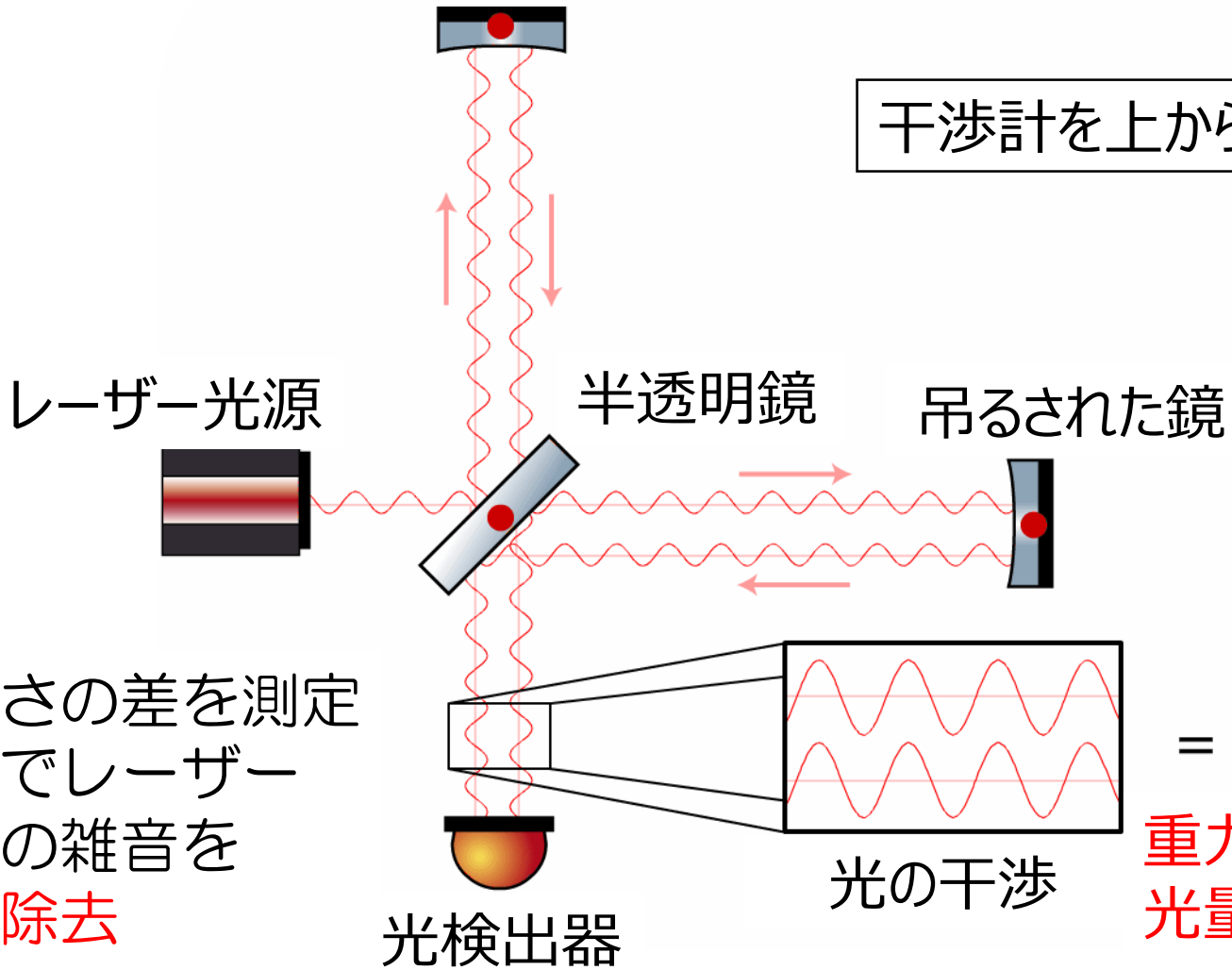
- 両腕の長さの差を干渉縞の変化として測定



レーザー干渉計型重力波望遠鏡

- 両腕の長さの差を干渉縞の変化として測定

干渉計を上から見た図



両腕の長さの差を測定することでレーザー光源由来の雑音を同相雑音除去

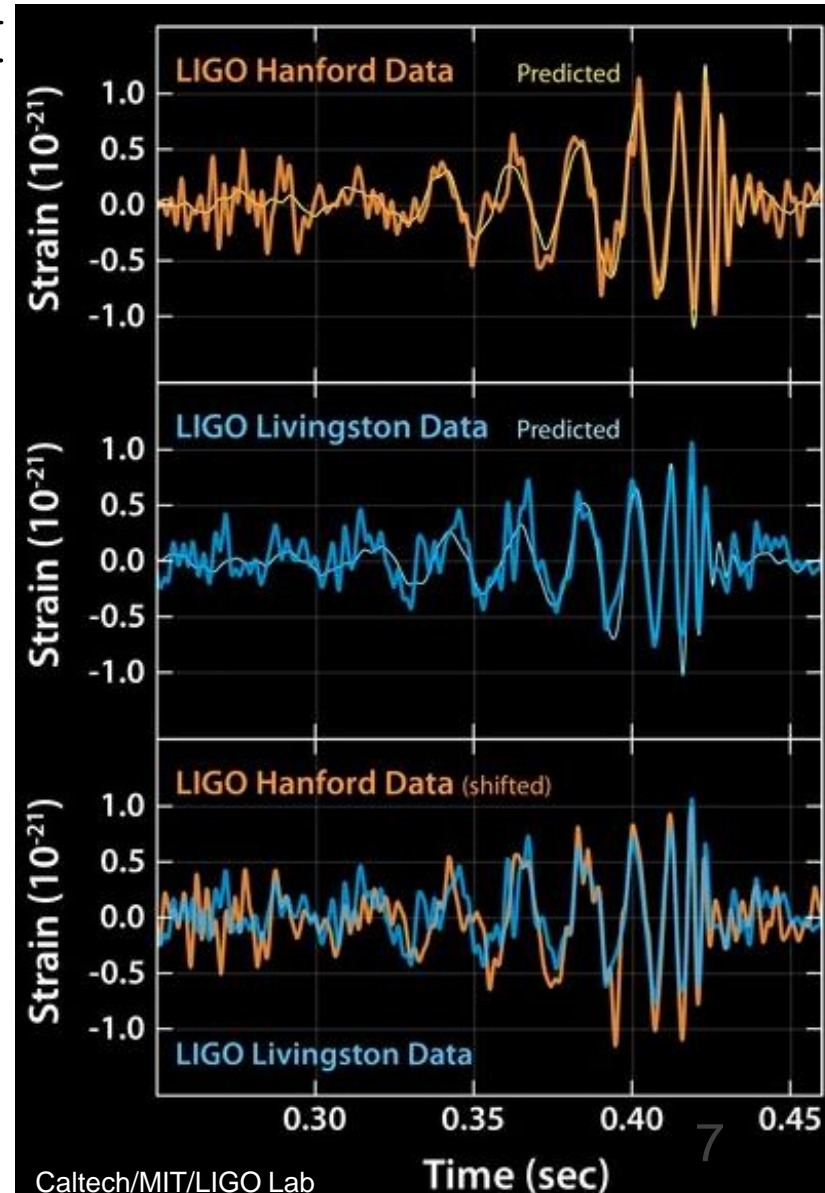
重力波による空間の歪み量

- GW150914の空間の歪み量
 $h \sim 10^{-21}$

- 距離の変化量で表す

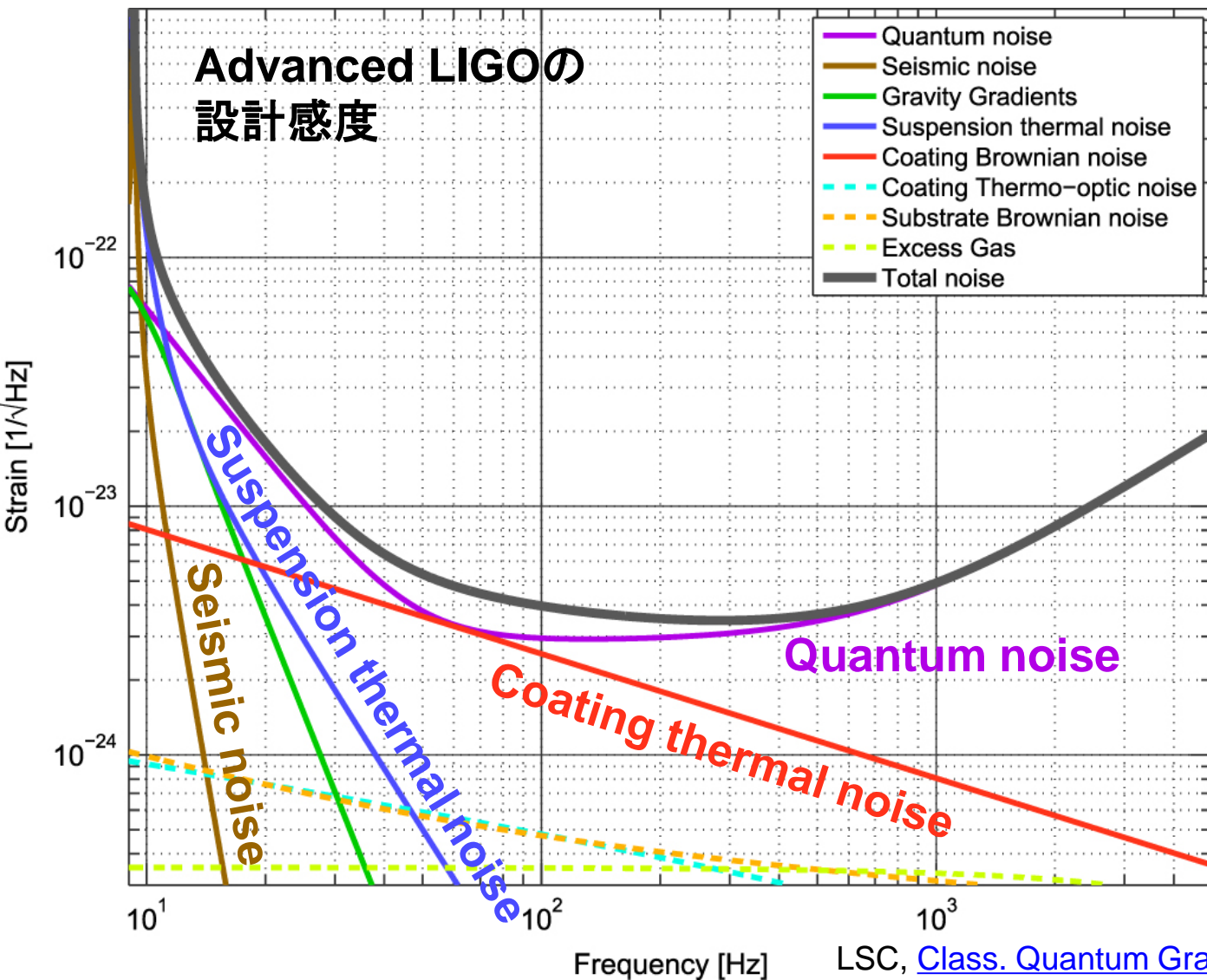
$$h = \frac{\delta L}{L}$$

- LIGOの場合 $L=4$ kmなので
 $\delta L = 4e-18$ m
陽子の大きさの1/1000
- こんなことできるの？



重力波望遠鏡の雑音源

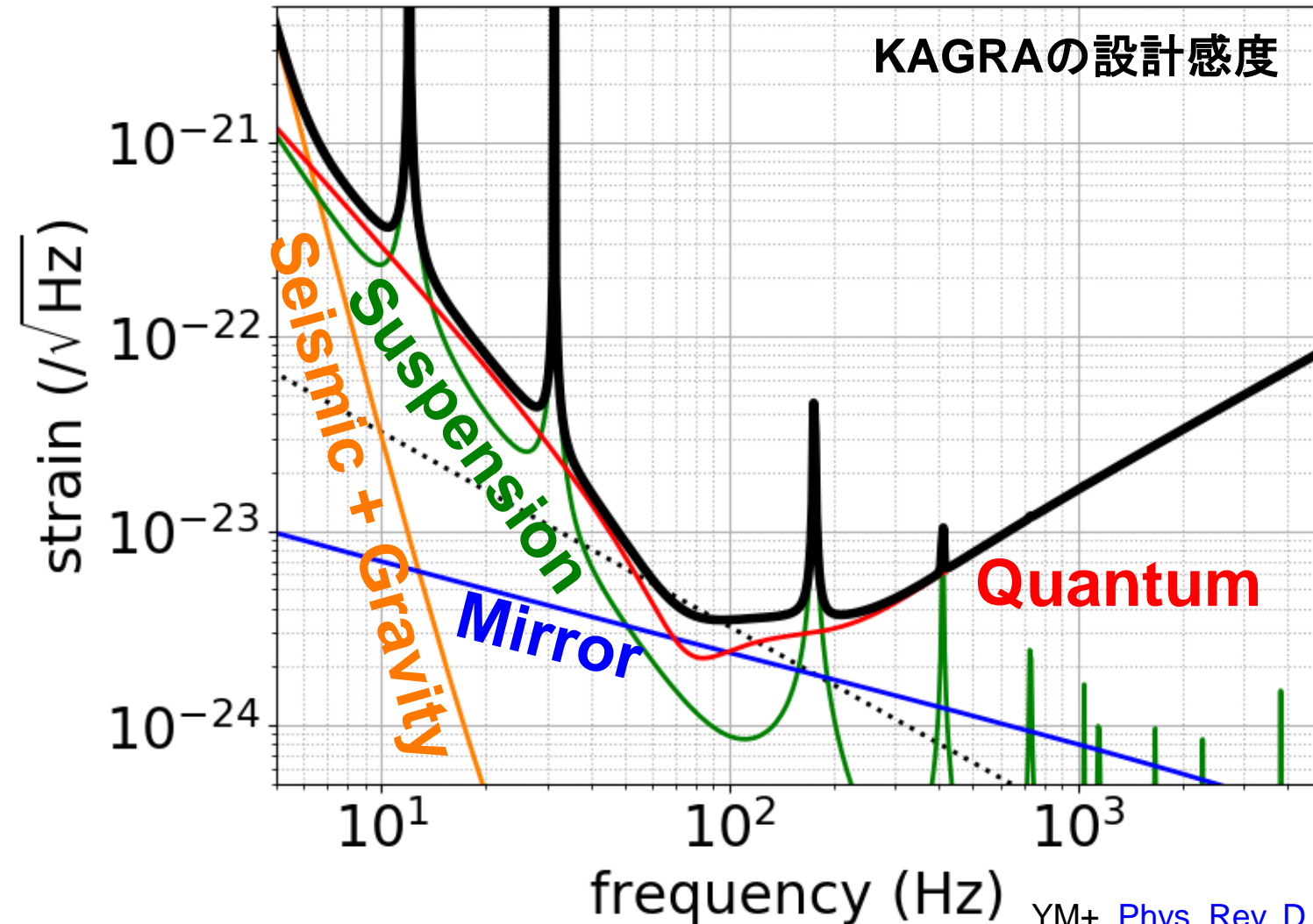
- ほとんどの領域で量子雑音



他にも
レーザー強度雑音
レーザー周波数雑音
回路雑音
などなど

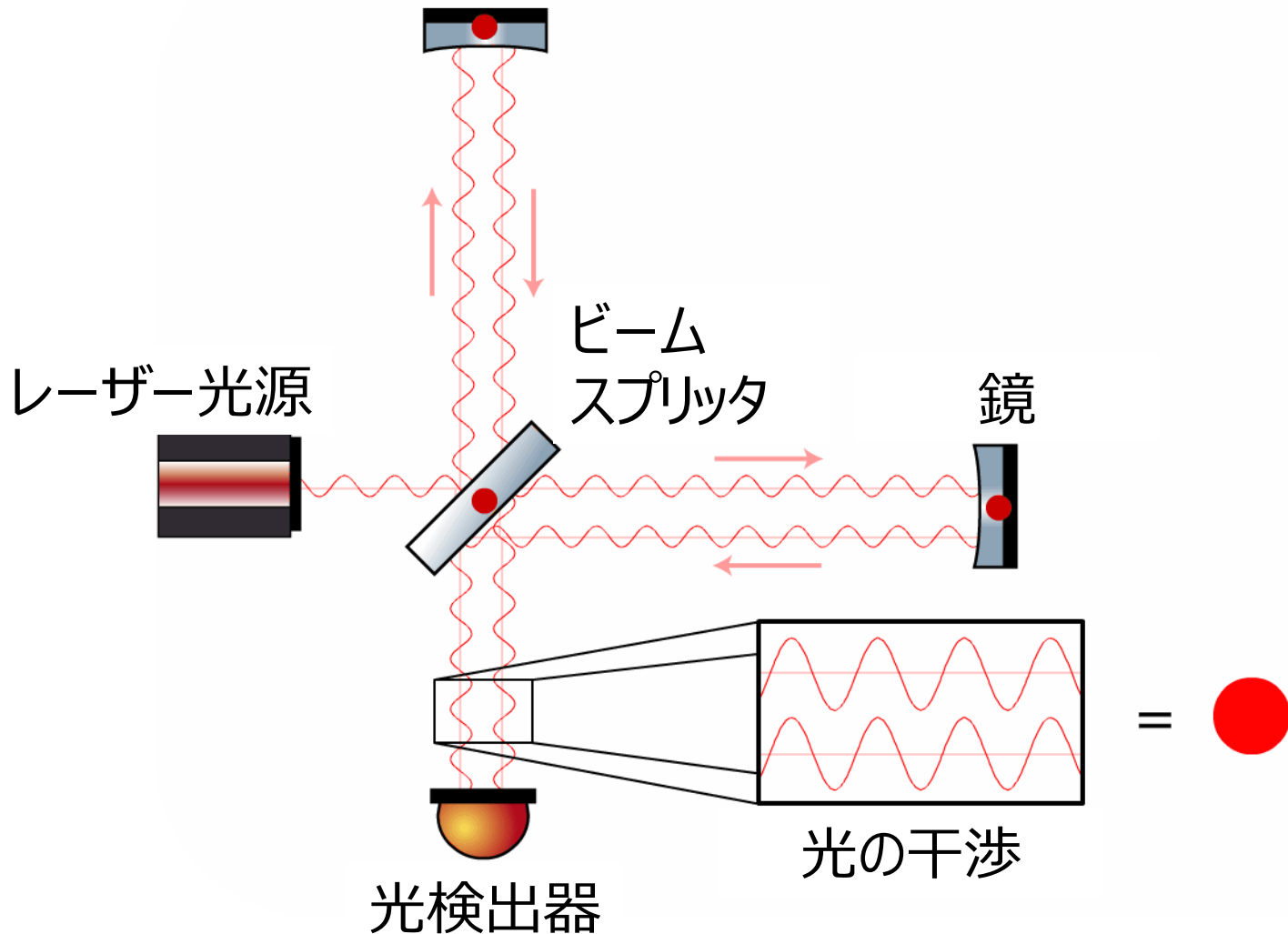
重力波望遠鏡の雑音源

- ほとんどの領域で量子雑音



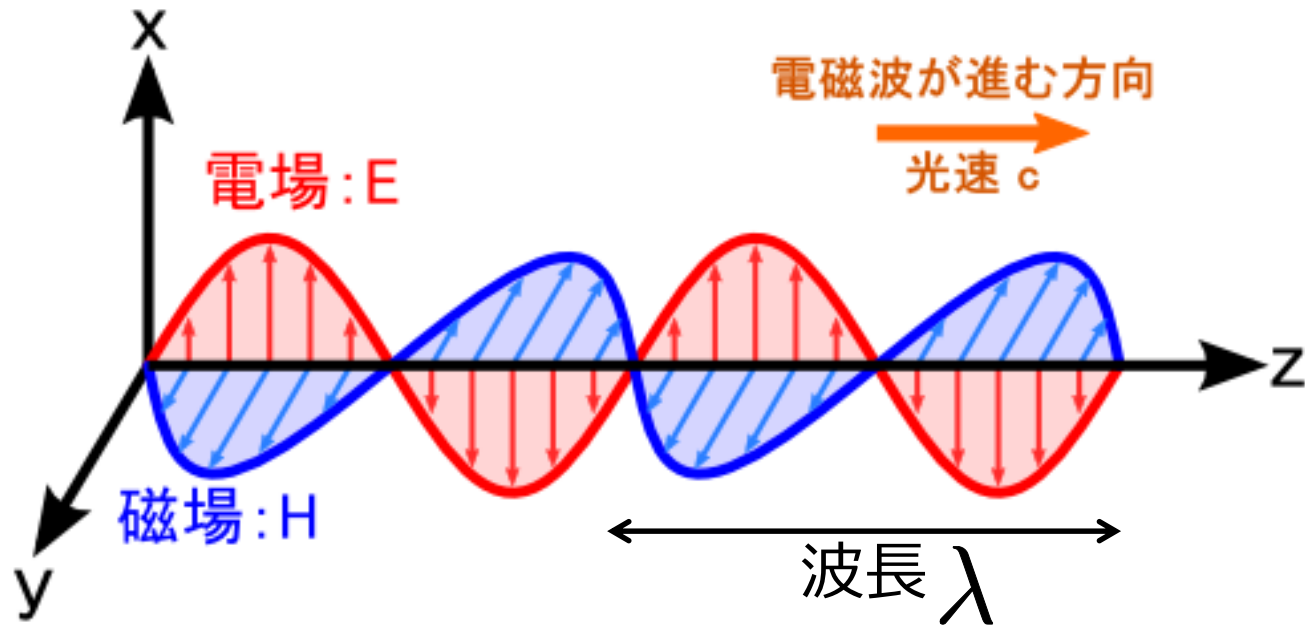
Michelson干渉計

- 両腕の長さの差を測定する装置



レーザー光

- 電磁波



- レーザー光の電場は下記のように書ける

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \phi)}$$

電場振幅

レーザーの
角周波数 位相

$$\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}$$

L進んだ時の位相

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

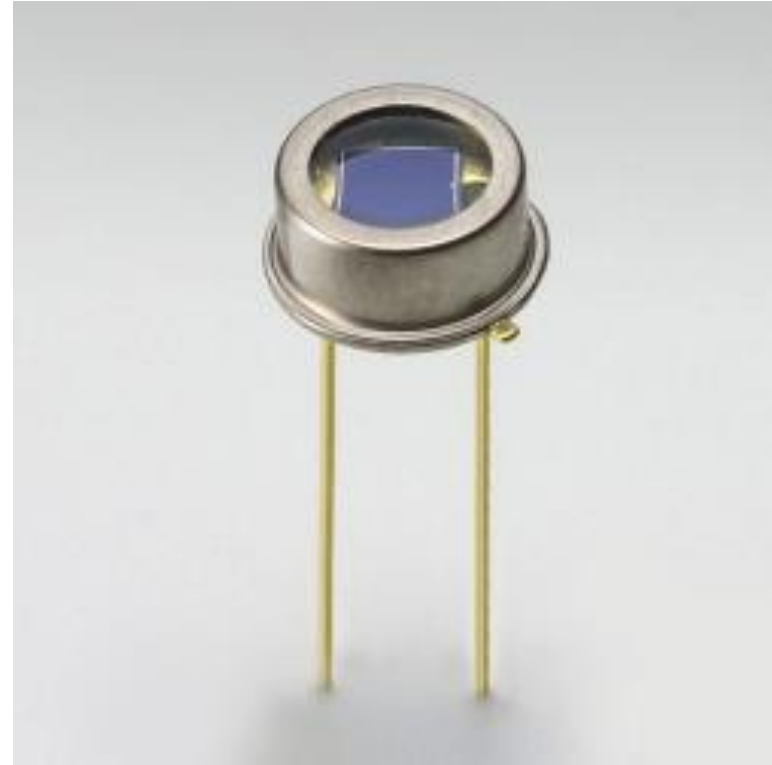
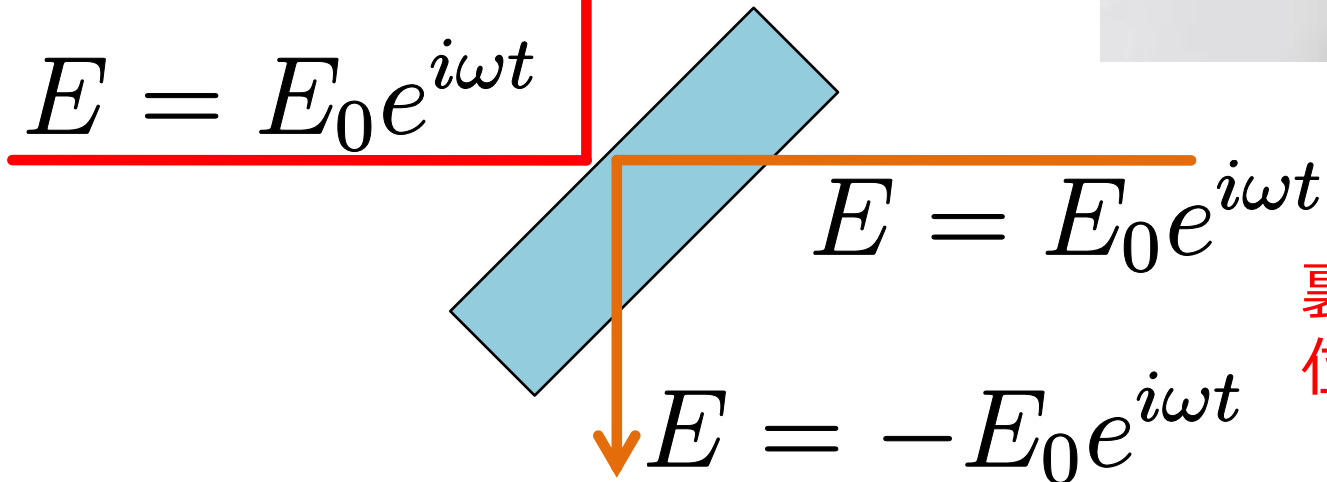
レーザー光の検出と反射

- 光検出器(フォトダイオード)
光子を電子(電流)に変換
光強度(振幅の二乗)を検出

$$P = |E|^2 = E_0^2$$

$$E = E_0 e^{i\omega t}$$

- 反射



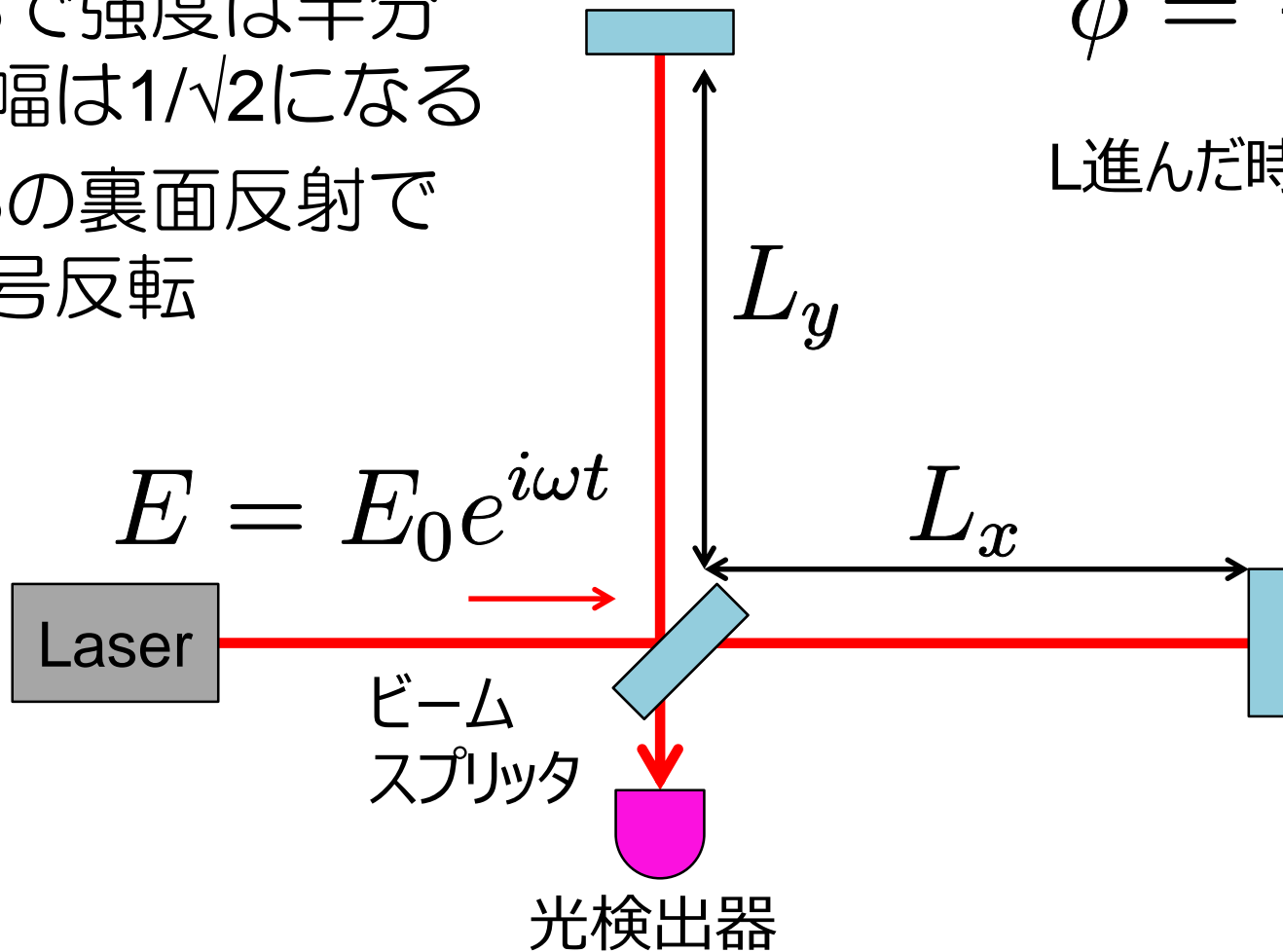
裏面からの反射では
位相が反転する！

Michelson干渉計の出力

- 光検出器で受ける光強度は？
- BSで強度は半分
振幅は $1/\sqrt{2}$ になる
- BSの裏面反射で
符号反転

$$\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}$$

L進んだ時の位相

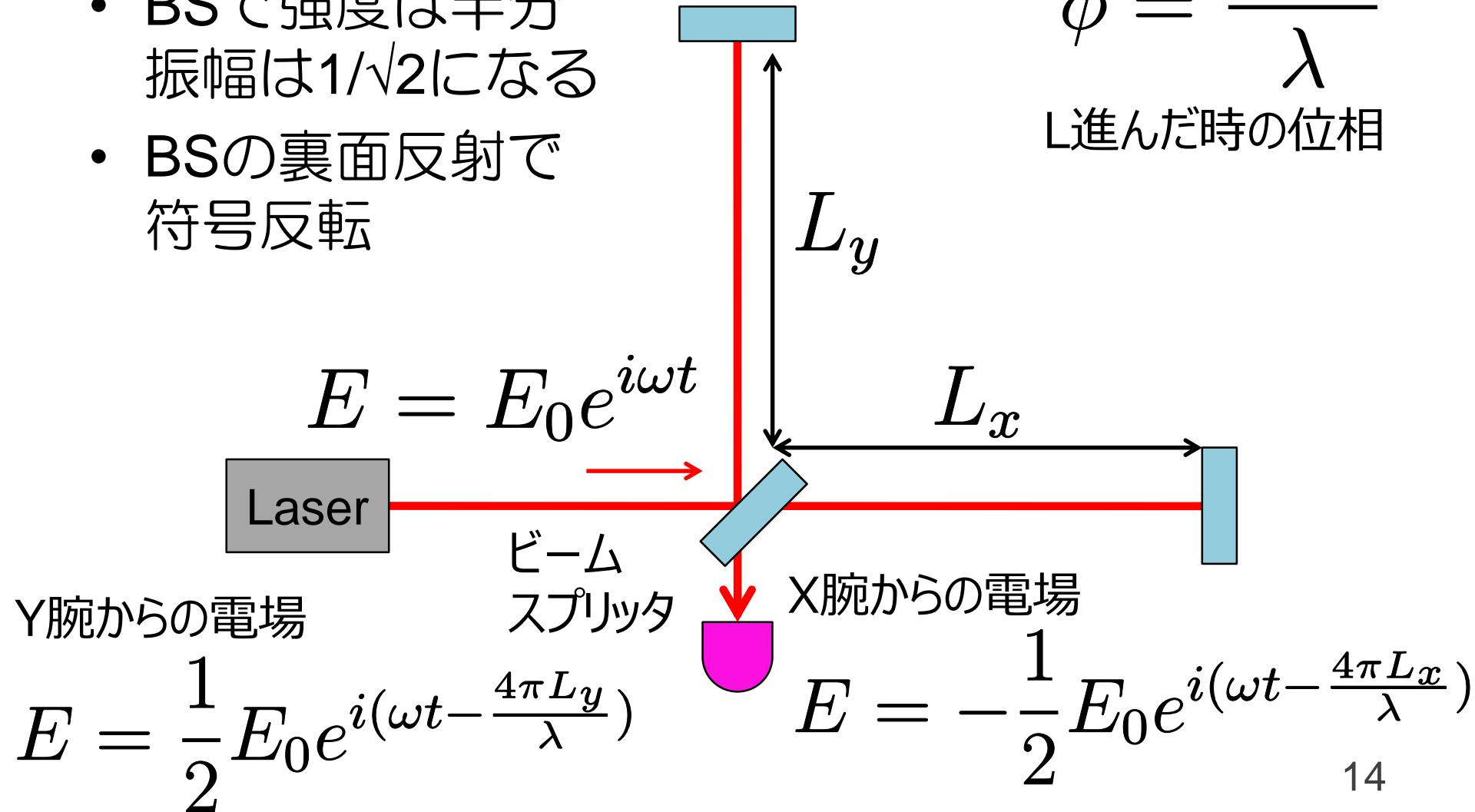


Michelson干渉計の出力

- 光検出器で受ける光強度は？
- BSで強度は半分
振幅は $1/\sqrt{2}$ になる
- BSの裏面反射で
符号反転

$$\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}$$

L進んだ時の位相



Michelson干渉計の出力

- 光検出器で受ける光強度は？

Y腕からの電場

X腕からの電場

$$P_{\text{PD}} = \left| \frac{1}{2} E_0 e^{i(\omega t - \frac{4\pi L_y}{\lambda})} - \frac{1}{2} E_0 e^{i(\omega t - \frac{4\pi L_x}{\lambda})} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} |E_0|^2 \left| e^{-i\frac{4\pi L_y}{\lambda}} - e^{-i\frac{4\pi L_x}{\lambda}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} P_0 \left(1 - \cos \frac{4\pi L_-}{\lambda} \right)$$

↑
入射光強度

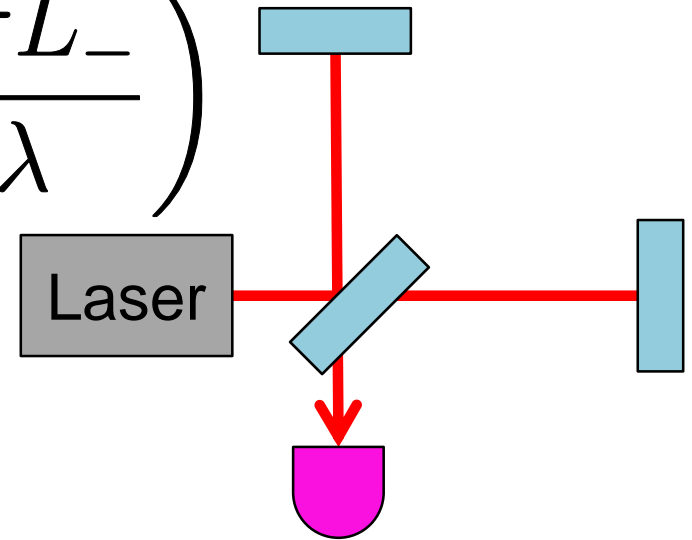
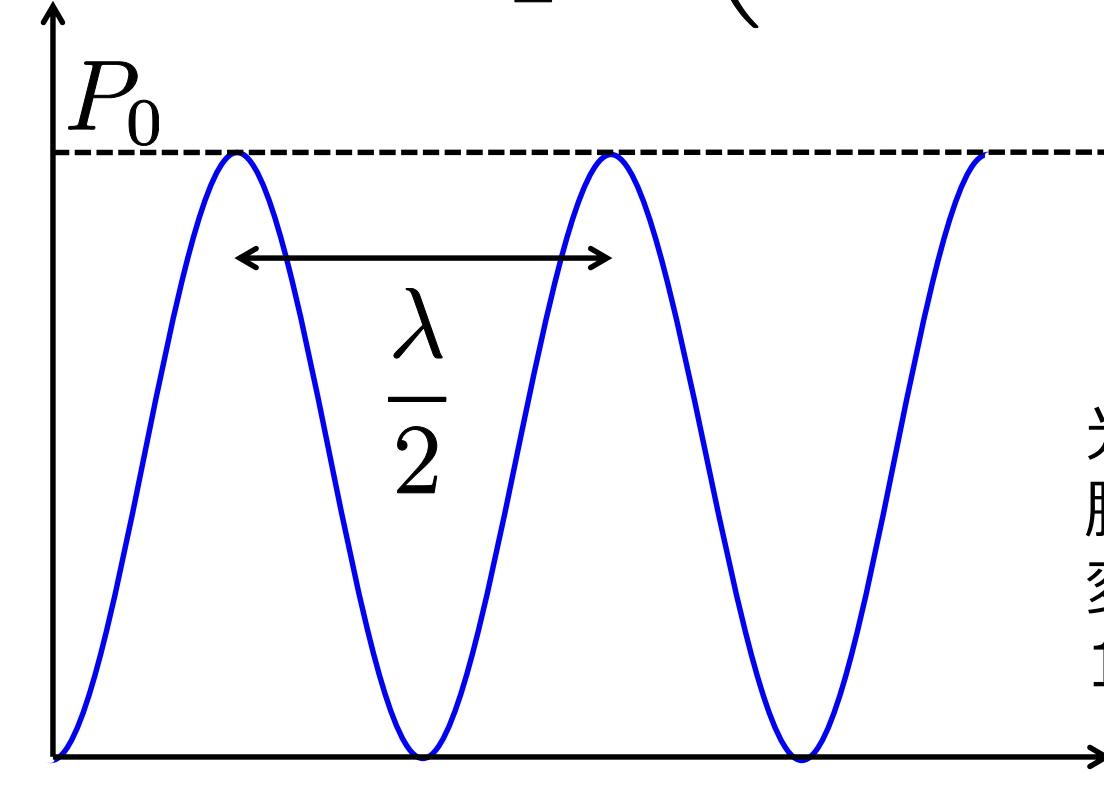
$$L_- = L_y - L_x$$

↑
両腕の長さの差

Michelson干渉計の出力

- 腕の長さの差の変化で光量が変化する(光の干渉)

$$P_{\text{PD}} = \frac{1}{2} P_0 \left(1 - \cos \frac{4\pi L_-}{\lambda} \right)$$

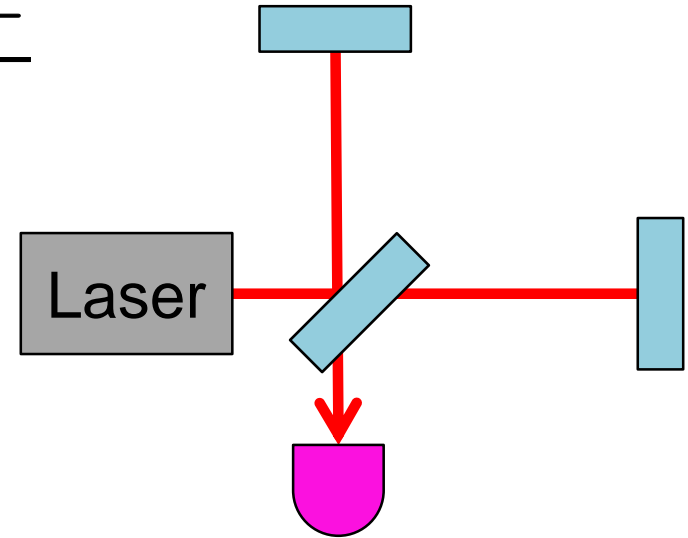
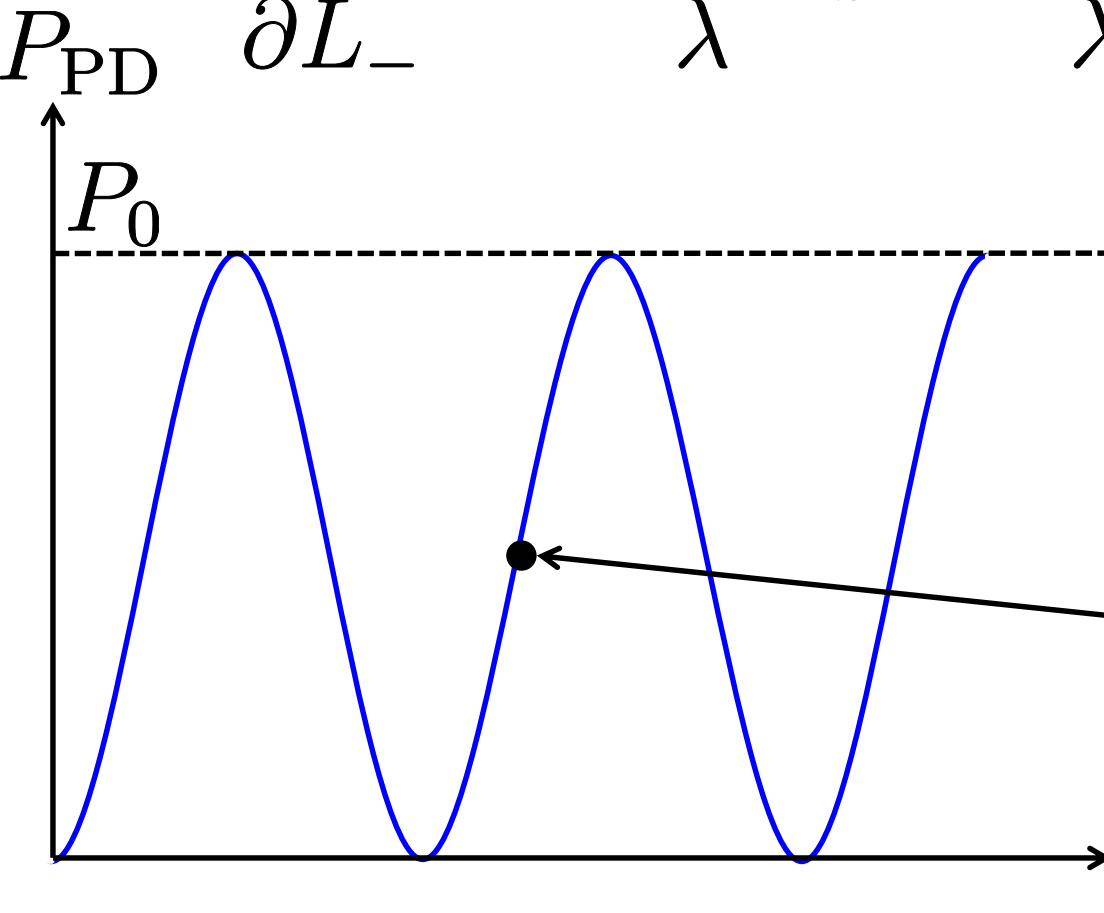


光検出器では
腕の長さの差が波長の半分
変化すると
1回分の明暗が起こる

Michelson干渉計の出力

- 光量変化の傾きは？

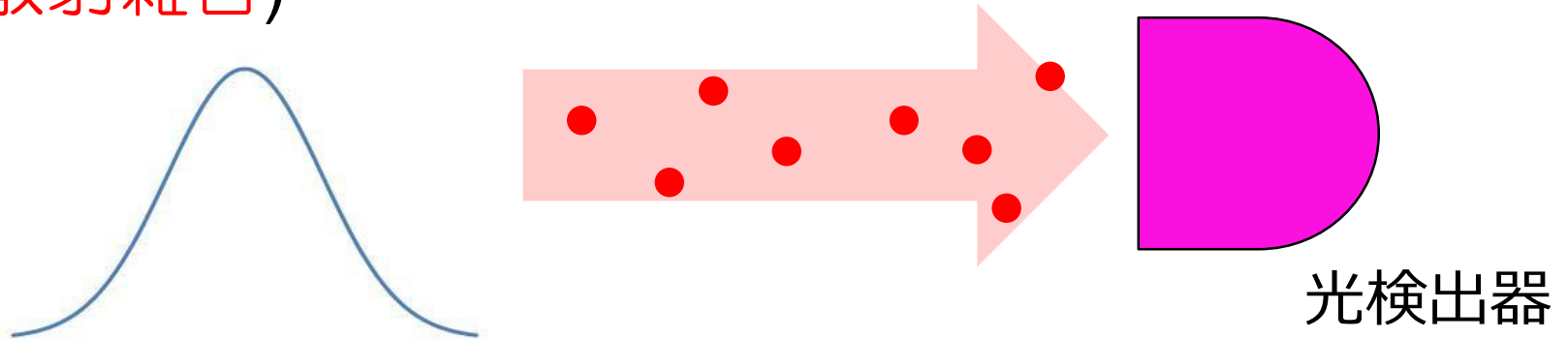
$$\frac{\partial P_{\text{PD}}}{\partial L_{-}} = \frac{2\pi P_0}{\lambda} \sin \frac{4\pi L_{-}}{\lambda}$$



光検出器での光量変化から腕の長さの差の変化がわかる

光検出器の検出限界

- 光検出器に届く光子の数は量子力学的に揺らぐ
(**散射雑音**)



- 散射雑音の大きさは

$$\delta P_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{2hcP_{\text{PD}}}{\eta\lambda}}$$

プランク定数

量子効率

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$$

Michelson干渉計の長さ検出限界

- 光量変化の割合 $\frac{\partial P_{\text{PD}}}{\partial L_-} = \frac{2\pi P_0}{\lambda} \sin \frac{4\pi L_-}{\lambda}$

- 散射雑音

$$\delta P_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{2hcP_{\text{PD}}}{\eta\lambda}} = \sqrt{\frac{hcP_0}{\eta\lambda} \left(1 - \cos \frac{4\pi L_-}{\lambda}\right)}$$

- 長さ検出限界

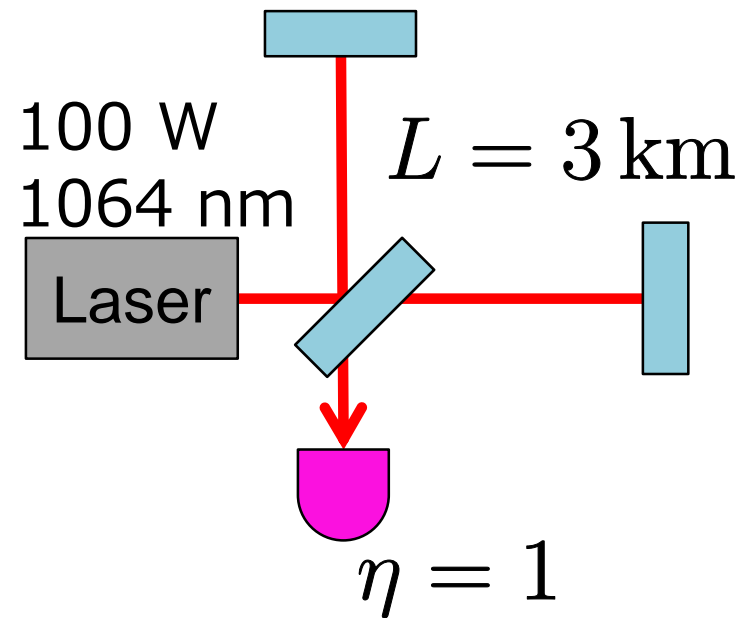
$$\delta L_{\text{shot}} = \delta P_{\text{shot}} \left(\frac{\partial P_{\text{PD}}}{\partial L_-}\right)^{-1} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{hc\lambda}{2\eta P_0}}$$

入射パワーが大きいほど、短い距離を検出できる
ダークフリンジ($P_{\text{PD}}=0$)で最小

Michelson干渉計の長さ検出限界

- 長さ検出限界を計算してみる

$$h_{\text{shot}} = \frac{\delta L_{\text{shot}}}{L}$$
$$= \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{hc\lambda}{2\eta P_0}}$$



$$h_{\text{shot}} \sim 2 \times 10^{-21} / \sqrt{\text{Hz}}$$

- 単純なMichelson干渉計でもここまで行ける
- より高感度にするには？

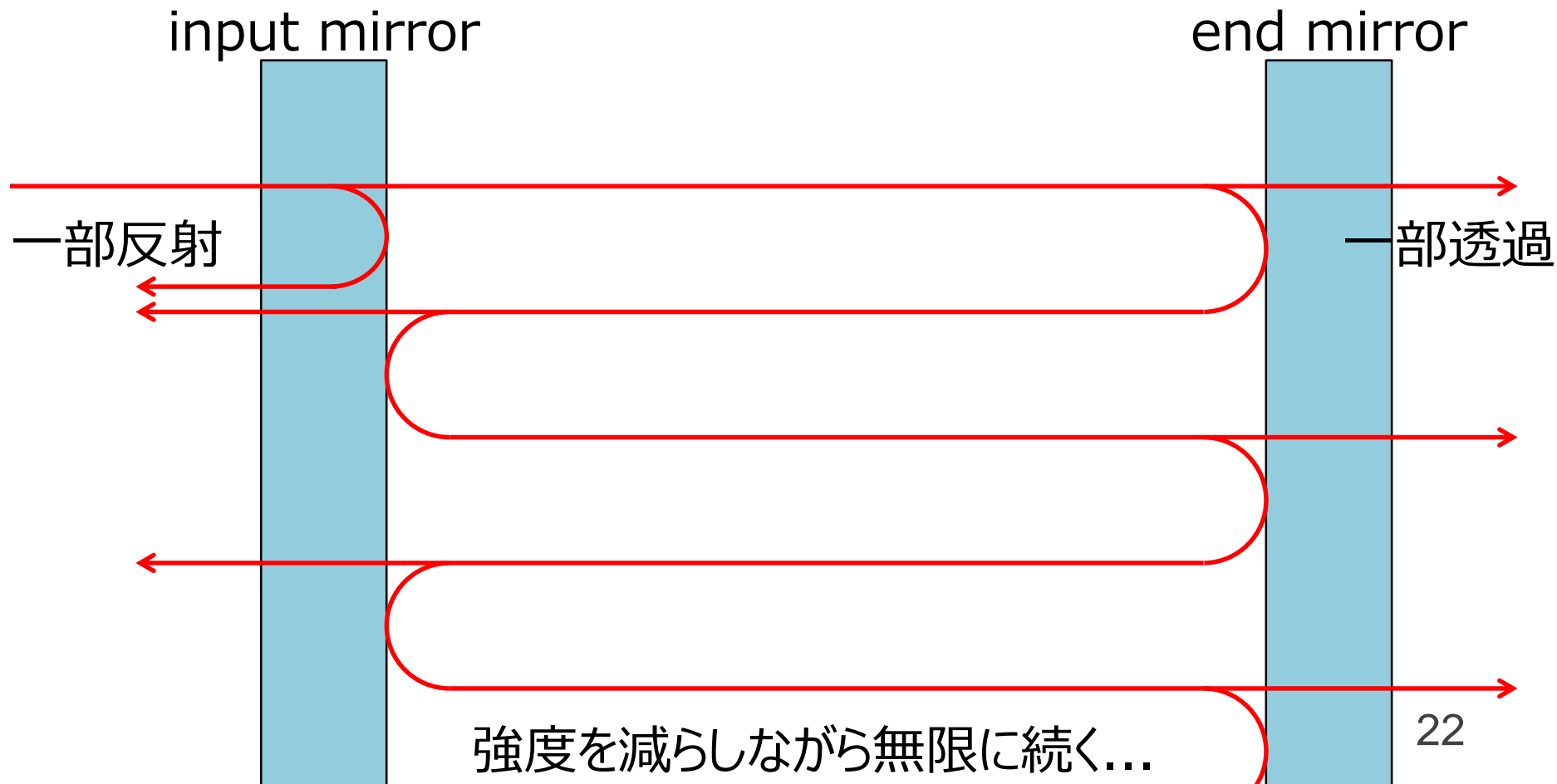
どうすればいいか？

- 腕の長さを長くすると、重力波による変化量が大きくなる
 - 腕の長さを10~100倍にすればよい地球上では難しい.....
- 腕を何度も往復させ、実効的に腕の長さをかせぐ
 - **Fabry-Pérot共振器**



Fabry-Pérot共振器の原理

- 2枚の鏡からなる合わせ鏡



Fabry-Pérot共振器の原理

- 電場を計算してみる

振幅反射率 振幅透過率

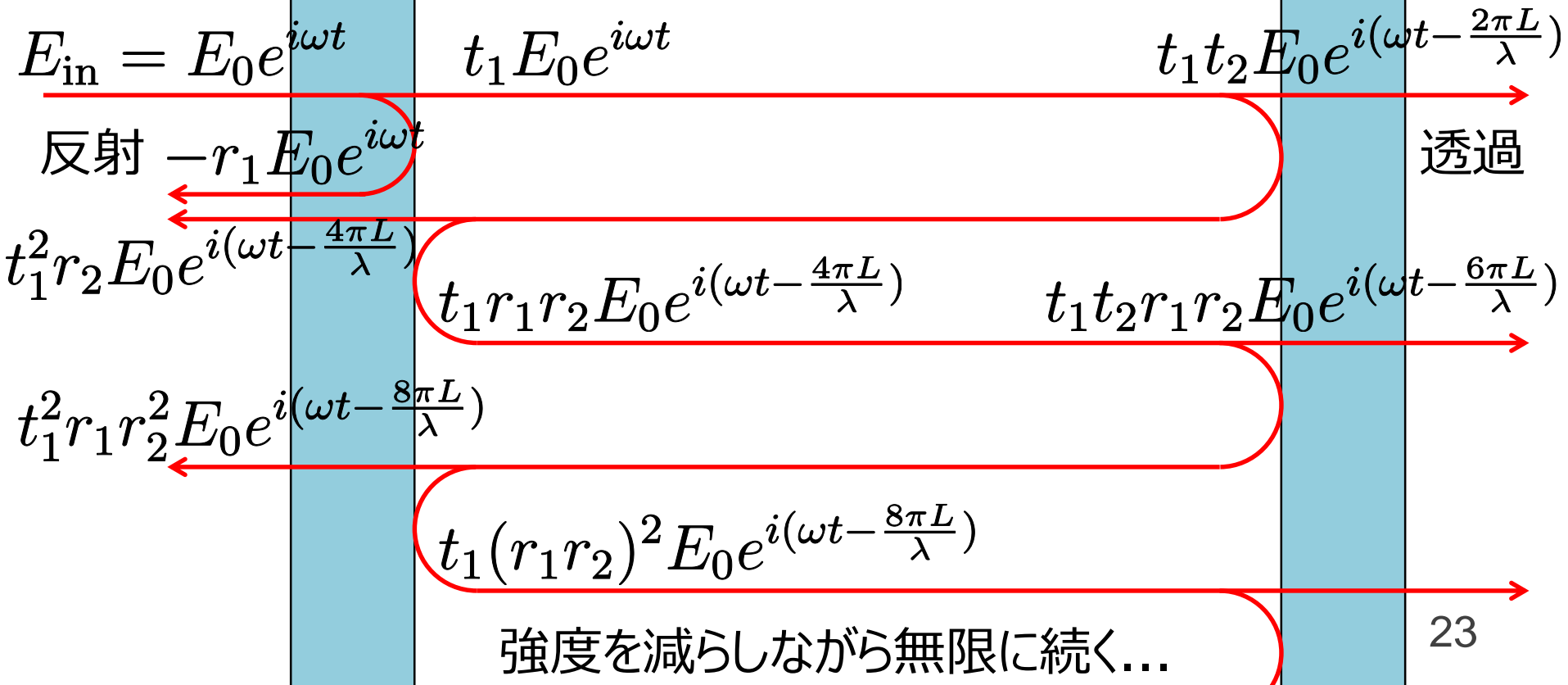
$$r_1, t_1$$

input mirror

$$r_2, t_2$$

end mirror

L



Fabry-Pérot共振器の原理

- 共振器内の電場

$$E_{\text{cav}} = t_1 E_0 e^{i\omega t} + t_1 r_1 r_2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{4\pi L}{\lambda})} + t_1 (r_1 r_2)^2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{8\pi L}{\lambda})} + \dots$$

$$= (t_1 + t_1 r_1 r_2 2e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}} + t_1 (r_1 r_2)^2 2e^{i\frac{8\pi L}{\lambda}} + \dots) E_0 e^{i\omega t}$$

公比 $r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}$ の無限等比級数

入射電場

$$= \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} E_{\text{in}}$$

Fabry-Pérot共振器の原理

- 反射光の電場

$$\begin{aligned} E_{\text{refl}} &= -r_1 E_0 e^{i\omega t} + t_1^2 r_2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{4\pi L}{\lambda})} + t_1^2 r_1 r_2^2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{8\pi L}{\lambda})} + \dots \\ &= (-r_1 + t_1^2 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}} + t_1^2 r_1 r_2^2 2 e^{i\frac{8\pi L}{\lambda}} + \dots) E_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

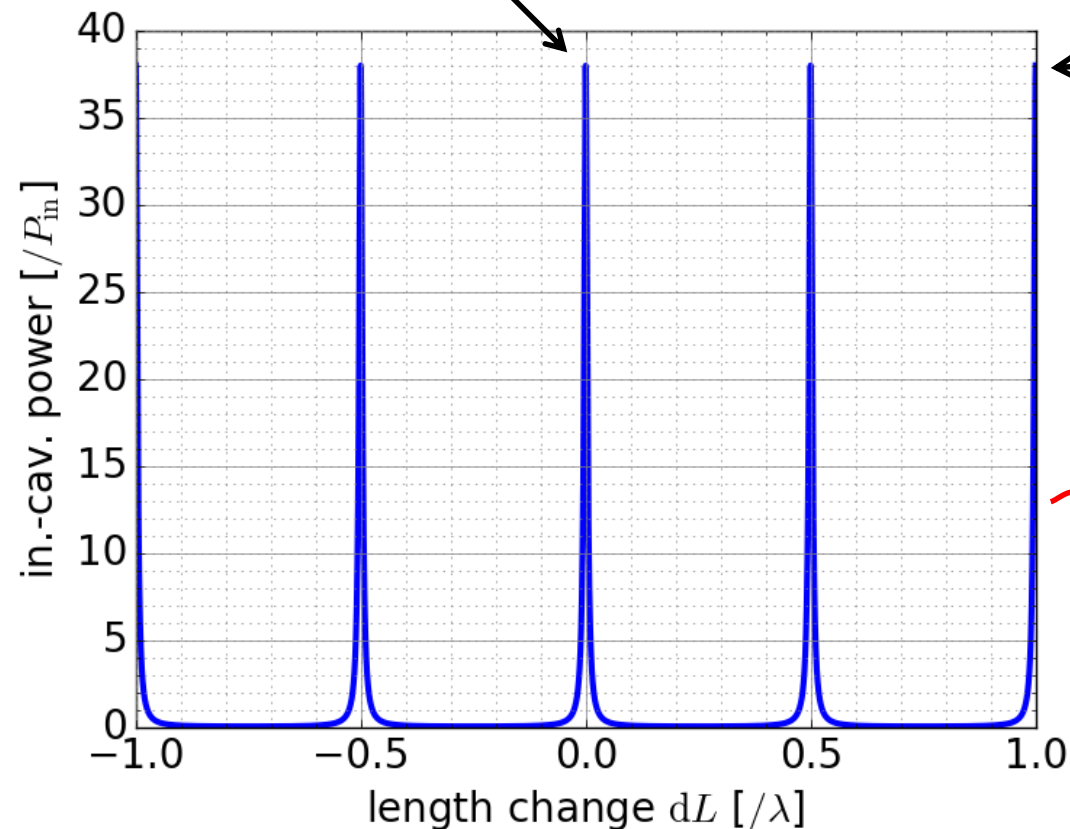
公比 $r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}$ の無限等比級数

$$= \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} \right) E_{\text{in}}$$

FPの共振器内強度

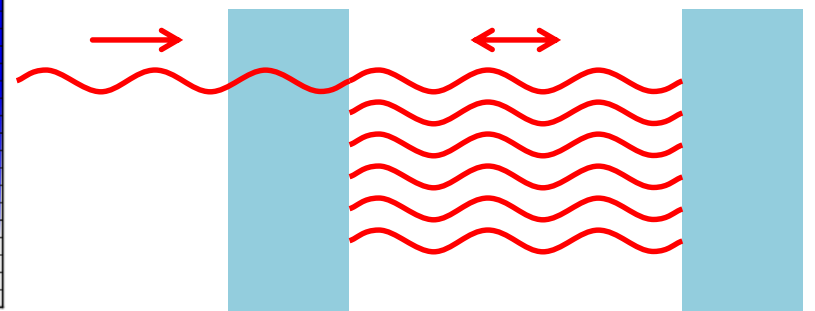
- 共振器内の光強度 $|E_{\text{cav}}|^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i \frac{4\pi L}{\lambda}}} \right|^2 P_{\text{in}}$

共振点



共振器内光強度は
共振点で
入射光強度の何倍
にもなる！

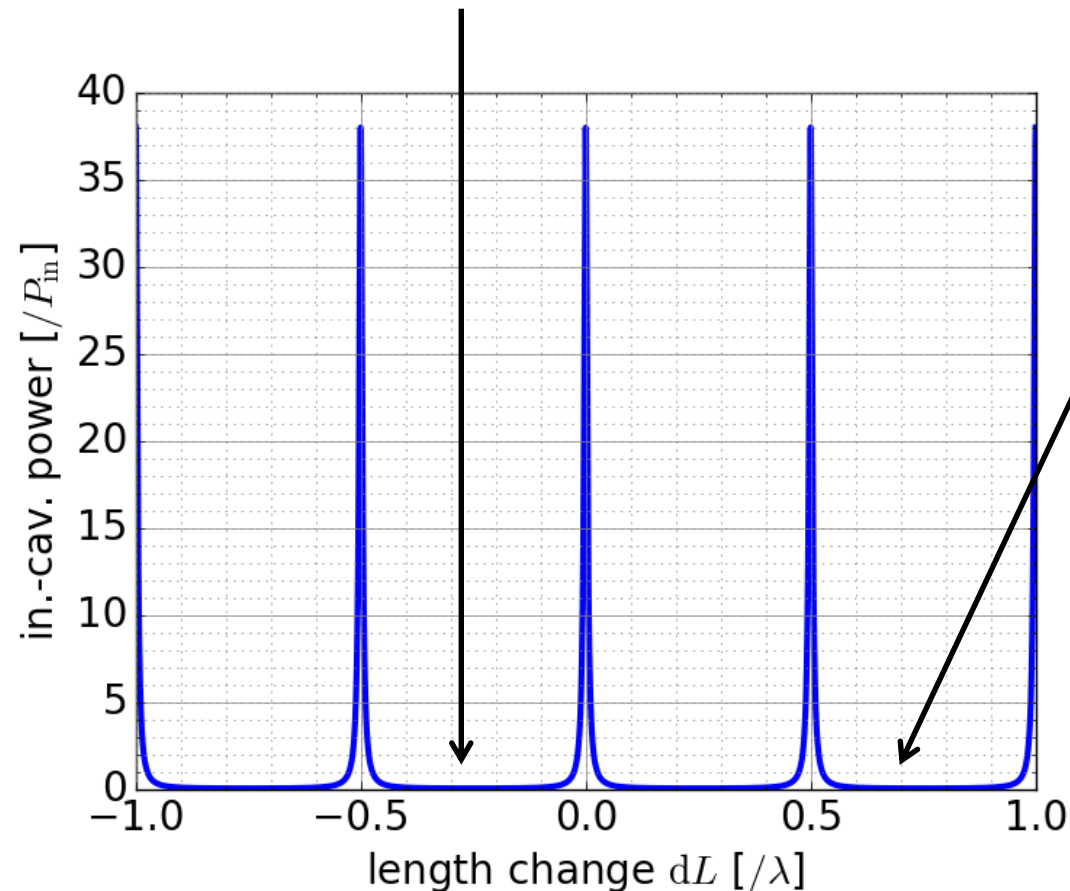
強め合う



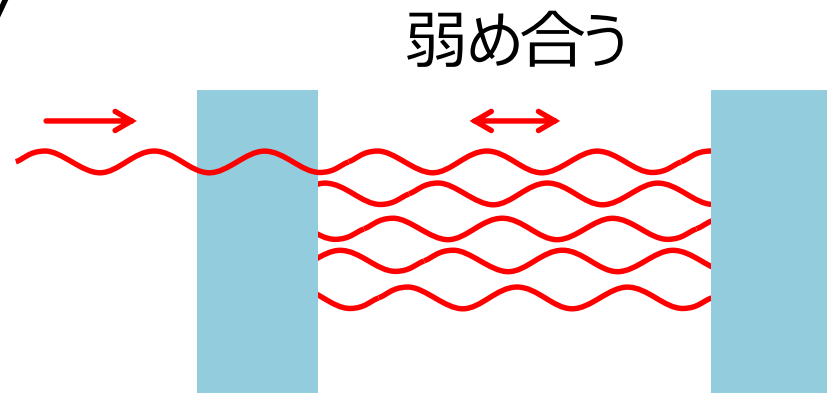
FPの共振器内強度

- 共振器内の光強度 $|E_{\text{cav}}|^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i \frac{4\pi L}{\lambda}}} \right|^2 P_{\text{in}}$

反共振点



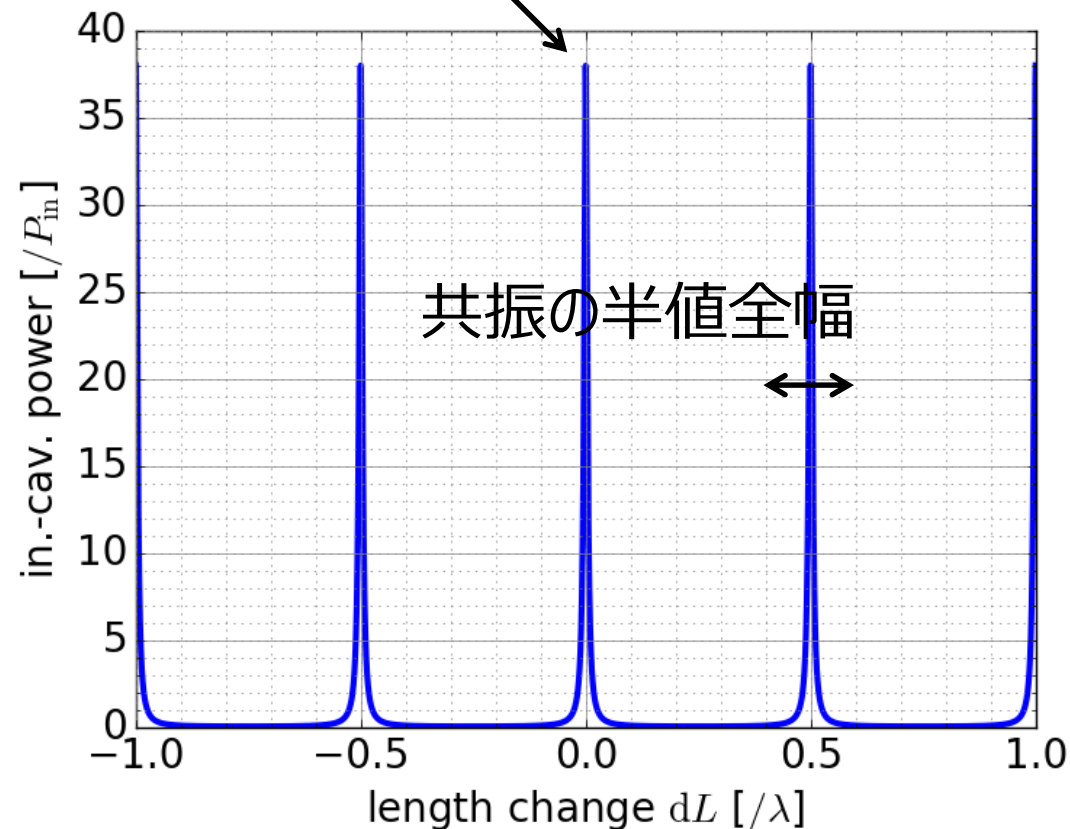
共振器内光強度は
反共振点で
ほとんどなくなる



FPのフィネス

- 共振器内の光強度 $|E_{\text{cav}}|^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i \frac{4\pi L}{\lambda}}} \right|^2 P_{\text{in}}$

共振点 \longleftrightarrow 共振点間の間隔 $\frac{\lambda}{2}$



この比で共振の鋭さを表す

$$\frac{\text{共振点間の間隔}}{\text{共振の半値全幅}}$$

$$= \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \equiv \mathcal{F}$$

フィネスと呼ぶ

鏡の反射率が高いほど
フィネスが高い

FPの平均折り返し回数

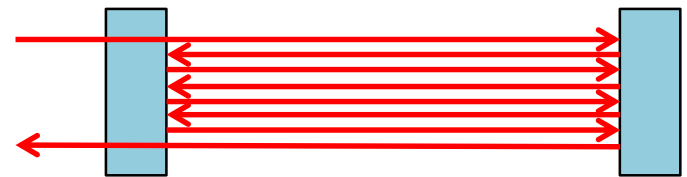
- 共振器内の光強度 $|E_{\text{cav}}|^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} \right|^2 P_{\text{in}}$

共振点での共振器内強度

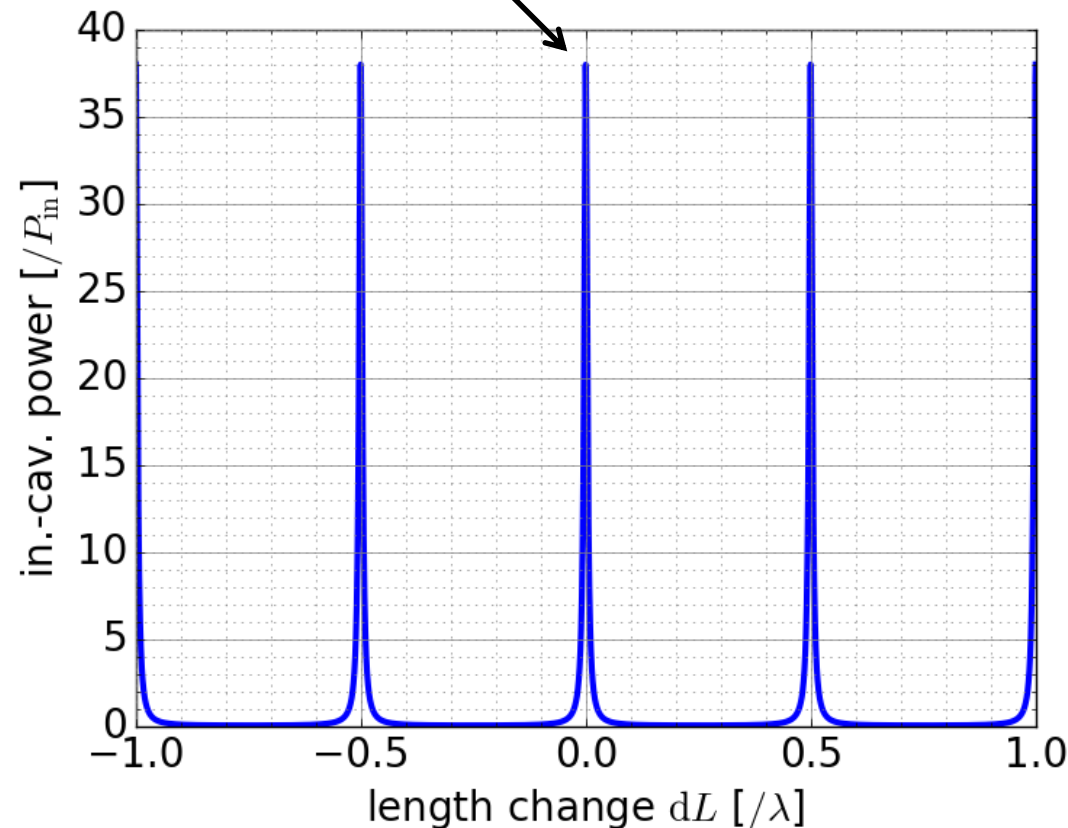
$$|E_{\text{cav}}|_{\text{max}}^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \right|^2 P_{\text{in}}$$

$$r_1 \sim 1, r_2 = 1 \text{ の場合} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\pi} P_{\text{in}}$$

平均折り返し回数



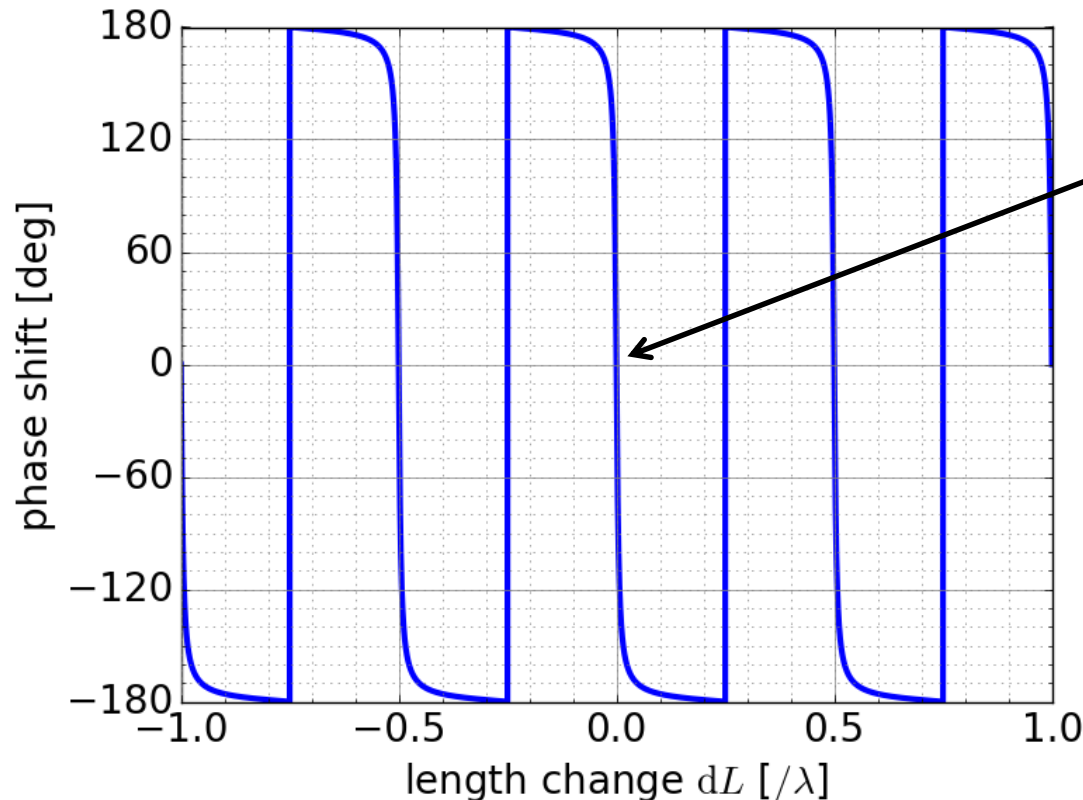
共振点



FPの反射光の位相

- 反射光の電場

$$E_{\text{refl}} = \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} \right) E_{\text{in}}$$



共振点で反射光の位相が急激に変化する

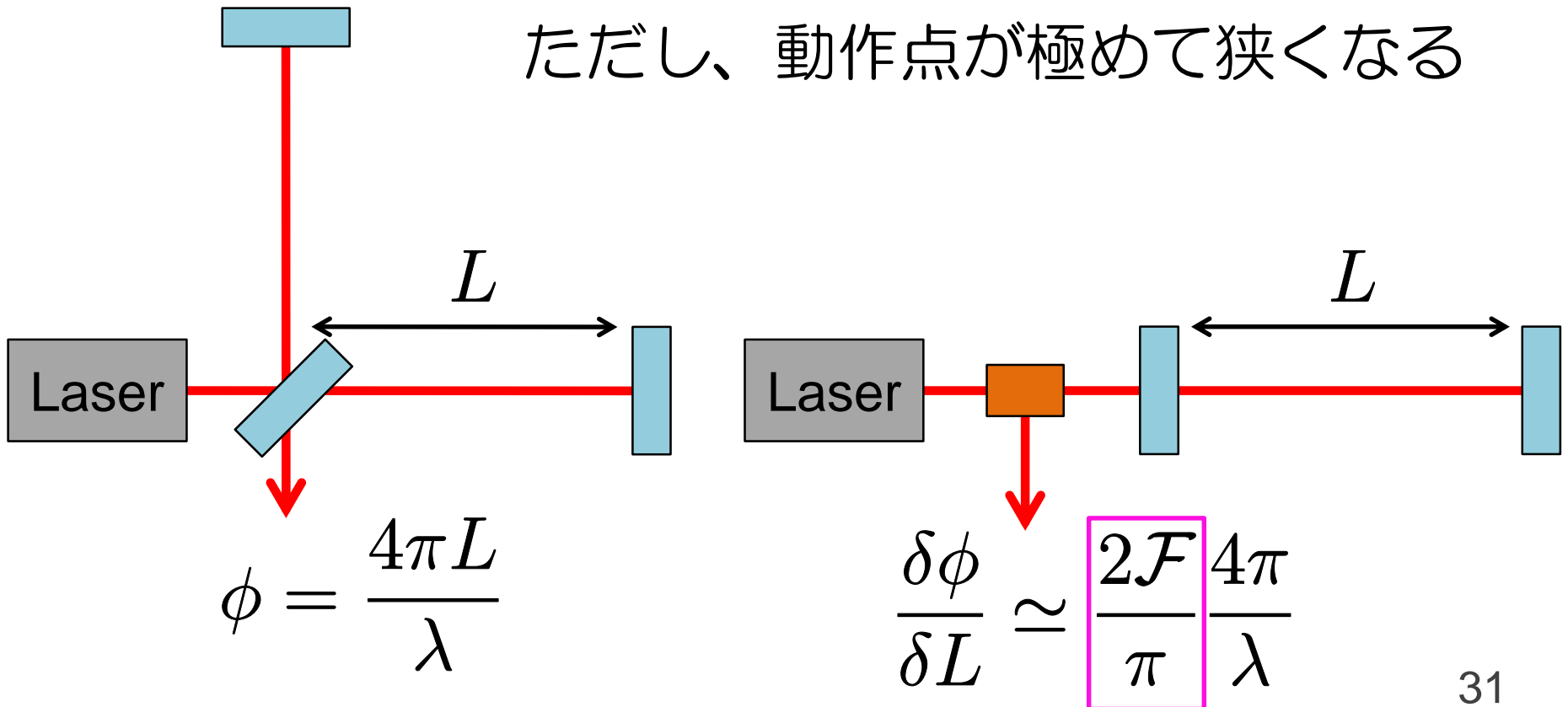
$$\frac{\delta\phi}{\delta L} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{4\pi}{\lambda}$$

平均折り返し回数

MichelsonとFPの違い

- 反射光の位相が $\frac{2\mathcal{F}}{\pi}$ 倍(約フィネス倍)される
→ 鏡の変位に対する感度が $\frac{2\mathcal{F}}{\pi}$ 倍！

ただし、動作点が極めて狭くなる

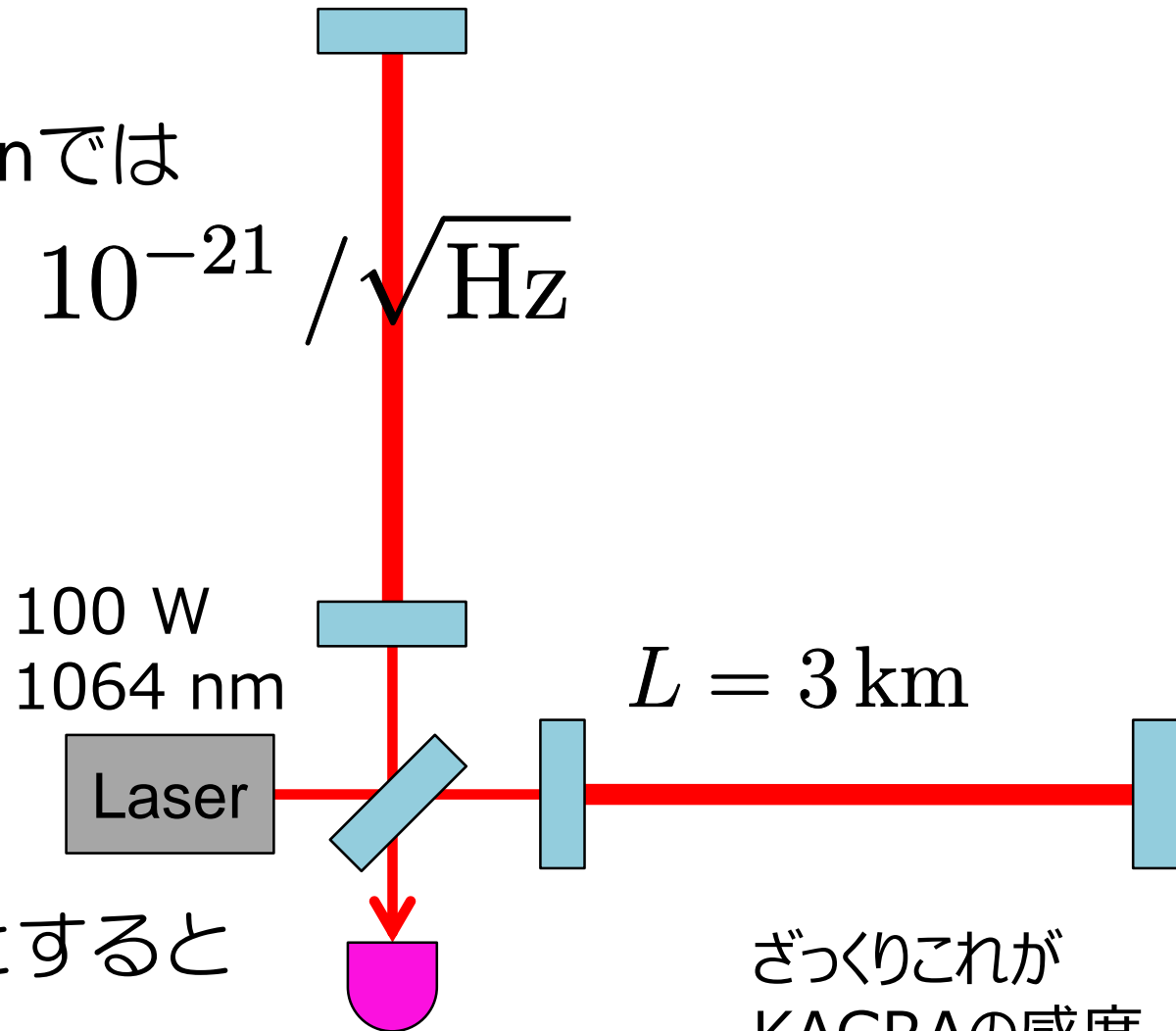


Fabry-Pérot-Michelson干渉計

- 変位感度を向上
- 単なるMichelsonでは

$$h_{\text{shot}} \sim 2 \times 10^{-21} / \sqrt{\text{Hz}}$$

だった



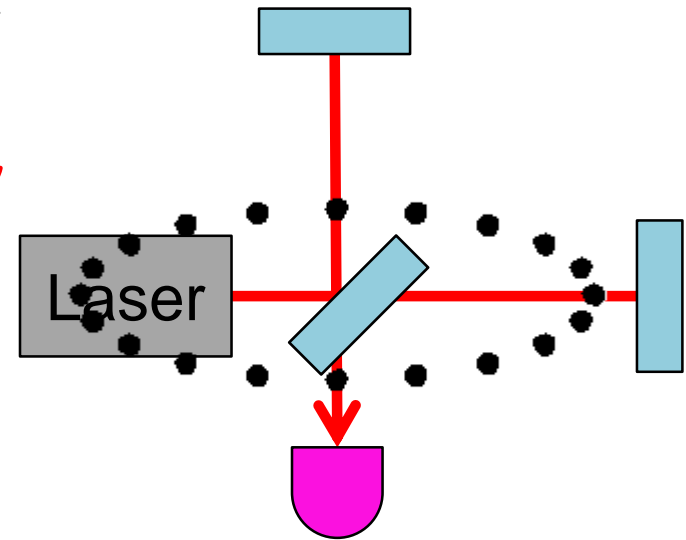
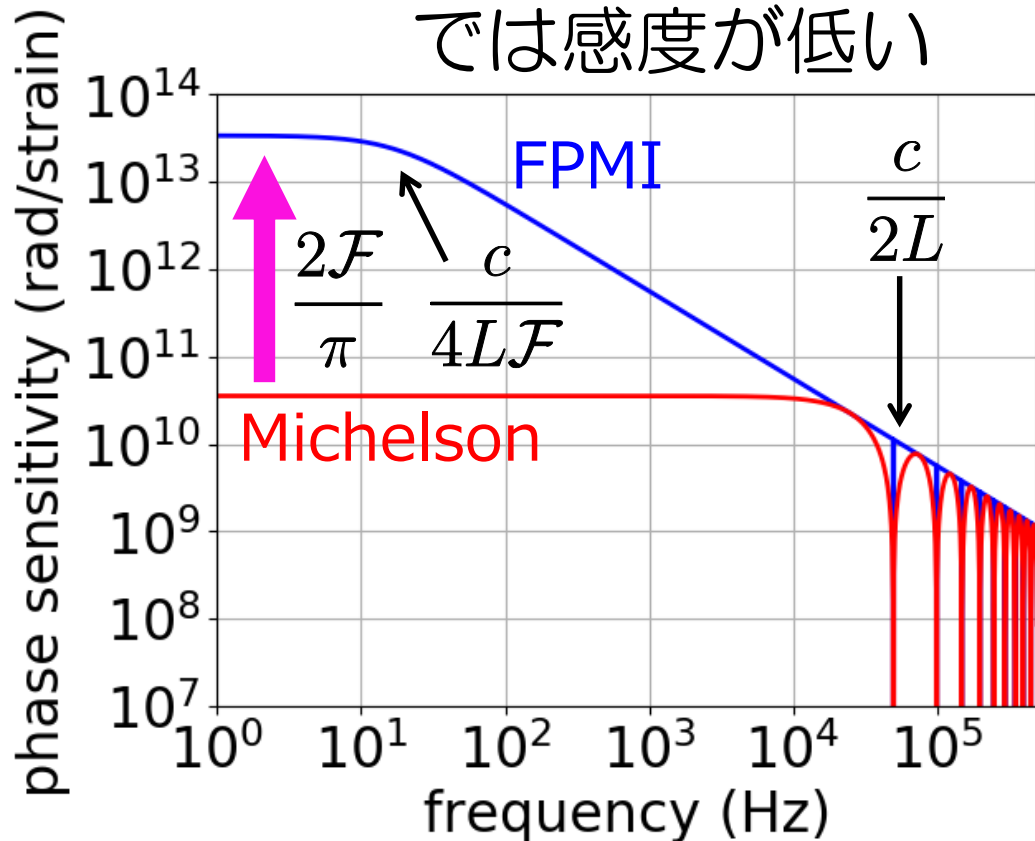
- フィネス1500とすると

$$h_{\text{shot}} \sim 2 \times 10^{-24} / \sqrt{\text{Hz}}$$

ざっくりこれが
KAGRAの感度

干渉計の高周波応答

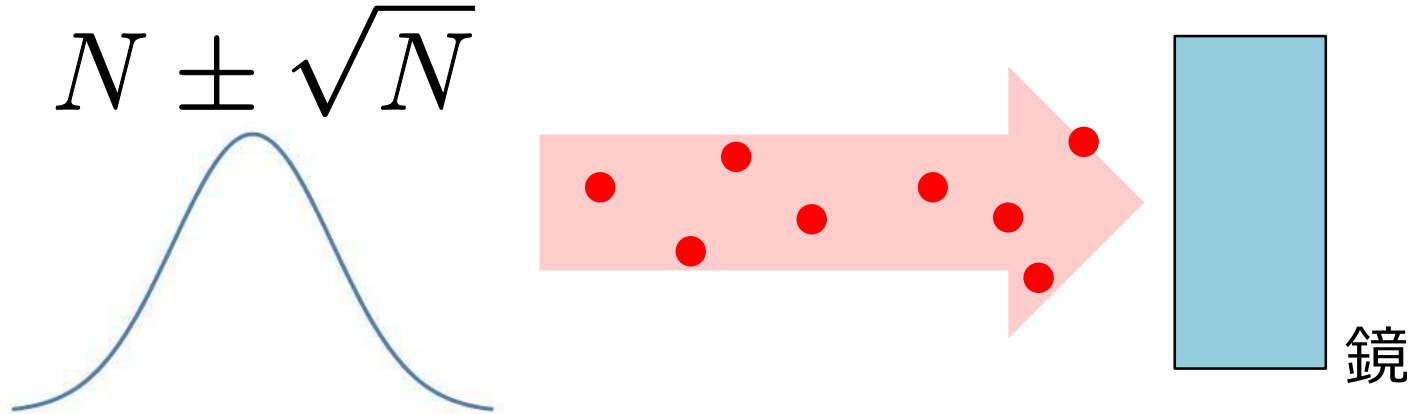
- 干渉計を光が往復する間に重力波の位相が反転すると重力波の効果が**キャンセル**
→ 干渉計は高周波では感度が低い



特定の周波数の重力波に対しては、腕の長さを長くしても、フィネスを大きくしても、これ以上感度が上がらない**限界**がある

輻射圧雑音

- 鏡にあたる光子の数は量子力学的に揺らぐ



- 揺らぐ強度のスペクトル

$$\delta P_{\text{rad}} = \sqrt{\frac{hcP_0}{\lambda}}$$

Michelson干渉計で、入射光量 P_0 とした力から変位への伝達関数

- 鏡の変位スペクトル

$$\delta L_{\text{rad}} = \frac{2\delta P_{\text{rad}}}{c} H(\omega) = \sqrt{\frac{4hP_0}{c\lambda} \frac{1}{m\omega^2}}$$

自由質点の場合

散射雑音と輻射圧雑音

- 散射雑音は光量を増やすほど小さい

$$h_{\text{shot}} = \frac{1}{2\pi L} \sqrt{\frac{hc\lambda}{2P_0}}$$

- 輻射圧雑音は光量を減らすほど小さい

$$h_{\text{rad}} = \frac{1}{m\omega^2 L} \sqrt{\frac{4hP_0}{c\lambda}}$$

ここでmは換算質量
m=鏡の質量/4

トレードオフ！

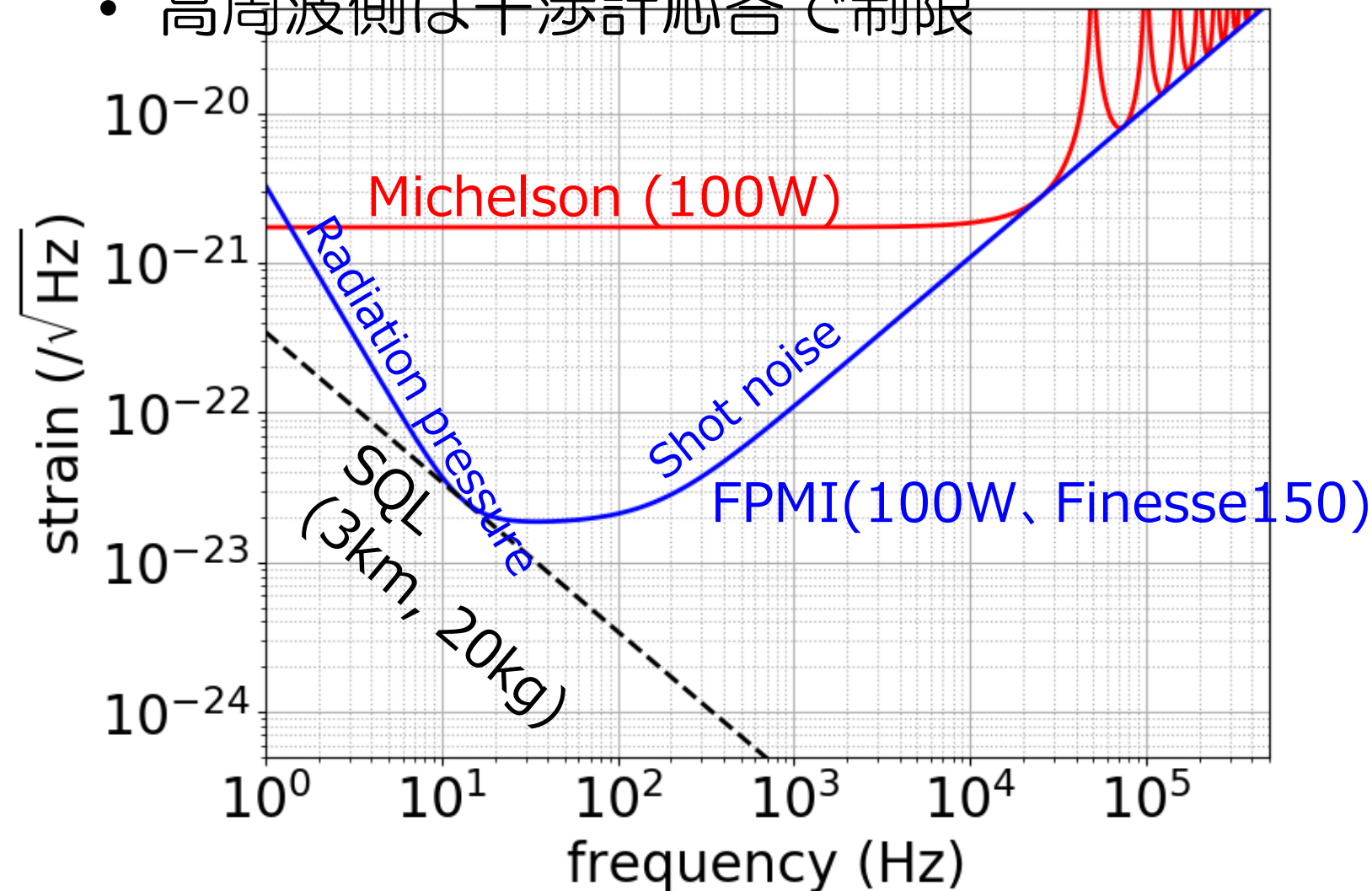


- **標準量子限界** (Standard Quantum Limit) $\hbar \equiv h/(2\pi)$
不確定性原理からくる限界

$$h_{\text{SQL}} = \sqrt{h_{\text{shot}} h_{\text{rad}}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega^2 L^2}}$$

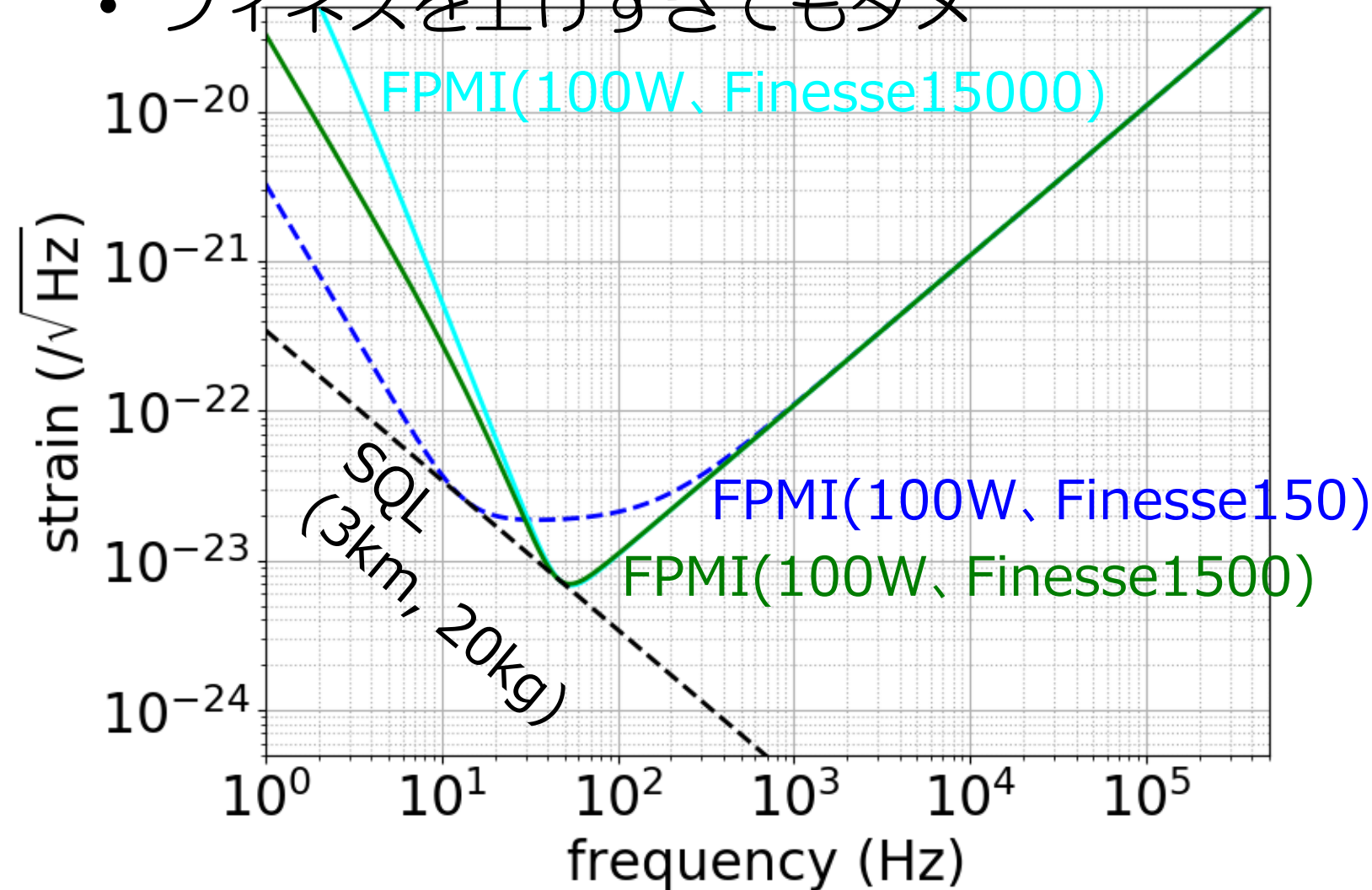
レーザー干渉計の量子雑音

- 低周波側は量子輻射圧雑音
- 高周波側は干渉計応答で制限



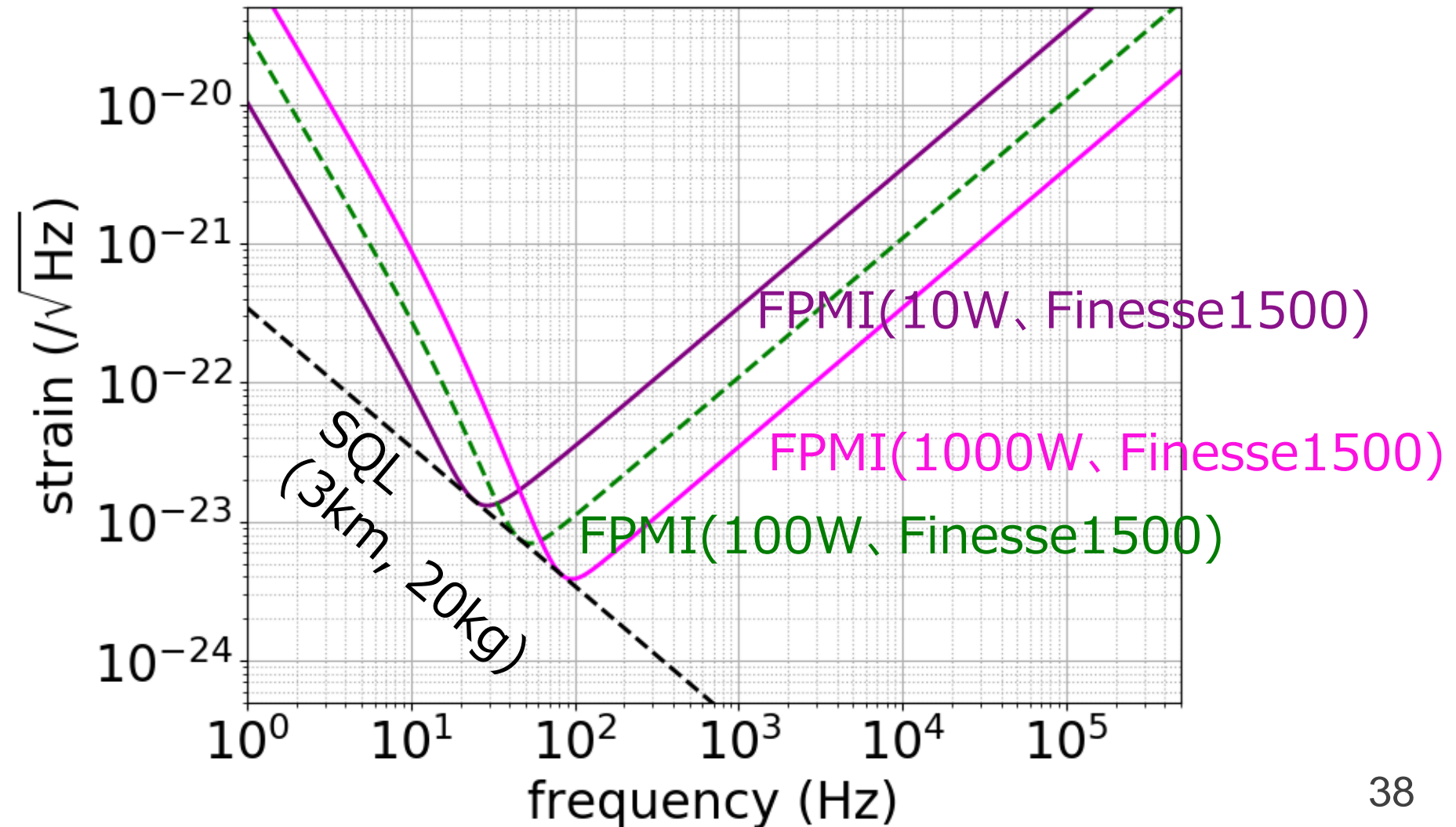
感度のフィネス依存性

- フィネスを上げると狭帯域化
- フィネスを上げすぎてもダメ



感度の入射光強度依存性

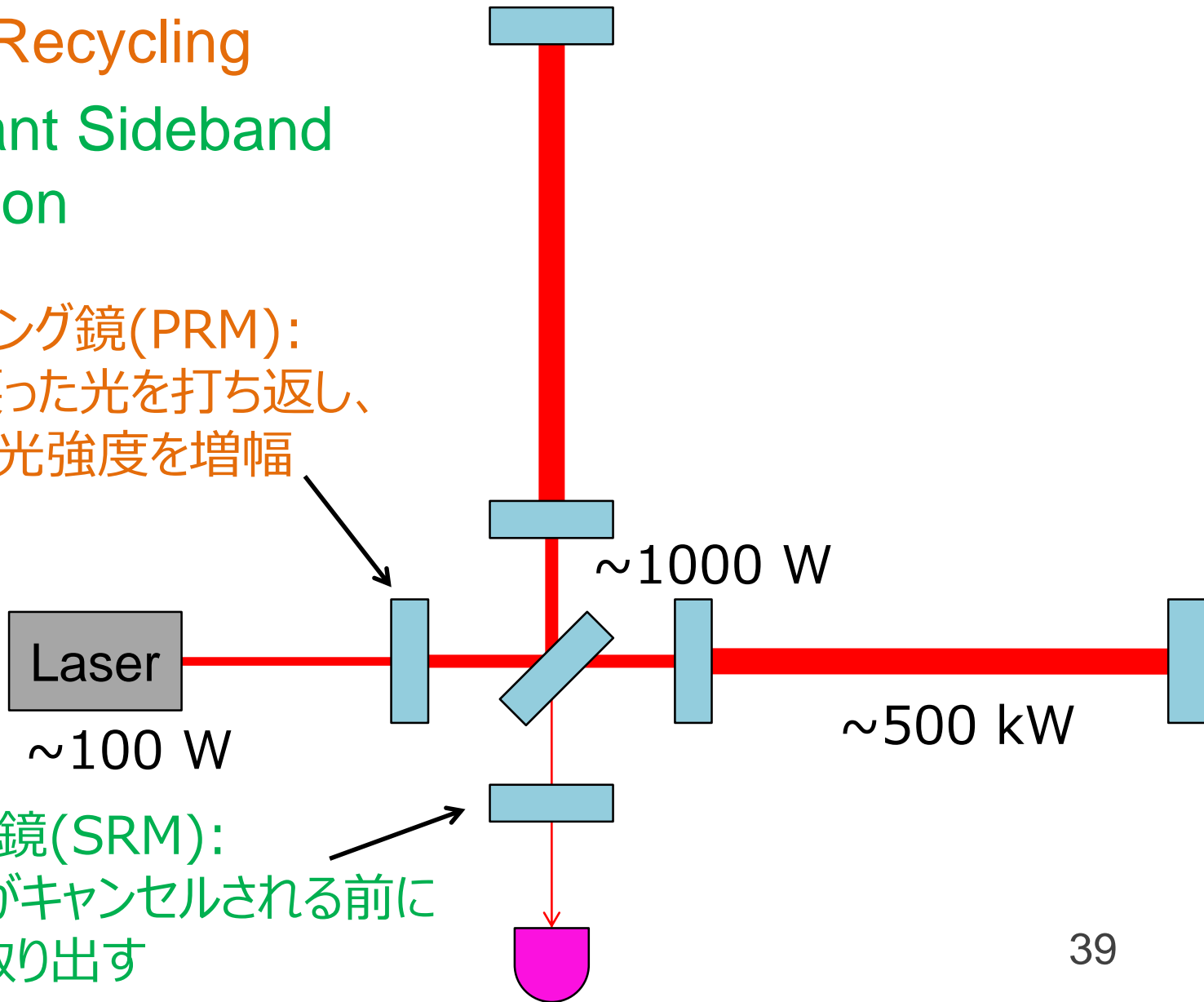
- 入射光強度を変えてもSQLは超えられない



RSE干渉計

- Power Recycling
- Resonant Sideband Extraction

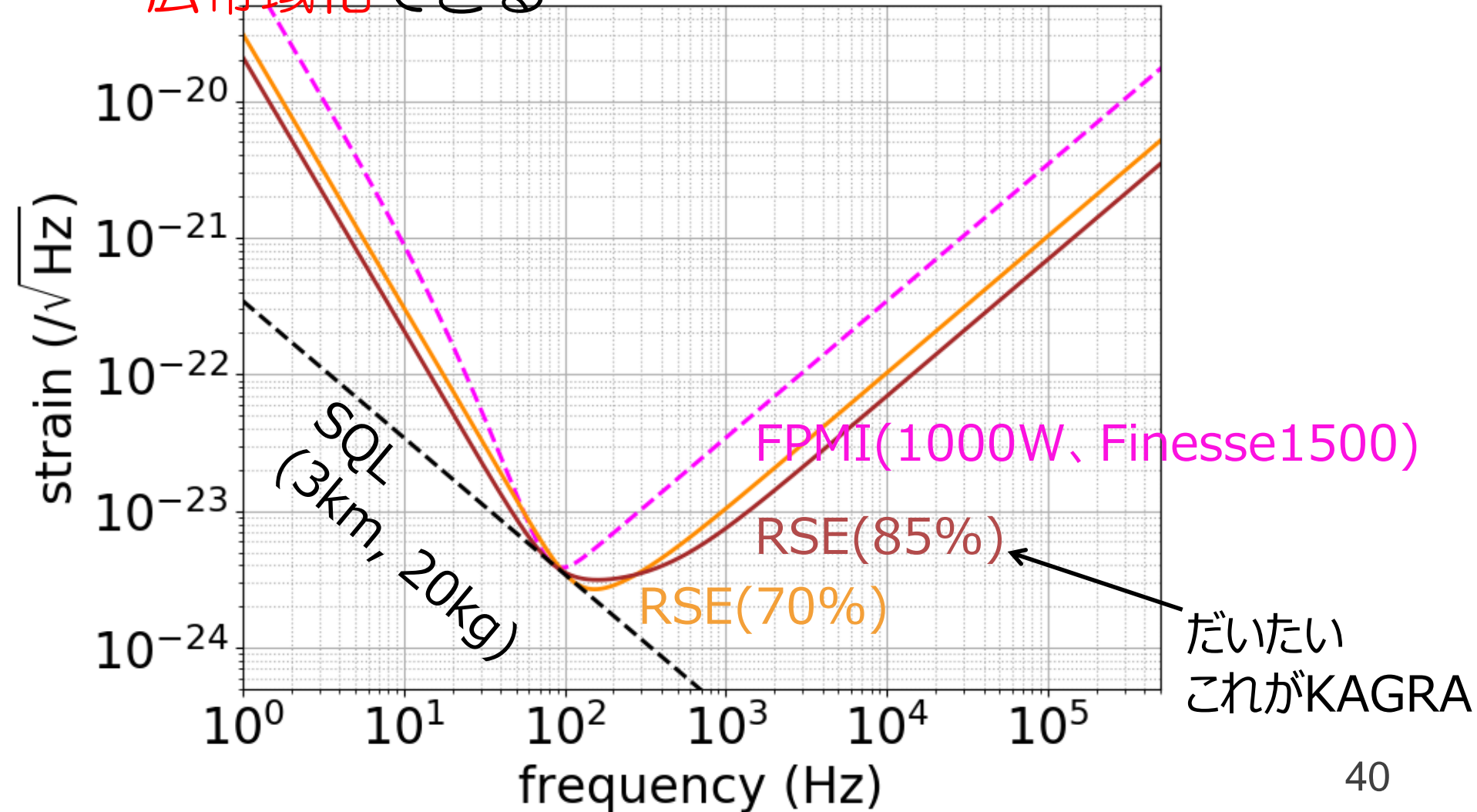
パワーリサイクリング鏡(PRM):
レーザー側に戻った光を打ち返し、
実効的に入射光強度を増幅



信号取り出し鏡(SRM):
重力波信号がキャンセルされる前に
信号成分を取り出す

感度のSRM反射率依存性

- SRMを入れることで腕内パワーを保ちつつ
広帯域化できる

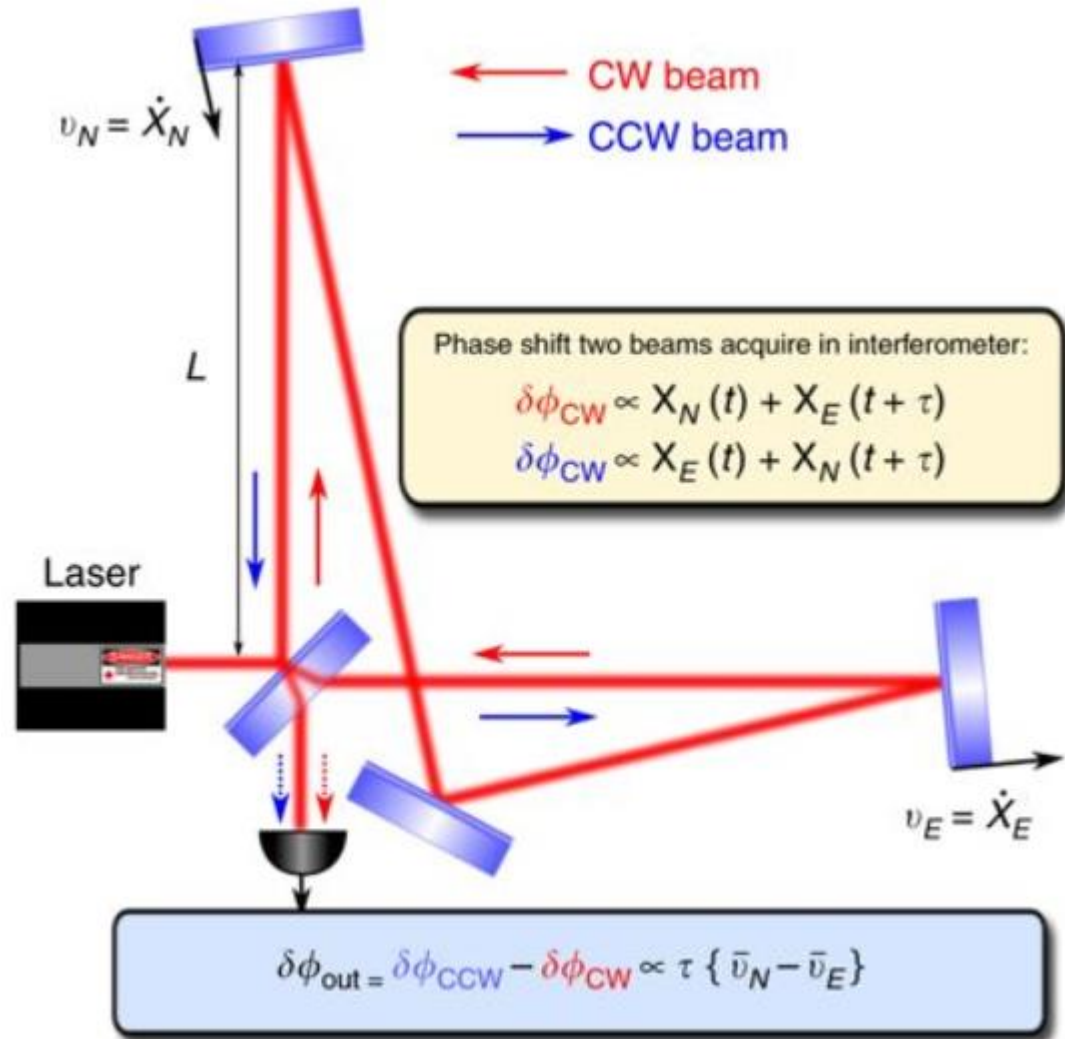


さらなる干渉計技術

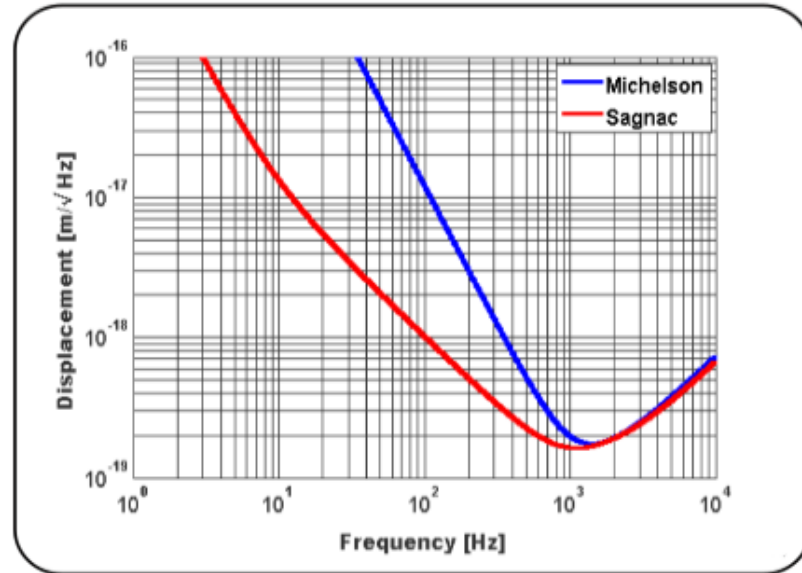
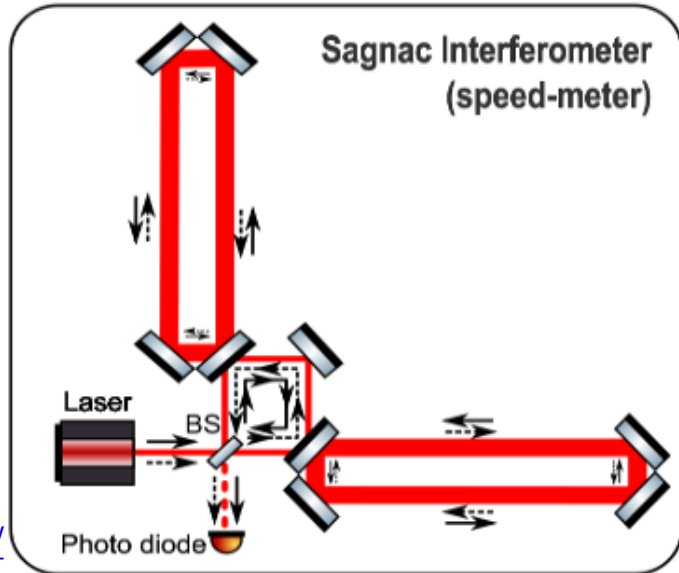
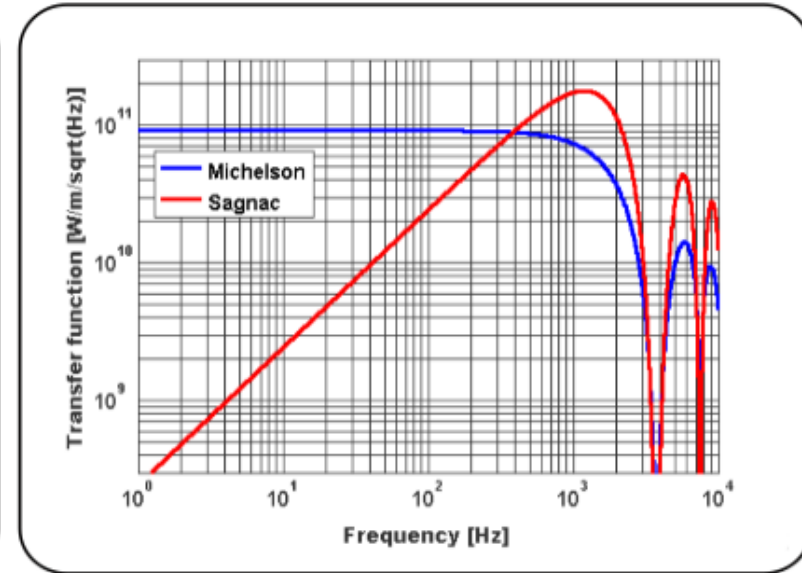
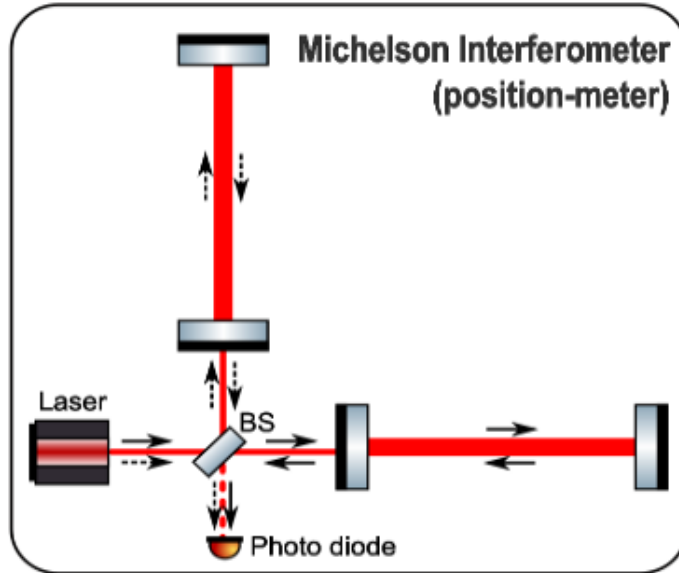
- Detuning of signal recycling cavity
- Homodyne readout
- Frequency dependent squeezing
- Optical spring
- Speed meter (Sagnac interferometer)
- Displacement and frequency noise free interferometer
- Synchronous recycling interferometer
- Interferometer to distinguish GW polarizations?

スピードメーター

- 変位ではなく速度を測定する
- 輻射圧雑音が $1/f^2$ ではなく $1/f^1$ になり、低減される
- 低周波で高感度 ET-LF の候補



Michelson vs Sagnac



Synchronous Recycling干涉計

- 狭帯域だが高周波に感度

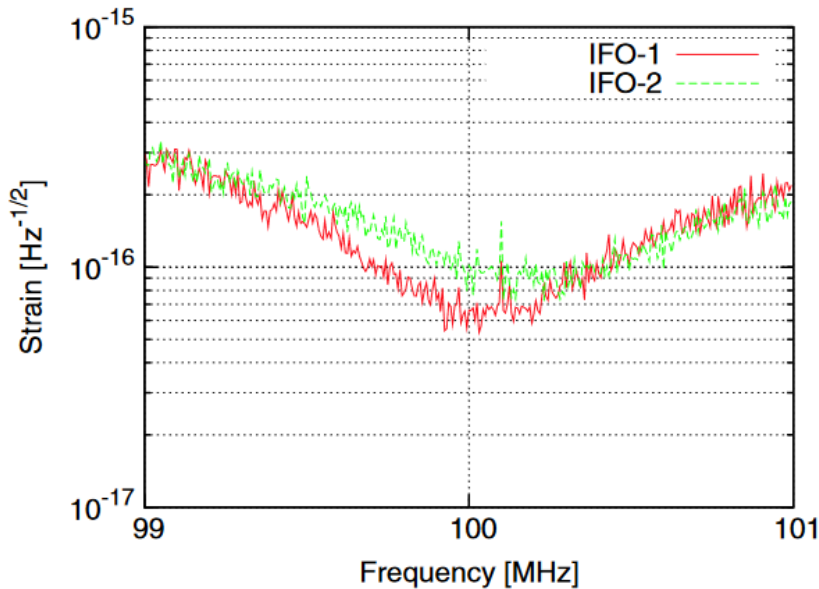


FIG. 3 (color online). Strain sensitivities of the interferometers estimated from the IF signals. The solid red and dashed green lines represent the sensitivities of IFO-1 and IFO-2, respectively.

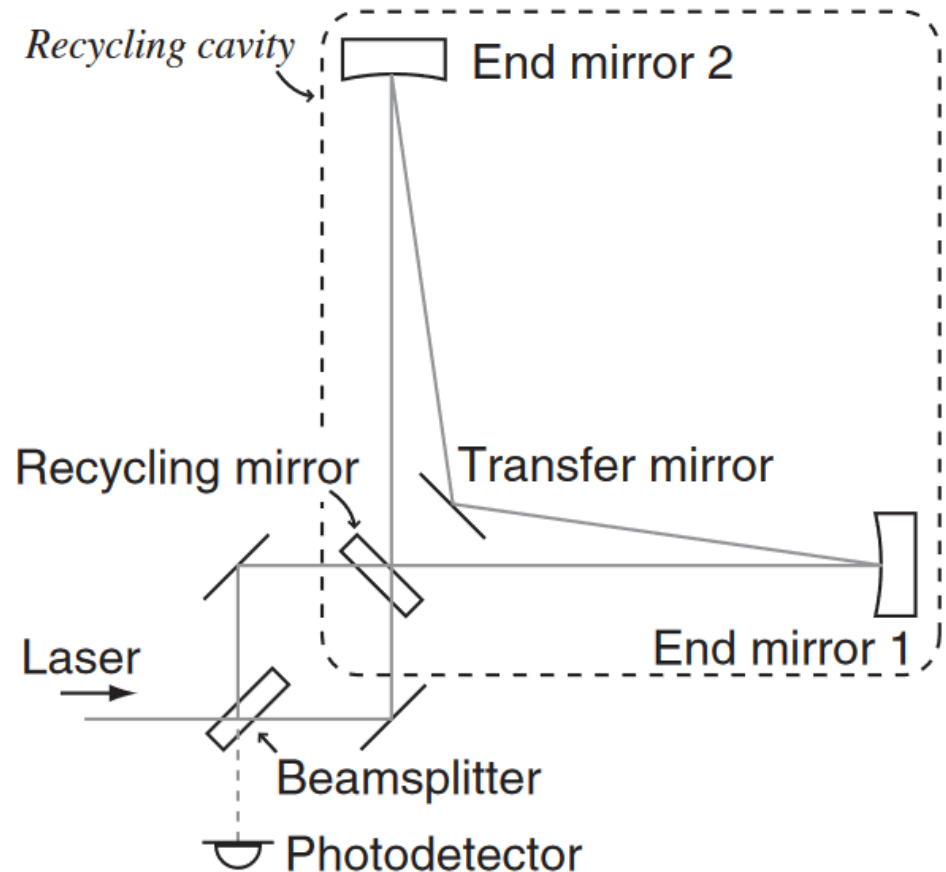


FIG. 1. Schematic view of a synchronous recycling interferometer. GW signals are enhanced in the recycling cavity and detected with the photodetector.