電気情報工学特別講義
第4回

道村唯太
東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻

講義スケジュール

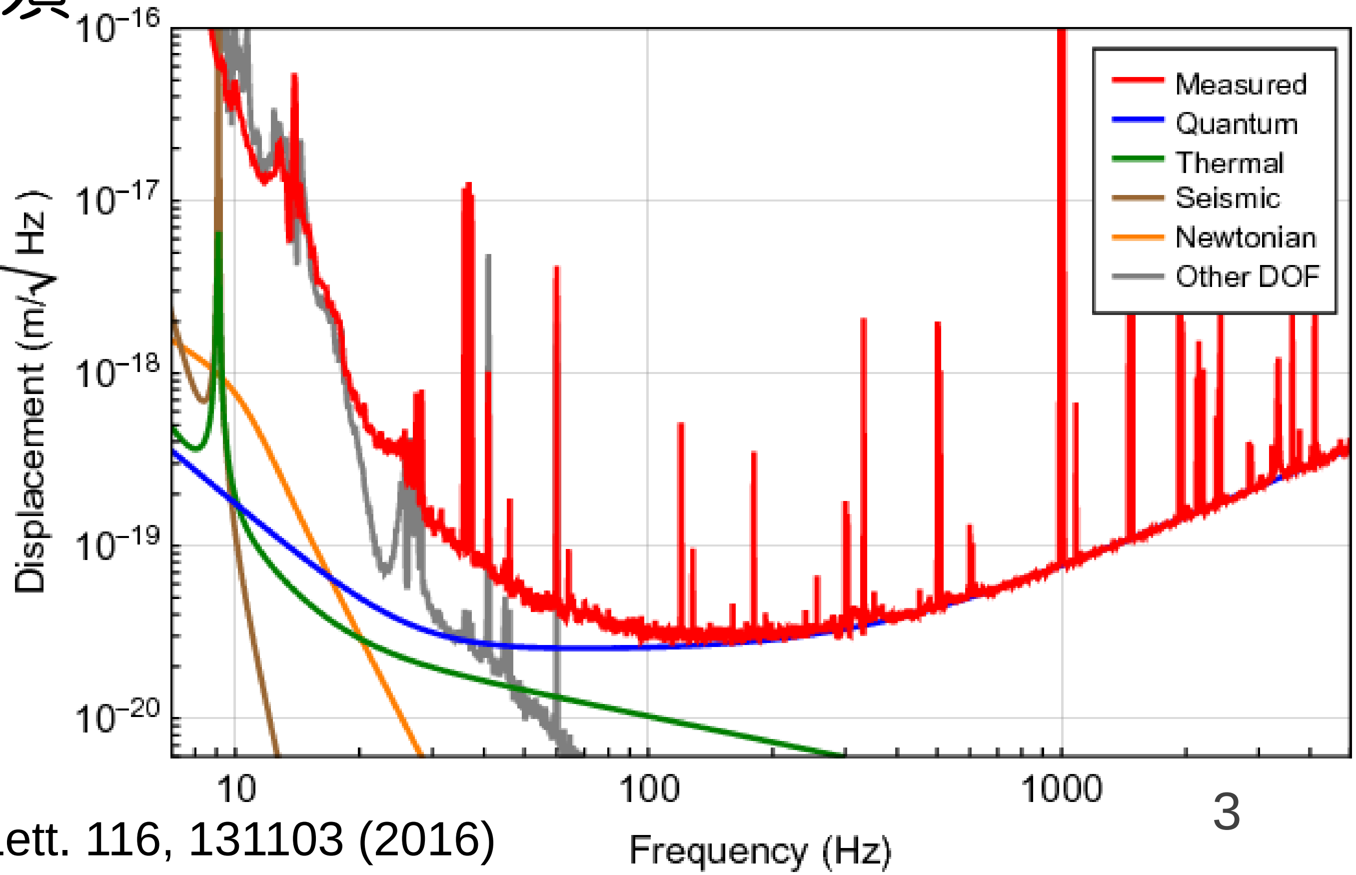
- 10月3日(月)
  3限 第1回 重力波の初検出について
  4限 第2回 重力波望遠鏡KAGRAの紹介
- 10月4日(火)
  2限 第3回 干渉計と共振器の原理
  3限 第4回 パワースペクトルと伝達関数
  4限 第5回 様々な雑音とその低減方法
- 10月5日(水)
  2限 第6回 重力波望遠鏡のこれから
  3限 第7回 精密測定技術の応用
  4限 第8回 「重力波天文学の夜明けとKAGRA」

重力波望遠鏡と雑音

- 重力波望遠鏡ではさまざまなものが雑音になる
  散射雑音、地面振動、熱雑音……
- これらの理解にはパワースペクトルや伝達関数の理解が必須

これはなにか？

雑音を下げるには
どうしたらいいか？



Phys. Rev. Lett. 116, 131103 (2016)

今回のお話

- パワースペクトル
  フーリエ変換
  スペクトラムアナライザ
- 伝達関数
  線形システム
  電気回路の例
    積分回路、微分回路
  振り子の例
    地面振動防振の仕組み

フーリエ変換

- 時系列データ $x(t)$ とそのフーリエ変換 $X(\omega)$ は

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

- 時系列データは様々な周波数の波の組み合わせで表すことができる

微積分のフーリエ変換

- フーリエ変換の微分

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underline{i\omega X(\omega)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

- 同様に考えて

$x(t)$ の微分のフーリエ変換は $i\omega X(\omega)$

$x(t)$ の積分のフーリエ変換は $\frac{1}{i\omega}X(\omega)$

有限時間のフーリエ変換

- 実際には-T/2からT/2までの有限時間で考える

$$
\begin{aligned}
x_T(t) &= x(t) \quad |t| \le T/2 \\
&= 0 \qquad\ \ |t| > T/2
\end{aligned}
$$

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

パワースペクトル密度

- パワースペクトル密度は下記のように定義される

$$S(\omega) = \lim_{T\to\infty} \frac{2\pi |X_T(\omega)|^2}{T}$$

- Parsevalの定理より

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} 2\pi |X(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega$$

なので

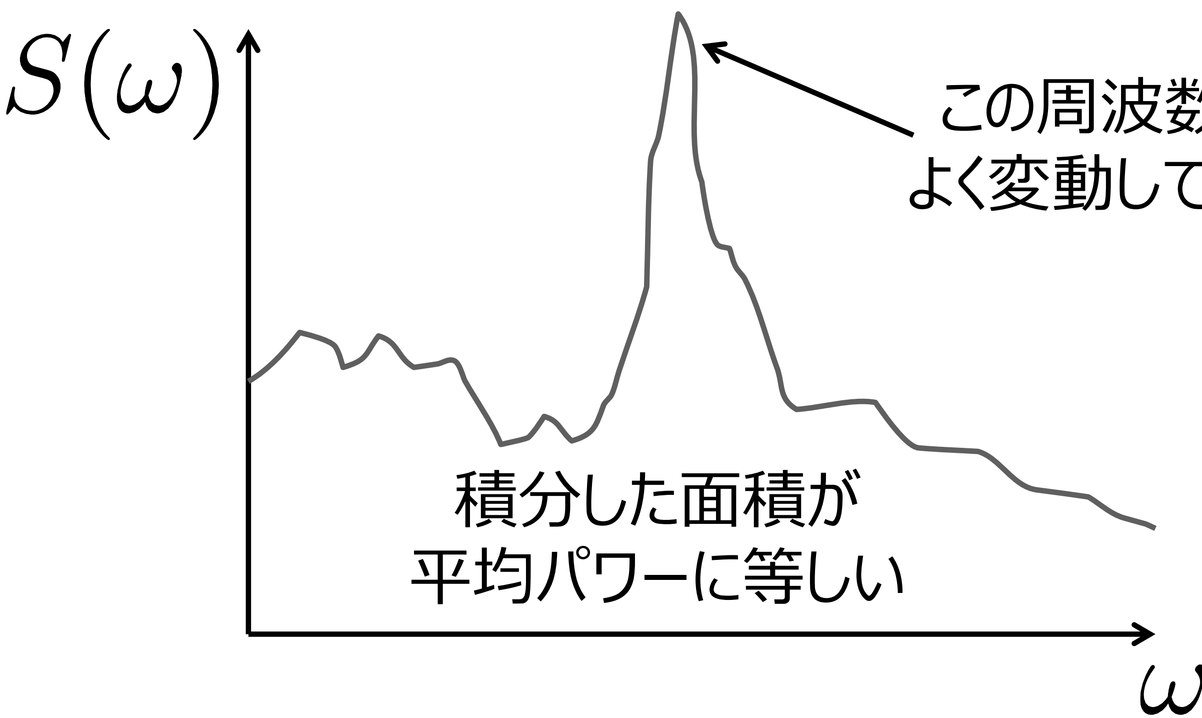
$$\boxed{\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega}$$

が成り立つ

パワースペクトル密度の意味

- 平均パワーへの各周波数成分からの寄与

$$\boxed{\overline{x^2(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega)\mathrm{d}\omega}$$

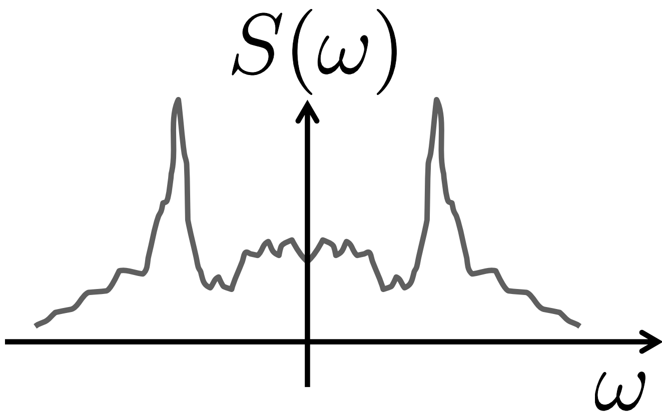


実用上のパワースペクトル

- 実用的には $\omega = 2\pi f$ とおき、

$$\overline{x^2(t)} = \int_0^\infty G(f)\mathrm{d}f$$

$$G(f) = 4\pi S(\omega)$$



$$S(-\omega) = S(\omega)$$

を用いる

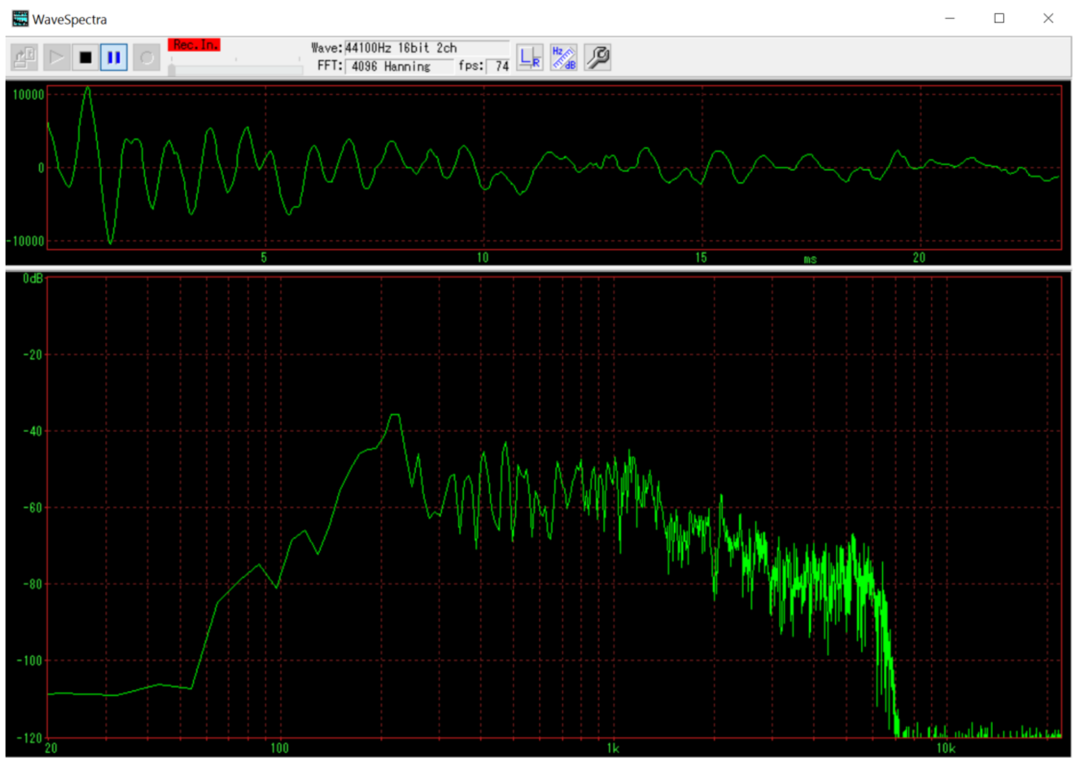
として、$\sqrt{G(f)}$ をプロットすることが多い

- $x(t)$ の単位がmだとすると、

$\sqrt{G(f)}$ の単位はm/√Hzになる
(周波数成分の寄与)

スペアナで遊んでみる

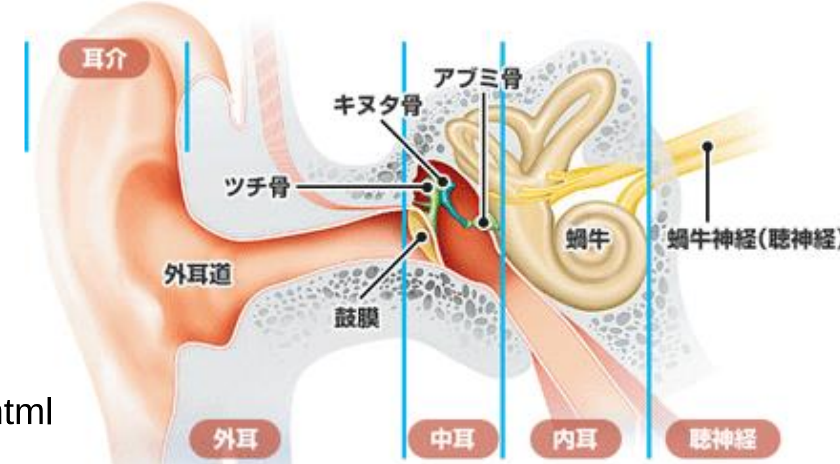
- 高速リアルタイム スペクトラムアナライザー WaveSpectra
  http://efu.jp.net/soft/ws/ws.html
- 15 Hz - 22050 Hz Hearing Test
  https://youtu.be/YmUSKhWGw7s

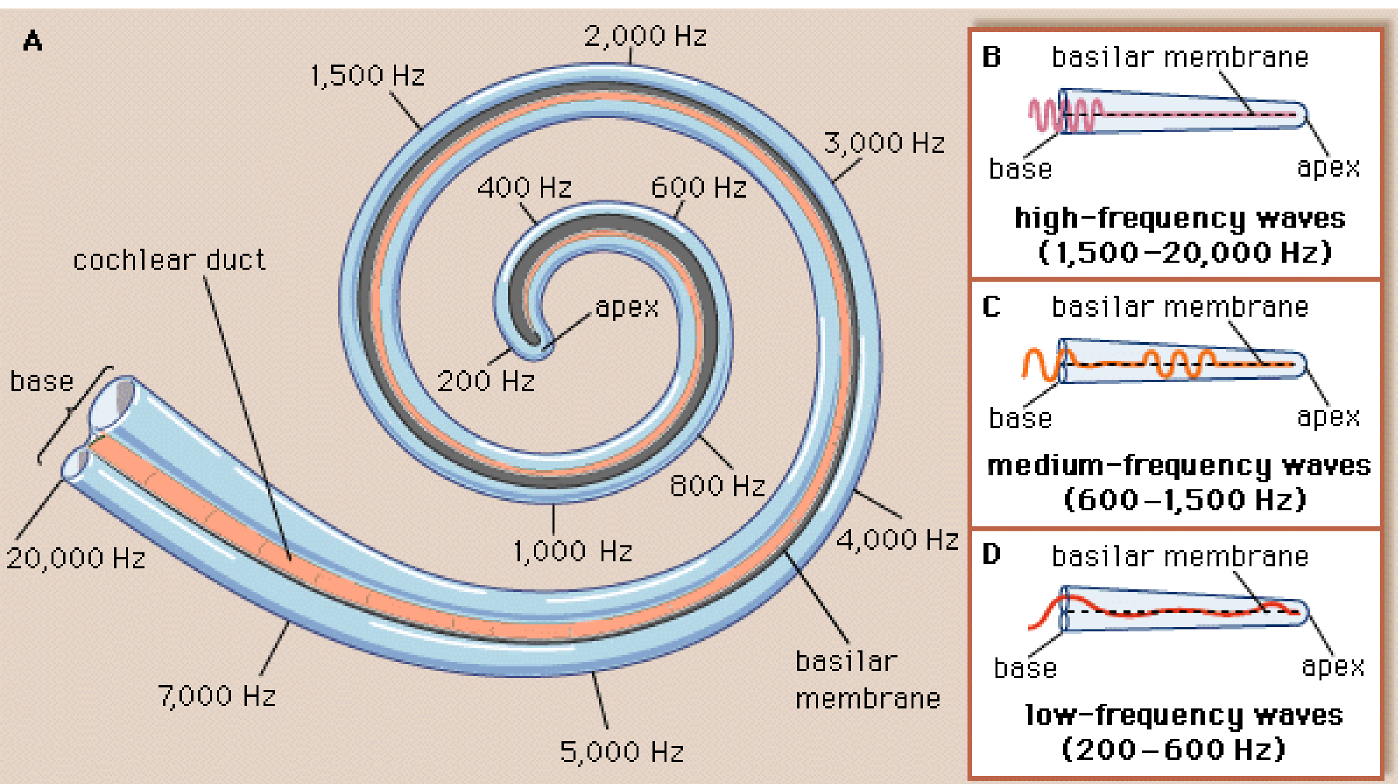


耳のしくみ

- 耳はスペアナ
- 雑音源の特定も耳でできる

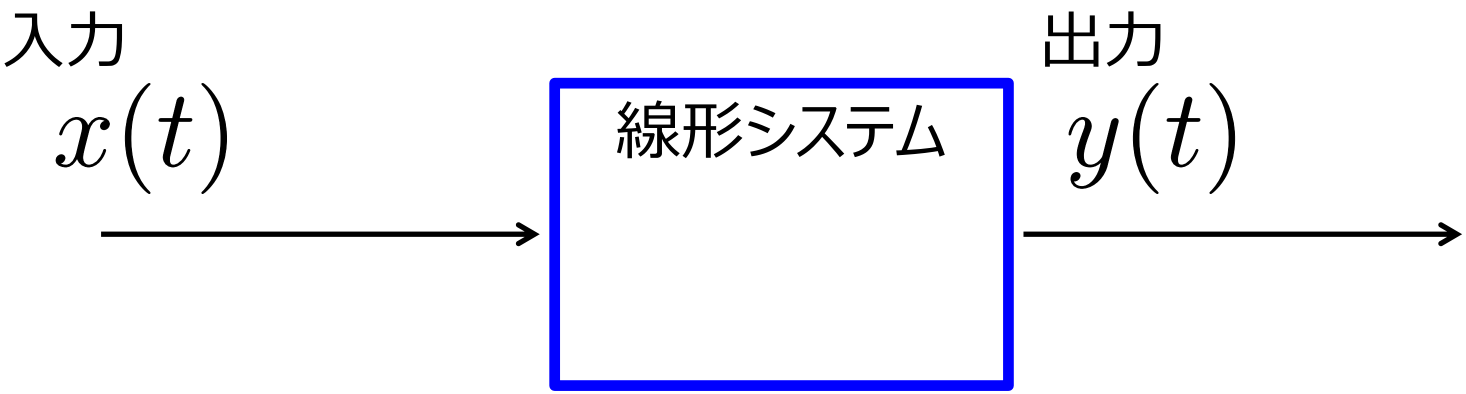
http://www.widexjp.co.jp/deafness/what/decline.html





線形システム

- 入力と出力が線形関係で結ばれた系



- 線形関係

加法性

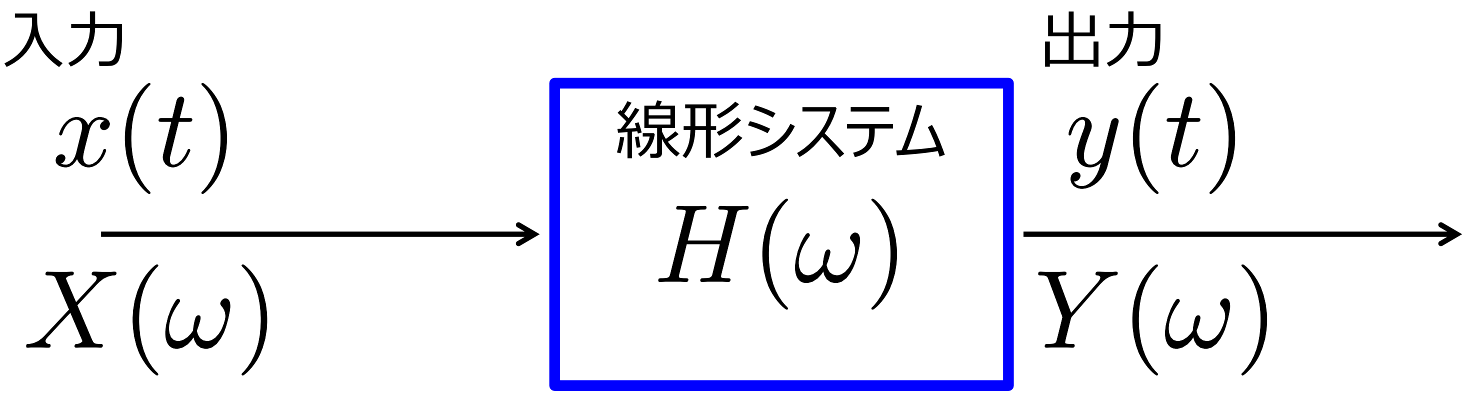
$x_1(t) + x_2(t)$ を入力すると $y_1(t) + y_2(t)$ が出力

斉次性

$ax(t)$ を入力すると $ay(t)$ が出力

周波数応答関数(伝達関数)

- 入力と出力が線形関係で結ばれた系



- 周波数応答関数(伝達関数)は次のように定義

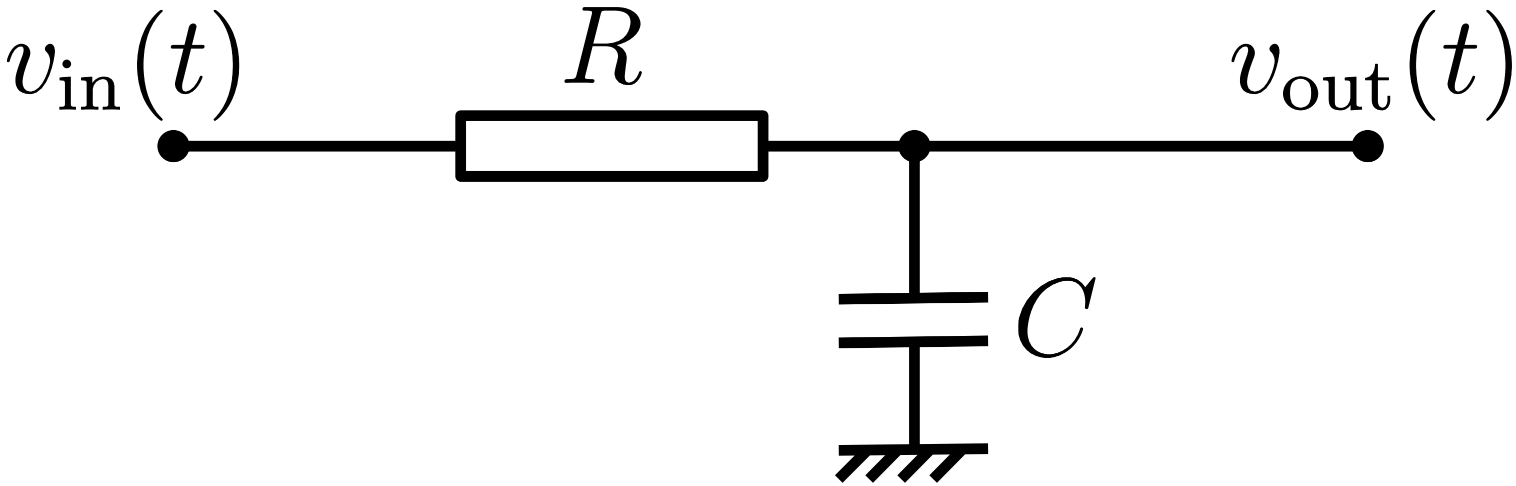
$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)\ \text{出力}}{X(\omega)\ \text{入力}}$$

- つまり出力パワースペクトルは

$$G_y(f) = H(f)G_x(f)$$

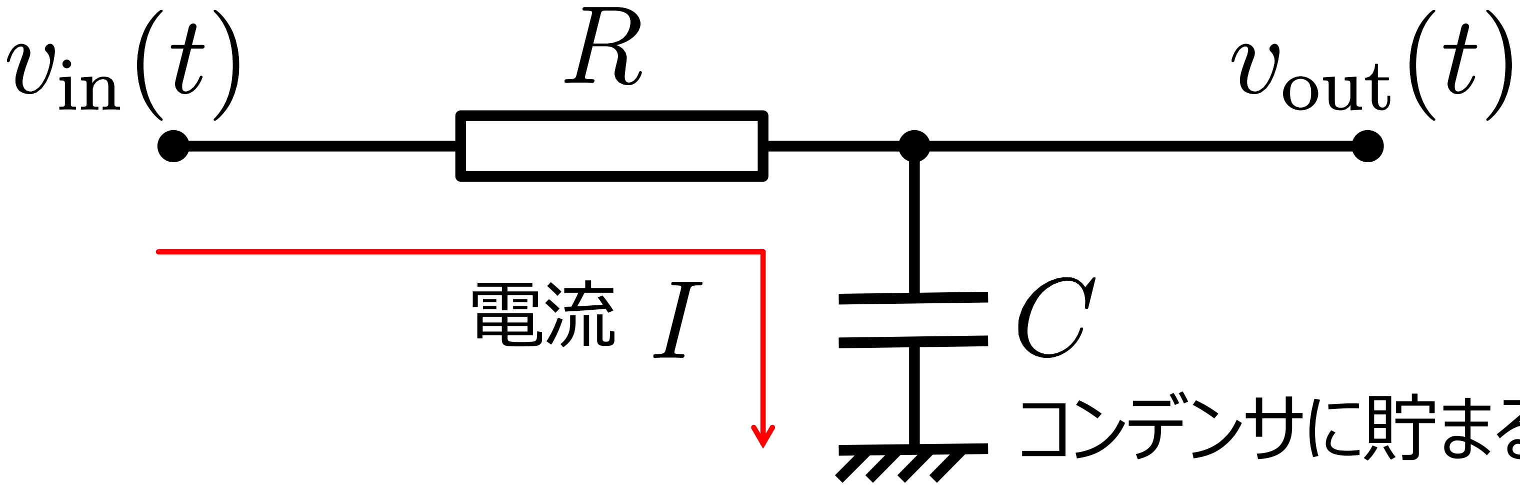
例1: 電気回路

- 下記の回路の伝達関数は？



例1: 電気回路

- 下記の回路の伝達関数は？



コンデンサに貯まる電荷

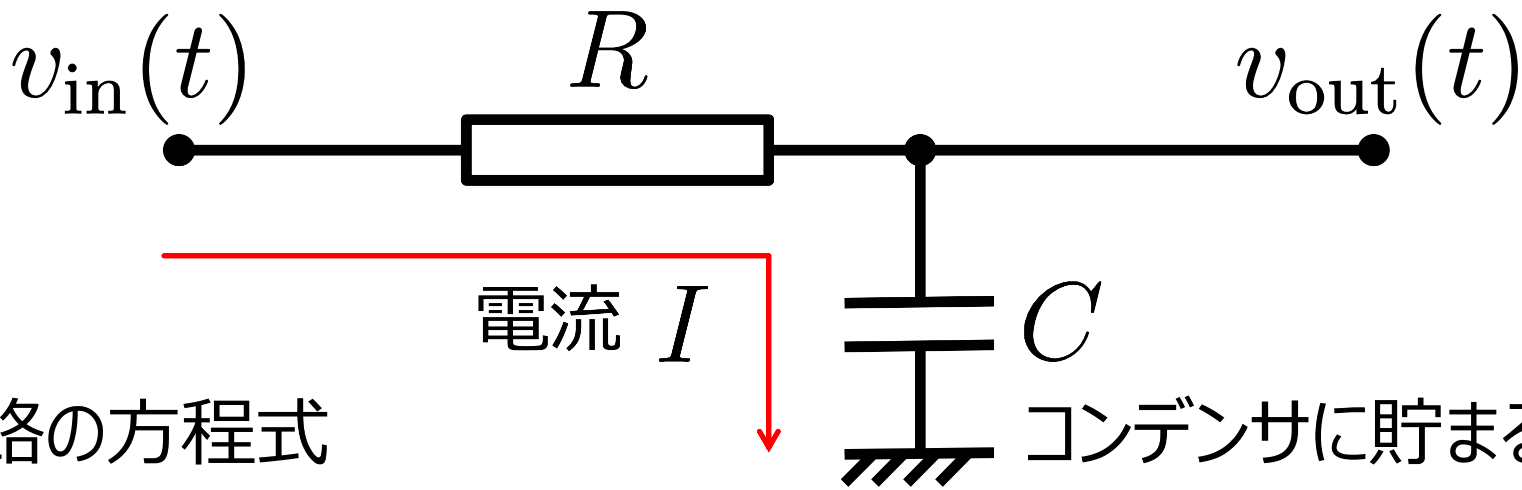
$$q = C v_{\mathrm{out}}(t)$$

電流は電荷の時間変化

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = \dot{q}$$

例1: 電気回路

- 下記の回路の伝達関数は？



回路の方程式

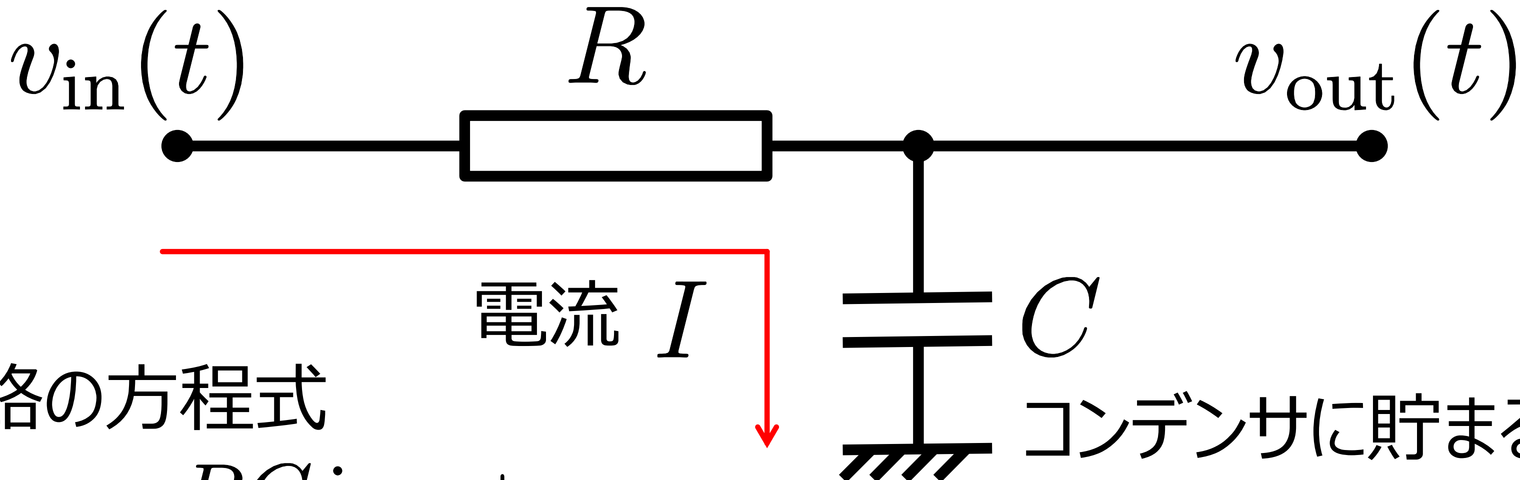
$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{in}} &= RI + v_{\mathrm{out}} \\
&= R\dot{q} + v_{\mathrm{out}} \\
&= RC\dot{v}_{\mathrm{out}} + v_{\mathrm{out}}
\end{aligned}
$$

コンデンサに貯まる電荷

$$q = Cv_{\mathrm{out}}(t)$$

例1: 電気回路

- 下記の回路の伝達関数は？



コンデンサに貯まる電荷

$$q = Cv_{\mathrm{out}}(t)$$

回路の方程式

$$v_{\mathrm{in}} = RC\dot{v}_{\mathrm{out}} + v_{\mathrm{out}}$$

両辺をフーリエ変換

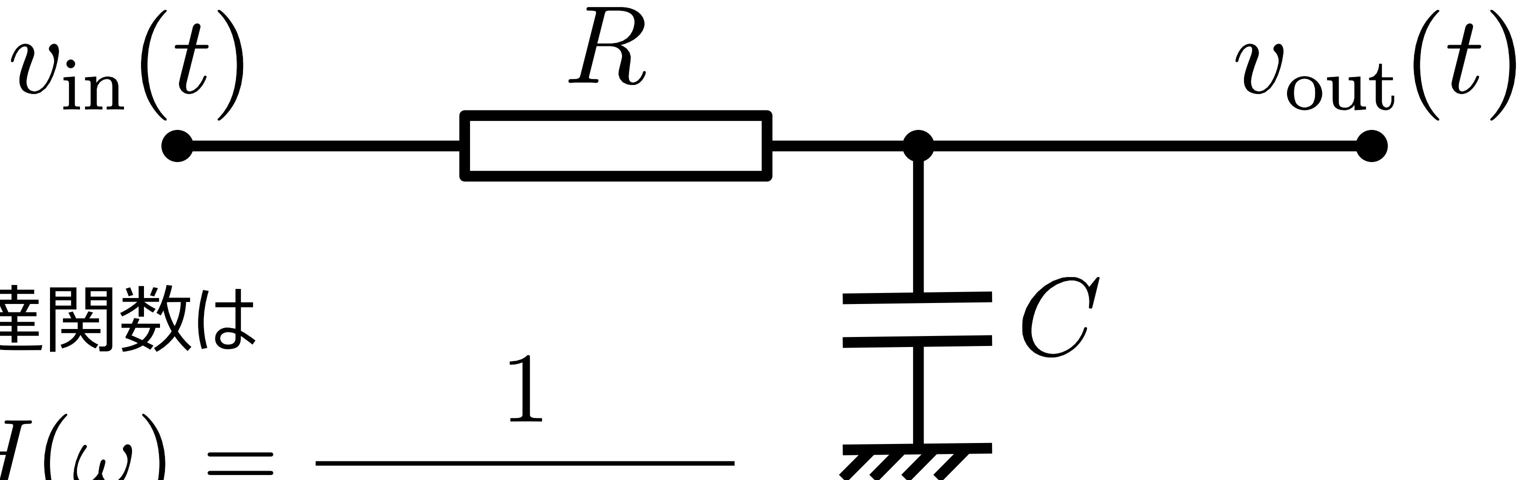
$$V_{\mathrm{in}} = i\omega RCV_{\mathrm{out}} + V_{\mathrm{out}}$$

伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{V_{\mathrm{out}}}{V_{\mathrm{in}}} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

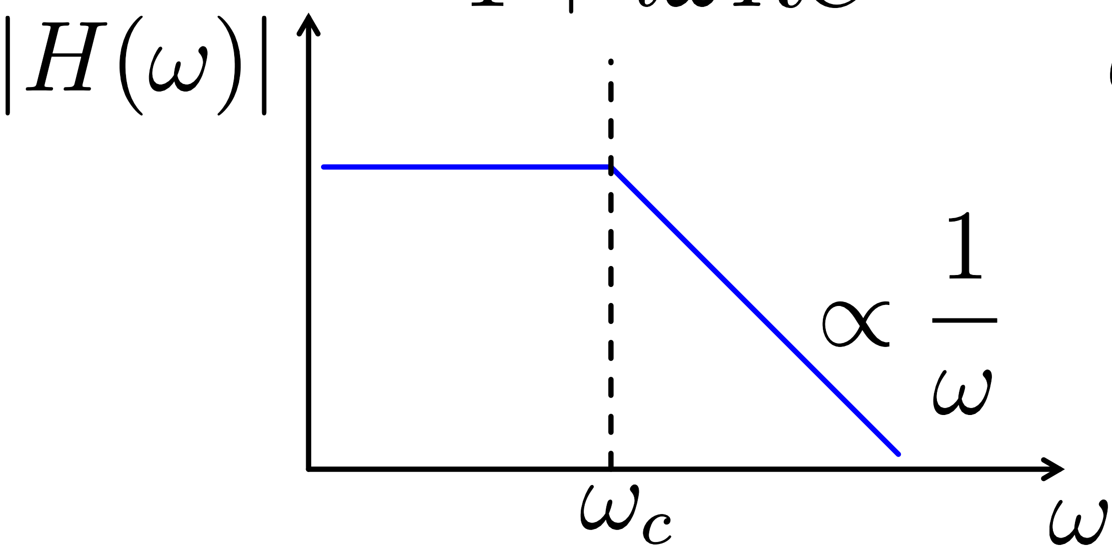
例1: 電気回路

- 下記の回路の伝達関数は？



伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

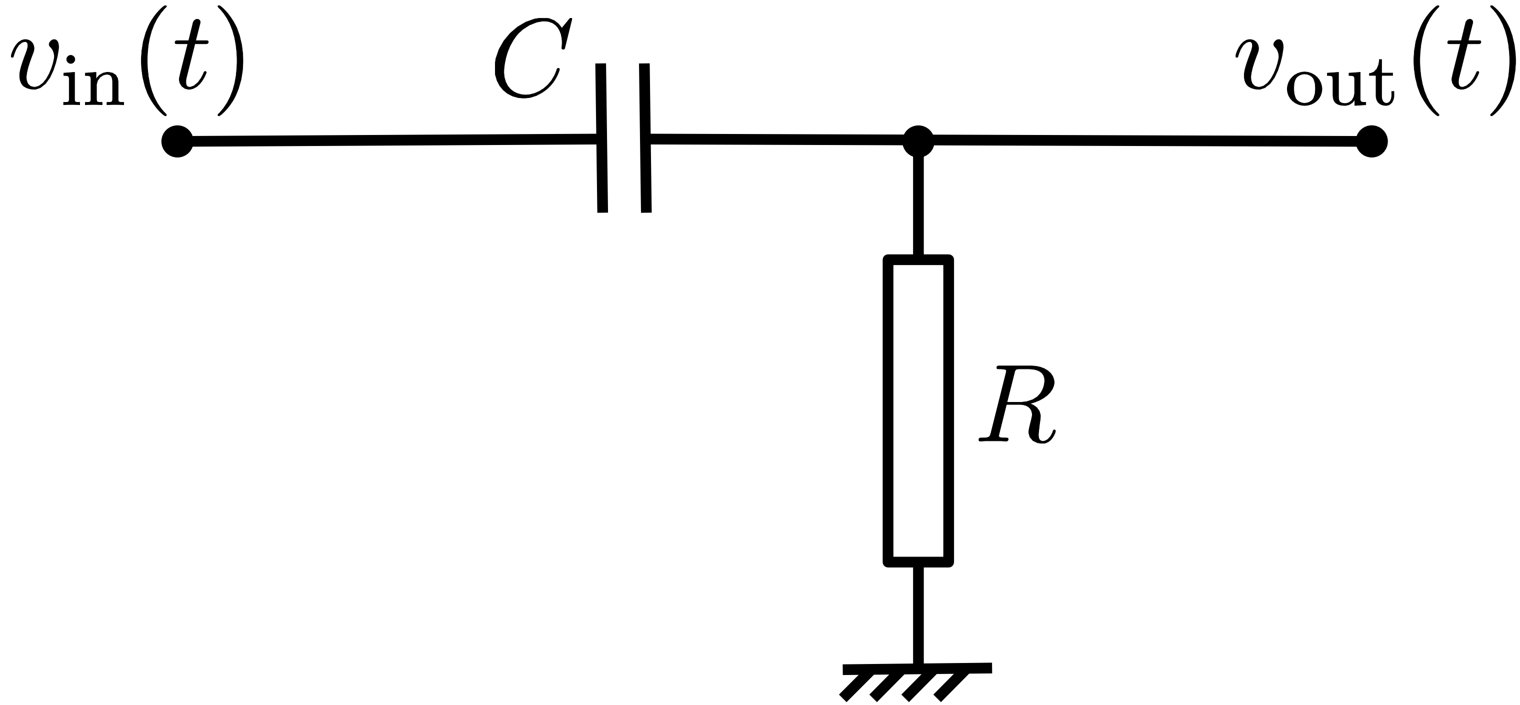


$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

高周波成分をカットする
ローパスフィルタ
入力を積分している
積分回路

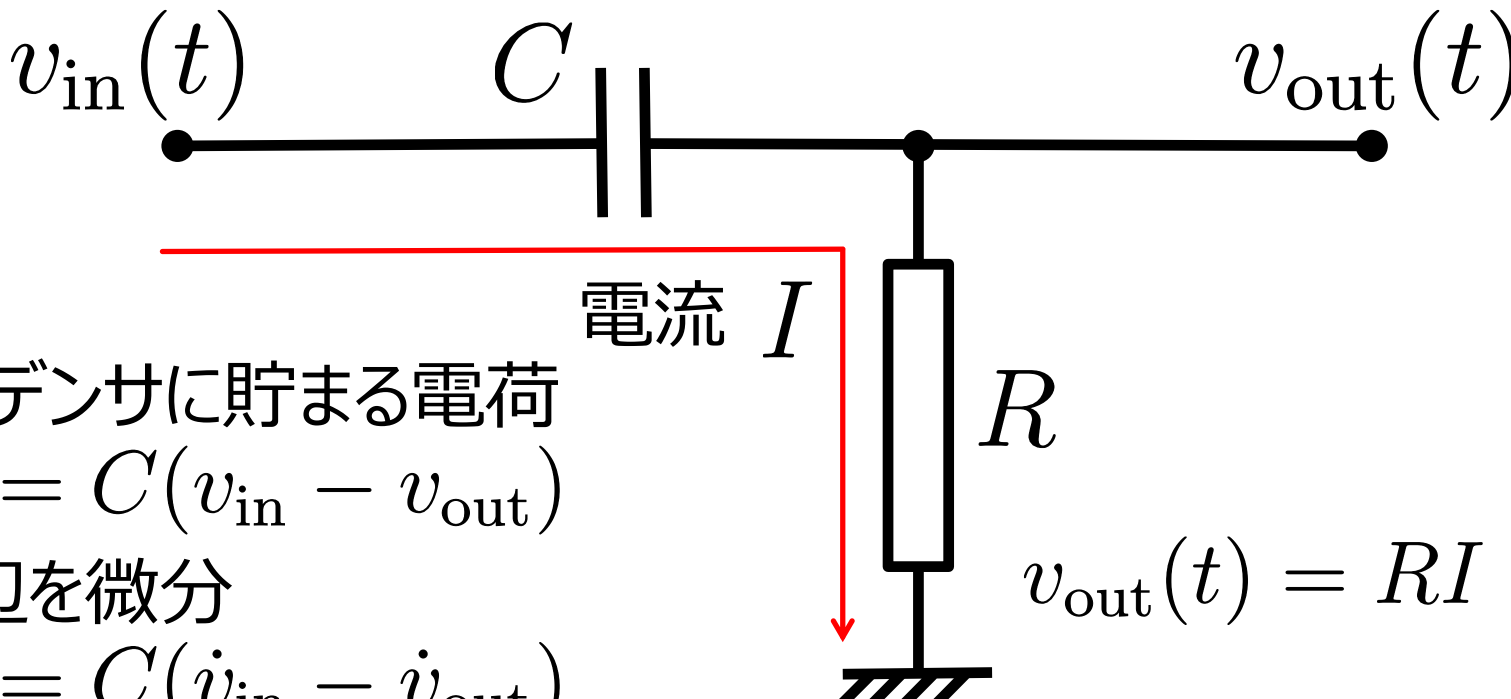
例2: 電気回路

- 下記の回路の伝達関数は？



例2: 電気回路

- 下記の回路の伝達関数は？



コンデンサに貯まる電荷

$$q = C(v_{\rm in} - v_{\rm out})$$

両辺を微分

$$\dot{q} = C(\dot{v}_{\rm in} - \dot{v}_{\rm out})$$

$$v_{\rm out} = RC(\dot{v}_{\rm in} - \dot{v}_{\rm out})$$

両辺をフーリエ変換

$$V_{\rm out} = i\omega RC(V_{\rm in} - V_{\rm out})$$

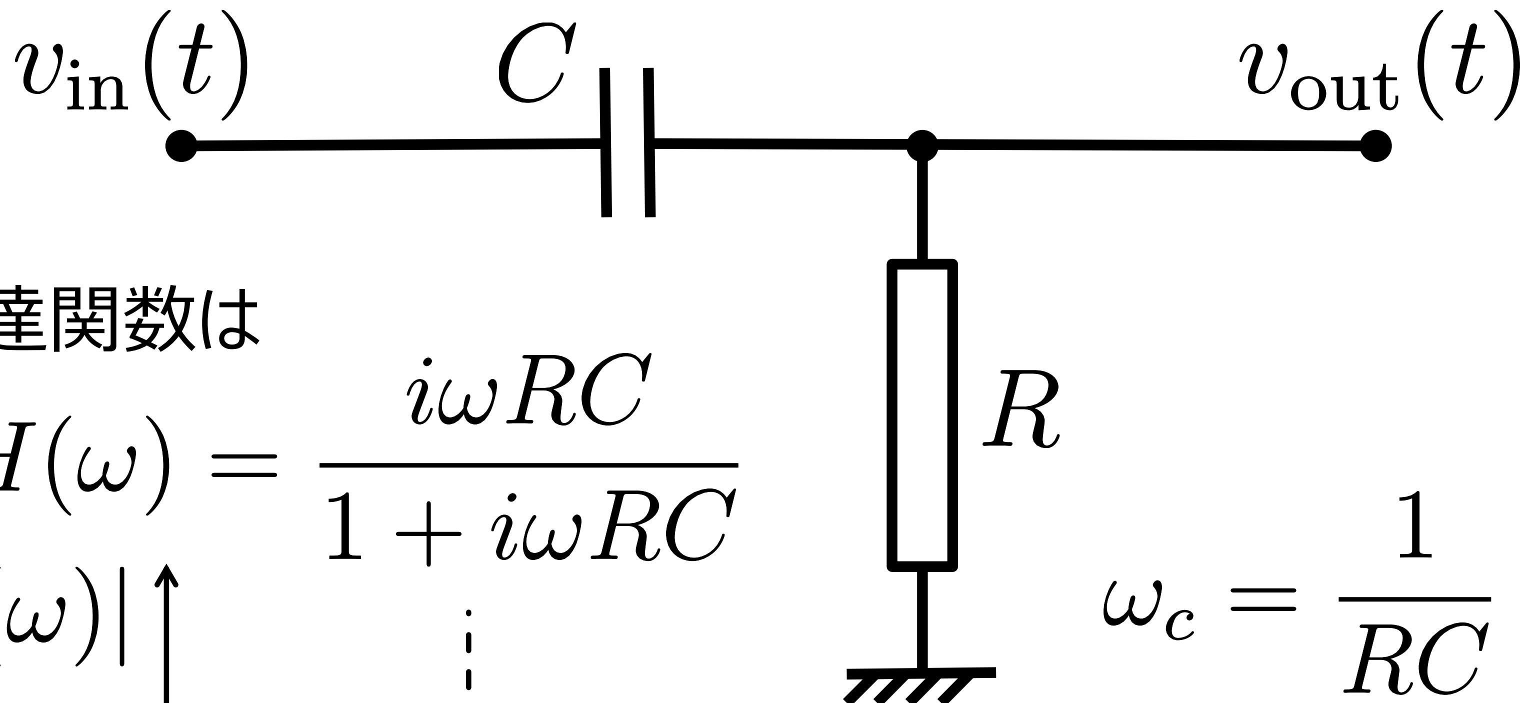
$$v_{\rm out}(t) = RI = R\dot{q}$$

伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

例2: 電気回路

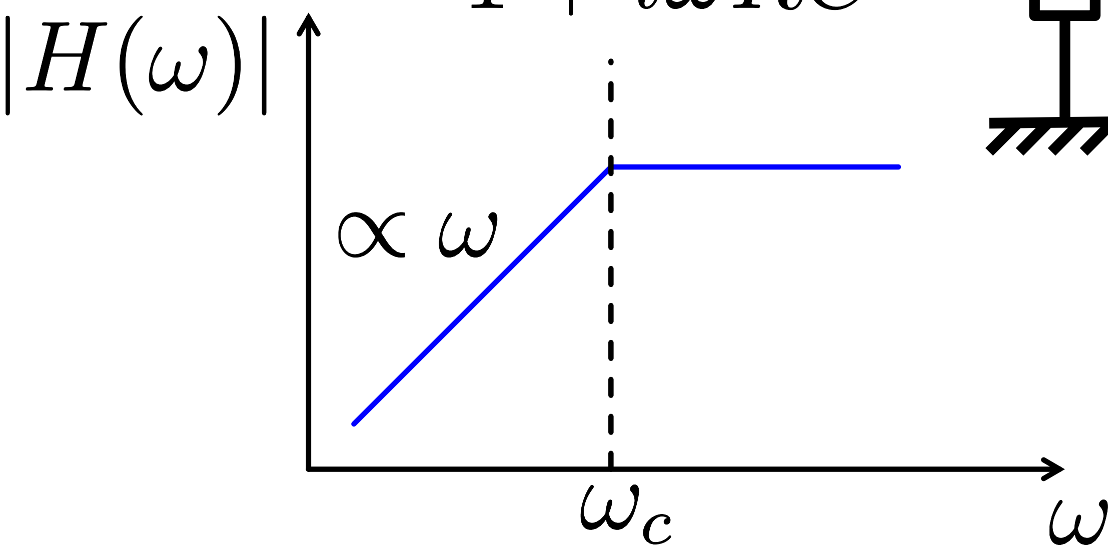
- 下記の回路の伝達関数は？



伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$



低周波成分をカットする

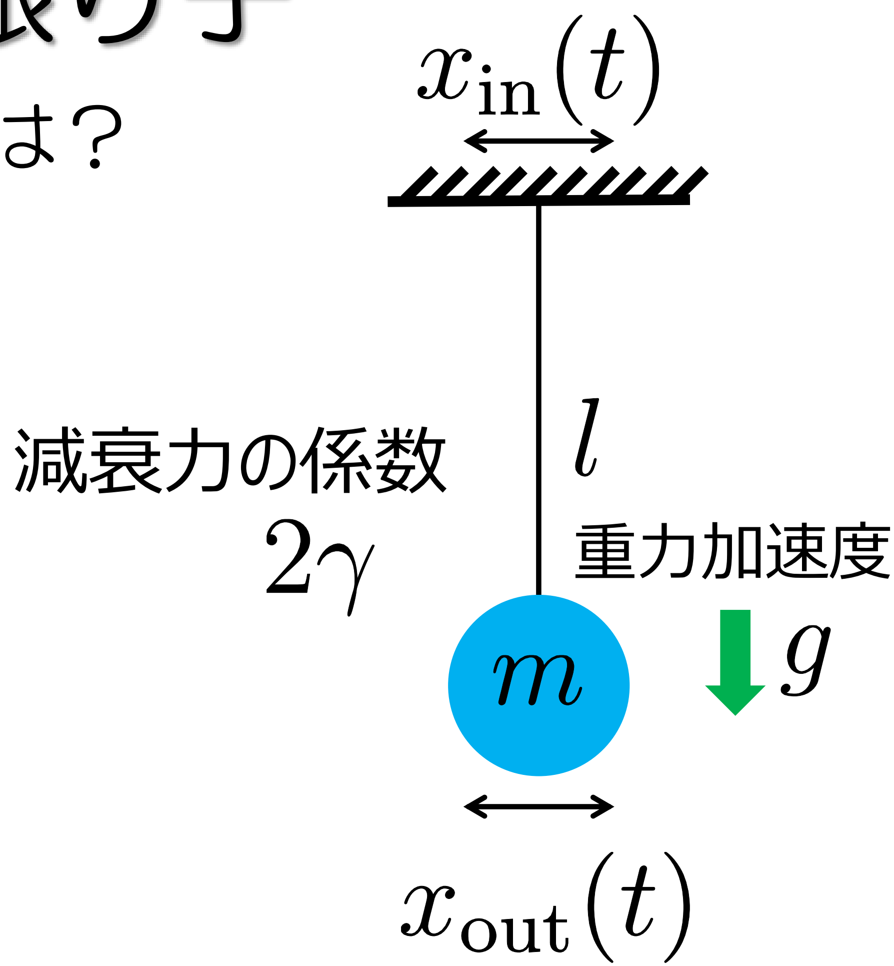
ハイパスフィルタ

入力を微分している

微分回路

例3: 単振り子

- 右の単振り子の伝達関数は？



例3: 単振り子

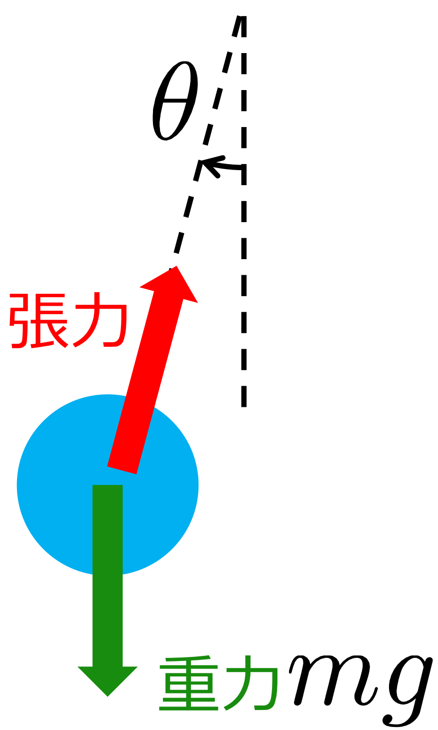
- 右の単振り子の伝達関数は？

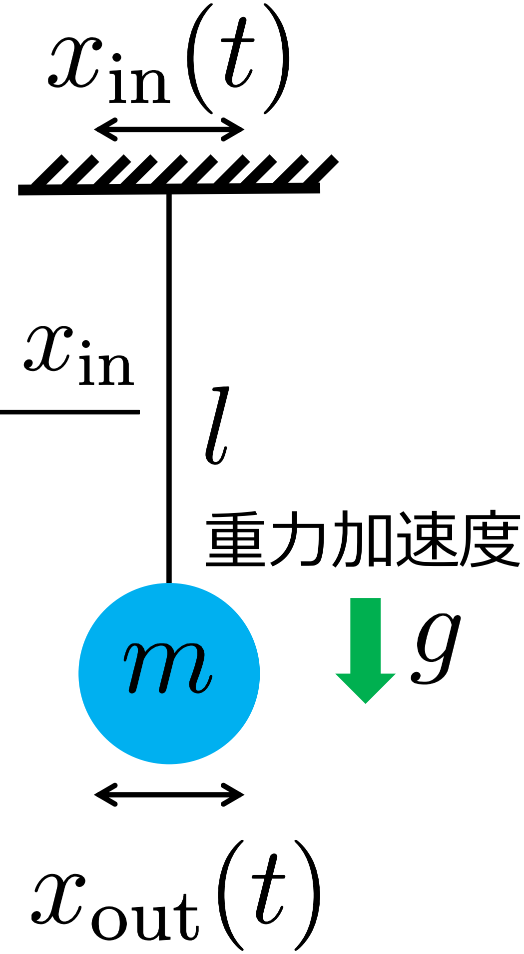
復元力

$$F_{\mathrm{r}} = -mg\sin\theta = -mg\frac{x_{\mathrm{out}} - x_{\mathrm{in}}}{l}$$

減衰力

$$F_{\mathrm{r}} = -2m\gamma\dot{x}_{\mathrm{out}}$$





例3: 単振り子

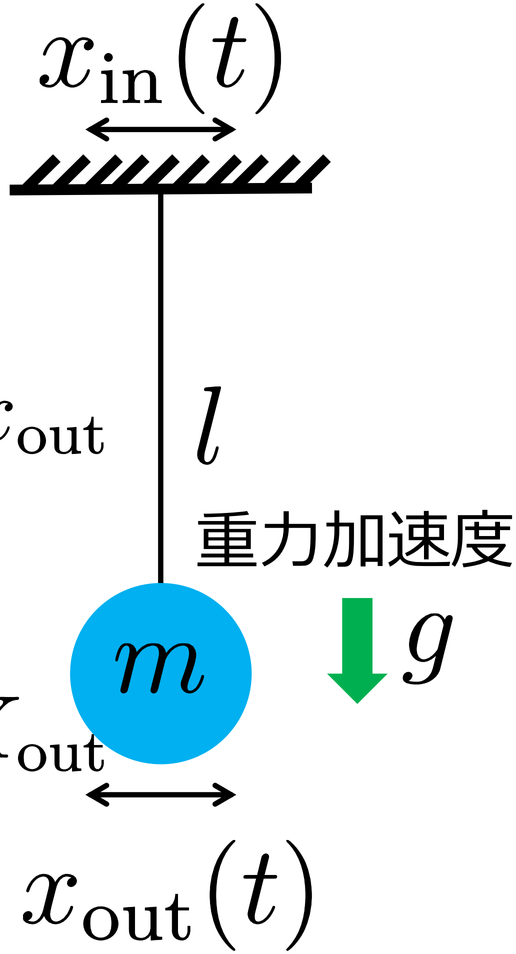
- 右の単振り子の伝達関数は？

運動方程式

$$m\ddot{x}_{\mathrm{out}} = -\frac{mg}{l}(x_{\mathrm{out}} - x_{\mathrm{in}}) - 2m\gamma\dot{x}_{\mathrm{out}}$$

両辺をフーリエ変換

$$-\omega^2 X_{\mathrm{out}} = -\frac{g}{l}(X_{\mathrm{out}} - X_{\mathrm{in}}) - 2i\omega\gamma X_{\mathrm{out}}$$



伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{X_{\mathrm{out}}}{X_{\mathrm{in}}} = \frac{\frac{g}{l}}{-\omega^2 + \frac{g}{l} + 2i\gamma\omega}$$

例3: 単振り子

- 右の単振り子の伝達関数は？

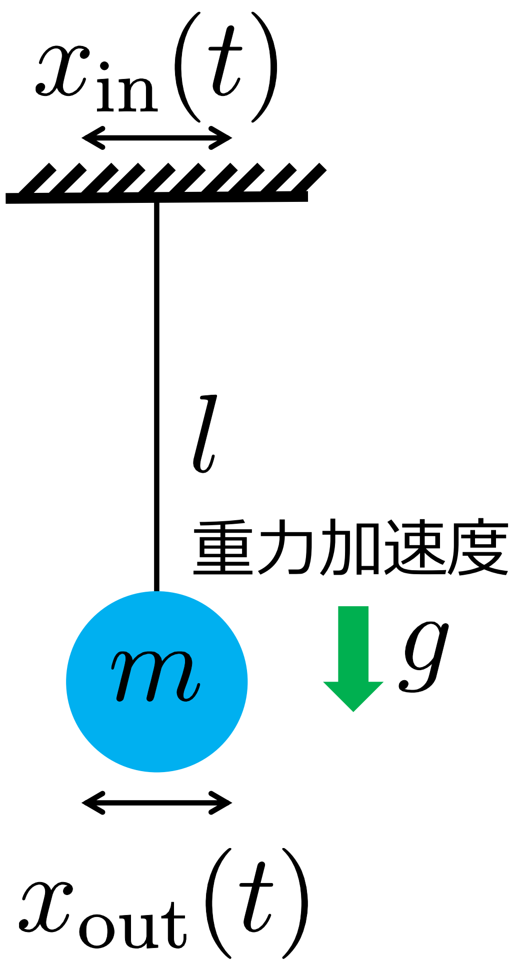
共振周波数 $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$

Q値 $Q = \dfrac{\omega_0}{2\gamma}$

を用いると

$$H(\omega) = \frac{\frac{g}{l}}{-\omega^2 + \frac{g}{l} + 2i\gamma\omega}$$

$$= \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

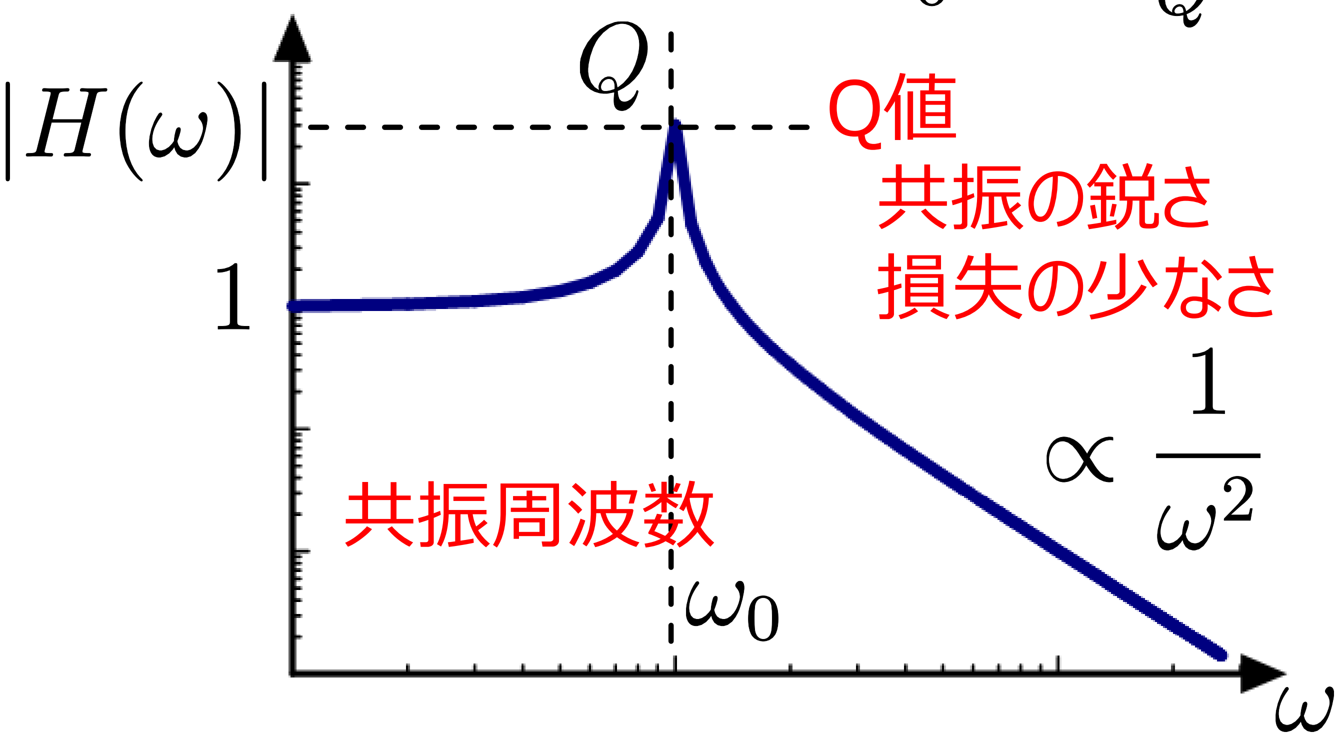


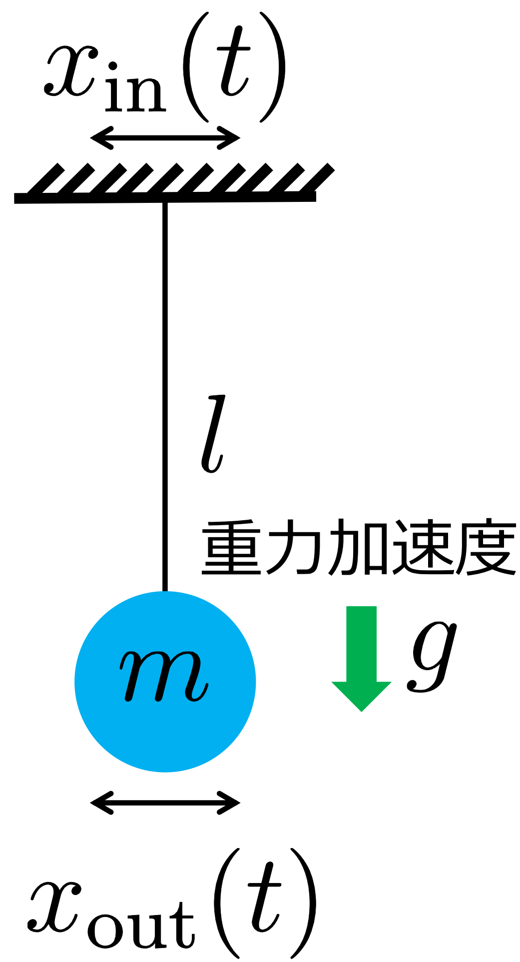
例3: 単振り子

- 右の単振り子の伝達関数は？

伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

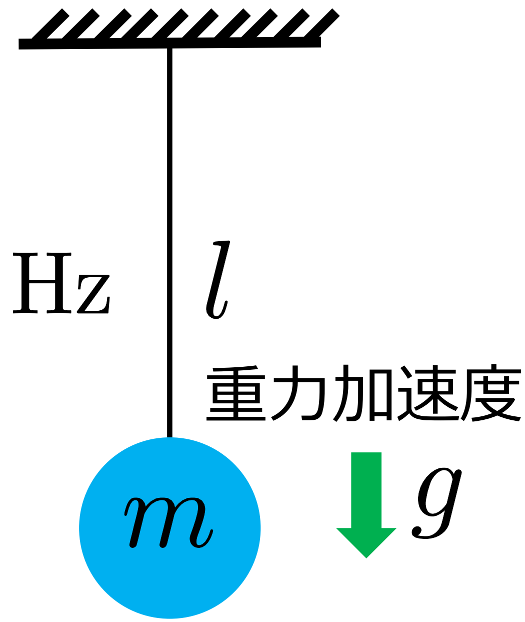




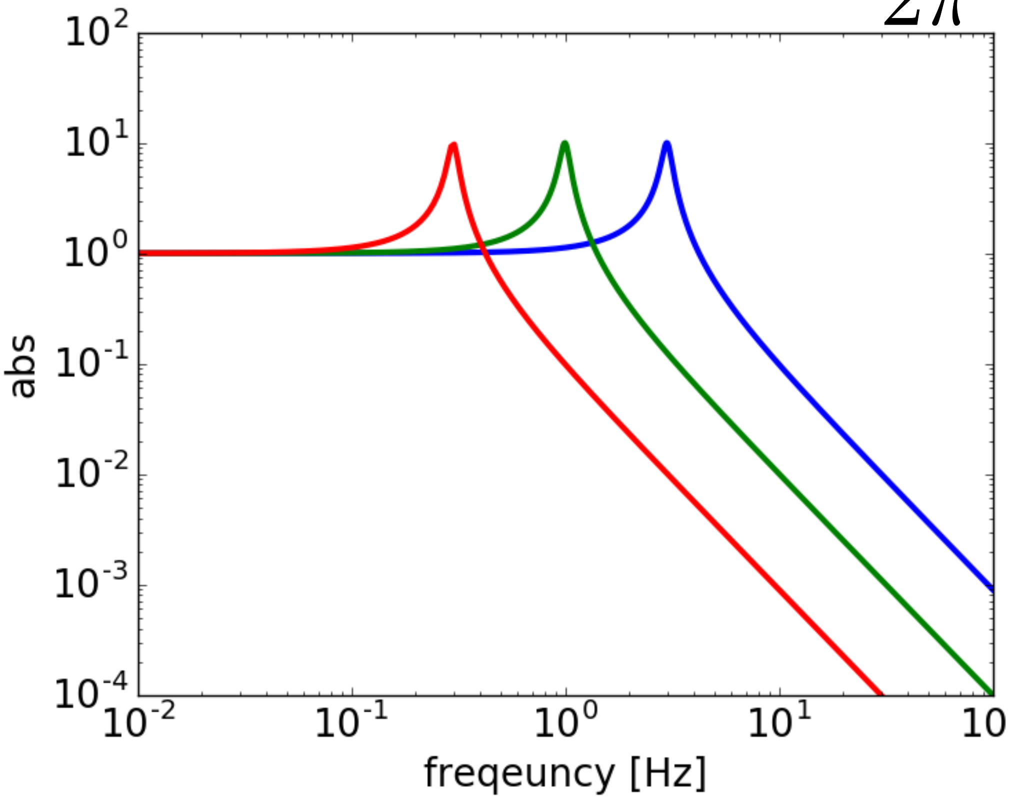
振り子の共振周波数

- ワイヤの長さが長いほど共振周波数が低い
- $l = 1\ \mathrm{m}$ の場合は

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \simeq 0.5\ \mathrm{Hz}$$



$$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$$

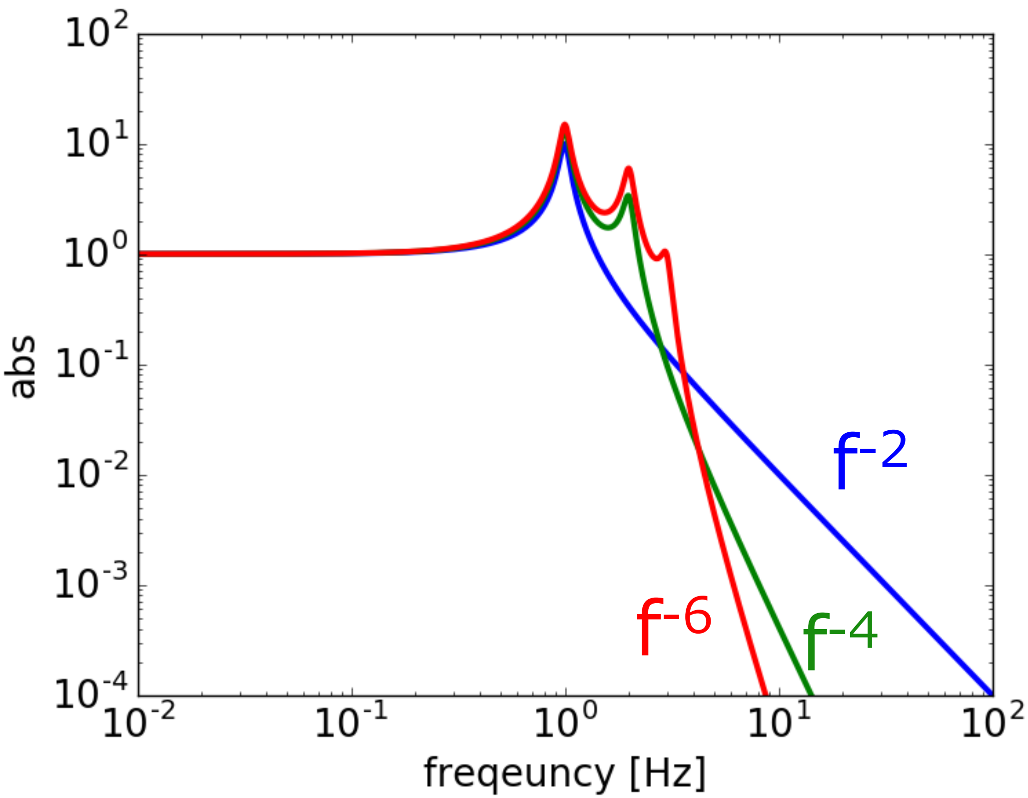


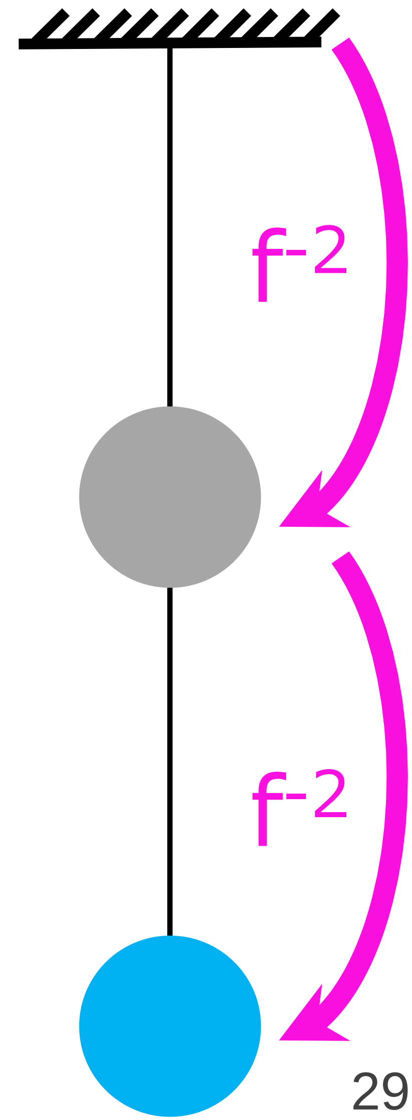
共振周波数が低いほど
防振性能が高い

地上では限界がある

多段振り子

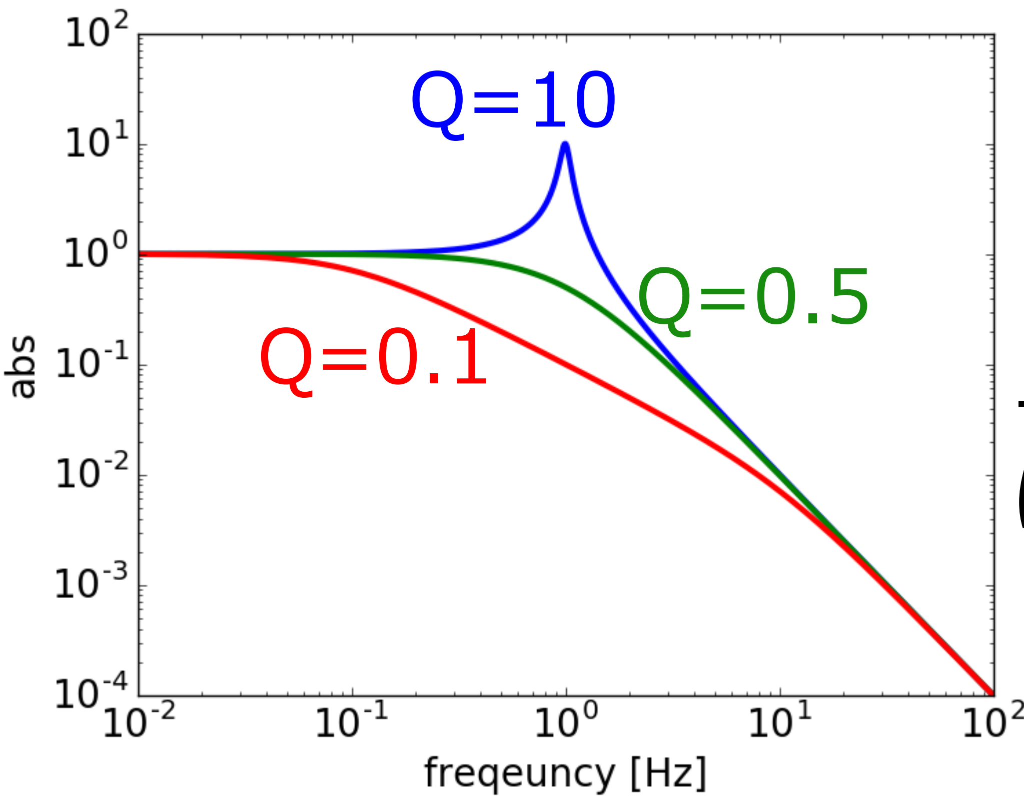
- n段振り子は高周波で f^{-2n} の防振性能を持つ
- 地上重力波望遠鏡の観測帯域(~10-1 kHz)で高性能な防振

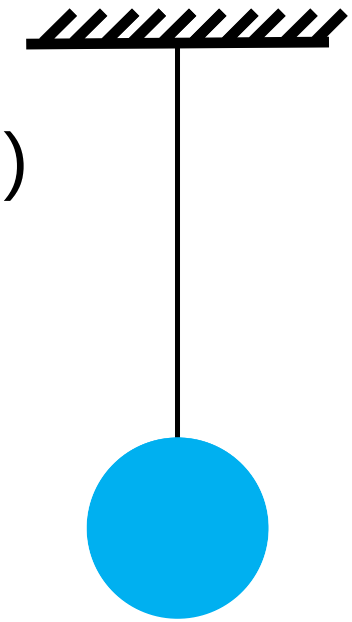




振り子のQ値

- Q値が高すぎると共振周波数で揺れすぎる
  Q値が高いほど熱雑音が低い(次回)
- Q値が低すぎると防振性能が落ちる





一般的に、振り子のQ値は高い(10^5とか)

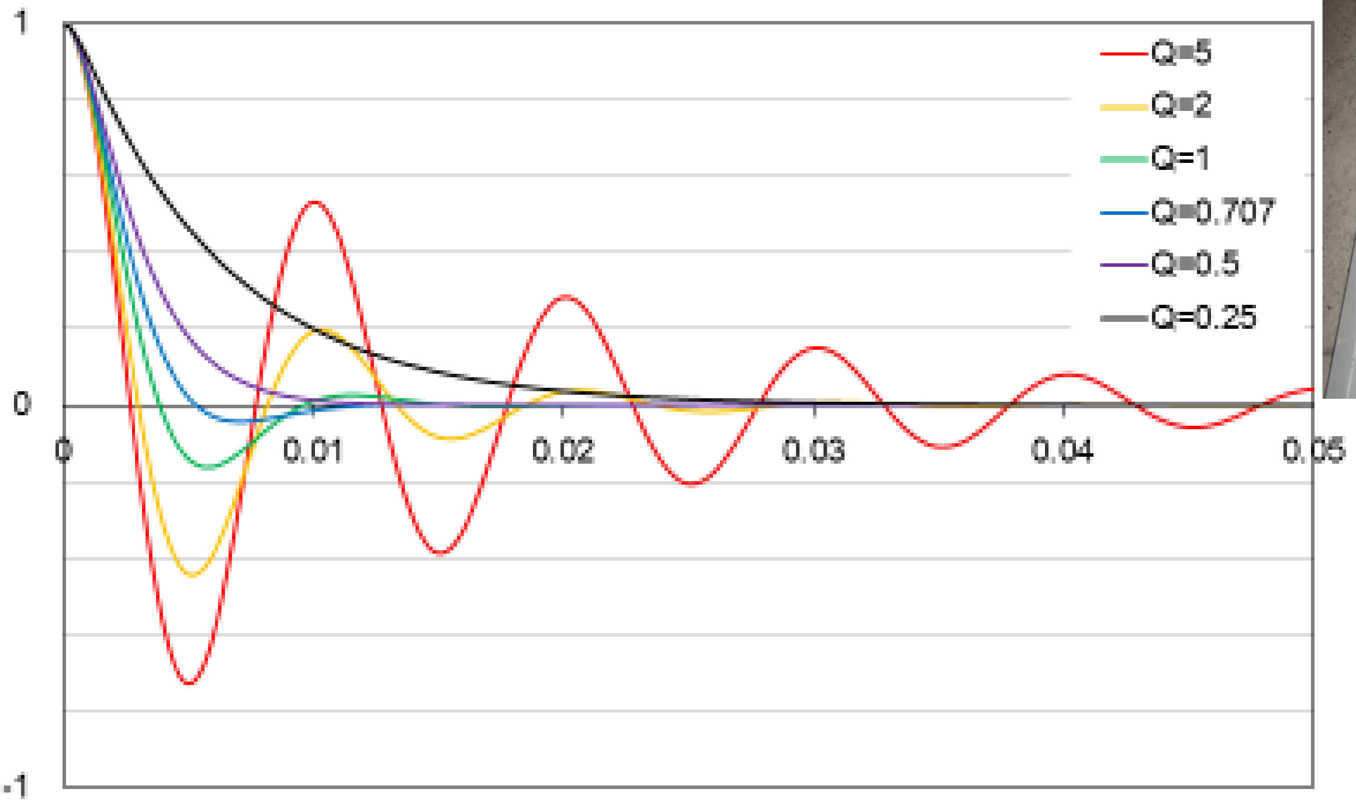
Q値と減衰振動

- Q値が高いほど、減衰にかかる時間が長い

$\gamma < \omega_0$ 減衰振動

$\gamma = \omega_0$ 臨界減衰(Q=0.5) 減衰時間が最小

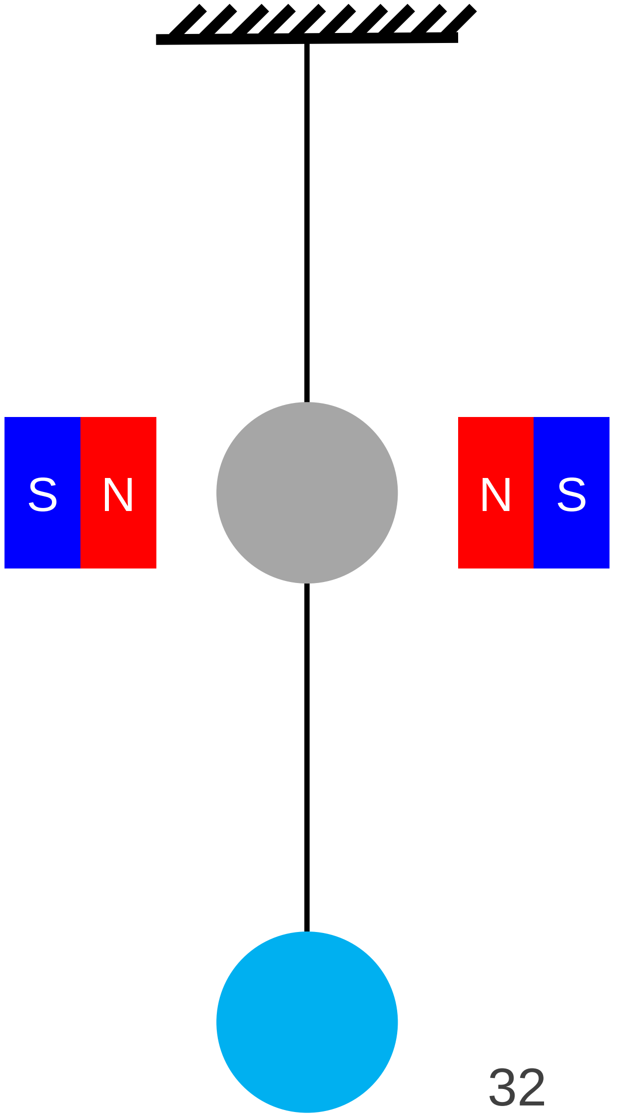
$\gamma > \omega_0$ 過減衰



ドアクローザー

マグネットダンピング

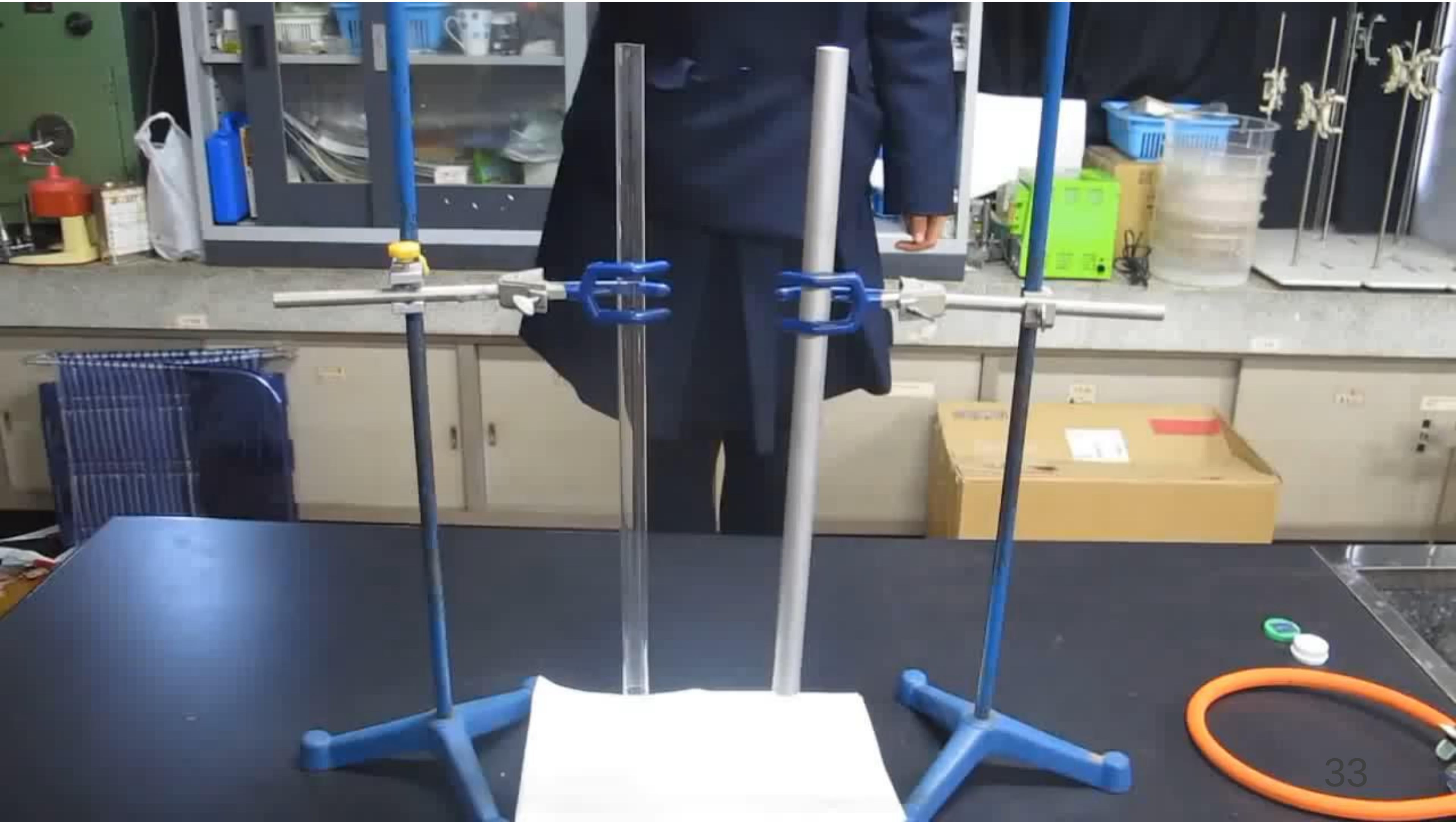
- Q値が高すぎると、揺れがおさまるまで時間がかかる
- 非磁性の金属マスに磁石を近づけることで渦電流を発生させてQ値を下げる
  - 電磁誘導により磁場変化を抑えるように発生する電流



渦電流

- ガラス管とアルミ管で磁石の落ちる速さが違う

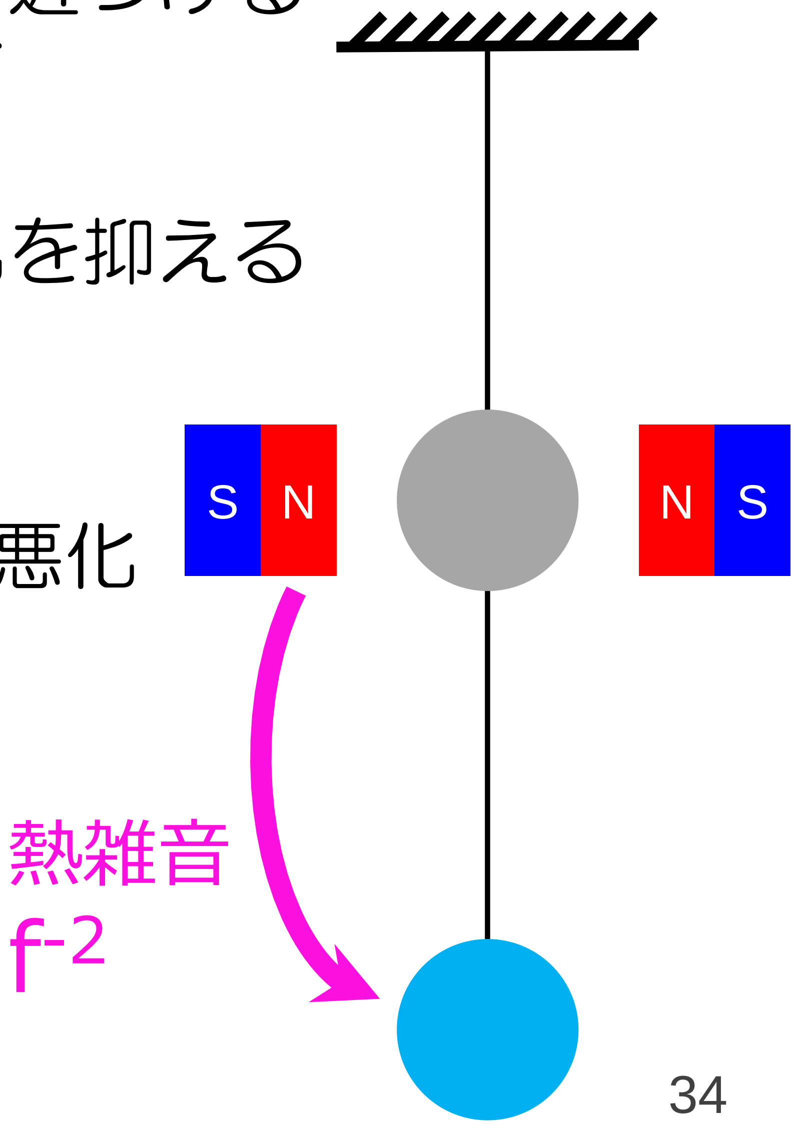
https://youtu.be/JH96bklYMEo



マグネットダンピング

- 非磁性の金属マスに磁石を近づけることで渦電流を発生させてQ値を下げる
  電磁誘導により磁場変化を抑えるように発生する電流

- Q値を下げすぎると熱雑音悪化
  上段のマスで行う
  アクティブダンピング



アクティブダンピング

- 位置変化を測定し、鏡の速度に比例した減衰力を加える
- 熱雑音の悪化がない
- 制御に由来する雑音は混入する

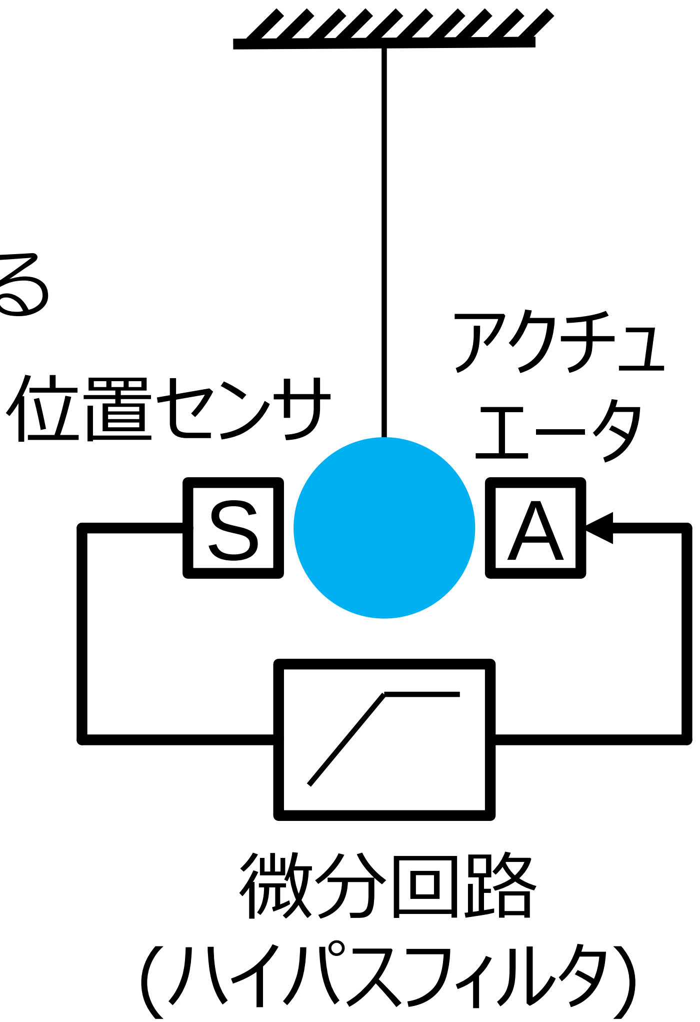
  回路雑音

  磁場雑音

  センサー雑音

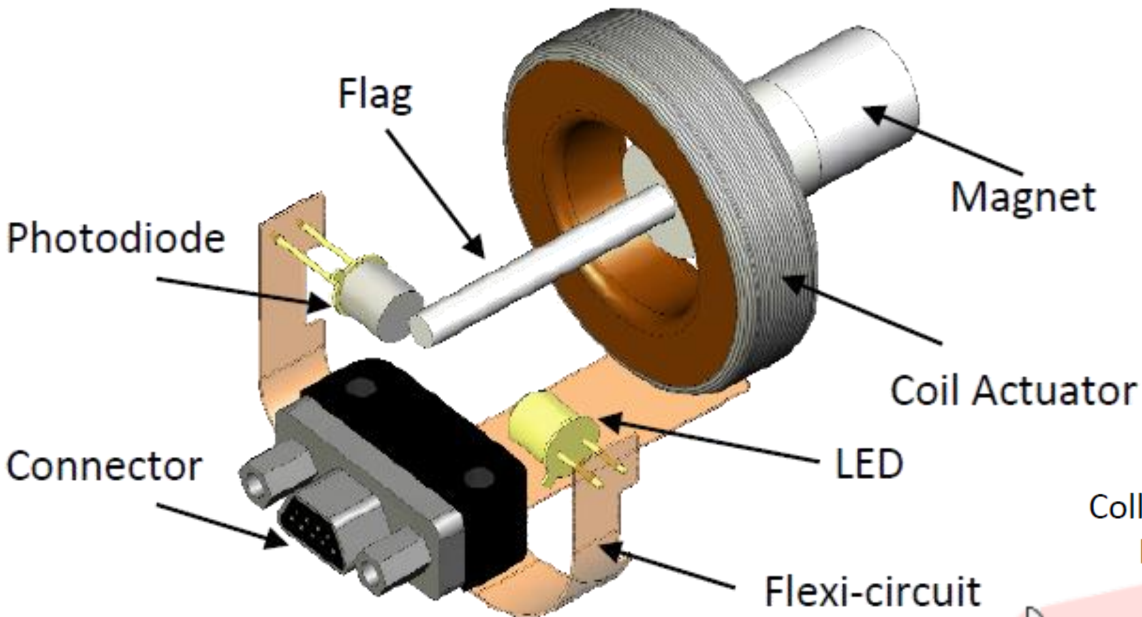
  アクチュエータ雑音

  などなど

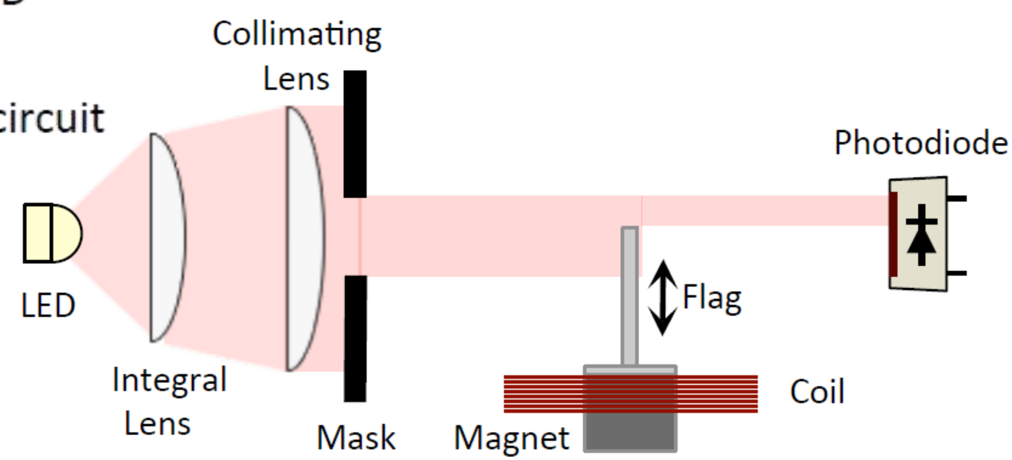


OSEM

- Optical Sensor ElectroMagnet



コイルに電流を流すことで鏡についた磁石に力を加える

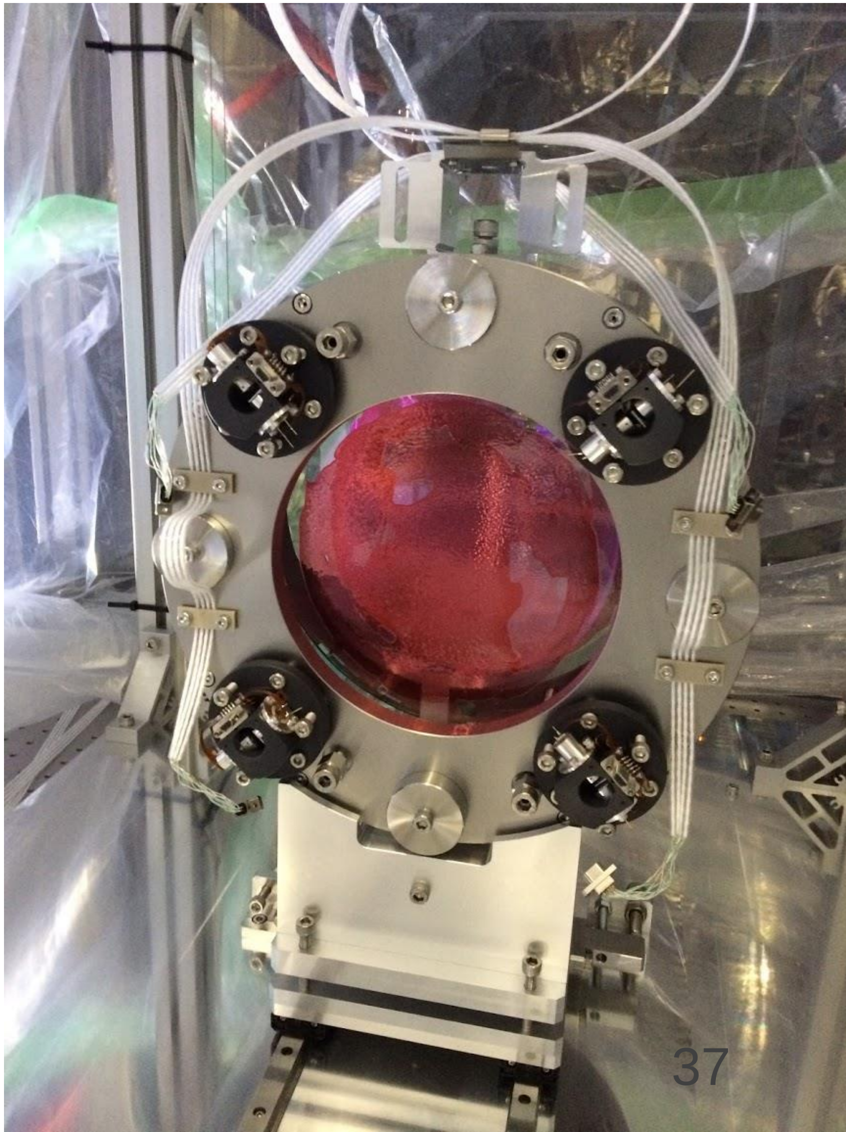


フラッグが遮る光量から鏡の位置を読み取る

Class. Quantum Grav. 29, 115005 (2012)

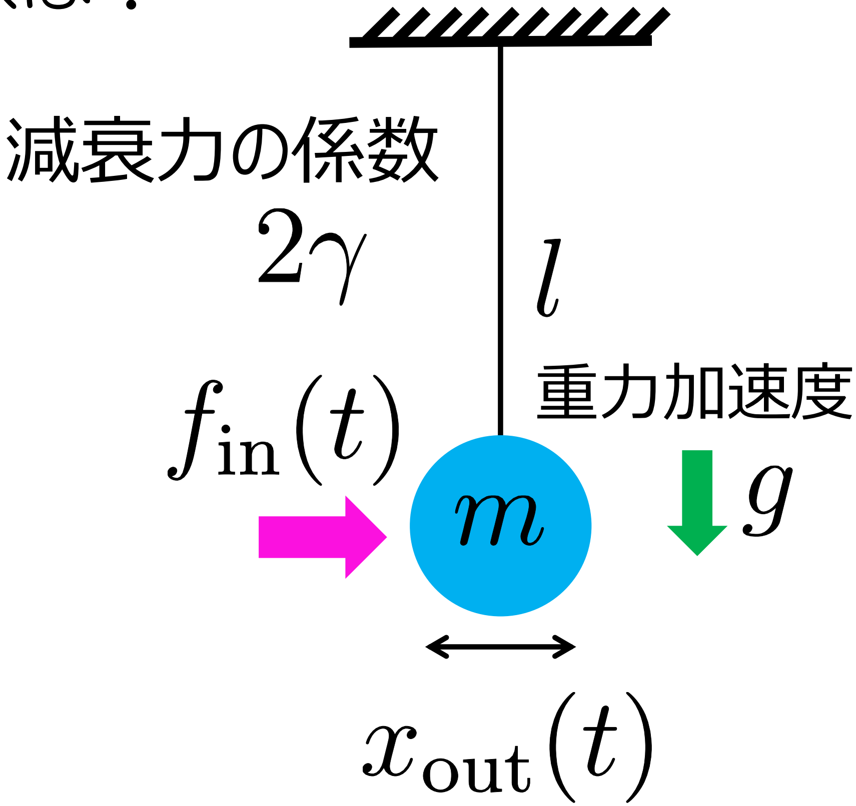
OSEM

- Optical Sensor ElectroMagnet



例4: 単振り子

- 物体を押した時の伝達関数は？

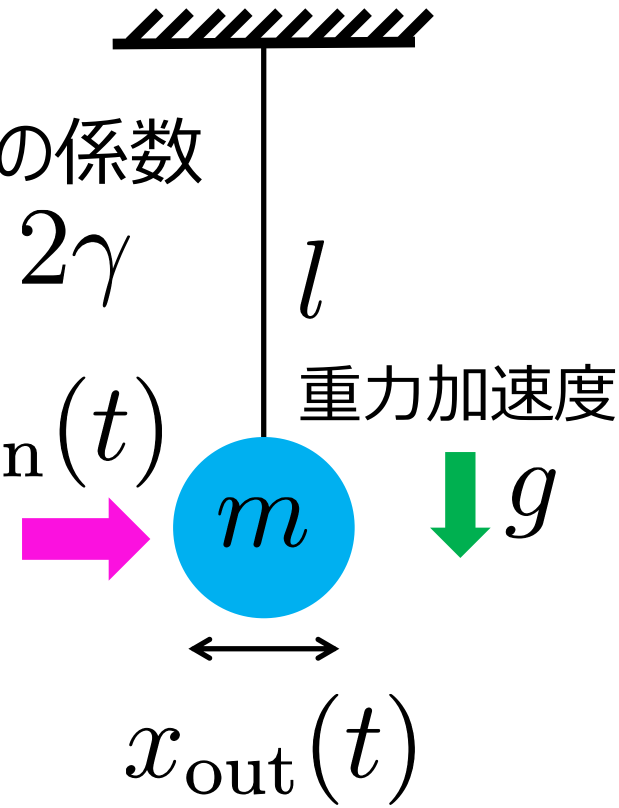


例4: 単振り子

- 物体を押した時の伝達関数は？

減衰力の係数

2γ



運動方程式

$$m\ddot{x}_{\mathrm{out}} = -\frac{mg}{l}x_{\mathrm{out}} - 2m\gamma\dot{x}_{\mathrm{out}} + f_{\mathrm{in}}$$

両辺をフーリエ変換

$$-\omega^2 X_{\mathrm{out}} = -\frac{g}{l}X_{\mathrm{out}} - 2i\omega\gamma X_{\mathrm{out}} - \frac{F_{\mathrm{in}}}{m}$$

伝達関数は

$$H(\omega) = \frac{X_{\mathrm{out}}}{F_{\mathrm{in}}} = \frac{1}{m}\frac{1}{-\omega^2 + \frac{g}{l} + 2i\gamma\omega}$$

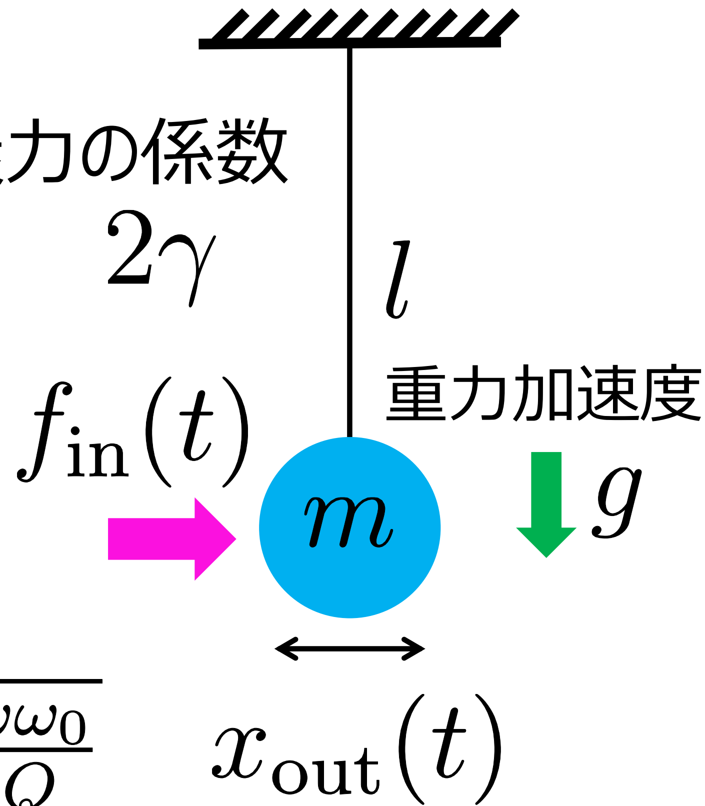
例4: 単振り子

- 物体を押した時の伝達関数は？

共振周波数 $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$

減衰力の係数 2γ

Q値 $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$



を用いると

$$H(\omega) = \frac{1}{m}\frac{1}{-\omega^2+\omega_0^2+i\frac{\omega\omega_0}{Q}}$$

重い方が力の雑音には強い
輻射圧雑音(次回)、残留ガス雑音……

第4回まとめ

- パワースペクトル
  平均パワーへの各周波数成分からの寄与
  単位に/√Hzがつく
- 伝達関数
  線形システムの入力と出力の比
  入力スペクトルに伝達関数をかけると
  　出力スペクトルが求まる
- 振り子
  共振周波数が低い方が防振性能がいい
  多段の方が防振性能がいい
  Q値はうまく調節する必要がある
  　減衰時間、熱雑音を考慮
  重い方が雑音に強い