

電気情報工学特別講義 第3回

道村唯太

東京大学 大学院理学系研究科 物理学専攻

講義スケジュール

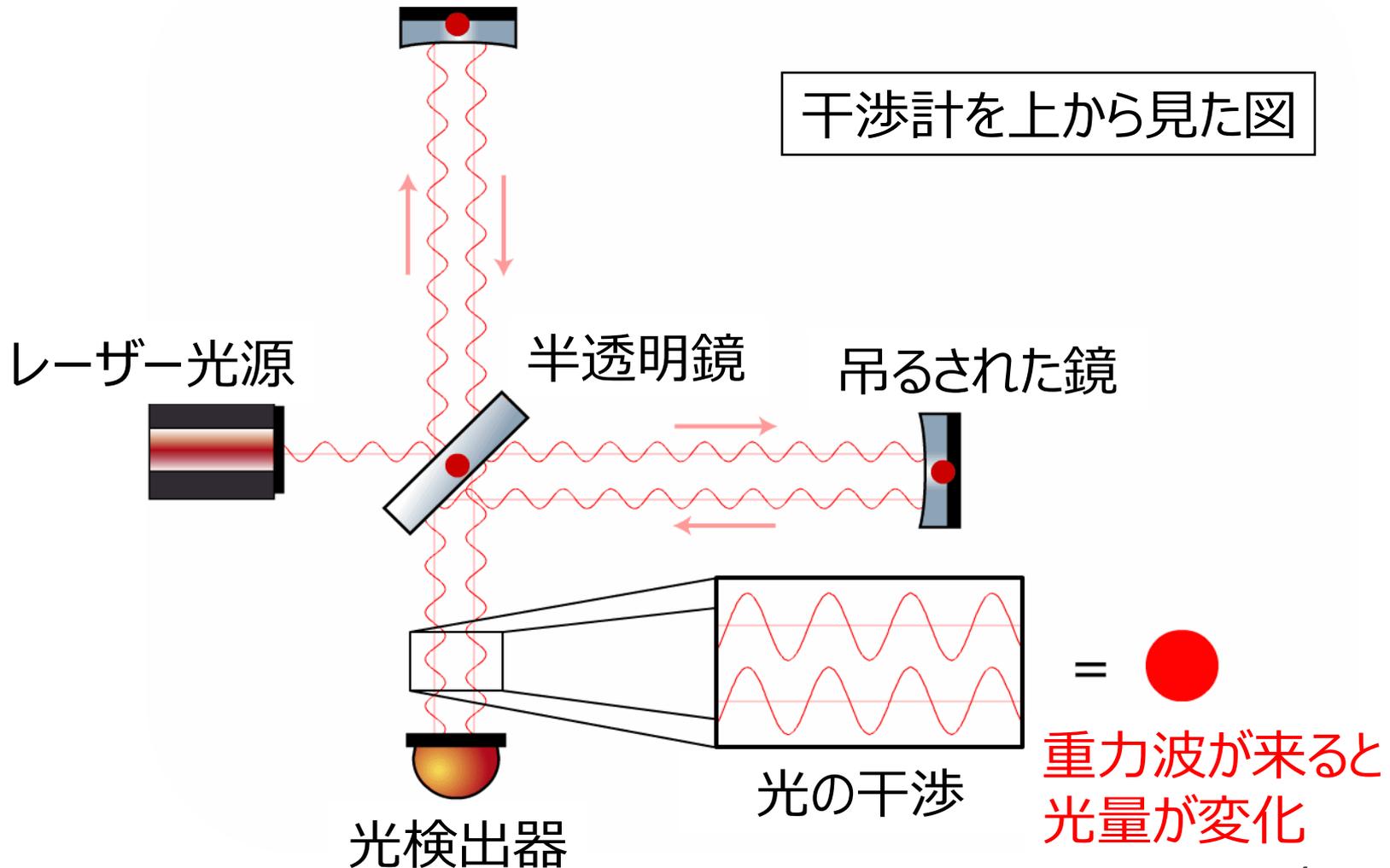
- 10月3日(月)
 - 3限 第1回 重力波の初検出について
 - 4限 第2回 重力波望遠鏡KAGRAの紹介
- 10月4日(火)
 - 2限 第3回 干渉計と共振器の原理
 - 3限 第4回 パワースペクトルと伝達関数
 - 4限 第5回 様々な雑音とその低減方法
- 10月5日(水)
 - 2限 第6回 重力波望遠鏡のこれから
 - 3限 第7回 精密測定技術の応用
 - 4限 第8回 「重力波天文学の夜明けとKAGRA」

2日目のレポート

- 重力波検出器の雑音源を1つ取り上げ、その原因と対策方法について簡単にまとめてください(講義で取り上げなかった雑音でもOK)
- 名前と学籍番号、実施日を必ず書くこと！

レーザー干渉計型重力波望遠鏡

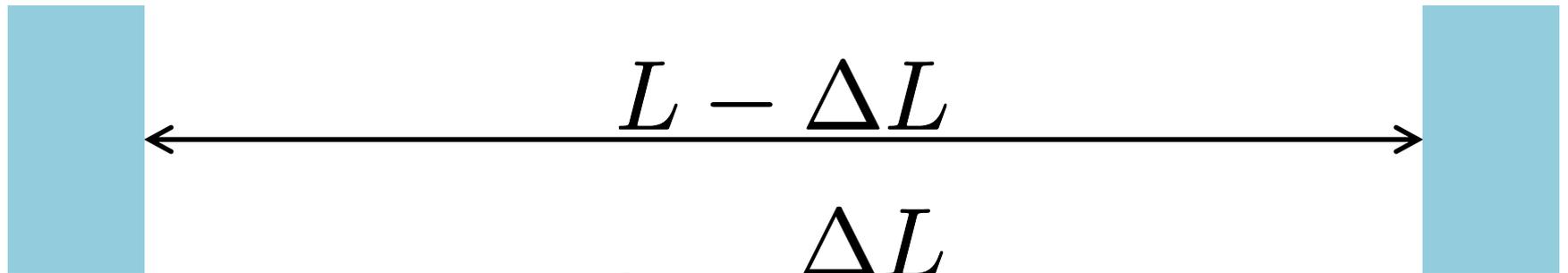
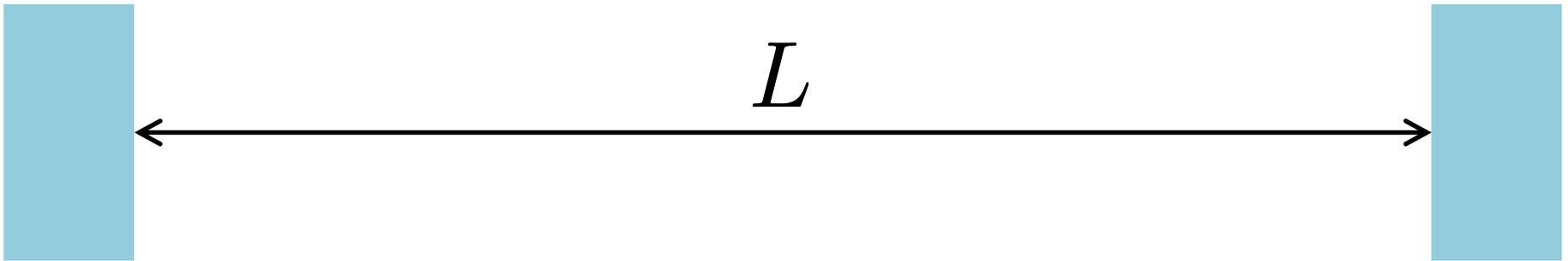
- 両腕の長さの差をレーザーで測定



重力波の振幅ってどれくらい？

- 重力波による空間歪みの大きさ

$$h \sim \frac{GM}{c^2 r} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$



$$h = \frac{\Delta L}{L}$$

重力波の振幅ってどれくらい？

- 重力波による空間歪みの大きさ

$$h \sim \frac{GM}{c^2 r} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$

万有引力定数

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

真空中の光速

$$c = 299792458 \text{ m/s} \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

物体の質量

M

物体の速度

v

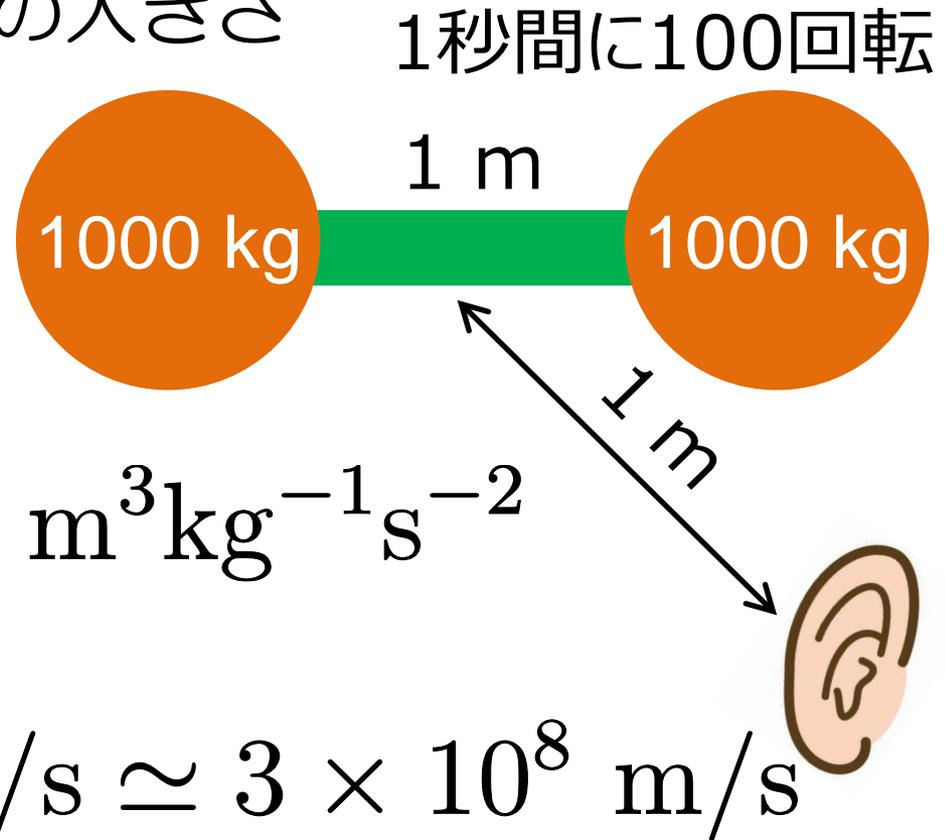
観測地点までの距離

r

人工的に作ってみる

- 重力波による空間歪みの大きさ

$$h \sim \frac{GM}{c^2 r} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$



万有引力定数

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

真空中の光速

$$c = 299792458 \text{ m/s} \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

物体の質量

M

物体の速度

v

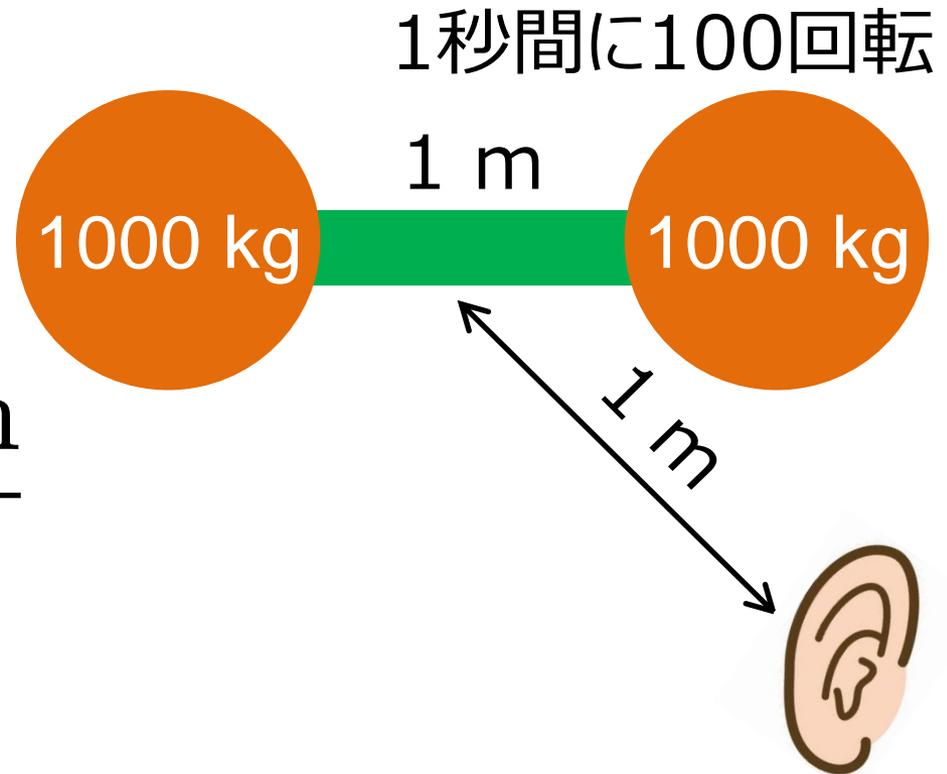
観測地点までの距離

r

人工的に作ってみる

- 物体の速さ

$$\begin{aligned}v &= \frac{2\pi R}{1/100 \text{ s}} \\ &= \frac{2\pi \times 0.5 \text{ m}}{1/100 \text{ s}} \\ &\simeq 300 \text{ m/s}\end{aligned}$$



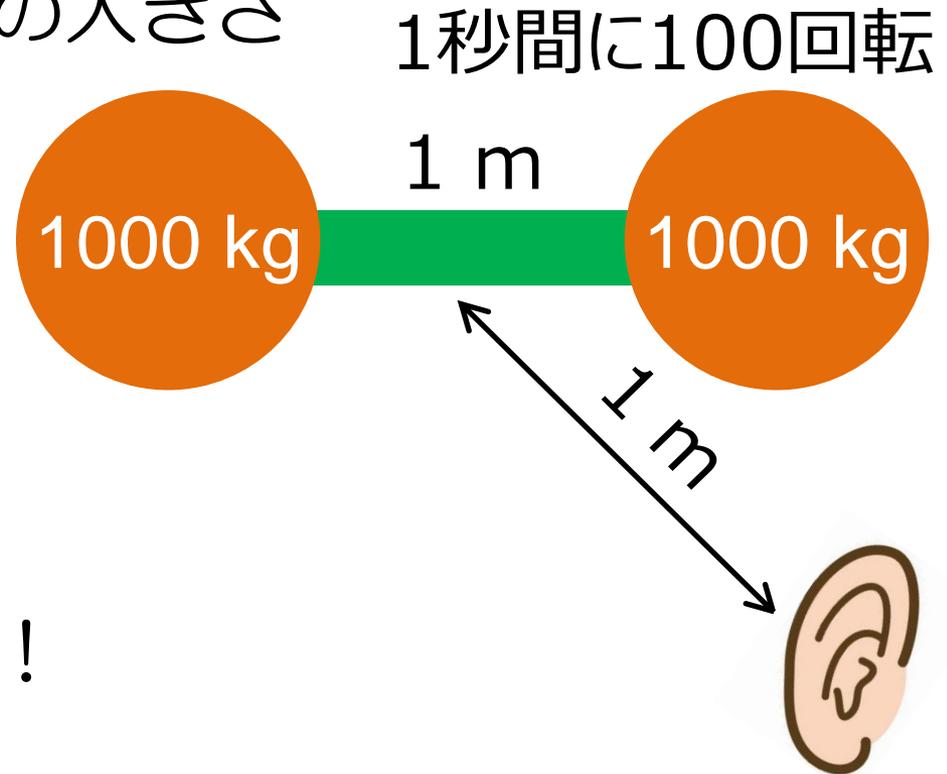
- 飛行機の速さ、音速と同じくらい



人工的に作ってみる

- 重力波による空間歪みの大きさ

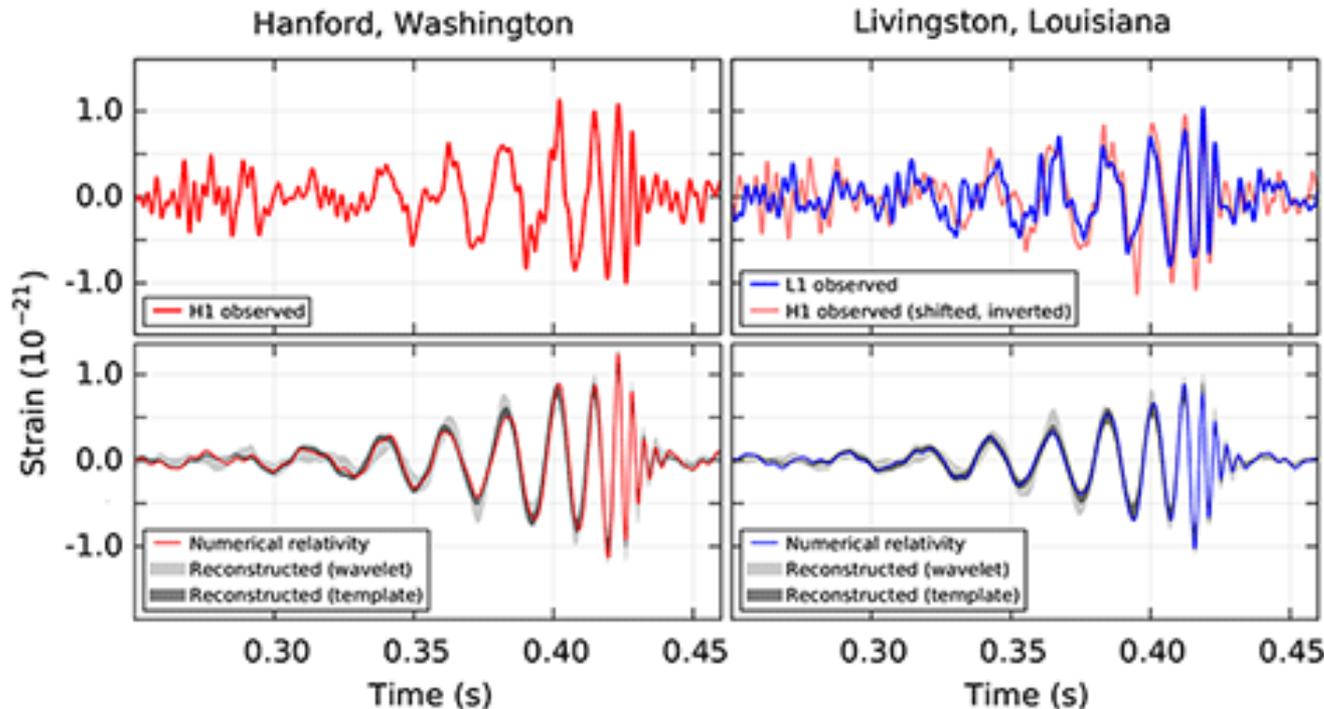
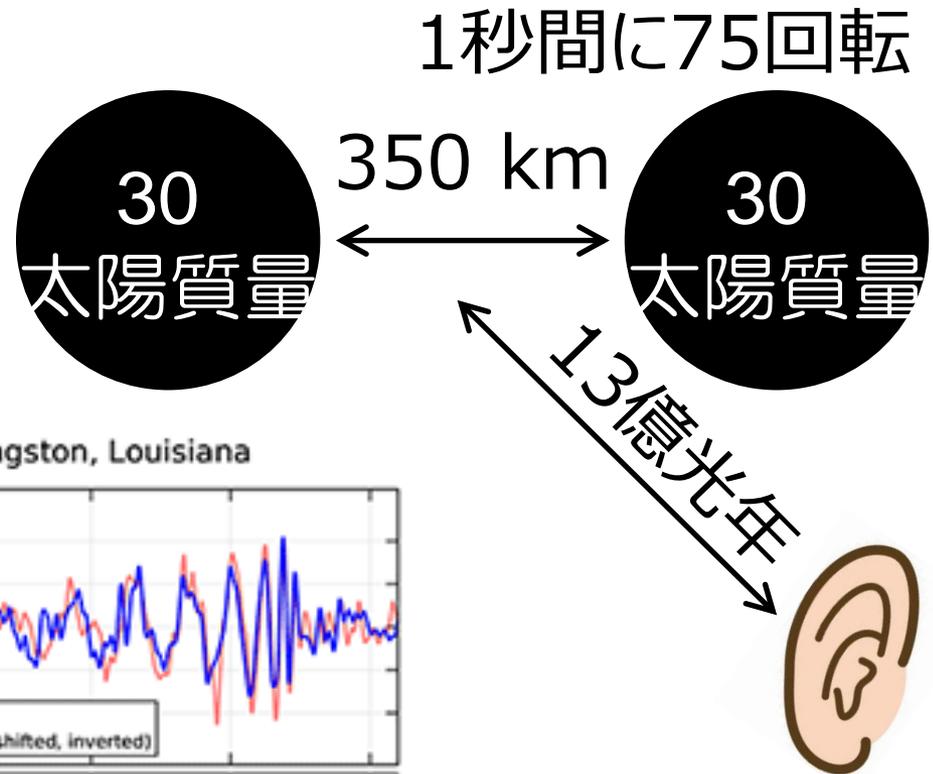
$$h \sim \frac{GM}{c^2 r} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$
$$\sim 8 \times 10^{-37}$$



- 現在の技術では不可能！
(15桁以上小さい)

ブラックホール連星の合体

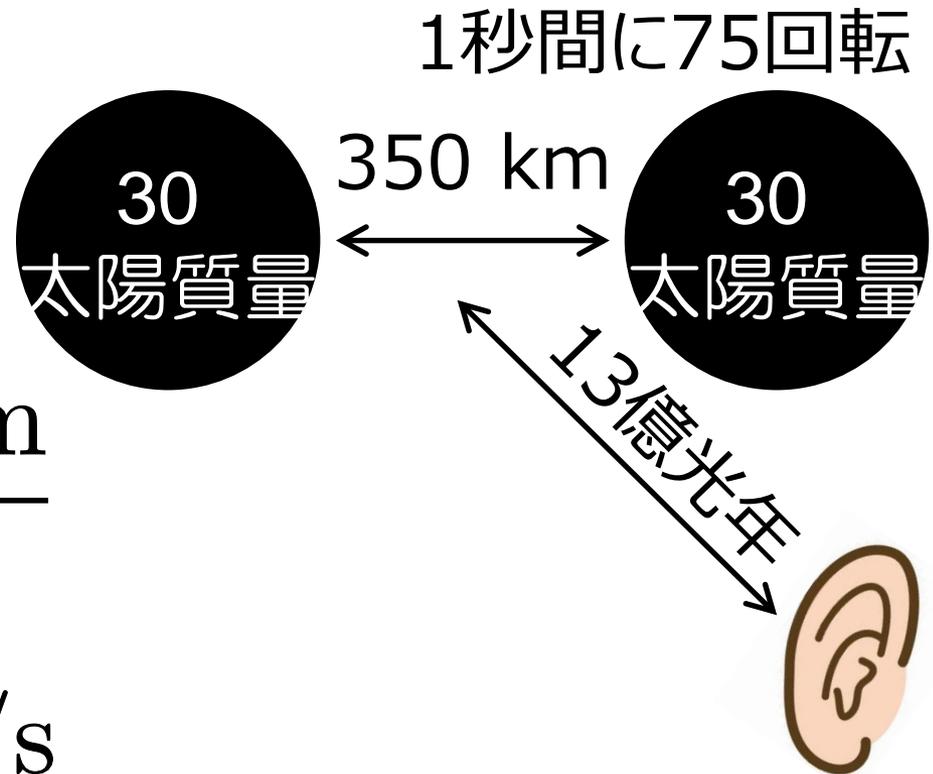
- 今回見つかったようなブラックホール連星を考える
- まず、速さは？



ブラックホール連星の合体

- ブラックホールの速さ

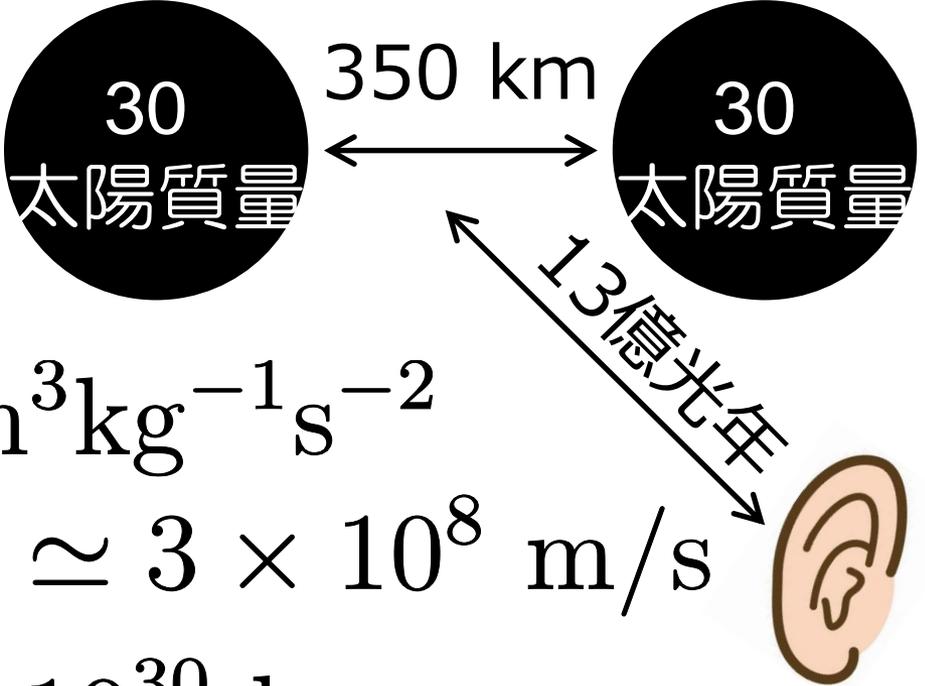
$$\begin{aligned}v &= \frac{2\pi R}{1/100 \text{ s}} \\ &= \frac{\pi \times 350 \text{ km}}{1/75 \text{ s}} \\ &\simeq 8 \times 10^7 \text{ m/s} \\ &\simeq 0.3c\end{aligned}$$



- 光速の30 %まで到達！

ブラックホール連星の合体

- 計算してみよう

$$h \sim \frac{GM}{c^2 r} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$


$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

$$c = 299792458 \text{ m/s} \simeq 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$M = 30M_{\odot} = 60 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$r = 13 \times 10^5 \text{ ly} = 1.2 \times 10^{22} \text{ m}$$

$$v = 0.3c$$

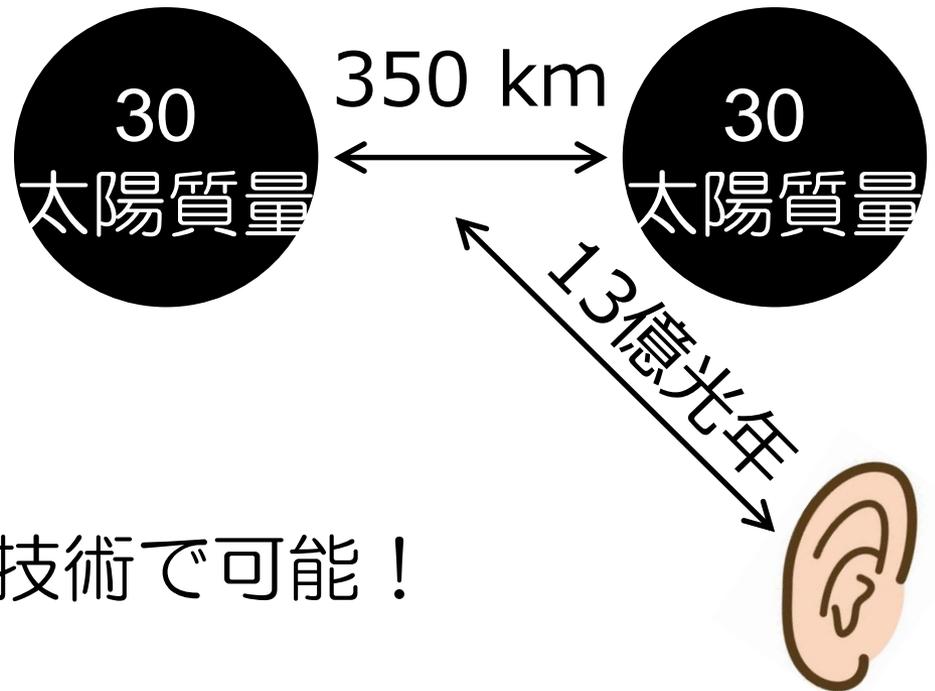
太陽質量は $2e30$ kg

1光年は $9.5e15$ m

ブラックホール連星の合体

- 重力波による空間歪みの大きさ

$$h \sim \frac{GM}{c^2 r} \left(\frac{v}{c} \right)^2$$
$$\sim 3 \times 10^{-19}$$



- とても小さいが現在の技術で可能！

ちなみに、ブラックホールの大きさ(シュバルツシルト半径)は

$$r_g = \frac{2GM}{c^2}$$

合体直前では $h \sim 1$
になっている！

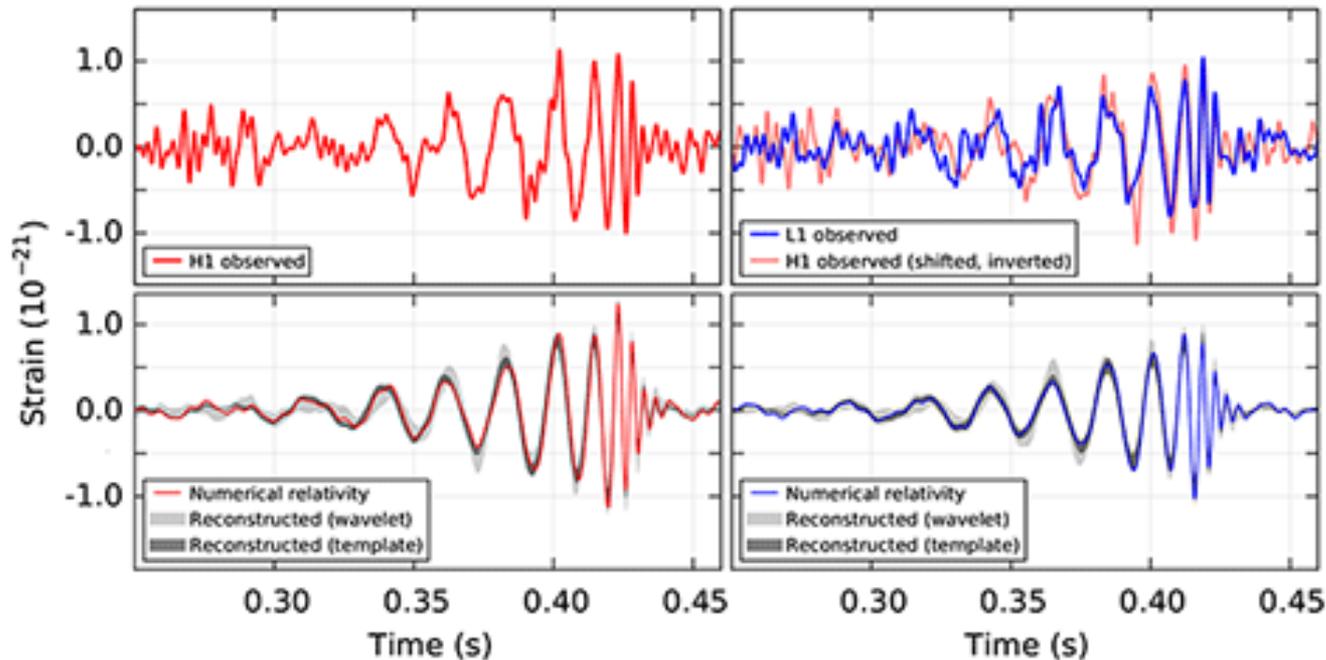
実際に検出した振幅は？

- $h \sim 10^{-21}$ 程度
- 4 kmが 4×10^{-18} m変化

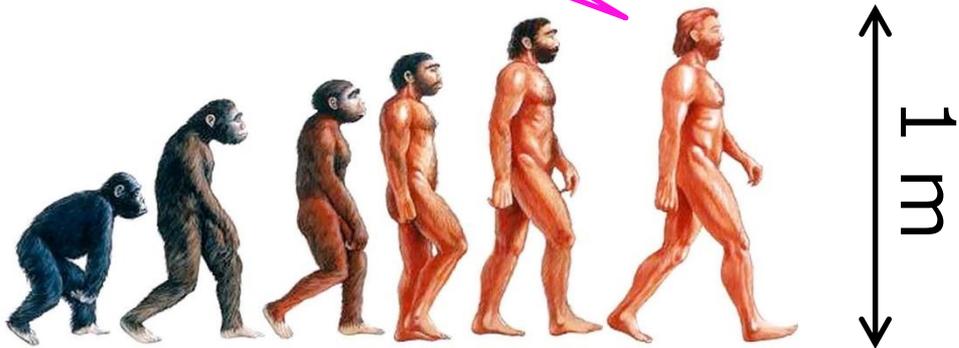
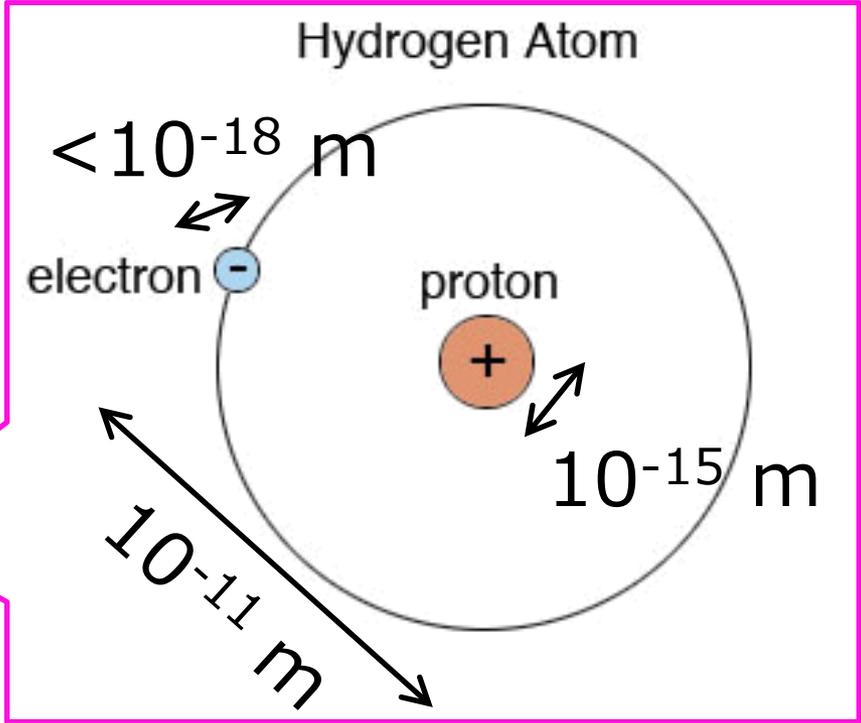
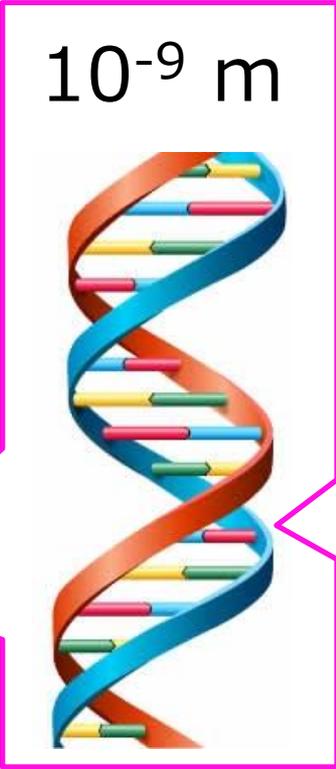
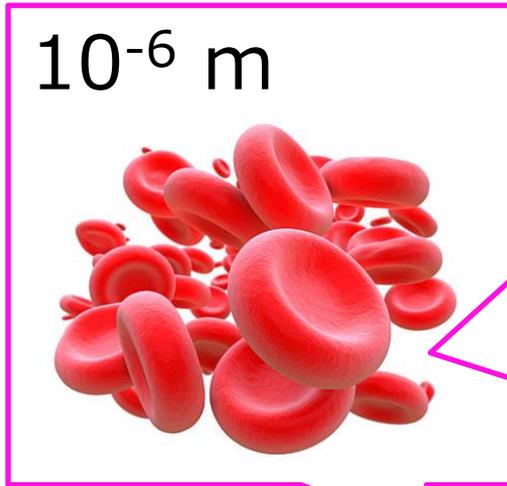


Hanford, Washington

Livingston, Louisiana



10^{-18} mってどのくらい？

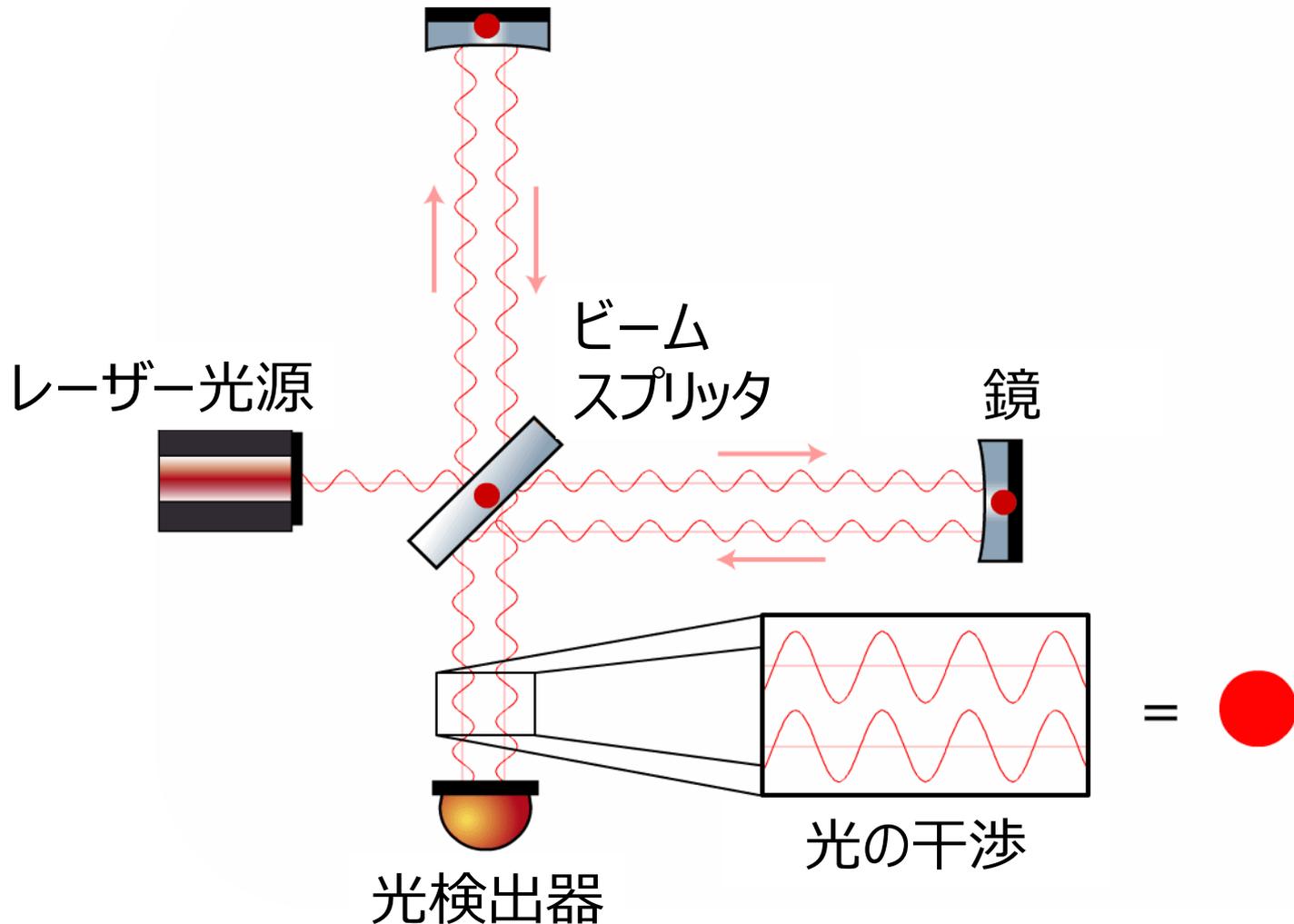


今回のお話

- 10^{-18} mの感度を実現するレーザー干渉計技術
- **Michelson干渉計**
 - 電磁波
 - 散射雑音(ショットノイズ)
- **Fabry-Pérot共振器**
- さらに感度を上げる工夫
 - Power Recycling
 - Resonant Sideband Extraction

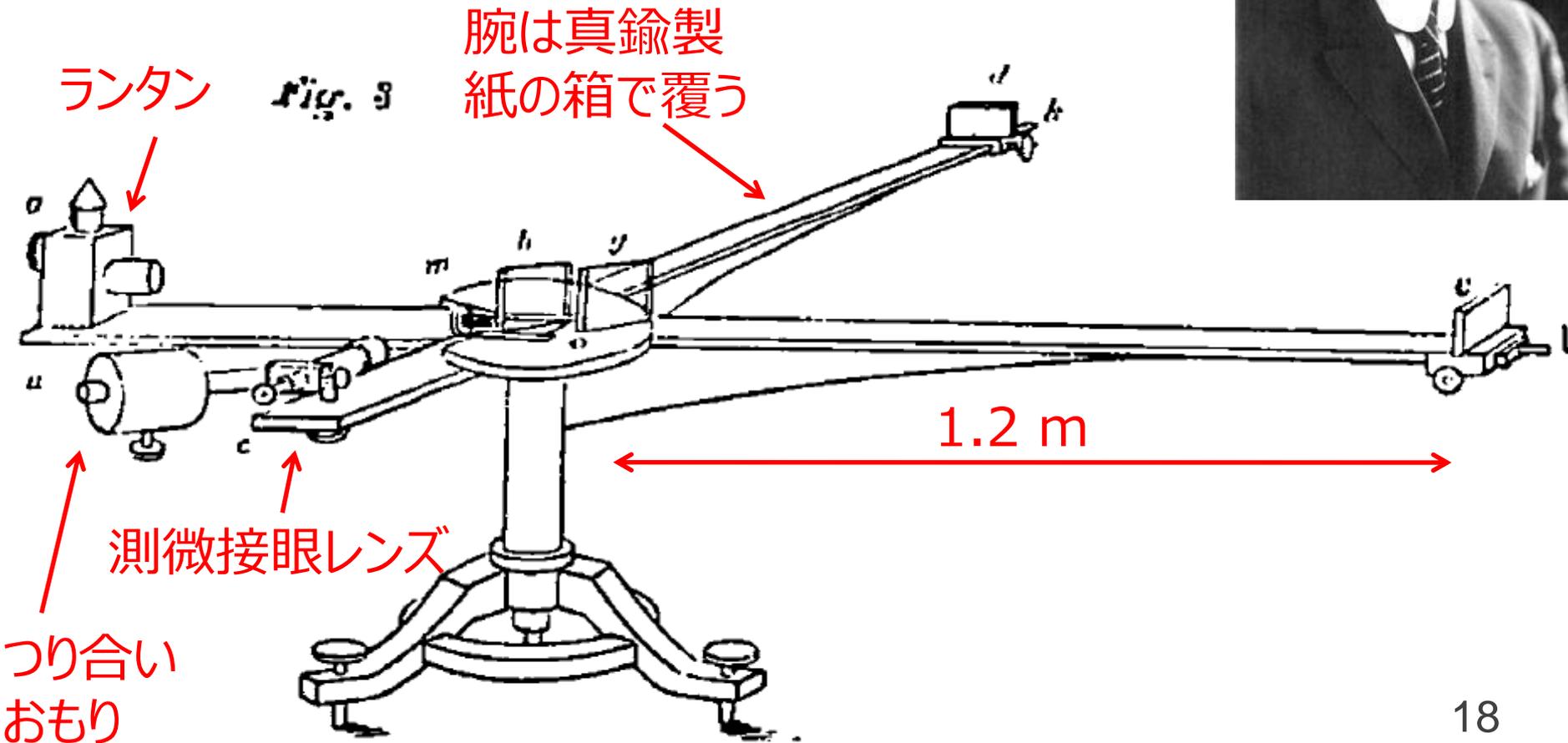
Michelson干渉計

- 両腕の長さの差をレーザーで測定する装置



Michelson干渉計

- 1881年にAlbert A. Michelsonが考案
- 「エーテルの風」を測定しようとした失敗したことが相対論に繋がった



レーザーの発明

- 1958年 Charles H. Townesと Arthur L. Schawlow
- 測定精度が大幅に向上



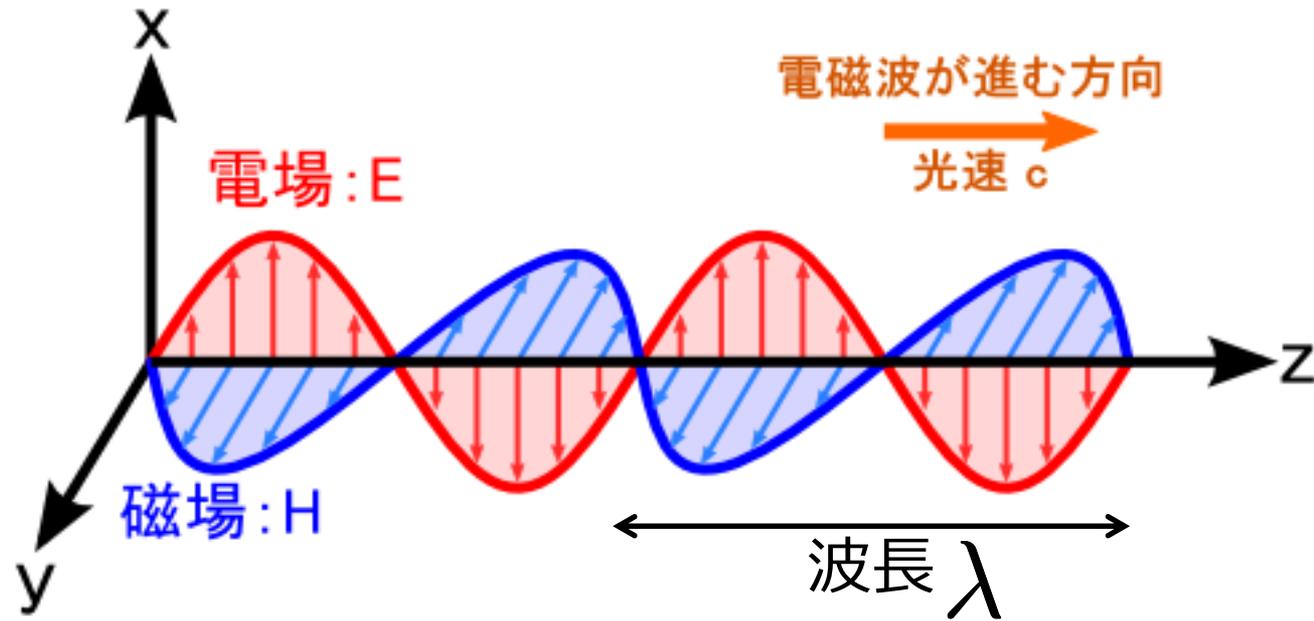
1964年



1981年

レーザー光

- 電磁波



- レーザー光の電場は下記のように書ける

$$E = E_0 e^{i(\omega t - \phi)}$$

電場振幅

レーザーの
角周波数 位相

$$\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}$$

L進んだ時の位相 20

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

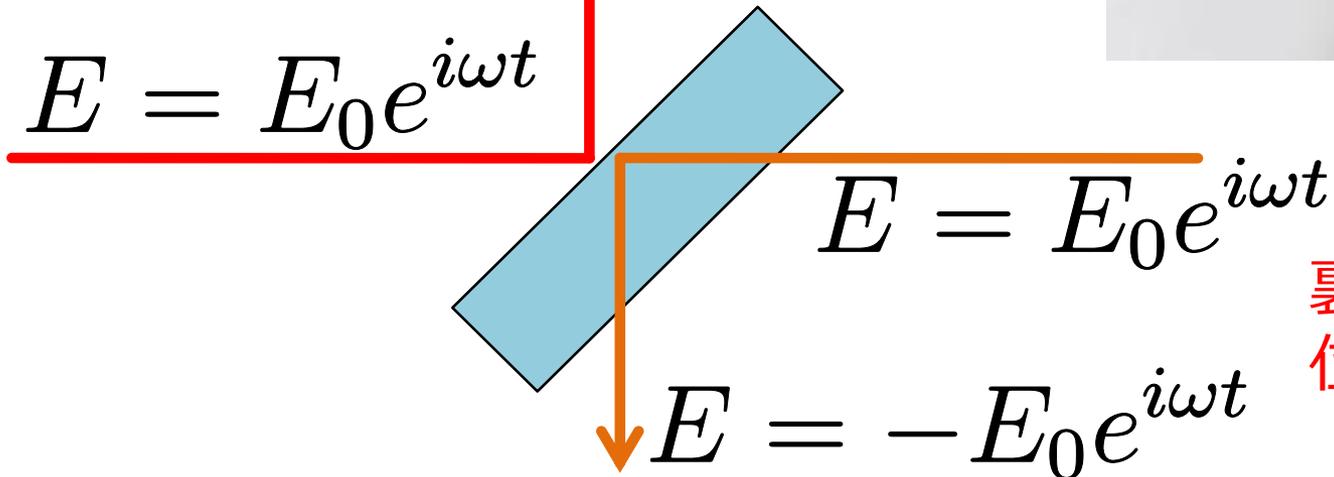
レーザー光の検出と反射

- 光検出器(フォトダイオード)
光子を電子(電流)に変換
光強度(振幅の二乗)を検出

$$P = |E|^2 = E_0^2$$

$$E = E_0 e^{i\omega t}$$

- 反射



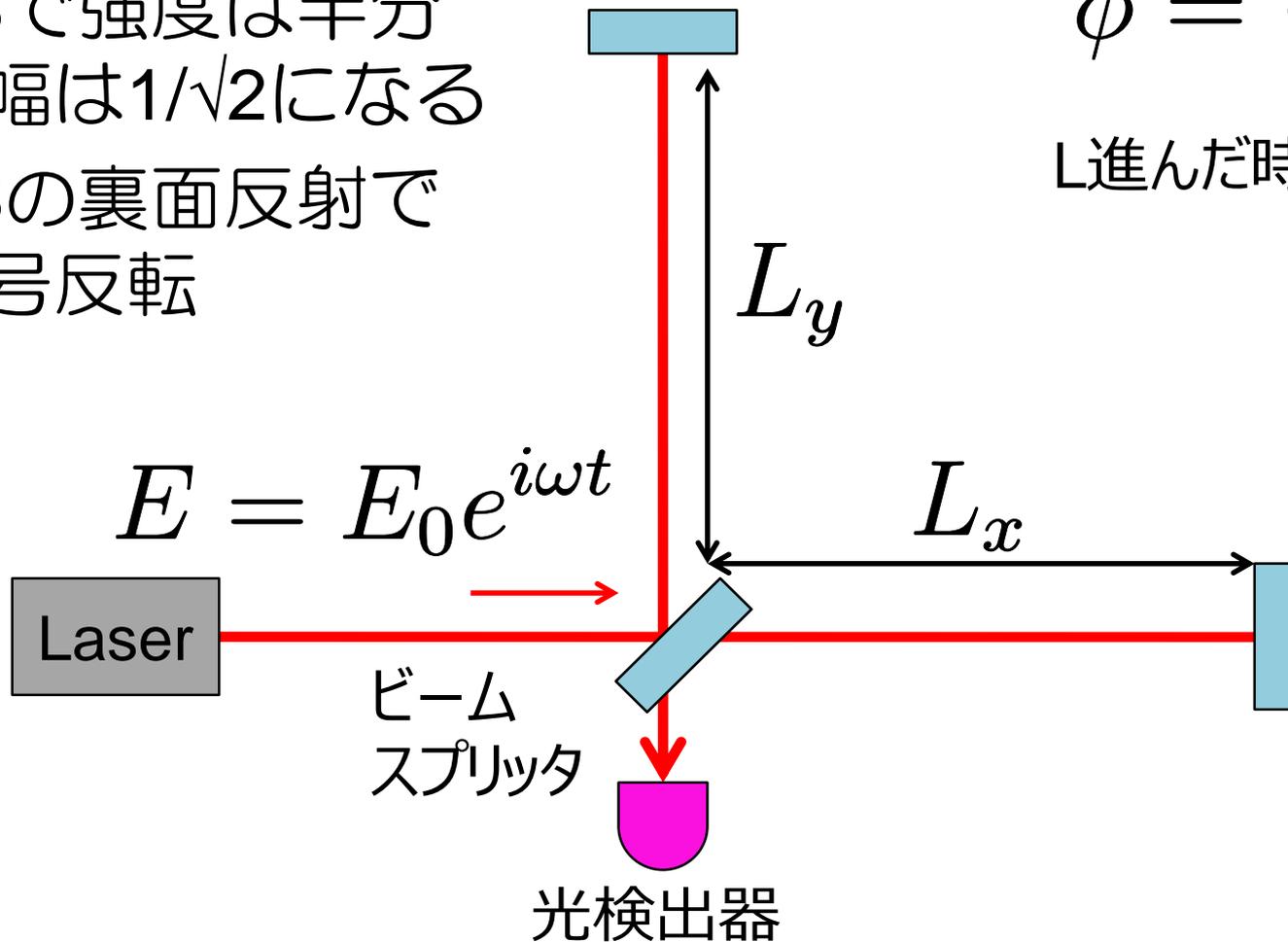
裏面からの反射では
位相が反転する！

Michelson干渉計の出力

- 光検出器で受ける光強度は？
- BSで強度は半分
振幅は $1/\sqrt{2}$ になる
- BSの裏面反射で
符号反転

$$\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}$$

L進んだ時の位相

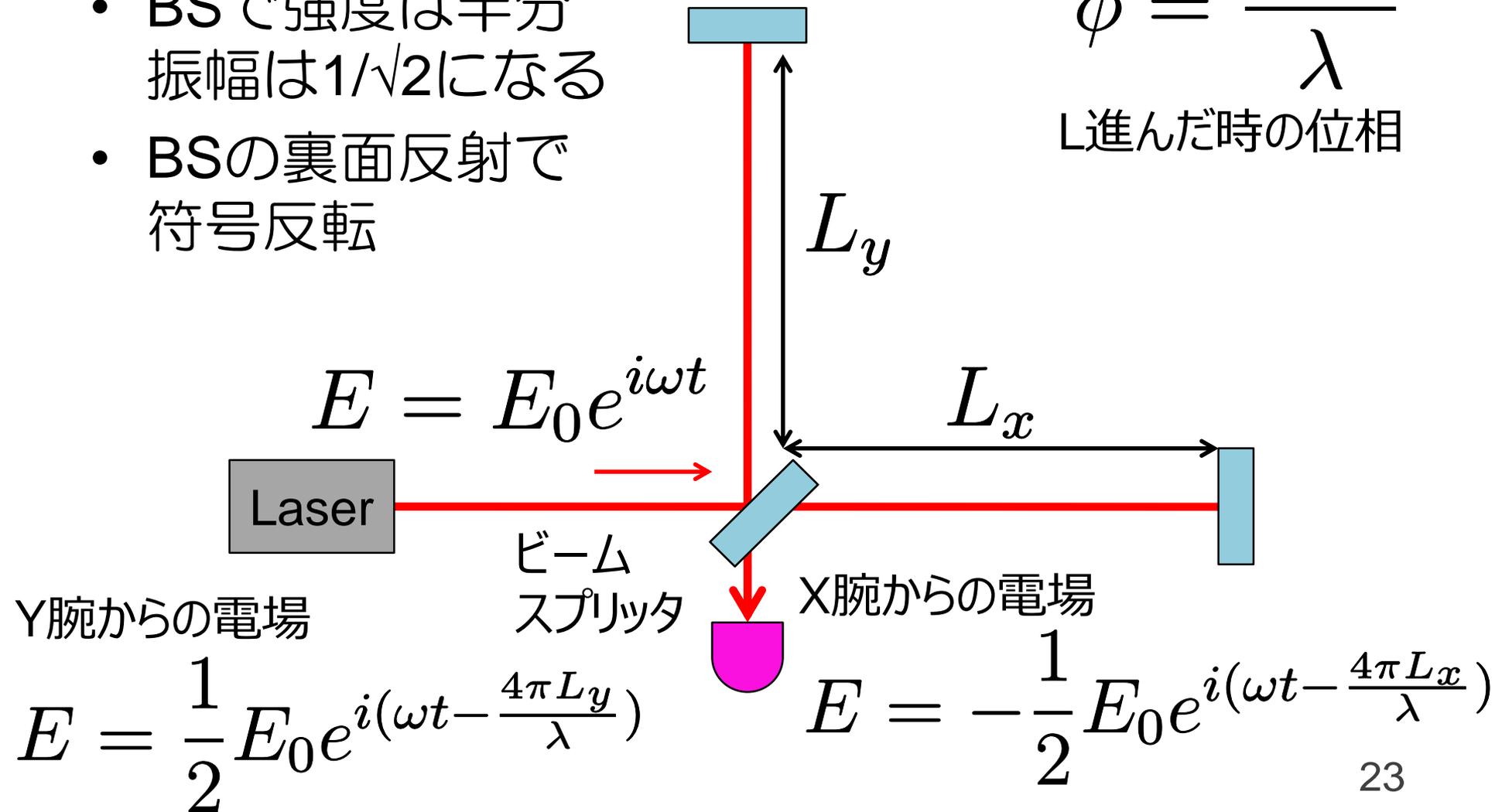


Michelson干渉計の出力

- 光検出器で受ける光強度は？
- BSで強度は半分
振幅は $1/\sqrt{2}$ になる
- BSの裏面反射で
符号反転

$$\phi = \frac{2\pi L}{\lambda}$$

L進んだ時の位相



Michelson干渉計の出力

- 光検出器で受ける光強度は？

Y腕からの電場

X腕からの電場

$$P_{\text{PD}} = \left| \frac{1}{2} E_0 e^{i(\omega t - \frac{4\pi L_y}{\lambda})} - \frac{1}{2} E_0 e^{i(\omega t - \frac{4\pi L_x}{\lambda})} \right|^2$$

$$= \frac{1}{4} |E_0|^2 \left| e^{-i\frac{4\pi L_y}{\lambda}} - e^{-i\frac{4\pi L_x}{\lambda}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} P_0 \left(1 - \cos \frac{4\pi L_-}{\lambda} \right)$$

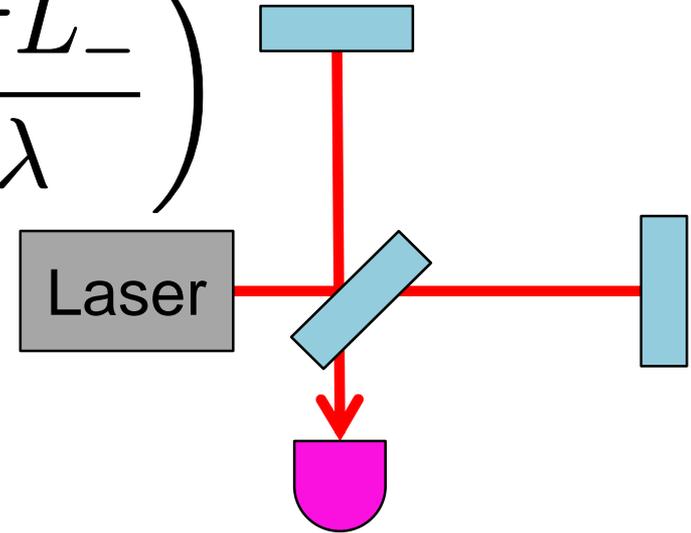
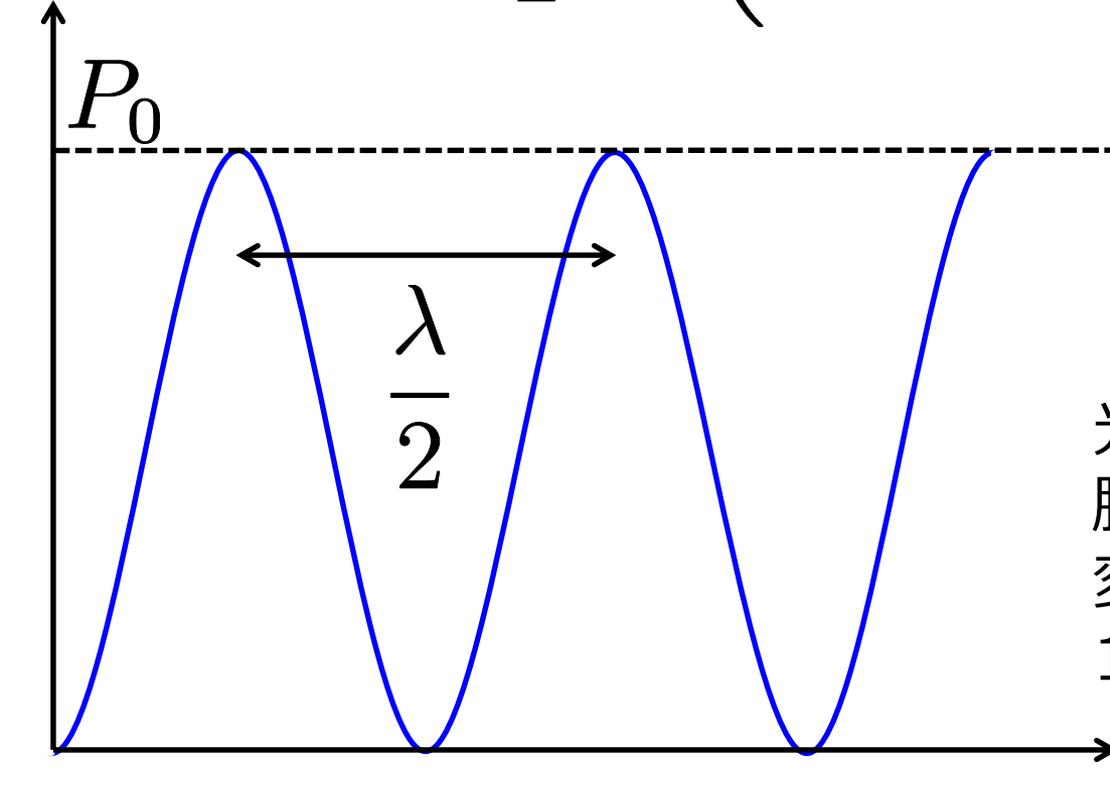
↑
入射光強度

↑
 $L_- = L_y - L_x$
両腕の長さの差

Michelson干渉計の出力

- 腕の長さの差の変化で光量が変化する(光の干渉)

$$P_{\text{PD}} = \frac{1}{2} P_0 \left(1 - \cos \frac{4\pi L_-}{\lambda} \right)$$

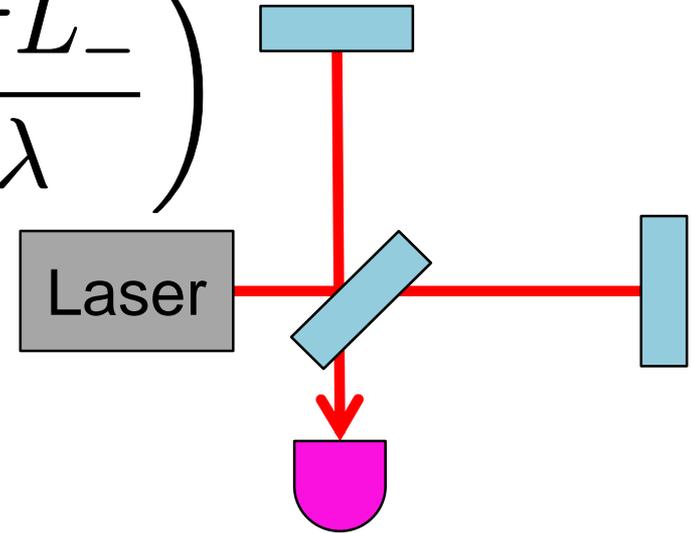
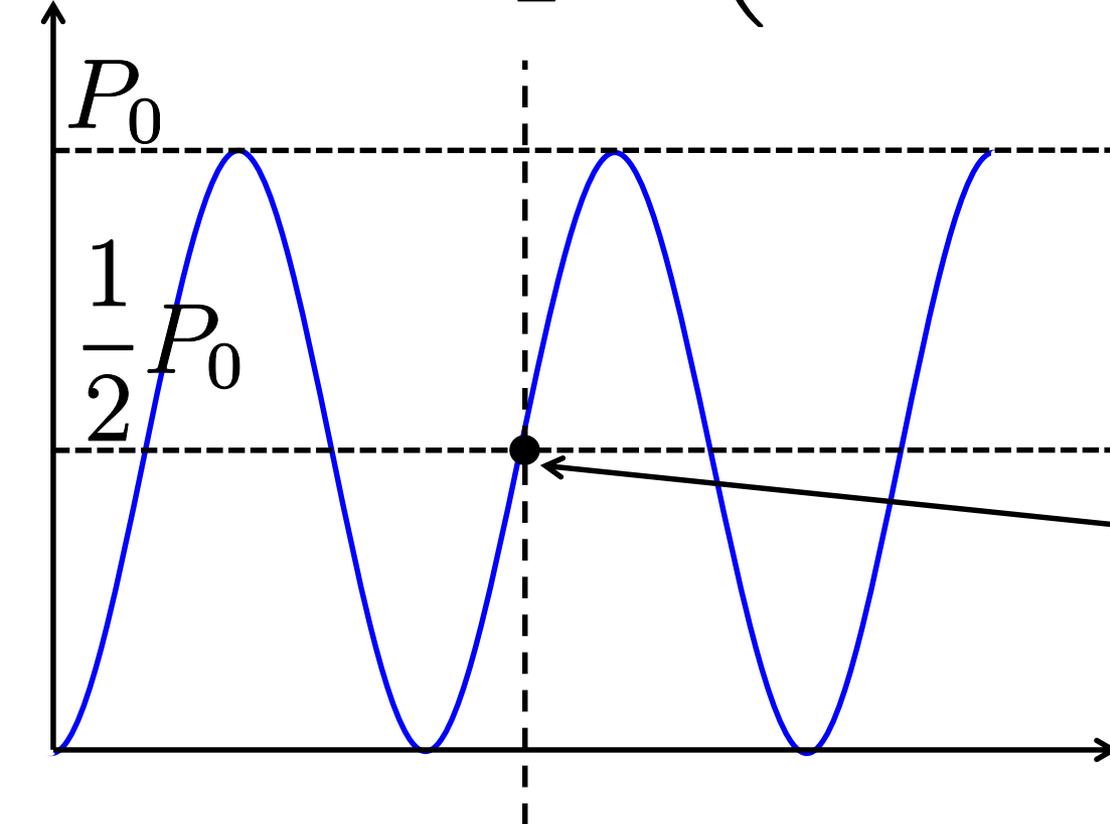


光検出器では
腕の長さの差が波長の半分
変化すると
1回分の明暗が起こる

Michelson干渉計の出力

- 腕の長さの差の変化で光量に変化する(光の干渉)

$$P_{\text{PD}} = \frac{1}{2} P_0 \left(1 - \cos \frac{4\pi L_-}{\lambda} \right)$$

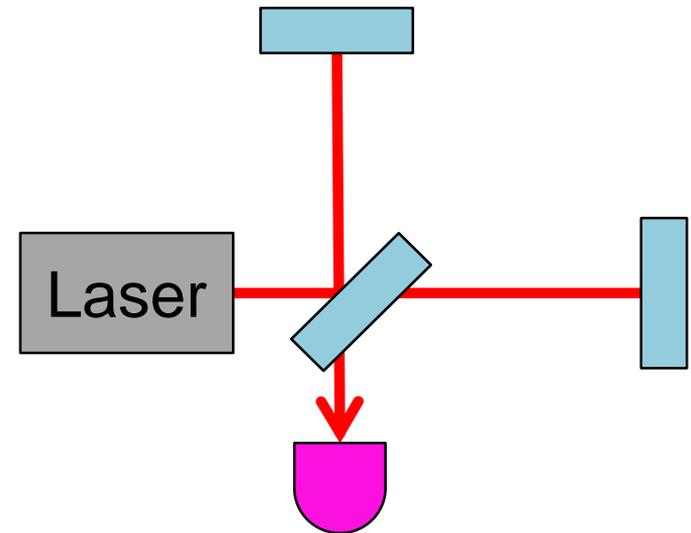
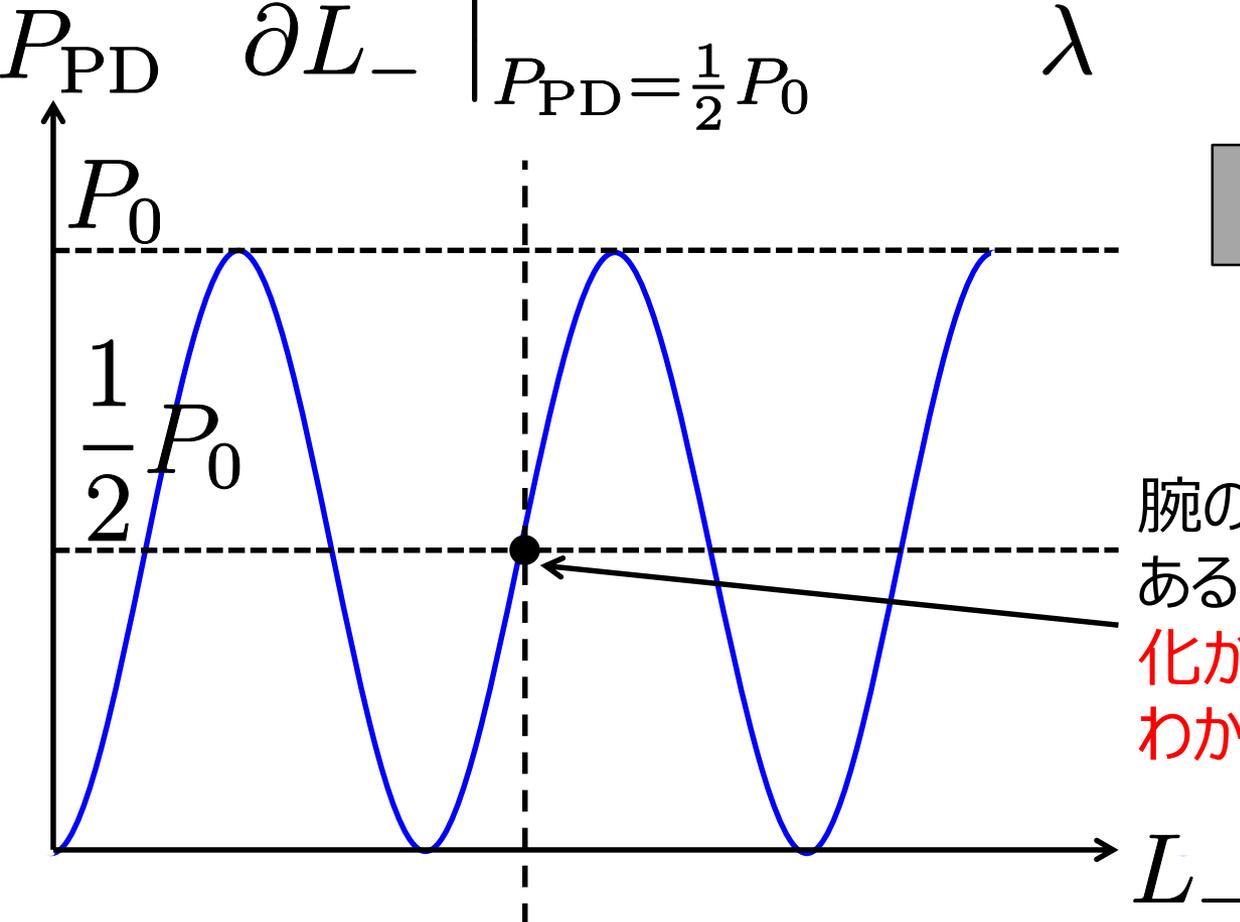


腕の長さの差がちょうどここにあると、光検出器での光量変化から腕の長さの差の変化がわかる

Michelson干渉計の出力

- 光量変化の傾きは？

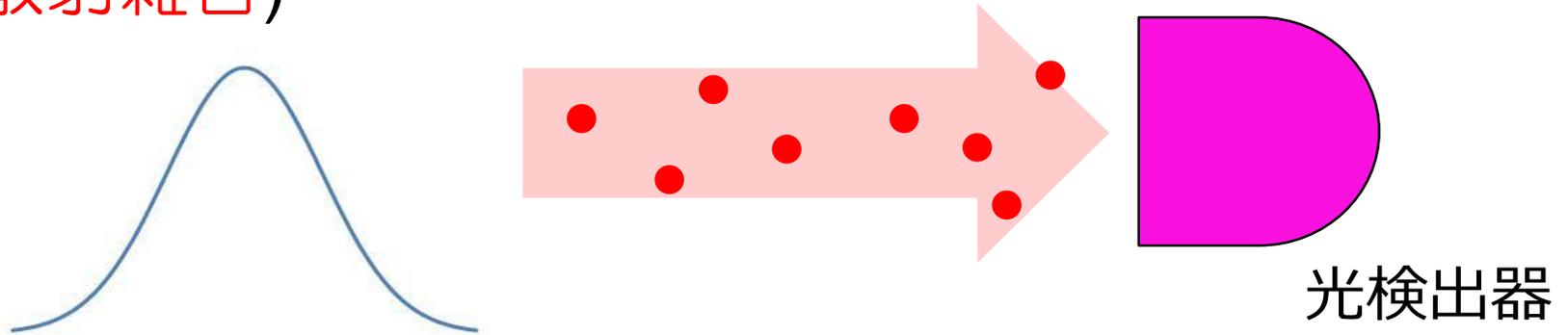
$$\left. \frac{\partial P_{\text{PD}}}{\partial L_-} \right|_{P_{\text{PD}} = \frac{1}{2} P_0} = \frac{2\pi P_0}{\lambda}$$



腕の長さの差がちょうどここにあると、光検出器での光量変化から腕の長さの差の変化がわかる

光検出器の検出限界

- 光検出器に届く光子の数は量子力学的に揺らぐ
(**散射雑音**)



- 散射雑音の大きさは

$$\delta P_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{2hcP_{\text{PD}}}{\eta\lambda}}$$

量子効率

プランク定数

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$$

Michelson干渉計の長さ検出限界

- 光量変化の割合 $\left. \frac{\partial P_{\text{PD}}}{\partial L_-} \right|_{P_{\text{PD}}=\frac{1}{2}P_0} = \frac{2\pi P_0}{\lambda}$

- 散射雑音

$$\delta P_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{2hcP_{\text{PD}}}{\eta\lambda}} = \sqrt{\frac{hcP_0}{\eta\lambda}}$$

- 長さ検出限界

$$\delta L_{\text{shot}} = \delta P_{\text{shot}} \left(\frac{\partial P_{\text{PD}}}{\partial L_-} \right)^{-1} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{hc\lambda}{\eta P_0}}$$

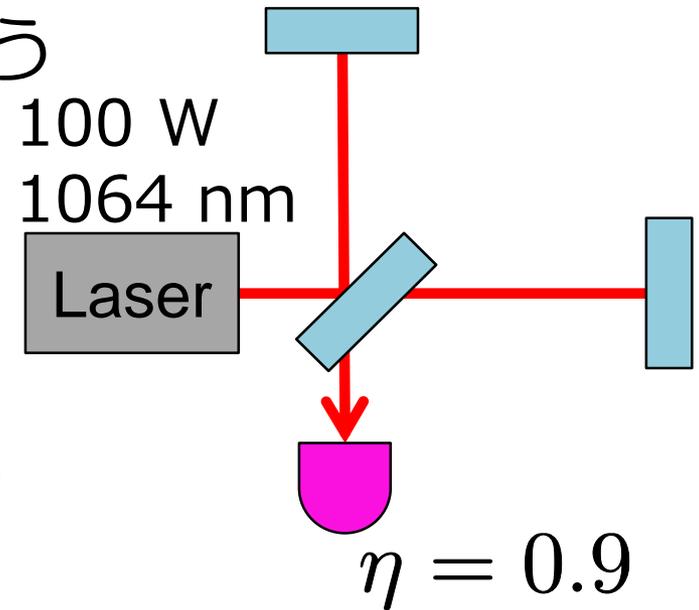
入射パワーが大きいほど、短い距離を検出できる

Michelson干渉計の長さ検出限界

- 長さ検出限界を計算してみよう

$$\delta L_{\text{shot}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{hc\lambda}{\eta P_0}}$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$$



Michelson干渉計の長さ検出限界

- 長さ検出限界を計算してみよう

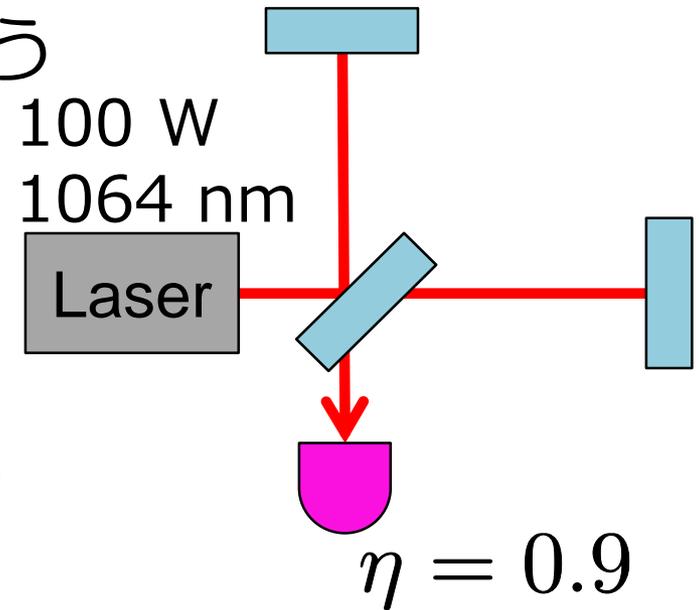
$$\delta L_{\text{shot}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{hc\lambda}{\eta P_0}}$$

$$h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ m}^2\text{kg/s}$$

$$\delta L_{\text{shot}} \sim 8 \times 10^{-18} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

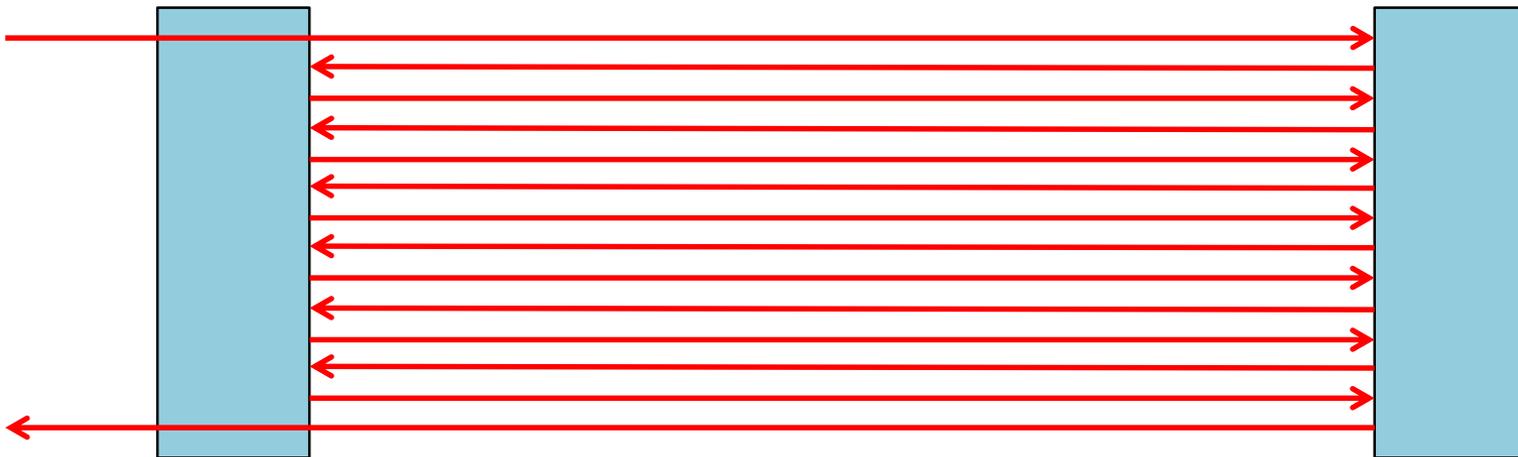
↑
スペクトルについてくる単位(次回)

- 単純なMichelson干渉計でもここまで行ける
- 10^{-18} mまであと1桁足りない



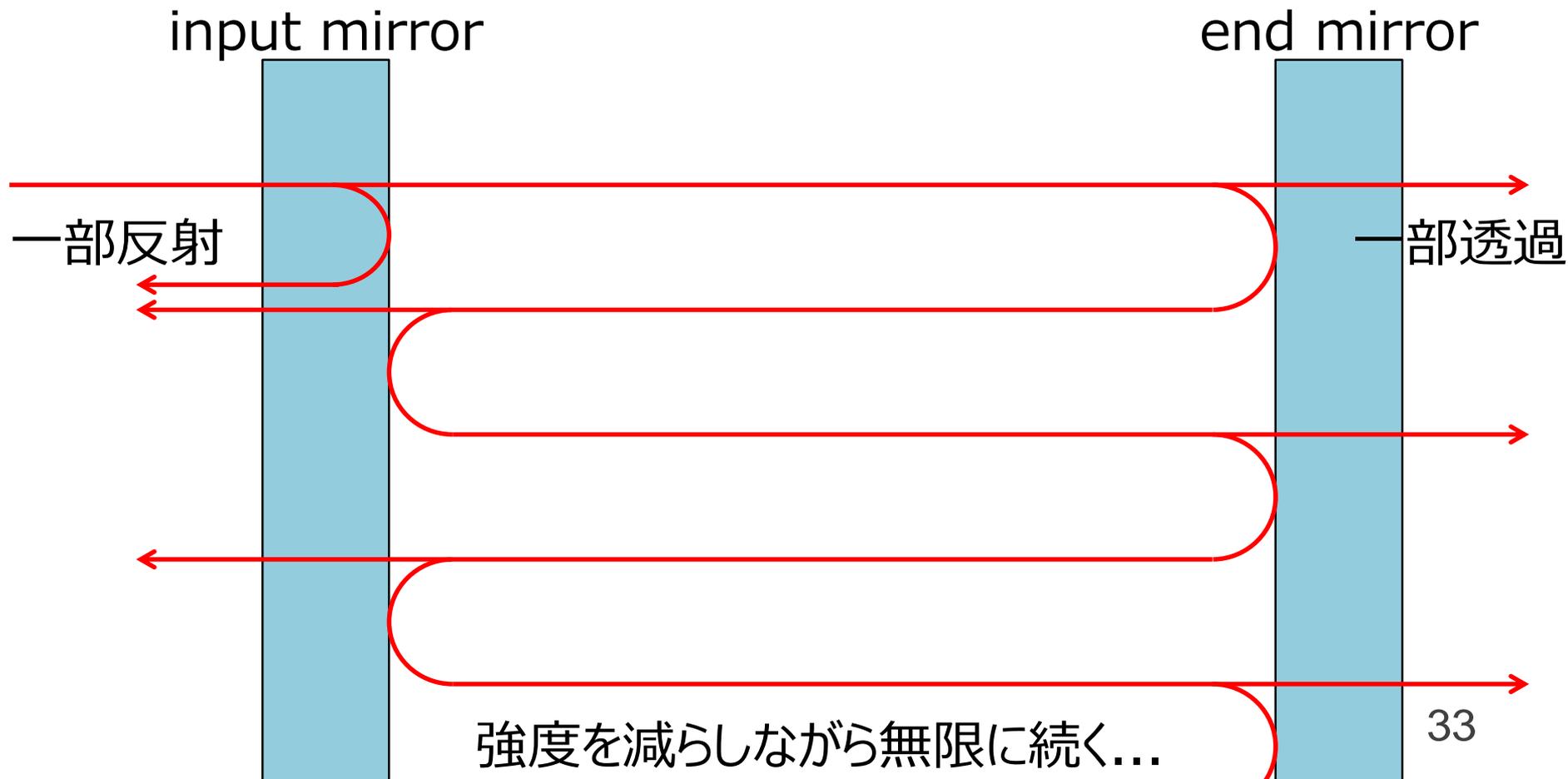
どうすればいいか？

- 腕の長さを長くすると、重力波による変化量が大きくなる
 - 腕の長さを10~100倍にすればよい
 - 地球上では難しい.....
- 腕を何度も往復させ、実効的に腕の長さをかせぐ
 - **Fabry-Pérot共振器**



Fabry-Pérot共振器の原理

- 2枚の鏡からなる合わせ鏡



Fabry-Pérot共振器の原理

- 電場を計算してみよう

振幅反射率 振幅透過率

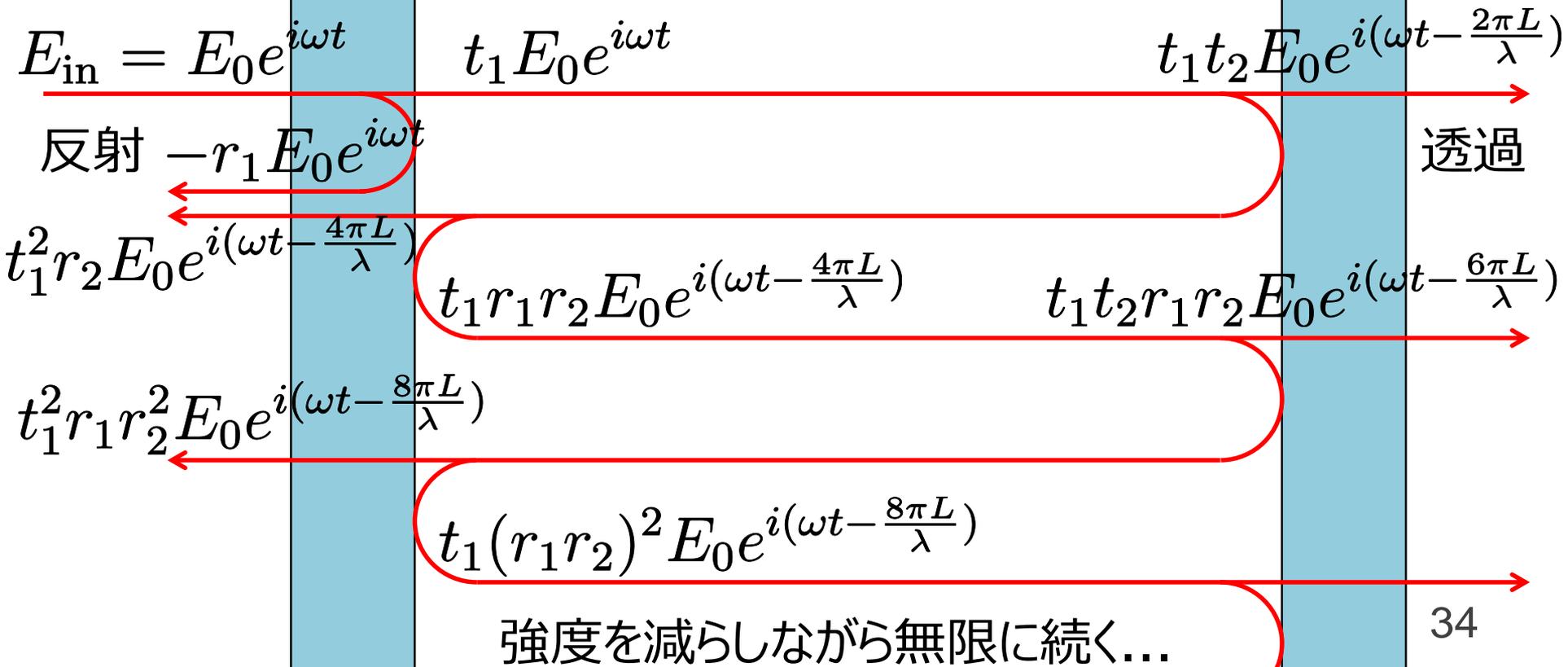
$$r_1, t_1$$

input mirror

$$r_2, t_2$$

end mirror

L



Fabry-Pérot共振器の原理

- 共振器内の電場

$$E_{\text{cav}} = t_1 E_0 e^{i\omega t} + t_1 r_1 r_2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{4\pi L}{\lambda})} + t_1 (r_1 r_2)^2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{8\pi L}{\lambda})} + \dots$$

$$= (t_1 + t_1 r_1 r_2 2e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}} + t_1 (r_1 r_2)^2 2e^{i\frac{8\pi L}{\lambda}} + \dots) E_0 e^{i\omega t}$$

公比 $r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}$ の無限等比級数

入射電場

$$= \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} E_{\text{in}}$$

Fabry-Pérot共振器の原理

- 反射光の電場

$$\begin{aligned} E_{\text{refl}} &= -r_1 E_0 e^{i\omega t} + t_1^2 r_2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{4\pi L}{\lambda})} + t_1^2 r_1 r_2^2 E_0 e^{i(\omega t - \frac{8\pi L}{\lambda})} + \dots \\ &= \left(-r_1 + t_1^2 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}} + t_1^2 r_1 r_2^2 2 e^{i\frac{8\pi L}{\lambda}} + \dots \right) E_0 e^{i\omega t} \end{aligned}$$

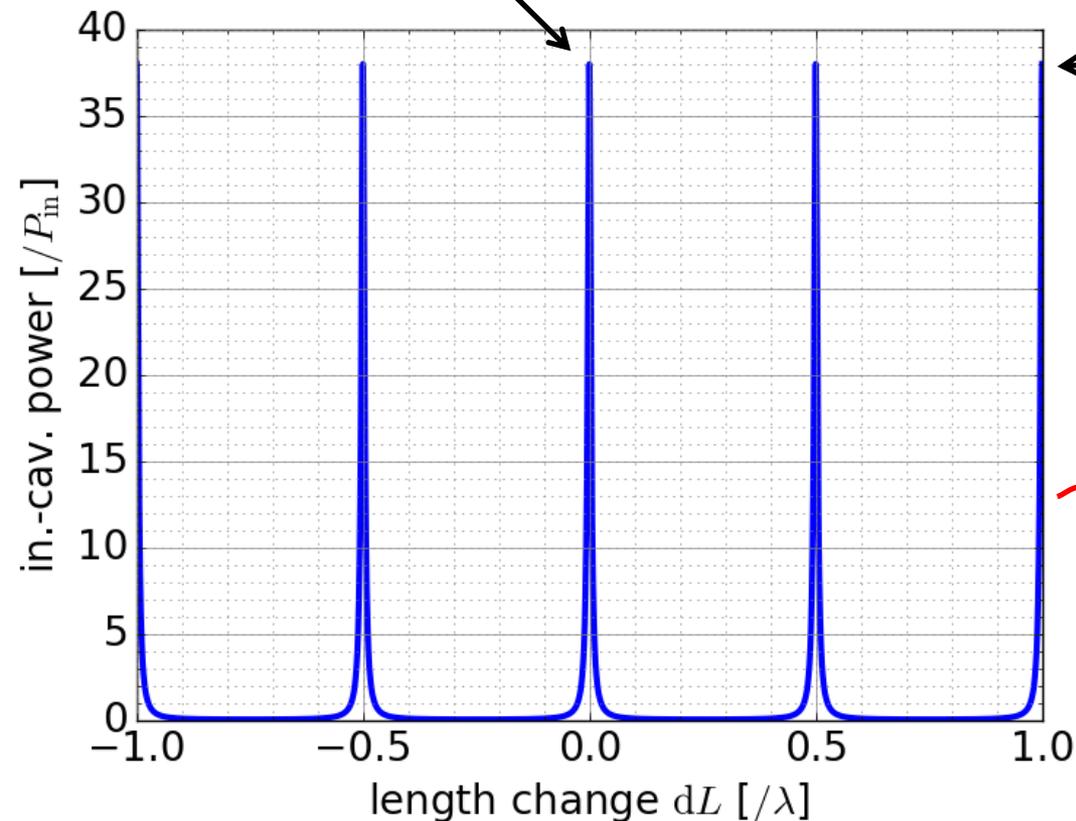
公比 $r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}$ の無限等比級数

$$= \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} \right) E_{\text{in}}$$

FPの共振器内強度

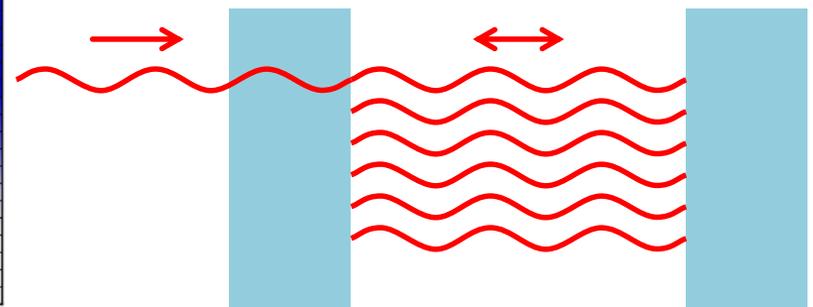
- 共振器内の光強度 $|E_{\text{cav}}|^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} \right|^2 P_{\text{in}}$

共振点



共振器内光強度は
共振点で
入射光強度の何倍
にもなる！

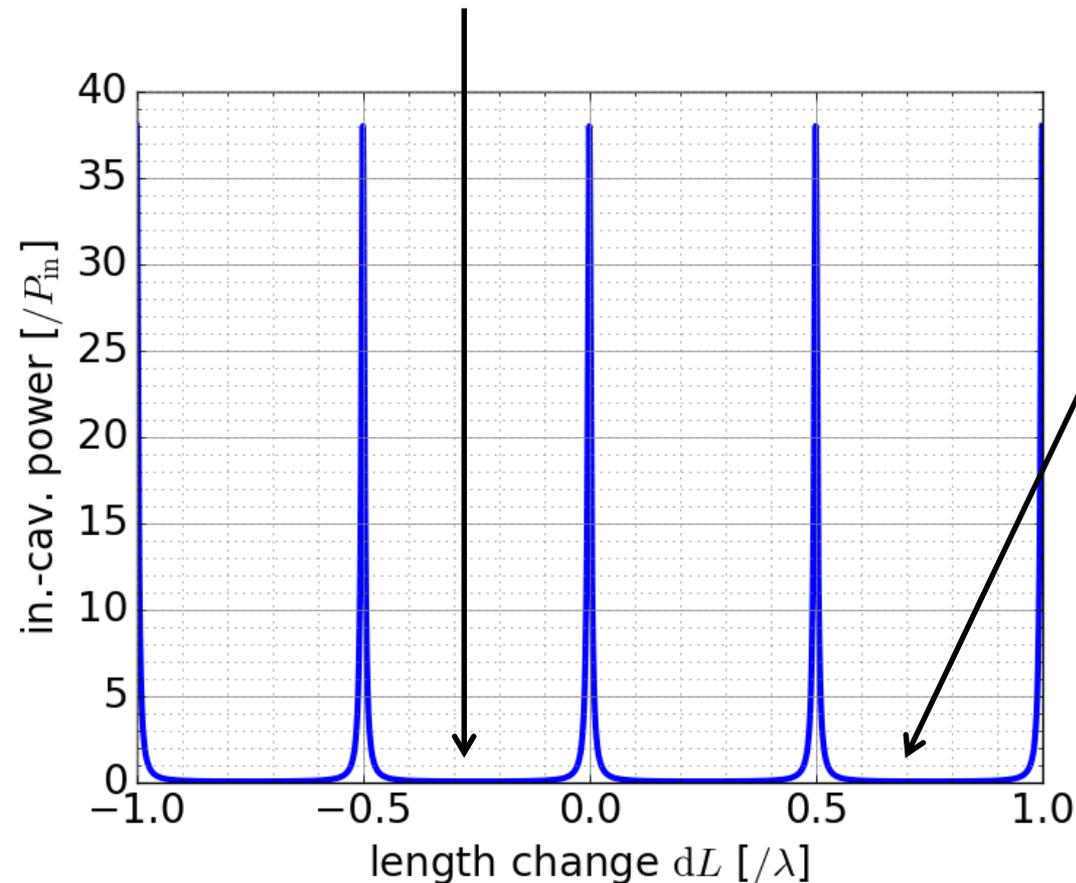
強め合う



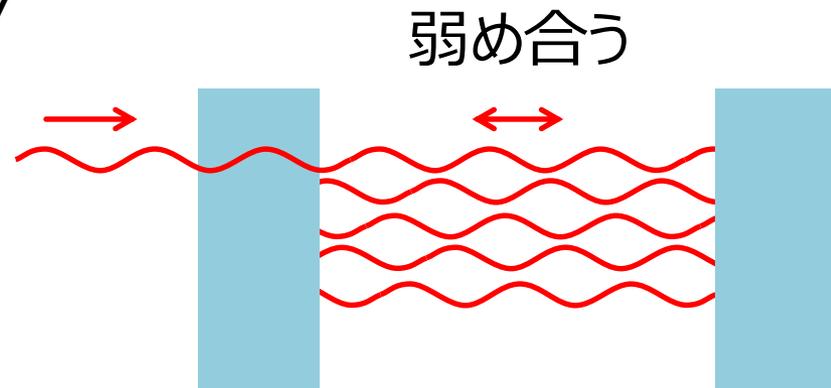
FPの共振器内強度

- 共振器内の光強度 $|E_{\text{cav}}|^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i \frac{4\pi L}{\lambda}}} \right|^2 P_{\text{in}}$

反共振点

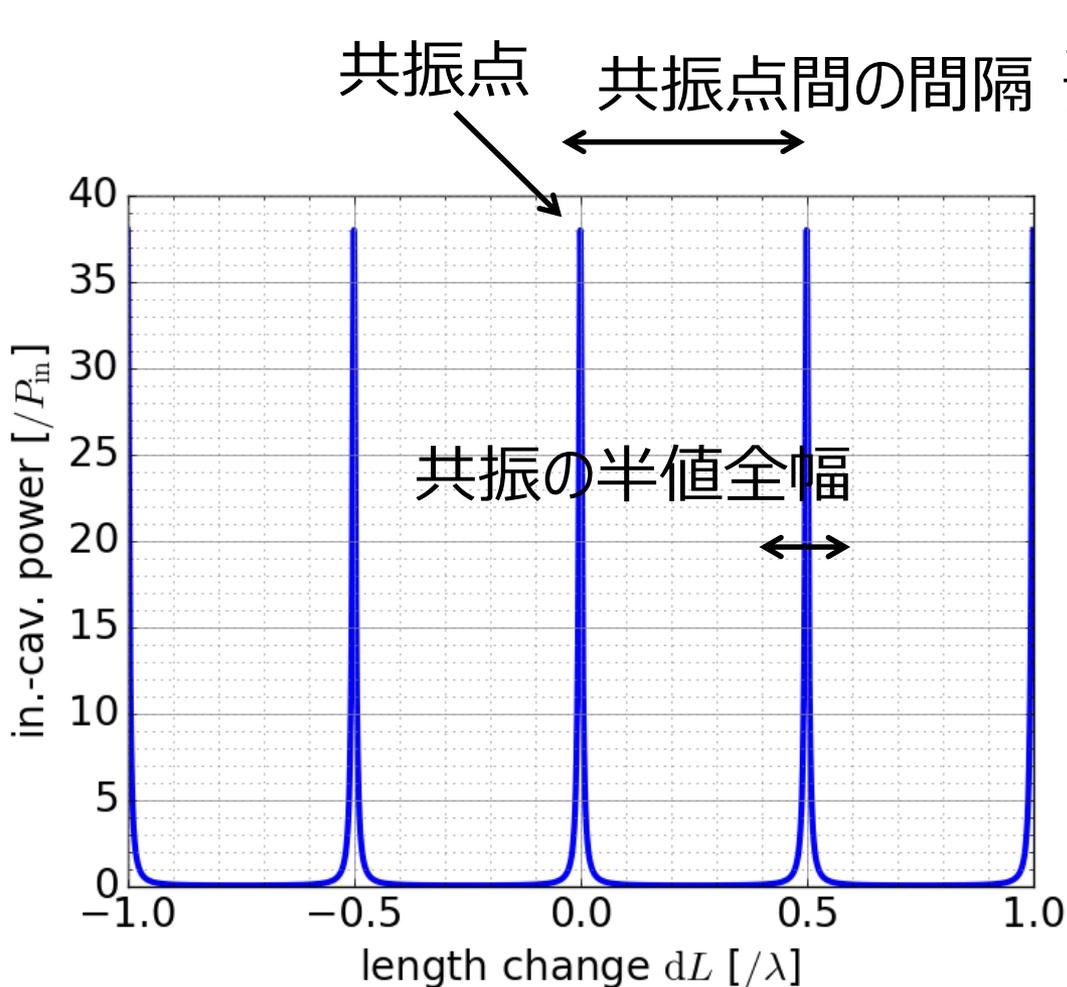


共振器内光強度は
反共振点で
ほとんどなくなる



FPのフィネス

- 共振器内の光強度 $|E_{\text{cav}}|^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} \right|^2 P_{\text{in}}$



この比で共振の鋭さを表す

$$\frac{\text{共振点間の間隔}}{\text{共振の半値全幅}}$$

$$= \frac{\pi \sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \equiv \mathcal{F}$$

フィネスと呼ぶ

鏡の反射率が高いほど
フィネスが高い

FPの平均折り返し回数

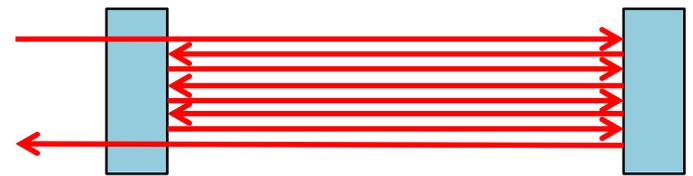
- 共振器内の光強度 $|E_{\text{cav}}|^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} \right|^2 P_{\text{in}}$

共振点での共振器内強度

$$|E_{\text{cav}}|_{\text{max}}^2 = \left| \frac{t_1}{1 - r_1 r_2} \right|^2 P_{\text{in}}$$

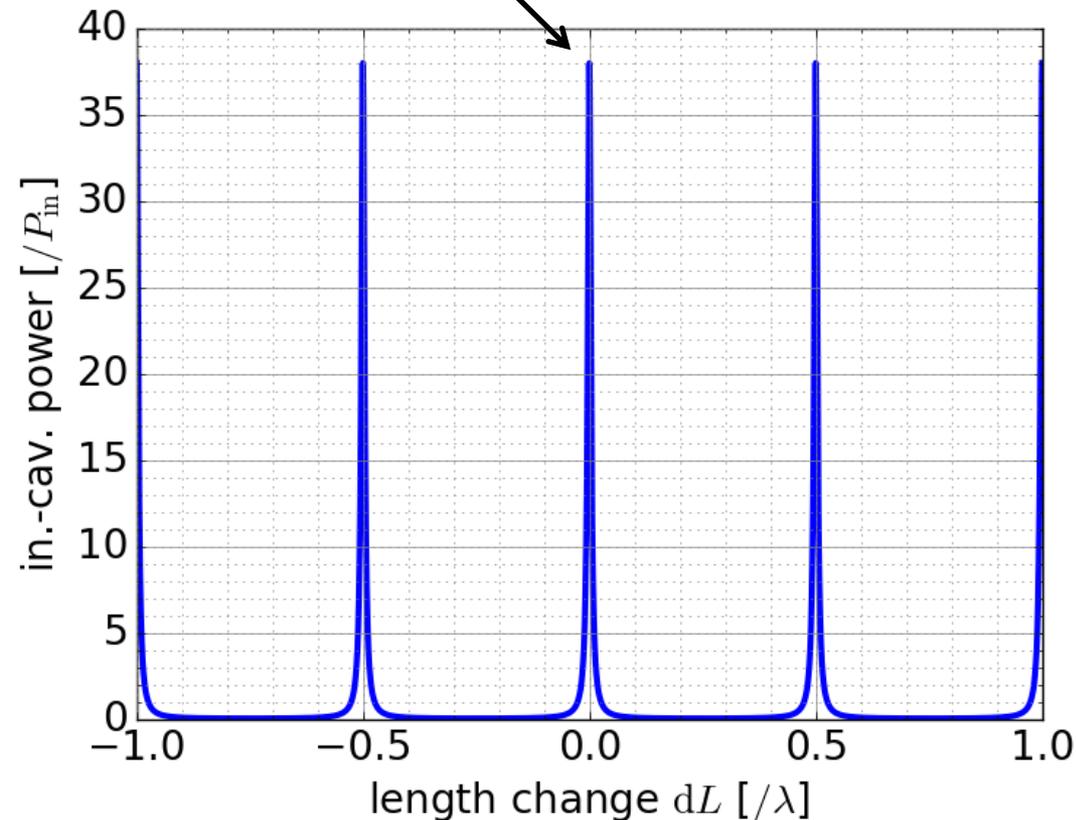
$$r_1 \sim 1, r_2 = 1 \text{ の場合} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\pi} P_{\text{in}}$$

平均折り返し回数



40

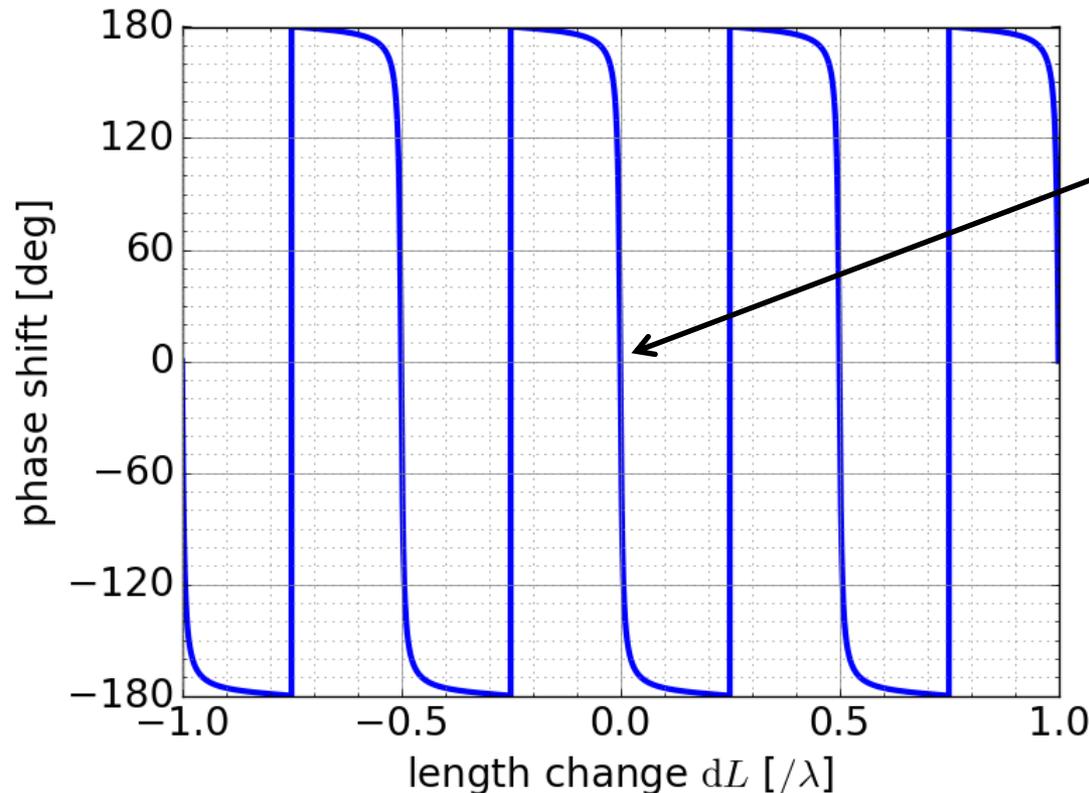
共振点



FPの反射光の位相

- 反射光の電場

$$E_{\text{refl}} = \left(-r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}}{1 - r_1 r_2 e^{i\frac{4\pi L}{\lambda}}} \right) E_{\text{in}}$$



共振点で反射光の位相が急激に変化する

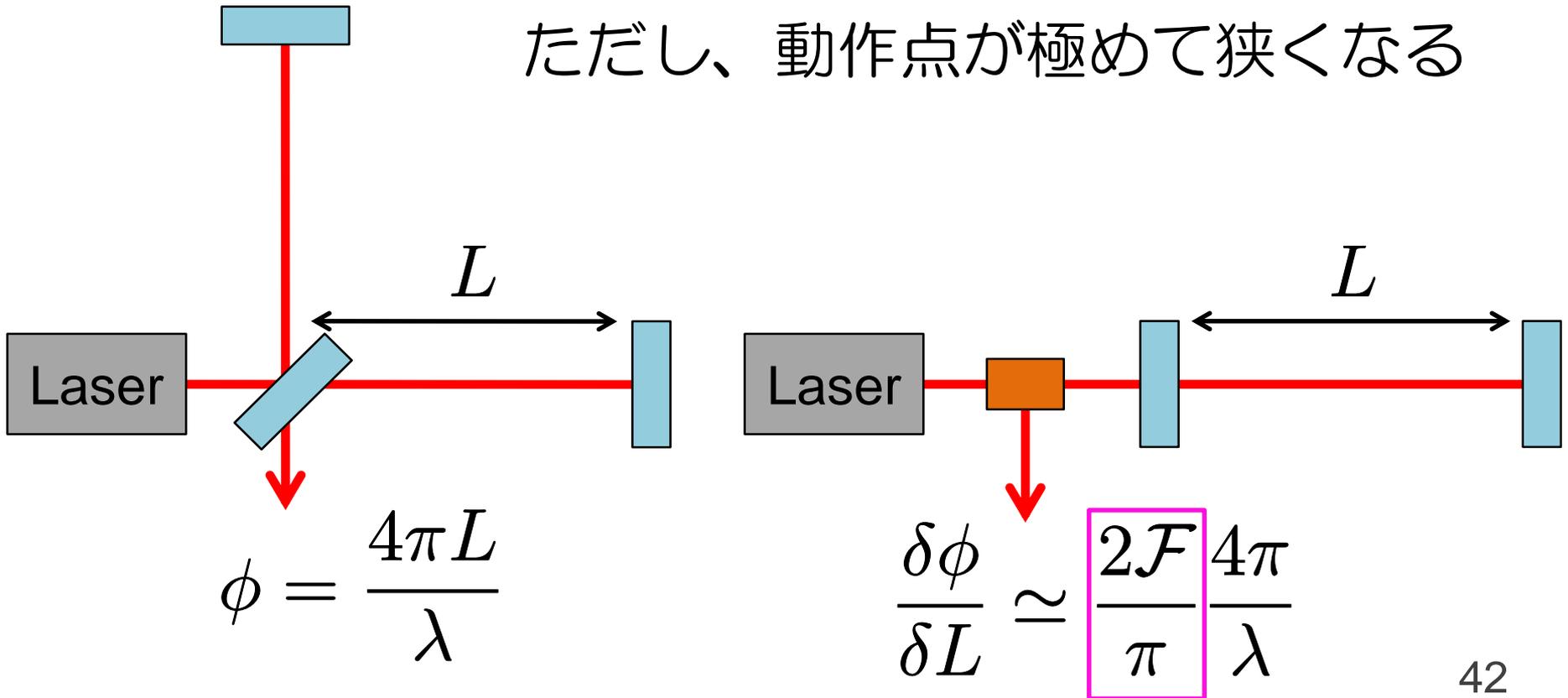
$$\frac{\delta\phi}{\delta L} \approx \frac{2\mathcal{F}}{\pi} \frac{4\pi}{\lambda}$$

平均折り返し回数

MichelsonとFPの違い

- 反射光の位相が $\frac{2\mathcal{F}}{\pi}$ 倍(約フィネス倍)される
→ 鏡の変位に対する感度が $\frac{2\mathcal{F}}{\pi}$ 倍!

ただし、動作点が極めて狭くなる



Fabry-Pérot-Michelson干渉計

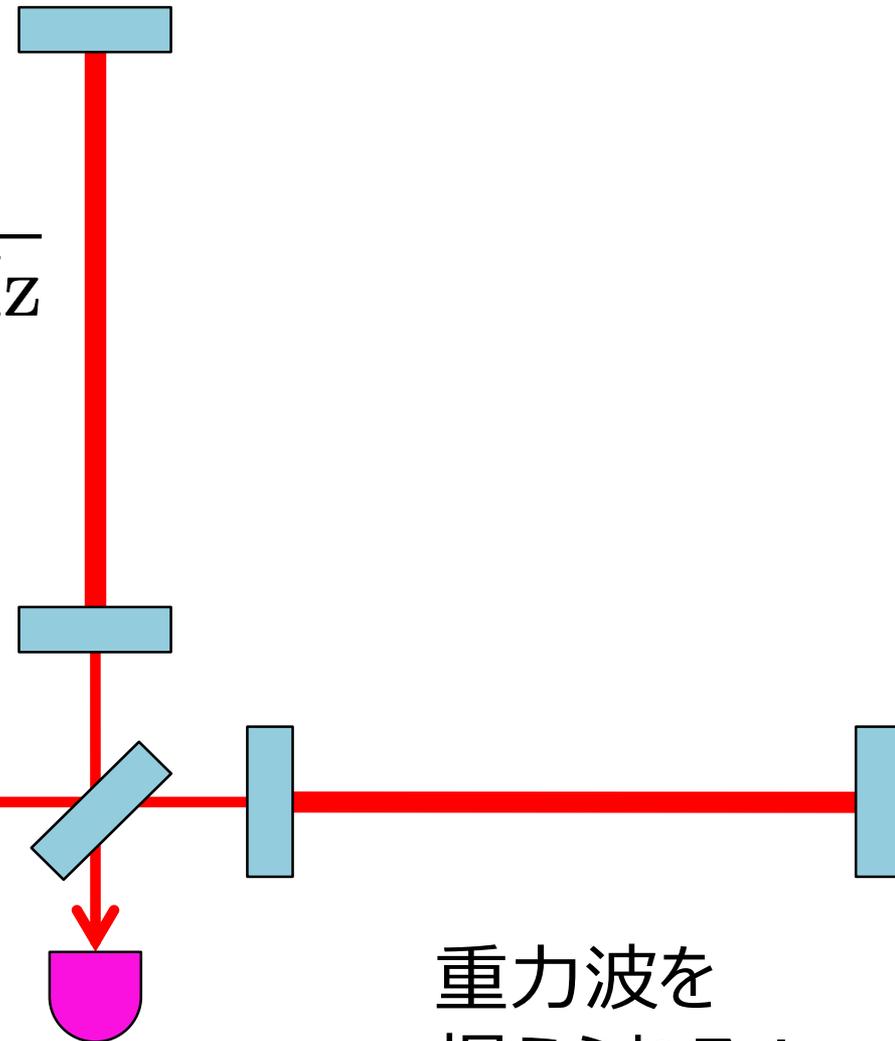
- 変位感度を向上
- 単なるMichelsonでは

$$\delta L_{\text{shot}} \sim 8 \times 10^{-18} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

だった

100 W
1064 nm

Laser



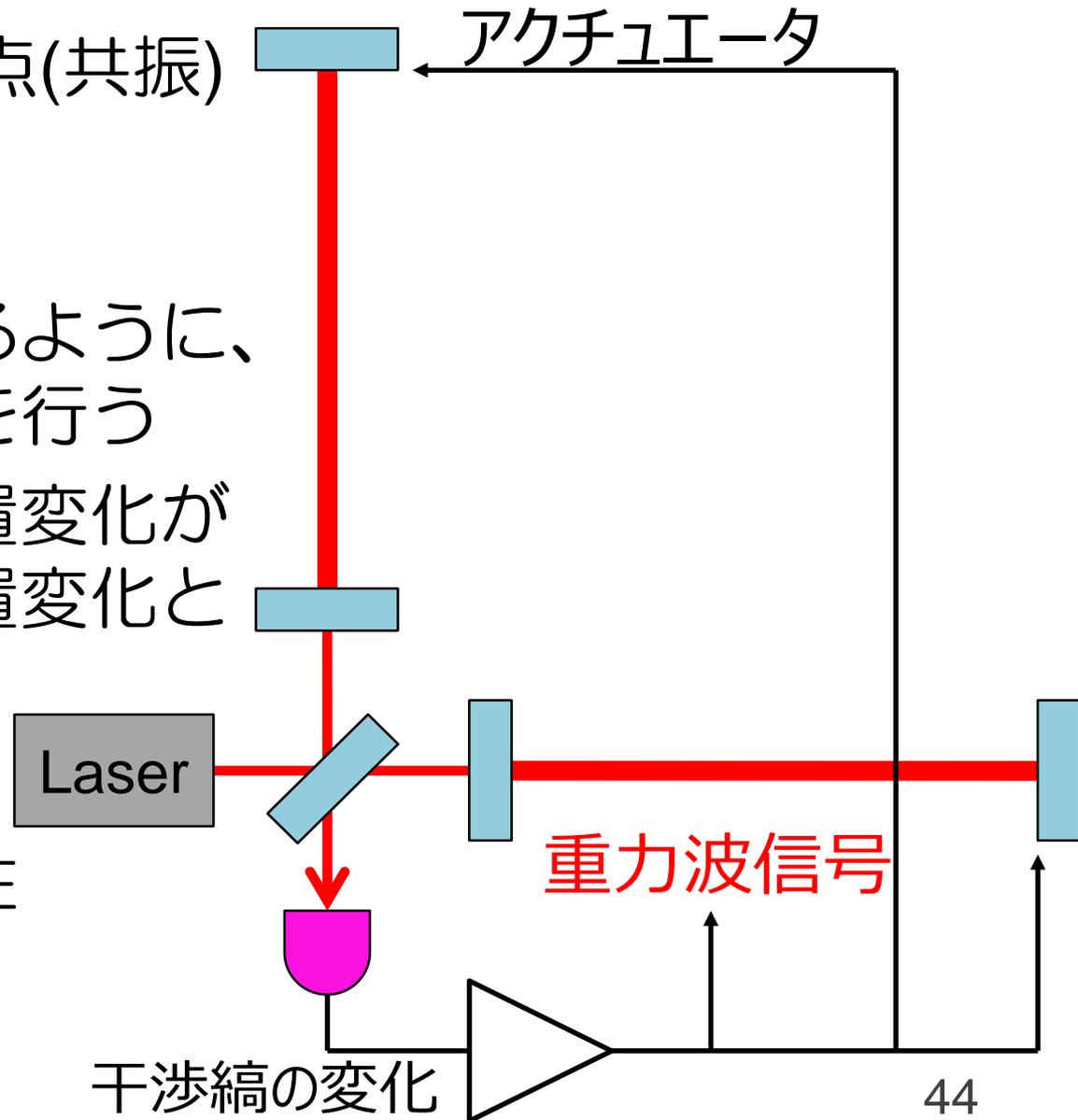
- フィネス1000とすると

$$\delta L_{\text{shot}} \sim 1 \times 10^{-20} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$$

重力波を
捉えられる!

動作点への制御

- FP共振器は動作点(共振)で感度が良いが、**動作点が狭い**
- 常に動作点に来るように、鏡の位置の**制御**を行う
- 制御で加えた位置変化が重力波による位置変化と等しい
- これにより線形性を確保している



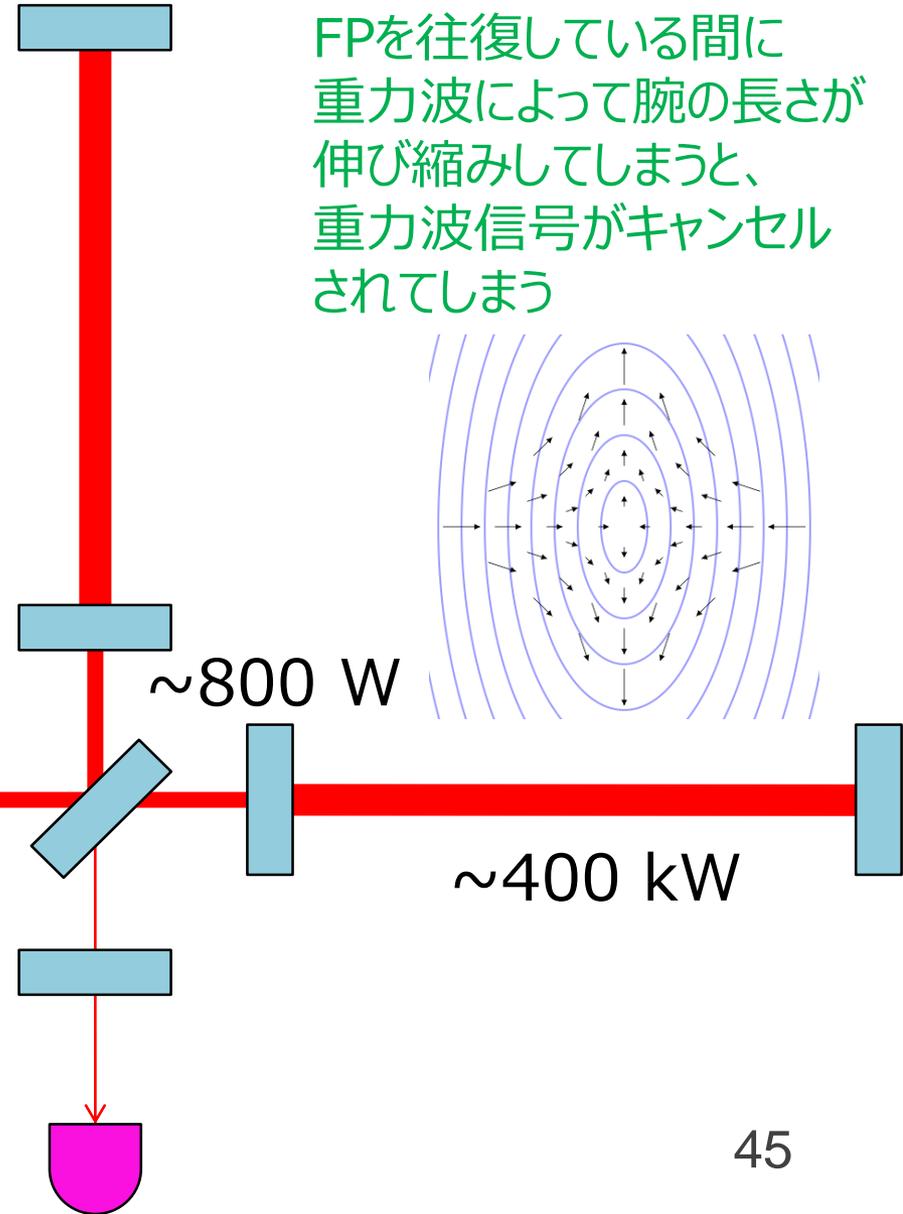
さらに感度をよくするために

- Power Recycling
- Resonant Sideband Extraction

パワーリサイクリング鏡:
レーザー側に戻った光を打ち返し、
実効的に入射光強度を増幅

Laser
~80 W

信号取り出し鏡:
重力波信号がキャンセルされる前に
信号成分を取り出す



FPを往復している間に
重力波によって腕の長さが
伸び縮みしてしまうと、
重力波信号がキャンセル
されてしまう

第3回まとめ

- 重力波による空間歪みは極めて小さい
検出可能な重力波を人工的に作るのは不可能
ブラックホール連星でも
1 kmが 10^{-18} m変化する程度
- **Michelson干渉計**と**Fabry-Pérot共振器**の技術を
組み合わせることでそれが可能となる
動作点への**制御**が必須
- さらに感度を上げる工夫として、共振器を
組み合わせる
Power Recycling
Resonant Sideband Extraction
の技術がある