

Wavefront Sensor 法の原理

道村唯太

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 修士 1 年

2011 年 2 月 20 日*

1 はじめに

Wavefront Sensor の原理計算はビームの空間モードを考えないといけなくなるのでややこしい。しかし行列表現を用いると比較的分かりやすくなるし、最終的には Pound-Drever-Hall 法で使った式の一部を置き換えればいだけになる。

以下ではまず WFS に必要な Hermite-Gaussian モードに関する知識をまとめた上で、WFS の原理を示す。ほぼ [1] の第 3 章をなぞる形になるが、もう少しわかりやすくまとめる。

そして、この計算結果と Optickle のシミュレーション結果を比較する。

2 Hermite-Gaussian モード

レーザービームの電場は空間モード $U(x, y, z)$ まで考えると

$$E(t, x, y, z) = U(x, y, z)E_0e^{i\omega t}$$

と表される。この $U(x, y, z)$ が Hermite 多項式と Gaussian の積で表されるモードを、Hermite-Gaussian モードと呼ぶ。

2.1 表式

$z=0$ にウェストがあり、 z 軸方向に進むビームを考える。

導出は [2] なりなんなりを見ていただくとして、規格化された¹Hermite-Gaussian モードの表式は

$$U_{lm}(x, y, z) = U_l(x, z)U_m(y, z) \exp[-ikz + i(l + m + 1)\eta(z)] \quad (2.1)$$

である。ここで

$$U_l(x, z) = \left(\frac{2}{\pi w^2(z)}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{2^l l!}} H_l\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) \exp\left[-\left(\frac{x}{w(z)}\right)^2 - i\frac{kx^2}{2R(z)}\right] \quad (2.2)$$

*2011 年 5 月 4 日: Optickle の結果と計算値が合わない理由が一部判明。注を追加。

¹ $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |U_{lm}(x, y, z)|^2 dx dy = 1$ ということ。

k, w_0 はそれぞれ波数、ウェスト半径で各記号は

$$z_0 = \frac{kw_0^2}{2} \quad \text{Rayleigh レンジ} \quad (2.3)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2} \quad \text{ビーム半径} \quad (2.4)$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2 \right] \quad \text{波面の曲率半径} \quad (2.5)$$

$$\eta(z) = \arctan \frac{z}{z_0} \quad \text{Gouy phase} \quad (2.6)$$

である。また H_l は Hermite 多項式で、例えば

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2$$

2.2 簡単化 ($z = 0, w_0 = 1$)

式 (2.1) はややこしいので 00 モードを用いて書き直すと

$$U_{00}(x, y, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \exp \left[-i(kz - \eta(z)) - (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2(z)} + \frac{ik}{2R(z)} \right) \right] \quad (2.7)$$

$$U_{lm}(x, y, z) = \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} H_l \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)} \right) H_m \left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp [i(l+m)\eta(z)] U_{00}(x, y, z) \quad (2.8)$$

Gouy phase η は平面波と 00 モードの位相差であることがわかりやすい。また、高次モードでは次数によってこの位相差の進み方が違うこともわかる。WFS では基本モードと 1 次のモードの干渉を検出するが、この Gouy phase を変えることで干渉の度合いを選べるのである。

$z = 0$ 、すなわちウェストの位置で考えると $w(z) = w_0$ 、 $R(z) = \infty$ 、 $\eta(z) = 0$ なので簡単化できる。さらに、 x と y を w_0 で規格化してしまうと、

$$U_{00}(x, y, 0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp [-(x^2 + y^2)] \quad (2.9)$$

$$U_{lm}(x, y, 0) = \sqrt{\frac{1}{2^l l! 2^m m!}} H_l(\sqrt{2}x) H_m(\sqrt{2}y) U_{00}(x, y, 0) \quad (2.10)$$

となる。 U_{00} が基本 Gaussian モードで、高次モードはそれに Hermite 多項式をかけたものであることがわかりやすい。

HG モードの xy 平面での強度分布 $|U_{lm}(x, y)|^2$ を計算したのが図 1 である。 x 軸、 y 軸はそれぞれ w で規格化されており、色の濃い場所ほど強度が強いことを示している。また、青色の実線は $y = 0$ における振幅を表している。

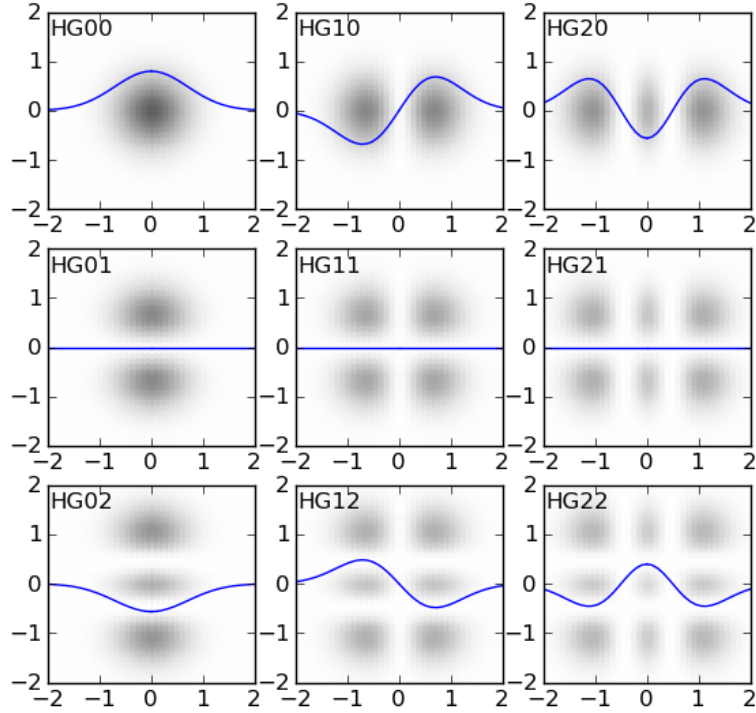


図 1: Hermite-Gaussian モード

2.3 逆行するビーム

これまで考えてきた z 軸上を順行するビームを $U_{lm\rightarrow}$ と改めて書くと、逆行するビームは

$$\begin{aligned}
 U_{lm\leftarrow}(x, y, z) &= U_{lm\rightarrow}(x, y, -z) \\
 &= U_l(x, -z)U_m(y, -z) \exp[-ik(-z) + i(l+m+1)\eta(-z)] \\
 &= U_l^*(x, z)U_m^*(y, z) \exp[ikz - i(l+m+1)\eta(z)] \\
 &= U_{lm\rightarrow}^*(x, y, z)
 \end{aligned}$$

より、順行するビームの複素共役で表される。

2.4 ビームの平行移動と回転

00 モードと 10 モードを、 x 軸方向に δx だけ平行移動した座標系 (x', y', z') での $z' = 0$ まわりで展開すると [3][4]

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + \left(\frac{\delta x}{w_0}\right) U_{10}(x', y', 0) \quad (2.11)$$

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) - \left(\frac{\delta x}{w_0}\right) U_{10}(x', y', 0) \quad (2.12)$$

また、 y 軸を中心に $\delta\theta$ 回転した座標系 (x', y', z') で展開すると

$$U_{00}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{00}(x', y', 0) + i \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U_{10}(x', y', 0) \quad (2.13)$$

$$U_{10}(x, y, z)|_{z'=0} \simeq U_{10}(x', y', 0) + i \left(\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U_{00}(x', y', 0) \quad (2.14)$$

となる。

ここで α_0 はビームの広がり角を表し、

$$\alpha_0 = \frac{2}{kw_0}$$

式 (2.11) を図示したのが図 2 である。基本モードを δx だけ平行移動したモード (青色破線) が、00 モードと 10 モードの足し合わせ (赤色実線) で近似されることがわかる²。また、この図では $\delta x = 0.3w_0$ と大きいため、残差から 20 モードを足せばさらにより近似になることもわかる。

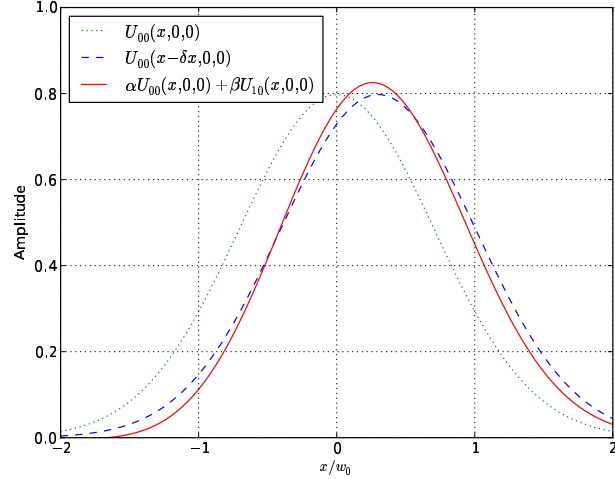


図 2: 基本モードの平行移動を高次モードで展開した様子

2.4.1 行列表現

Gaussian ビームは 10 モードまでで考えると

$$E = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t}$$

のように表せることから、式 (2.11) から (2.14) を行列で表すと便利である。すなわち、 x 軸方向に δx 平行移動した座標系への変換は

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta x/w_0 \\ -\delta x/w_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

y 軸を中心に $\delta\theta$ 回転した座標系への変換は

$$\begin{pmatrix} a'_0 \\ a'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & i\delta\theta/\alpha_0 \\ i\delta\theta/\alpha_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

この 2 つの行列をかければ δx 平行移動し、 $\delta\theta$ 回転した場合の行列になり、 $\gamma \equiv \delta x/w_0 + i\delta\theta/\alpha_0$ とおくと γ の 1 次まで考えて

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ -\gamma^* & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

これらの行列は全て z 軸を順行するビームに対してであり、逆行するビームに対しては 2.3 節で考えたように複素共役をとればよい。

²図 2 では規格化のために式 (2.11) の右辺に $(1 + (\delta x/w_0)^2)^{-1/2}$ をかけている。実際には $\delta x \ll w_0$ なので式 (2.11) で十分である。

3 Wavefront sensor 法の原理

ここではまず carrier だけを考え、ミスアラインした Fabry-Perot 共振器の反射光の表式を求め、そして PDH 信号を計算するのと同じようにして WFS の信号強度を求める。ここではフロントミラー、エンドミラーの個々の傾きはひとまず置いておいて、入射光軸と共振器の軸のずれ γ 、共振器の軸と反射光軸のずれ γ_r に対する表式を求めることにする。

3.1 Fabry-Perot 共振器の反射行列

まず、入射光軸と共振器軸が一致している場合を考える。

フロントミラー、エンドミラーの振幅反射率、振幅透過率をそれぞれとし、00 モードが共振器を往復するときの位相変化を ϕ とすると、Fabry-Perot 共振器の 00 モードに対する振幅反射率は

$$r_{c0} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{i\phi}}{1 - r_F r_E e^{i\phi}} \quad (3.1)$$

10 モードの場合は 00 モードと Gouy phase だけ位相が異なるため、フロントミラーとエンドミラーの間で進む Gouy phase を η_{FP} とすれば

$$r_{c1} = -r_F + \frac{t_F^2 r_E e^{i(\phi - 2\eta_{FP})}}{1 - r_F r_E e^{i(\phi - 2\eta_{FP})}} \quad (3.2)$$

これらを用いて Fabry-Perot 共振器の反射行列を表すと、

$$R_{FP}^{\text{align}} = \begin{pmatrix} r_{c0} & 0 \\ 0 & r_{c1} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

3.2 ミスアラインした Fabry-Perot 共振器の反射光

入射光の座標系³に対し、 $\gamma \equiv \delta x/w_0 + i\delta\theta/\alpha_0$ だけ共振器の座標系がずれており、共振器の座標系に対して $\gamma_r \equiv \delta x_r/w_0 + i\delta\theta_r/\alpha_0$ だけ 1 次反射光の座標系がずれているとする。

入射光を

$$E_{\text{inc}} = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t}$$

とすると、先に求めた座標変換の行列やアラインされた時の反射行列を用いて、反射光は

$$E_{\text{ref}} = \begin{pmatrix} U_{00} & U_{10} \end{pmatrix} M^*(\gamma_r) R_{FP}^{\text{align}} M(\gamma) \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.4)$$

と表すことができる。

従ってミスアラインした Fabry-Perot 共振器の反射行列は γ の 1 次まで考えて

$$R_{FP}^{\text{mis}}(\gamma, \gamma_r) = M^*(\gamma_r) R_{FP}^{\text{align}} M(\gamma) = \begin{pmatrix} r_{c0} & r_{c0}\gamma + r_{c1}\gamma_r^* \\ -(r_{c0}\gamma_r + r_{c1}\gamma^*) & r_{c1} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

入射光として $a_0 = 1, a_1 = 0$ を仮定すると結局、

$$E_{\text{ref}} = [U_{00}r_{c0} - U_{10}(r_{c0}\gamma_r + r_{c1}\gamma^*)] E_0 e^{i\Omega t} \quad (3.6)$$

となる。

³これまでと同様に、ウェストの中心が原点である。

3.3 WFS 信号強度

式 (3.6) の [] の中身を改めて Fabry-Perot 共振器の反射率 r_c だと思えば、空間モードを考えなかったときの計算がそのまま使えることがわかる。

PDH 信号強度の表式は⁴、

$$\begin{aligned} P_{\text{demod}}^I &= P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \text{Im}(r_c r_s^* - r_c^* r_s) \\ &= iP_0 J_0(\beta) J_1(\beta) (r_c^* r_s - r_c r_s^*) \end{aligned} \quad (3.7)$$

であったので、 r_c や r_s にそれを入れて計算していくと

$$\begin{aligned} C &\equiv r_{c0} \gamma_r + r_{c1} \gamma^* \\ S &\equiv r_{s0} \gamma_r + r_{s1} \gamma^* \end{aligned}$$

とにおいて

$$\begin{aligned} r_c^* r_s - r_c r_s^* &= [U_{00} r_{c0} - U_{10} C]^* [U_{00} r_{s0} - U_{10} S] - [U_{00} r_{c0} - U_{10} C] [U_{00} r_{s0} - U_{10} S]^* \\ &= U_{00} U_{00}^* (r_{c0}^* r_{s0} - r_{c0} r_{s0}^*) + U_{00} U_{10}^* (r_{c0} S^* - r_{s0} C^*) + U_{00}^* U_{10} (r_{s0}^* C - r_{c0}^* S) \end{aligned}$$

この第 1 項は 00 モードのみから成っていることからもわかるとおり PDH 信号であり、共振時にはゼロになる。第 2 項と第 3 項は 00 モードと 10 モードの干渉を表し、WFS 信号である。PDH によって共振器が共振状態に制御されているとすると、各反射率は実数と見なしてよい。 $U \equiv U_{00} U_{10}^*$ と置いてこの WFS 信号の部分を計算すると

$$\begin{aligned} W &= U [r_{c0} (r_{s0} \gamma_r^* + r_{s1} \gamma) - r_{s0} (r_{c0} \gamma_r^* + r_{c1} \gamma)] + U^* [r_{s0}^* (r_{c0} \gamma_r + r_{c1} \gamma^*) - r_{c0}^* (r_{s0} \gamma_r + r_{s1} \gamma^*)] \\ &= (r_{c0} r_{s1} - r_{c1} r_{s0}) (U \gamma - U^* \gamma^*) \\ &= (r_{c0} r_{s1} - r_{c1} r_{s0}) \left[(U - U^*) \frac{\delta x}{w_0} + (U + U^*) i \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \right] \end{aligned}$$

ここで、式 (2.1) より

$$\begin{aligned} U - U^* &= 2i \text{Im}(U) \\ &= 2i \text{Im}(U_0 U_0 e^{i\eta} (U_1 U_0 e^{2i\eta})^*) \\ &= -2i U_1^* U_0^* U_0 U_0 \sin \eta \end{aligned}$$

同様に

$$U + U^* = 2 \text{Re}(U) = 2 U_1^* U_0^* U_0 U_0 \cos \eta$$

以上より、WFS 信号は式 (3.7) に共振状態という条件を課したもので

$$\begin{aligned} P_{\text{WFS}}^I &= iP_0 J_0(\beta) J_1(\beta) W \\ &= 2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) U_1^* U_0^* U_0 U_0 (r_{c0} r_{s1} - r_{c1} r_{s0}) \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta - \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

となる⁵⁶。

⁴<http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/notePDH.pdf> の式 (2.7) 参照。ここでは最初から upper sideband と lower sideband の反射率が等しいとみなす。

⁵[1] では $\sin \eta$ 成分と $\cos \eta$ 成分が同符号になっているが、こちらの方が正しいと思う。[3] や [5] ではこちらと同様になっている。すでに反射光軸上において、共振器から遠ざかる方向が z 軸の向きになっていることに注意。その他この辺は、回転の方向など符号がややこしいので注意が必要。

⁶ γ_r の効果は消えるようである。[5] では消えていないが、おそらく式 (C.16) 第 2 項の + は - の間違い。

さて、 $P_{\text{WFS}}^{\text{I}}$ が $U_1^*(x, z)U_0^*(y, z)U_0(x, z)U_0(y, z) \equiv V(x, y, z)$ に比例することがわかったが、式 (2.2) より

$$\begin{aligned} U_0(x, z) &= \left(\frac{2}{\pi w^2(z)} \right)^{1/4} \exp \left[- \left(\frac{x}{w(z)} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R(z)} \right] \\ U_1(x, z) &= \left(\frac{2}{\pi w^2(z)} \right)^{1/4} \frac{2x}{w(z)} \exp \left[- \left(\frac{x}{w(z)} \right)^2 - i \frac{kx^2}{2R(z)} \right] \end{aligned}$$

であるから、 $P_{\text{WFS}}^{\text{I}}$ は x に関して奇関数である。そのため通常の PD で受光しては WFS 信号を取れない。そこで WFS では分割型の PD を用いて $x > 0$ の領域と $x < 0$ の領域の強度を別々にとり、その差を取ることで信号を得る。

これを数式で書くと

$$\begin{aligned} V_{\text{diff}} &= V(x > 0) - V(x < 0) \\ &= 2 \int_0^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy V(x, y, z) \\ &= 2 \int_0^{\infty} dx U_1^*(x, z) U_0(x, z) \\ &= 2 \int_0^{\infty} dx \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \frac{2x}{w(z)} \exp \left(- \frac{2x^2}{w^2(z)} \right) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

より

$$P_{\text{WFS}}^{\text{I total}} = -\sqrt{\frac{8}{\pi}} P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) (r_{c0} r_{s1} - r_{c1} r_{s0}) \left(\frac{\delta x}{w_0} \sin \eta - \frac{\delta \theta}{\alpha_0} \cos \eta \right) \quad (3.10)$$

これが最終的に得られる WFS 信号強度である。

3.4 鏡の傾きと光軸のずれの関係

ここまで入射光の座標系と共振器の座標系のずれ $\gamma = \delta x/w_0 + i\delta\theta/\alpha_0$ を考え、これに対する WFS 信号を導出した。ずれと各鏡の傾きの関係は幾何学的に求められ、[1] の 3.5.4 節に求め方が詳しく載っている。フロントミラー、エンドミラーの傾きをそれぞれ α_{F} 、 α_{E} とし⁷、これらがどちらも小さいとすると

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{R_{\text{F}} + R_{\text{E}} - L} \begin{pmatrix} R_{\text{F}}(R_{\text{E}} - L_{\text{E}}) & R_{\text{E}}(R_{\text{F}} - L_{\text{F}}) \\ R_{\text{F}} & -R_{\text{E}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{\text{F}} \\ \alpha_{\text{E}} \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

ここで R_{F} 、 R_{E} はフロントミラー、エンドミラーの曲率半径で、 L は共振器長である。また L_{F} 、 L_{E} は共振器固有モードのウェストの位置からフロントミラー、エンドミラーまでの距離で

$$\begin{aligned} L_{\text{F}} &= \frac{L(L - R_{\text{E}})}{2L - R_{\text{F}} - R_{\text{E}}} \\ L_{\text{E}} &= \frac{L(L - R_{\text{F}})}{2L - R_{\text{F}} - R_{\text{E}}} \end{aligned}$$

⁷ここではミラーの HR 面の法線ベクトルが共振器の x 軸の正の方向に傾くとき、ミラーの傾きが正であるとする。共振器は合わせ鏡のため、例えば y 軸の方向から見て鏡がどちらも時計回りに回ったとき、一方の鏡にとってそれは正の傾きだがもう一方にとっては負であることに注意。[1] の 3.5.4 節の式と符号が異なるのはこのためである。[6] の補遺 E も見よ。

このようにフロントミラーとエンドミラーで傾きによる光軸のずれ方に差があり、式 (3.10) の $\sin \eta$ と $\cos \eta$ の組み合わせ方が変わるため、適当な Gouy phase を選ぶことにより個々の傾きによって生じる WFS 信号を分離できる。

4 Optickle との比較

得られる WFS 信号の表式が求まったので、最後に具体的な値を代入して Optickle によるシミュレーション結果と比較する。値は下記の通りで、DPF BBM の Fabry-Perot 共振器の値を用いた。

レーザー波長	$\lambda = 1064 \text{ nm}$	フロントミラー曲率	$R_F = \infty \text{ (flat)}$
レーザー強度	$P_0 = 1 \text{ W}$	エンドミラー曲率	$R_E = 500 \text{ mm}$
変調周波数	$\Omega/(2\pi) = 15 \text{ MHz}$	フロントミラー反射率	$r_F = \sqrt{0.98}$
変調指数	$\beta = 0.1 \text{ rad}$	エンドミラー反射率	$r_E = \sqrt{0.99}$
共振器長	$L = 30 \text{ cm}$		

このようにフロントミラーが flat な場合、式 (4.1) は簡単になって

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_E - L & R_E \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_F \\ \alpha_E \end{pmatrix}$$

となる。

比較した結果が図 3 である。点が Optickle のシミュレーション結果で、実線が計算値であるが、見ての通り信号強度の絶対値が合っていない。これは Optickle が式 (3.9) のような積分をしていないからである⁸。そのため、計算値を $\sqrt{2/\pi}$ で割れば Optickle の結果とほぼ一致する⁹。

また、今回はたまたまフロントミラーが平面鏡の場合であったが、曲率を持っている場合は Gouy phase もずれる。例えば図 4 はフロントミラーの曲率もエンドミラーと同じ 500 mm とした場合の結果であるが、Gouy phase のずれが確認できる。フロントミラーの曲率によらず、エンドミラーの WFS 信号が常に $\sin \eta$ の形が出る¹⁰ことから、これは Optickle の仕様なのだろう。原因は不明である。

⁸Optickle の作者である Matt Evans に確認済み。Optickle ではずれに応じた割合の 10 モードを発生させ、単に 00 モードの振幅と 10 モードの振幅をかけたものを tickle01 の出力信号としているようである。

⁹ただし、finesse が高くない場合は各反射率を実数とみなした近似が影響しているのか、Optickle の結果と合わない。長さ制御を考えたときも、反射率の虚部まで考えないと値がずれてしまったことがあった。<http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/noteFPMILSC.pdf> の式 (2.7) あたり参照。

¹⁰finesse が低い場合はそうでもなかった.....

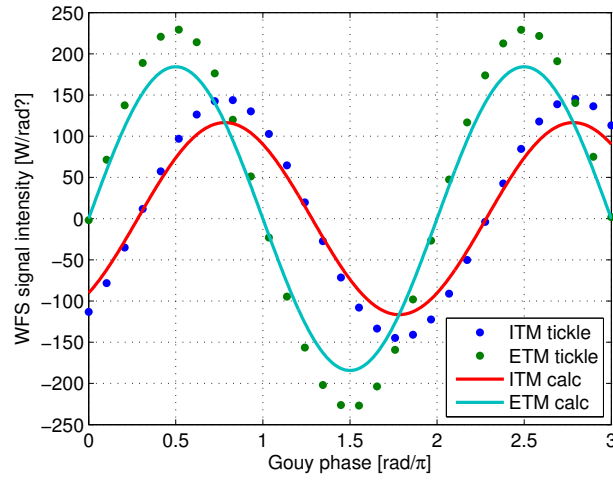


図 3: DPF BBM における WFS 信号強度の Gouy phase 依存性

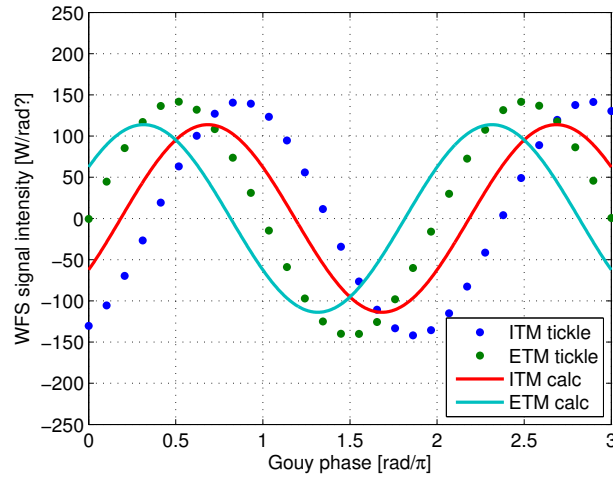


図 4: WFS 信号強度の Gouy phase 依存性 (フロントミラーの曲率も 500 mm だった場合)

参考文献

- [1] 丹羽佳人: 京都大学 修士論文 (2007).
- [2] H. Kogelnik and T. Li: Proc. IEEE **54** (1966) 1312.
- [3] 朽久保邦治: 東京大学 修士論文 (1996).
- [4] E. Morrison *et al.*: Appl. Opt. **33** (1994) 5041.
- [5] 麻生洋一: 東京大学 修士論文 (2002).
- [6] L. Barsotti, M. Evans: *Modeling of Alignment Sensing and Control for Advanced LIGO* LIGO-T0900511-v4 (2009).