

輻射圧による共振器の不安定性とその制御

道村唯太

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 修士 2 年

2011 年 5 月 26 日*

1 はじめに

懸架された 2 つの鏡からなる Fabry-Perot 共振器では、輻射圧の影響によって鏡の角度揺れに 2 つのモードが生じる [1]。LCGT でアラインメント制御の議論をする際、この 2 つのモードの共振周波数がどうなるかが問題となったので、ここにまとめておく。サスペンションの伝達関数や共振器の g -factor の選び方によっては一方のモード (SOFT モード) が不安定になる場合があり、そのような系を制御するにはどのように制御フィルタを設計すればよいかについても議論する。

以下ではまず単振り子の特性について簡単に復習した後、その共振周波数が輻射圧の影響によってどう変化するかについて述べる。そして最後に不安定モードの制御法について述べる。

2 単振り子の特性

ここでは単振り子の伝達関数を導出する。また、 Q 値と pole、減衰振動の関係について触れておく。

2.1 単振り子の伝達関数

質量 m の質点が、長さ l のワイヤーに懸架された単振り子を考える。この質点に外力 $f(t)$ を加えたときの質点の運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) = -\gamma'\dot{x}(t) - \frac{mg}{l}x(t) + f(t)$$

ここで γ' は減衰力の係数で、 g は重力加速度である。

$2\gamma \equiv \frac{\gamma'}{m}$ 、 $\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}$ とおいて上式を変形すると

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2x(t) = \frac{f(t)}{m} \quad (2.1)$$

両辺をフーリエ変換し、質点に加えた力から質点の変位への伝達関数を求めると

$$H(\omega) = \frac{X(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{m} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (2.2)$$

*2011 年 9 月 12 日: 3.1 節の式打ち間違いを訂正 (K_{opt} の E と I が逆になっていた)。

ラプラス変換では

$$\begin{aligned}
 H(s) &= \frac{1}{m} \frac{1}{s^2 + \omega_0^2 + s \frac{\omega_0}{Q}} \\
 &= \frac{1}{m} \frac{1}{\left[s + \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 - 1} \right) \right] \left[s + \omega_0 \left(\frac{1}{2Q} - \sqrt{\left(\frac{1}{2Q} \right)^2 - 1} \right) \right]} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

となり、この伝達関数が 2 つの pole を持つことがわかる。ここで $Q \equiv \frac{\omega_0}{2\gamma}$ は Q 値であり、共振の鋭さを表す。

ここでは単振り子の並進について考えたが、剛体振り子を考えると懸架された質量にかけた外部トルクから角度への伝達関数も同様に求まる。この場合は回転軸まわりの慣性モーメントを I 、復元トルクを k として $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$ となり、

$$H(\omega) = \frac{\Theta(\omega)}{\tau(\omega)} = \frac{1}{I} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q}} \quad (2.4)$$

となる。

2.2 Q 値と減衰振動

少し余談だが、式 (2.1) のような運動方程式で、外力 $f(t) = 0$ の場合を考える。この運動方程式は共振周波数が虚数、すなわち復元力が負でも成り立つ式だが、ここでは ω_0 が実数である通常の振り子を考えよう。適当な初期条件の下での運動方程式を解くと、 γ と ω_0 の大小関係により解は異なり、式 (2.3) からわかるように複素平面上での pole の位置も変わってくる。すなわち、

- $\gamma > \omega_0 \iff 2Q < 1$ のとき過減衰 (2 つの pole は実数)
- $\gamma = \omega_0 \iff 2Q = 1$ のとき臨界減衰 (2 つの pole は実数で、等しい)
- $\gamma < \omega_0 \iff 2Q > 1$ のとき減衰振動 (2 つの pole は複素共役)

となる。いずれの場合においても、2 つの pole はどちらも実部が負、すなわち複素平面上で左半平面にある安定 pole であることに注意されたい。

3 つの各場合における伝達関数 $H(\omega)$ をプロットしたのが図 1 である。青線が過減衰の時で、1 次の実数 pole を 2 つ持っている様子がわかる。また緑線は臨界減衰の時で、2 次の実数 pole を 1 つ持っている。赤線は我々が通常よく見るような振り子の伝達関数の形であり、互いに複素共役な 2 つの 1 次 pole を持っている。

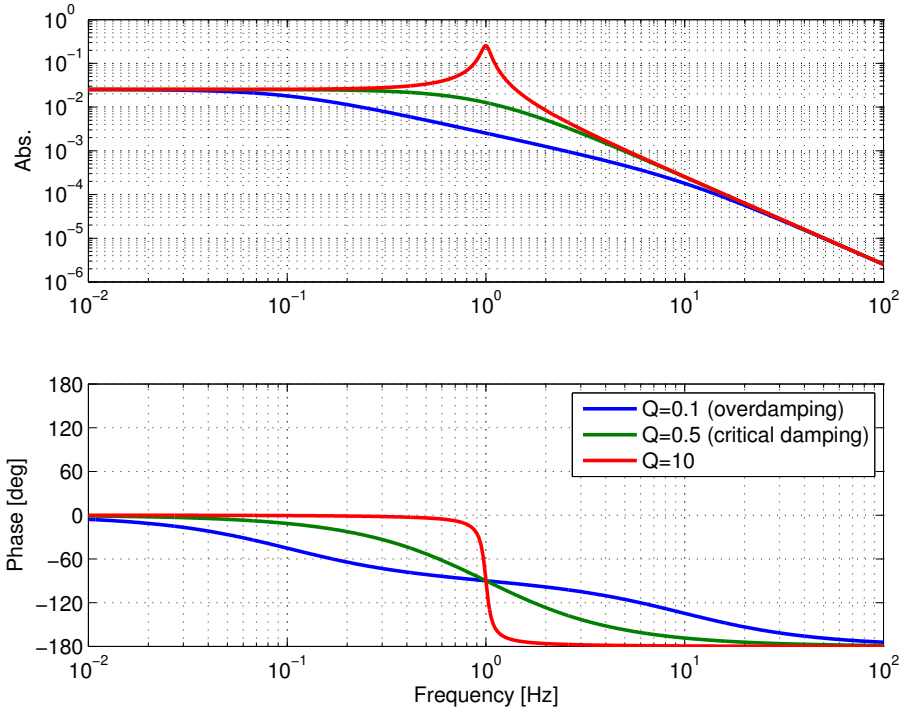


図 1: 各 Q 値における振り子の伝達関数

3 共振器における輻射圧トルクの影響

ここでは Fabry-Perot 共振器を構成する 2 つの鏡の振り子伝達関数が、輻射圧の影響によってどのように変化するかについて述べる。鏡が傾くと共振器軸がずれ、鏡に当たるビームの位置がずれることで輻射圧トルクが発生し、伝達関数が変化するというのがその仕組みである。

文献としては [2] を参考にしている。日本語で書かれた参考文献としては [3] がある。

3.1 Torsional stiffness matrix

まずは Fabry-Perot 共振器を構成する各鏡の傾きによって、各鏡に当たるビームスポットがどれくらいずれるか求める。

以前 wavefront sensor(WFS) の原理を考えたときに、各鏡の傾きによって、共振器軸がどうずれるかの計算を行った¹。その結果をそのまま引用すると、

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \theta \end{pmatrix} = \frac{1}{R_E + R_I - L} \begin{pmatrix} R_E(R_I - L) & R_I(R_E - L_E) \\ -R_E & R_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_E \\ \alpha_I \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

ここで δx , $\delta \theta$ はウェストを原点とする共振器軸の平行移動と回転を表し、 R_E , R_I はそれぞれ ETM、ITM の曲率半径、 α_E , α_I はそれぞれ ETM、ITM の傾きである。また L は共振器長で、 L_E , L_I は

¹<http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/noteWFS.pdf> の式 (3.11)。導出は [3] などいろいろ。

共振器固有モードのウェストの位置から ETM、ITM までの距離で

$$\begin{aligned} L_E &= \frac{L(L - R_I)}{2L - R_E - R_I} \\ L_I &= \frac{L(L - R_E)}{2L - R_E - R_I} \end{aligned}$$

共振器軸の平行移動と回転を、各鏡のビームスポットのずれ d_i に直すには

$$\begin{pmatrix} d_E \\ d_I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L_E \\ 1 & -L_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta \theta \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

とすればよいから、式 (3.1) と式 (3.2) から

$$\begin{pmatrix} d_E \\ d_I \end{pmatrix} = \frac{1}{R_E + R_I - L} \begin{pmatrix} R_E(R_I - L) & R_E R_I \\ R_E R_I & R_I(R_E - L) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_E \\ \alpha_I \end{pmatrix}$$

これを g-factor $g_i = 1 - L/R_i$ で書くと驚くくらいきれいになって、

$$\begin{pmatrix} d_E \\ d_I \end{pmatrix} = \frac{L}{1 - g_E g_I} \begin{pmatrix} g_I & 1 \\ 1 & g_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_E \\ \alpha_I \end{pmatrix}$$

さて、光子 1 個が鏡に当たって反射するとき、鏡に与えられる運動量は $\frac{2h\nu}{c}$ であり、レーザーパワー P に含まれる光子数は $\frac{P}{h\nu}$ であるから、輻射圧が鏡に与える力は

$$F = \frac{2h\nu}{c} \times \frac{P}{h\nu} = \frac{2P}{c}$$

となる。ビームスポットがずれたことにより加わるトルクは $\tau = -Fd$ となる²から結局、各鏡の傾きによって各鏡に加わる輻射圧トルクは

$$\begin{pmatrix} \tau_E \\ \tau_I \end{pmatrix} = \frac{-2PL}{c(1 - g_E g_I)} \begin{pmatrix} g_I & 1 \\ 1 & g_E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_E \\ \alpha_I \end{pmatrix}$$

となる。ここで P は共振器内パワーであり、得られた行列

$$K_{\text{opt}} \equiv k_0 \begin{pmatrix} g_I & 1 \\ 1 & g_E \end{pmatrix}, \quad k_0 \equiv \frac{-2PL}{c(1 - g_E g_I)}$$

を torsional stiffness matrix と呼ぶ。

3.2 HARD モードと SOFT モード

上で導出した torsional stiffness matrix は、各鏡を考えている点で直感的には分かりやすいが、一方の鏡の傾きによって他方の鏡にトルクを加えてしまう点で制御を考えるとときには不便となる。輻射圧の影響によって生じる、共振器の傾きの固有モードはこれを対角化させることで得られる。

対角化はパラメータ

$$r = \frac{2}{(g_I - g_E) + \sqrt{(g_I - g_E)^2 + 4}}$$

²符号は [2] に合わせ、鏡の傾きに対して復元トルクとして働く向きを正としている。

を使うとできて、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tau_S \\ \tau_H \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & -1 \end{pmatrix} K_{\text{opt}} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_S \\ \alpha_H \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_S & 0 \\ 0 & k_H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_S \\ \alpha_H \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ここで、固有値

$$k_S = k_0 \frac{(g_I + g_E) + \sqrt{(g_I - g_E)^2 + 4}}{2} = k_0 \left(g_E + \frac{1}{r} \right) \quad (3.3)$$

$$k_H = k_0 \frac{(g_I + g_E) - \sqrt{(g_I - g_E)^2 + 4}}{2} = k_0 \left(g_I - \frac{1}{r} \right) \quad (3.4)$$

は k_S が負、 k_H が正となっており³、それぞれ輻射圧トルクが反バネとして働くモード、復元トルクとして働くモードとなっている。前者は鏡の機械的な復元トルクを弱める方向に輻射圧トルクが働くため SOFT モード、後者は強める方向に働くため HARD モードと呼ばれる。

各モードを図示したのが図 2 である。赤色の矢印が輻射圧、緑色の矢印がビームスポットのずれを表わしており、SOFT モードの方は輻射圧トルクが青色の矢印で書かれた鏡の傾きと同じ方向にかかること、HARD モードでは逆向きにかかることがわかる。

また r は各モードでの各鏡の傾きの比となっており、2 つの鏡の曲率半径が等しい場合は $r = 1$ となる。このとき SOFT モードは純粋な共振器軸の平行移動、HARD モードは純粋な共振器軸の回転となる。

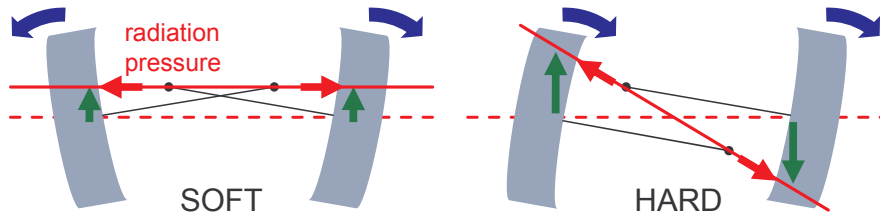


図 2: 共振器の SOFT モードと HARD モード

3.3 輻射圧による振り子伝達関数の変化

輻射圧がないとき、鏡に加わるトルクから鏡の角度への伝達関数を H とする。輻射圧トルクは、鏡に生じた傾きから生じるフィードバックトルクとなるので、輻射圧下での optomechanical な系は図 3 のように表せる。ここで k_{opt} は輻射圧トルクで、 k_S と k_H の 2 つのモードがある。

この系のトルクから角度への伝達関数は

$$H' = \frac{H}{1 + k_{\text{opt}}H} \quad (3.5)$$

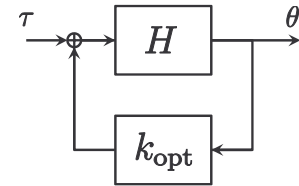


図 3: 輻射圧によるフィードバック

³共振器として成立するためには $0 < g_E g_I < 1$ であること、 k_0 は負であることに注意。

と表せる。これが輻射圧下での optomechanical な伝達関数であり、アラインメント制御で制御しなければならない系となる。

一般に、共振器を構成する鏡は複雑な防振系によって懸架されているため H の形は複雑であるが、以下では H を単純な振り子だと思って議論を進める。

H は式 (2.4) で表されること、 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I}}$ だったことを用いると、式 (3.5) は

$$H' = \frac{1}{I} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0'^2 + i \frac{\omega \omega_0'}{Q'}}, \quad \omega_0' \equiv \sqrt{\frac{k + k_{\text{opt}}}{I}}, \quad Q' \equiv Q \sqrt{\frac{k + k_{\text{opt}}}{k}} \quad (3.6)$$

のように変形できる。すなわち、共振周波数がずれ、 Q 値もその割合だけ変化することになる。

輻射圧がない状況から、徐々にパワーを上げていくと、 k_{opt} には正負 2 つのモードがあるため、1 つの鏡だけを見ると、共振周波数が 2 つに分裂したようになり、その分裂が次第に大きくなっていく。HARD モードの方はより k_{H} が大きくなって共振周波数が上がっていくが、SOFT モードの方は負である k_{S} が小さくなっていくため、共振周波数も下がっていく。しかしあるところで $k + k_{\text{S}} < 0$ となり、共振周波数が純虚数となる。このとき SOFT モードは不安定となり、何らかの制御を外部から加えない限り、安定とはならない。

具体的なパラメータを使って、 H' を計算したのが図 4 である。パラメータとしては LCGT を意識し、下記のものを使った⁴。

共振器長	$L = 3000 \text{ km}$	共振周波数	$f = 1.3 \text{ Hz}$
ITM 曲率半径	$R_{\text{I}} = \infty \text{ (flat)}$	慣性モーメント	$I = 0.05 \text{ kgm}^2$
ETM 曲率半径	$R_{\text{E}} = 7000 \text{ km}$	Q 値	$Q = 1000$
共振器内パワー	$P = 400 \text{ kW}$		

青線が輻射圧がないときの元々の機械的な伝達関数で、緑線と赤線がそれぞれ SOFT モード、HARD モードの伝達関数である。HARD モードは共振周波数が元々のそれより高くなっており、SOFT モードは負の輻射圧トルクが大きく、共振周波数が純虚数で不安定となっている。

SOFT モードを不安定でなくするためには機械的な復元トルクを大きくして共振周波数を上げることや g -factor を変えることなどが考えられる。特に g -factor に関しては、 k_{S} の絶対値が小さくなるようにするには、式 (3.3) から、 g -factor を -1 に近づけるとよいこと、 g -factor の組み合わせとしては $|g_{\text{I}} - g_{\text{E}}|$ が小さい方がよいことがわかる。これは言い換えると 2 つの鏡の曲率中心が近づくほど k_{S} が小さいということであり、図 2 を見ればそれは鏡の傾きによって生じるビームスポットのずれを小さくすることに他ならないことがわかる。

アラインメント制御を考える際には、HARD モードの共振周波数もあまり高くない方がよいが、こちらは反対に g -factor を 1 に近づける方がよい。鏡の曲率半径が大きいほどよいということであり、これも図 2 を見れば曲率半径が大きいほどビームスポットのずれが小さくなることから理解できる。 g -factor の組み合わせとしては、SOFT モードと同じように $|g_{\text{I}} - g_{\text{E}}|$ が小さい方がよい。

以上を 3 次元グラフで表したのが図 5 と図 6 である。各 g -factor に対して、 k_{S} と k_{H} がどのような値になるかを示しており、輻射圧トルクが大きくなるに従って青色から赤色になっている。 g -factor が -1 に近づくほど k_{S} が 0 に近づき、 k_{H} が大きくなることや、 $g_{\text{I}} = g_{\text{E}}$ に尾根や谷があることがわかる。

⁴ここに挙げられている共振周波数など振り子のパラメータは当然、輻射圧がない状態での機械的なパラメータである。関口くんによる iLCGT Type-A サスペンションのモデル計算の結果を単振り子でフィッティングすることにより得られた値を使っている。

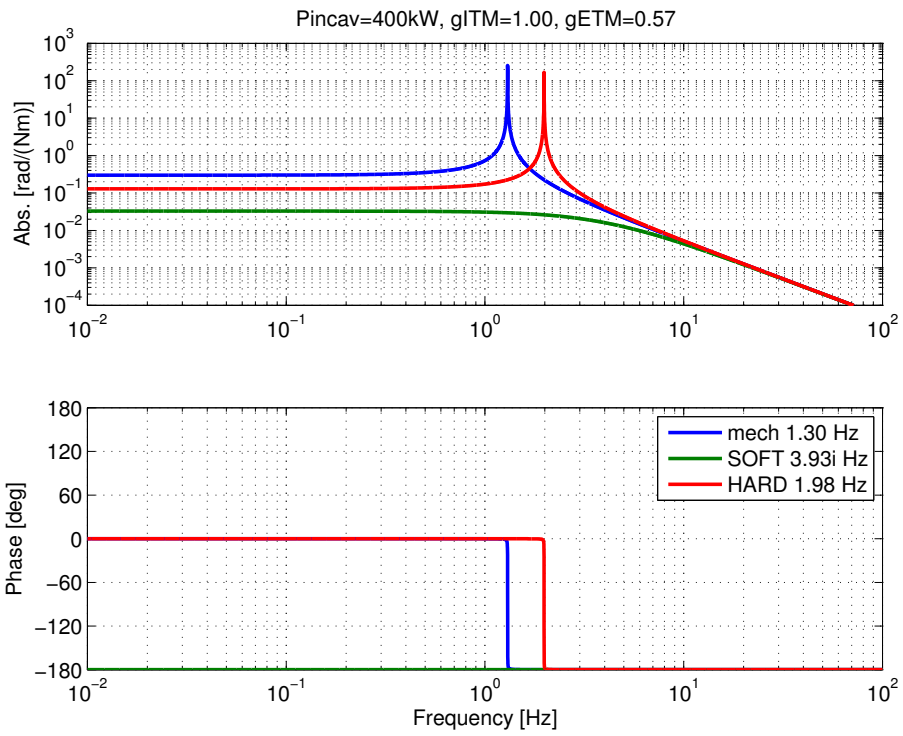


図 4: SOFT モード、HARD モードの伝達関数

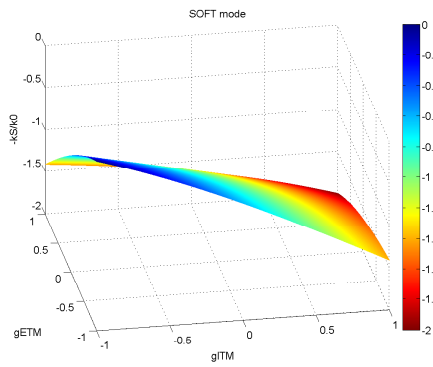


図 5: k_S の g-factor 依存性

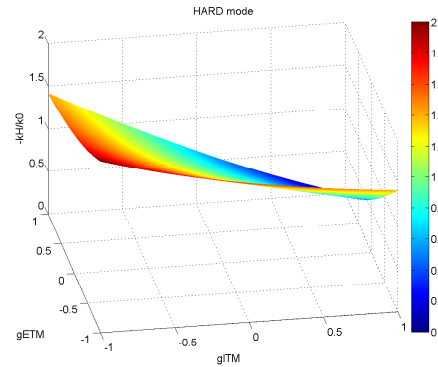


図 6: k_H の g-factor 依存性

4 安定/不安定モードの制御

HARD モードは常に安定であるため、通常我々がするように Bode 線図を使った制御の安定性判定を行って制御ループを設計すればよい。しかし、SOFT モードが不安定の場合はもう少し注意深く安定性判定を行う必要がある。ここではまず一般的に、Nyquist 線図を用いた安定性判定条件を記し、安定モードの制御について述べる。その上で、安定モードと比較しながら、不安定モードの制御について述べる。最後に、安定性判定が正しいのか確かめるために、ステップ応答を見つめる。

4.1 Nyquist 線図による安定性判定

Nyquist 線図を用いたオープンループ伝達関数 G による制御の安定条件は次のようになっている [4]。

閉ループが安定であるためには、 G の Nyquist 線図の軌跡が、点 -1 の回りを、複素平面上で右半平面内にある G の pole の個数と同じ回数だけ反時計回りに回転しなければならない

ここで「複素平面上で右半平面内にある」pole とは実部が正の pole ということであり、不安定 pole のことである。

4.2 安定モードの制御

一般に、これまで議論してきたような振り子の pole は、式 (2.3) より 2 つあり、

$$-\omega_0 \left(\frac{1}{2Q} + \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} \right), \quad -\omega_0 \left(\frac{1}{2Q} - \sqrt{\left(\frac{1}{2Q}\right)^2 - 1} \right) \quad (4.1)$$

である。安定モードの場合は ω_0 も Q も実数であるため、これらの 2 つの pole はどちらも左半平面内にある安定 pole である。したがって、制御フィルタ F を用いて振り子 H を制御することを考えると、オープンループ伝達関数 $G = HF$ の Nyquist 線図での軌跡は点 -1 を一度も反時計回りに回ってはならないことになる。

以下、 H として共振周波数 1 Hz の単振り子を考え、UGF が 10 Hz 制御ループを設計するとする。

まずは F として単なるゲインを考えると、Nyquist 線図、Bode 線図はそれぞれ図 7、図 8 となる⁵。Nyquist 線図を見ると、確かに点 -1 を一度も反時計回りに回転していないが、余裕がない。そのため、通常は F として UGF に位相余裕を持たせるようなフィルタを設計することで、確実に点 -1 を回らないようにする。そのようなフィルタにしたのが図 9、図 10 であり、これが通常の安定な振り子を制御する方法である。

⁵以下に挙げる Nyquist 線図では、見やすさのためにゲインのスケールは線形ではない。具体的には動径を $\log_{10}(|G|) + 2$ としている。

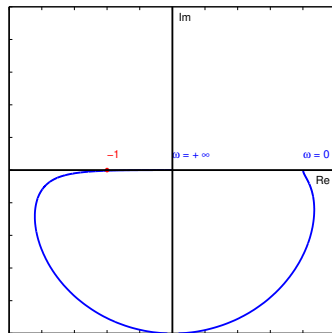


図 7: Nyquist 線図 (安定, F はゲイン)

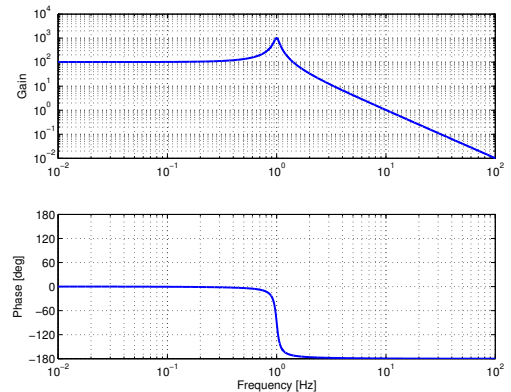


図 8: Bode 線図 (安定, F はゲイン)

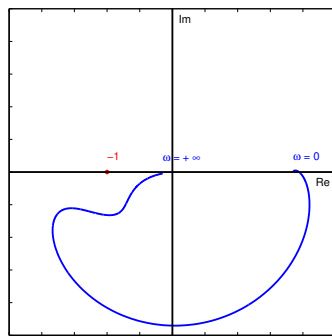


図 9: Nyquist 線図 (安定, F は位相進み)

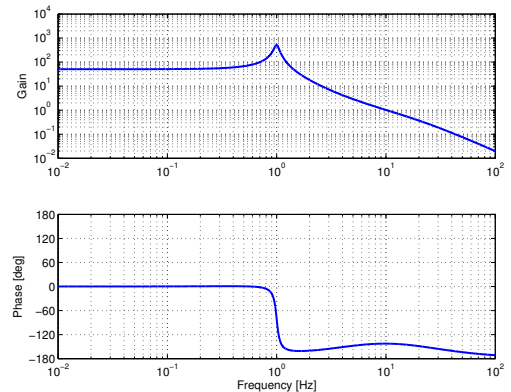


図 10: Bode 線図 (安定, F は位相進み)

4.3 不安定モードの制御

不安定モードでは、式 (3.6) からわかるように、 ω_0 と Q が純虚数となっている。したがって、(4.1) に示した振り子の pole はどちらも実数となり、必ず一方が正、他方が負となる。すなわち不安定 pole を 1 つ持っていることになり、不安定モードの制御では、オープンループ伝達関数 G の Nyquist 線図での軌跡は点 -1 を 1 回だけ、反時計回りに回らなければならない。

安定モードの制御で考えたときと同じように、まずは F として単なるゲインを考えると、Nyquist 線図、Bode 線図はそれぞれ図 11、図 12 となって、やはり余裕が無い⁶。そこで安定モードの制御の時と同じく、UGF の 10 Hz で位相余裕を持たせるような F にしたのが図 13、図 14 である。負の周波数領域があとあと半分回ることに注意すれば、これで点 -1 を 1 回だけ反時計回りに回っていることがわかる。

⁶なお、 F のゲインが小さく UG を一度も超えない場合は点 -1 の回りを全く回らないので不安定である。安定モードの場合は、UG を一度も超えなくても安定である。

不安定モードとはいえ、不安定 pole は 1 つしかないので、安定モードと大差なく制御フィルタを設計できると言える。ただし、実際のサスペンション伝達関数では単振り子のように単純な形にはならないので、Nyquist 線図を頭に入れておくことが重要である。

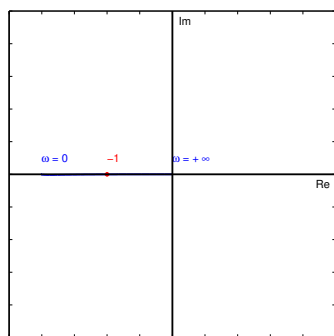


図 11: Nyquist 線図 (不安定, F はゲイン)

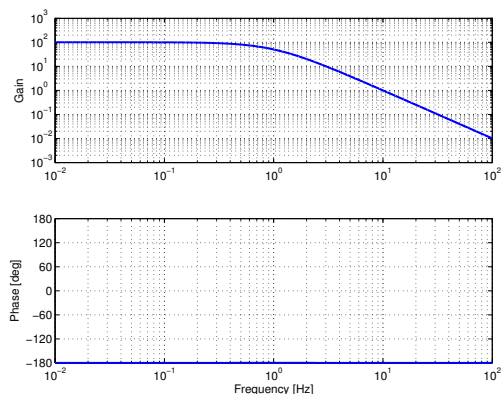


図 12: Bode 線図 (不安定, F はゲイン)

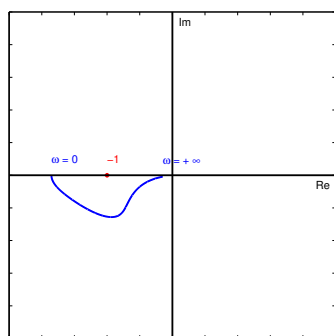


図 13: Nyquist 線図 (不安定, F は位相進み)

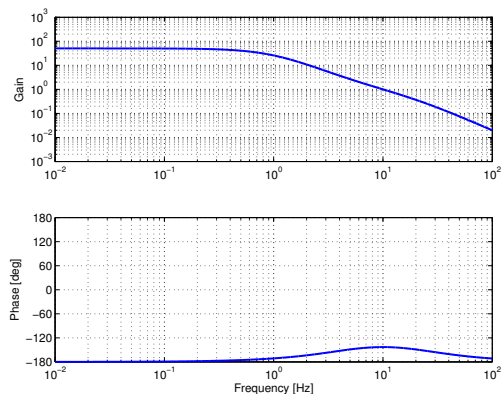


図 14: Bode 線図 (不安定, F は位相進み)

4.4 ステップ応答による制御安定性の確認

前節で考えた不安定な振り子の制御の安定性判定が正しいのか確かめるために、ステップ応答を見てみよう⁷。振り子としては前節と同じものを仮定し、フィルタとしてはもう少し実際的な、高周波でゲインをカットし、低周波で DC ゲインを稼ぎ、2 Hz で位相余裕を持たせるようなものを用意した。UGF が位相余裕のある 2 Hz になるよう全体のゲインを調整したときの Nyquist 線図、Bode 線図が図 15、図 16 である。

これらの図から、前節で考えた安定性判定によれば、この制御は安定なはずであることが確認できる。しかし、全体のゲインが高すぎたり低すぎたりすると、UGF が変わってしまい、そこで位相が反転していると安定な制御にはならない。そこで、ゲインを変えて UGF をいろいろ変えたと

⁷ここでは MATLAB の関数 `step` を用いた。

きの閉ループ伝達関数 $\frac{1}{1+G}$ のステップ応答を見たのが図 17 である。制御の安定性判定から予想されるとおり、UGF が位相余裕のある 2 Hz のときは安定に制御がかかっているが、それ以外の時では発振してしまっている。 $|G|$ が常に 1 より小さい場合も不安定になるのは、安定な振り子の制御との違いである。

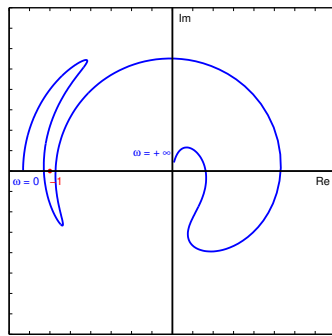


図 15: Nyquist 線図 (不安定, 実際的な F)

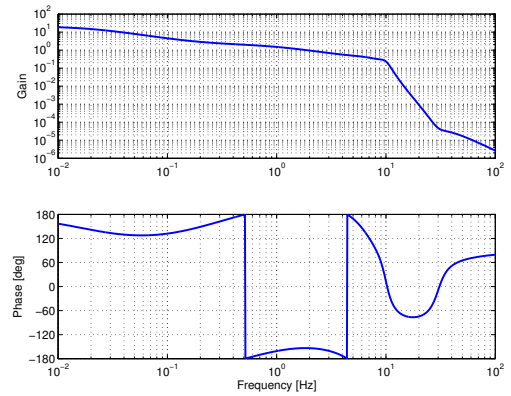


図 16: Bode 線図 (不安定, 実際的な F)

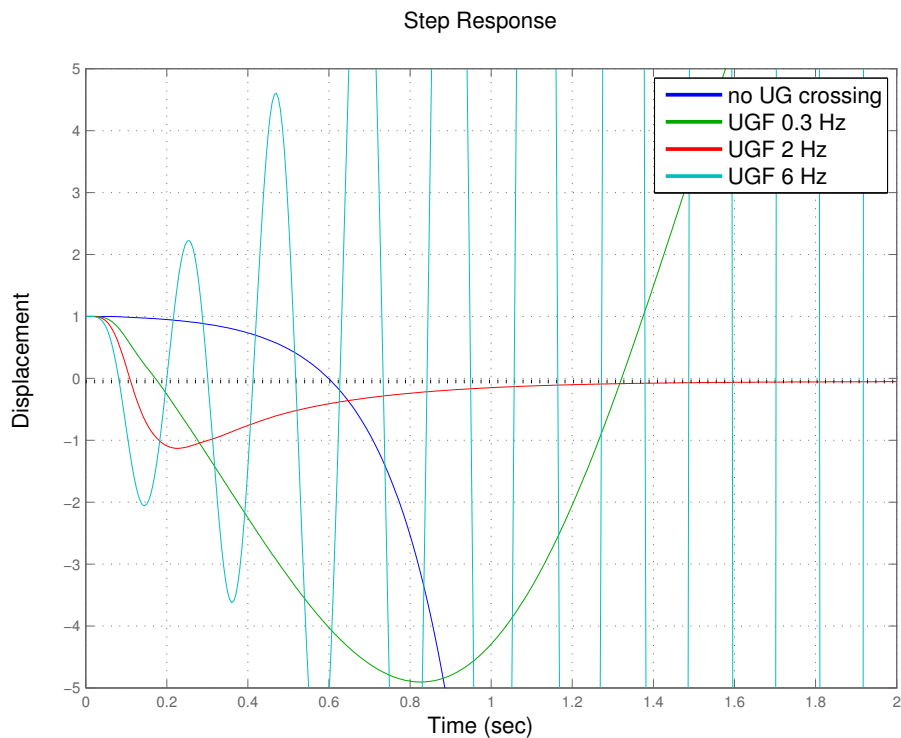


図 17: 閉ループ伝達関数のステップ応答

以上より、Nyquist 線図を用いた安定性判定が正しそうなこと、不安定な振り子の制御でも通常の安定な振り子の制御と同じように、UGF における位相余裕を考えれば安定な制御ループを設計できそうなことが確認できた。

参考文献

- [1] J. A. Sidles and D. Sigg: Phys. Lett. A **354** (2006) 167.
- [2] L. Barsotti and M. Evans: *Modeling of Alignment Sensing and Control for Advanced LIGO* LIGO-T0900511-v4 (2009) Section 3.
- [3] 阪田紫帆里: お茶の水女子大学 博士論文 (2008) 6.2 節, 付録 C.
<http://tamago.mtk.nao.ac.jp/ssakata/Thesis/PhDthesis.pdf>
- [4] 平松成範: 電子回路概論 (2011) 4-2-5 節.
http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/tsubono/hiramatsu_seminar/