量子雑音の計算

道村唯太
東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 修士 1 年

2010 年 1 月 25 日

記号

ω, λ	レーザーの角周波数、波長	m	1 つの鏡の質量 (すべて同じとする)
Ω	重力波の角周波数	L	FP 共振器長
γ	FP 共振器のカットオフ角周波数 (cavity pole)	τ	FP 共振器の平均滞在時間 ($\tau = \dfrac{1}{\gamma} = \dfrac{2L\mathcal{F}}{\pi c}$)
$\mathcal{F}$	FP 共振器のフィネス	P	入射パワー (BS 前)

1 はじめに

いざ量子雑音を計算しようとすると、いろいろな公式が溢れているし、Optickle の結果と合わなかったりするので泣きそうになる。そんなことが今後ないように、まとめておく。

以下ではまず、Fabry-Perot Michelson 干渉計の量子雑音について古典的に求めた場合の公式と、量子的に求めた場合の公式を挙げ、両者が一致することを確認する。そしてその公式と、Optickle の結果と比較してみる。

2 Fabry-Perot Michelson 干渉計の量子雑音の公式

2.1 古典的な公式

[1] によると、散射雑音は

$$h_{\mathrm{shot}} = \sqrt{\frac{\hbar\lambda}{4\pi c P}\left(\frac{1}{\tau^2}+\Omega^2\right)} \qquad [1/\sqrt{\mathrm{Hz}}] \tag{2.1}$$

輻射圧雑音は

$$h_{\mathrm{rp}} = \frac{1}{L}\frac{2}{m\Omega^2}\frac{2\mathcal{F}}{\pi}\sqrt{\frac{16\pi\hbar P}{c\lambda}}\frac{1}{\sqrt{1+(\Omega\tau)^2}} \qquad [1/\sqrt{\mathrm{Hz}}] \tag{2.2}$$

2.2 量子的な公式

[2] によると、量子雑音は

$$h_{\mathrm{qn}} = \sqrt{\frac{h_{\mathrm{SQL}}^2}{2}\left(\frac{1}{\mathcal{K}}+\mathcal{K}\right)} \tag{2.3}$$

第 1 項が散射雑音、第 2 項が輻射圧雑音に相当し、その積の 2 倍の平方根が標準量子限界

$$h_{\rm SQL} = \sqrt{\frac{8\hbar}{m\Omega^2 L^2}} \tag{2.4}$$

である。

また、ここで $\mathcal{K}$ は真空場の揺らぎの干渉計出力とのカップリング定数であり、

$$\mathcal{K} = \frac{(P/P_{\rm SQL})2\gamma^4}{\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)} \tag{2.5}$$

$P_{\rm SQL}$ は標準量子限界に達するために必要な入射パワーで

$$P_{\rm SQL} = \frac{mL^2\gamma^4}{4\omega} \tag{2.6}$$

2.3 一致することの確認

量子的な公式を変形していくと、古典的な公式になることを確認する。

式 (2.6) と $\omega = 2\pi c/\lambda$ より式 (2.5) は

$$\mathcal{K} = \frac{2P\gamma^4}{\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)} \cdot \frac{4}{mL^2\gamma^4} \cdot \frac{2\pi c}{\lambda} = \frac{16\pi cP}{\lambda mL^2\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)}$$

となるので、散射雑音は

$$\begin{aligned} h_{\rm shot}^2 &= \frac{h_{\rm SQL}^2}{2}\frac{1}{\mathcal{K}} \\ &= \frac{4\hbar}{m\Omega^2L^2} \cdot \frac{\lambda mL^2\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)}{16\pi cP} \\ &= \frac{\hbar\lambda(\gamma^2+\Omega^2)}{4\pi cP} \end{aligned}$$

$\gamma = 1/\tau$ であるから、確かに式 (2.1) と一致する。

同様にして、輻射圧雑音は

$$\begin{aligned} h_{\rm rp}^2 &= \frac{h_{\rm SQL}^2}{2}\mathcal{K} \\ &= \frac{4\hbar}{m\Omega^2L^2} \cdot \frac{16\pi cP}{\lambda mL^2\Omega^2(\gamma^2+\Omega^2)} \\ &= \frac{64\pi\hbar cP}{\lambda(m\Omega^2L^2)^2} \cdot \frac{\tau^2}{1+(\Omega\tau)^2} \qquad (\because \gamma = 1/\tau) \\ &= \frac{64\pi\hbar cP}{\lambda(m\Omega^2L^2)^2} \cdot \frac{4L^2\mathcal{F}^2}{\pi^2c^2} \cdot \frac{1}{1+(\Omega\tau)^2} \qquad (\because \tau = \frac{2L\mathcal{F}}{\pi c}) \\ &= \frac{16\mathcal{F}^2}{(m\Omega^2L)^2\pi^2}\frac{16\pi\hbar P}{c\lambda}\frac{1}{1+(\Omega\tau)^2} \end{aligned}$$

これの平方根をとれば、確かに式 (2.2) と一致することが確認できる。

2.4 注意点

輻射圧雑音に関して、[1] ではまず 1 つの Fabry-Perot 共振器について公式を求め、FPMI でも同じ式が成り立つとして公式を導いている。FPMI でも同じ式が成り立つのは、BS でパワーが半

分になる、つまり量子揺らぎが $1/\sqrt{2}$ 倍になるが、それぞれの Fabry-Perot 共振器に入るパワーの量子揺らぎは無相関であるから結局全体として見ると $\sqrt{(1/\sqrt{2})^2+(1/\sqrt{2})^2}$ で同じ、と説明している[1]。

一方、[2] では最初から FPMI を考え、換算質量 $m/4$ を使っている[2]。1 つの Fabry-Perot 共振器だけを考える場合は換算質量は $m/2$ になるが、そのかわり両腕の差を取るということをしないので、結局こちらでも同じ式になるのだと考えられる。

フロントミラー、エンドミラーの振幅反射率、振幅透過率をそれぞれ r_1、r_2、t_1、t_2 とする。

[1] では $1-r_1 \ll 1$ と $1-r_2 \ll 1$ として

$$\frac{t_1^2 r_2}{(1-r_1 r_2)^2} \simeq \frac{2\mathcal{F}}{\pi}$$

の近似を用いている。

一方、[2] では最初から $r_2 = 1$ として

$$\gamma = \frac{t_1^2 c}{4L}$$

としている。

これらの近似は、フィネスの近似式

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1-r_1 r_2} \\
&\simeq \frac{\pi}{1-r_1} \qquad (\because r_1 \simeq 1,\ r_2 = 1) \\
&= \frac{\pi}{1-(1-t_1^2)^{1/2}} \\
&\simeq \frac{\pi}{1-(1-t_1^2/2)} \\
&= \frac{2\pi}{t_1^2}
\end{aligned}$$

を考えれば、どちらも同等であると考えられる。

[1] [1] の C.1.3 節参照

[2] [2] の脚注 3 参照。Fabry-Perot 共振器を構成する 2 つの鏡の換算質量は $m_{\mathrm{r}} = m \times m/(m+m) = m/2$。さらに腕が 2 つあるので $m_{\mathrm{r}}/2 = m/4$。

3 Optickle との比較 (保留)

次に、以上の公式と、Optickle によるシミュレーション結果を比較してみる。Optickle では実際に真空場を接続されていないポートから入射することで量子雑音のシミュレーションがされる (はず)[3]。

結論からいうと、Optickle の結果と公式はなぜか合わない。おそらく位相変調の効果を公式導出の際に考えていないのが原因ではないかと思う。位相変調の効果まで考慮した散射雑音については [4] があるが、まだちゃんと確かめていない。

とりあえず 1 つの Fabry-Perot 干渉計について、比較した結果が図??である。パラメータとしては LCGT を意識し、レーザー波長 $\lambda = 1064\,\mathrm{nm}$、レーザー強度 $P_0 = 82\,\mathrm{W}$、変調周波数 $\Omega_{\mathrm{mod}}/(2\pi) = 11.25\,\mathrm{MHz}$、変調指数 $\beta = 0.1\,\mathrm{rad}$、共振器長 $L = 3000\,\mathrm{m}$、各鏡の振幅反射率 $r_1 = \sqrt{0.996}$, $r_2 = 1$、鏡の質量 $m = 30\,\mathrm{kg}$ とした。

また、公式の P にはレーザー強度 P_0 ではなく、位相変調後のキャリアの強度、すなわち $P_0 J_0^2(\beta)$ を代入した。

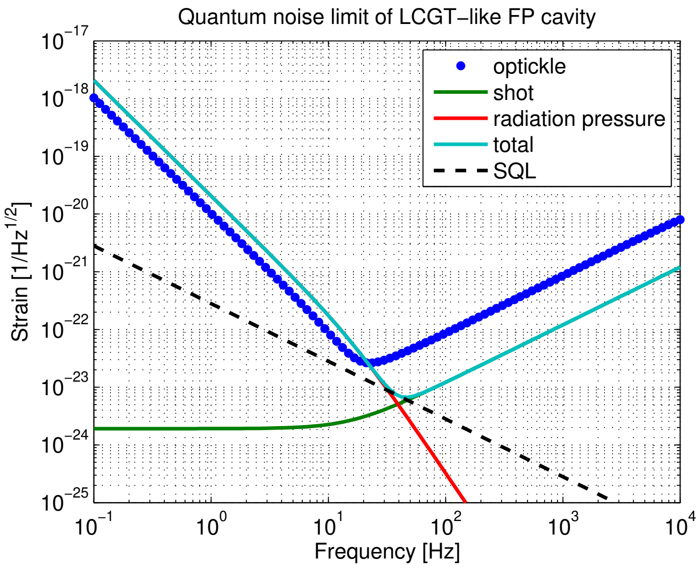

図 1: Fabry-Perot 干渉計の量子雑音

なお、FPMI も Optickle で作ってみたが、やはり合わない。そればかりか、1 つの Fabry-Perot と同じ結果にもならない。Schnupp asymmetry を入れずに、ETMX と ETMY を同相で tickle し、reflection port で見れば同じになりそうだが、輻射圧雑音が 1 つの Fabry-Perot の時の半分程度になる。Schnupp asymmetry を入れて、anti-symmetric port で ETMX と ETMY の差動を見るようにすると、輻射圧雑音が半分になるだけでなく、散射雑音が 1 桁下がる。

このあたり、保留中……

参考文献

[1] 山元一広: 「LCGT の目標感度 ver2.0」(2001)[3].
ftp://t-munu.phys.s.u-tokyo.ac.jp/pub/LCGT_design/sensitivity/yamamoto/LCGTgoal.zip

[2] H. J. Kimble *et al.*: Phys. Rev. D **65** (2002) 022002.

[3] M. Evans: *Optickle* (2007). http://www.ligo.caltech.edu/docs/T/T070260-00.pdf

[4] T. T. Lyons, M. R. Regehr and F. J. Raab: Appl. Opt. **39** (2000) 6761.

[3]FTP が使えなくても、granite を捜索すれば見つかる。