

通常測定と弱測定での QPDによる位置検出の量子限界

道村唯太

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 博士2年

2013年7月1日

1 はじめに

QPD(quadrant photodetector; 四分割光検出器)を用いてレーザービームの位置ずれを検出する際に、散乱雑音による位置検出限界がどの程度かを通常測定と弱測定の場合で計算した。

2 Hermite-Gaussian モード

理想的なレーザー光は進行方向に垂直な面での強度分布を見ると、Gauss分布をしている。ここではまず、このGaussianビームについておさらいしておく。以下では、z軸方向に進むビームを考える。単純化のため、x軸方向の電場分布のみを考え、y軸方向は既に積分されているものとする。また、位相は面倒なので省略する。

2.1 表式

HG00モード、HG10モードの電場のx軸分布は下記のように書ける [1]。

$$U_{00}(x) = \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \quad (2.1)$$

$$U_{10}(x) = \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{1/4} \frac{2x}{w} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \quad (2.2)$$

ここで w はビーム径である。

2.2 ビームの平行移動

HG00モードがx軸方向に δx だけ平行移動したものは、 $\delta x/w \ll 1$ のとき、下記のようにHG00モードとHG10モードの和で表すことができる [2, 3]。

$$\begin{aligned} U_{00}(x - \delta x) &= \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{(x - \delta x)^2}{w^2}\right) \\ &\simeq \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \exp\left(\frac{2x\delta x}{w^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \left(\frac{2}{\pi w^2}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{x^2}{w^2}\right) \left(1 + \frac{2x\delta x}{w^2}\right) \\
&= U_{00}(x) + \frac{\delta x}{w} U_{10}(x)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

これを図示すると図 1 のようになる。平行移動した HG00 モード (赤色実線) が近似的に、平行移動していない HG00 モード (赤色破線) と HG10 モード (青色破線) の和で表せることがわかる。

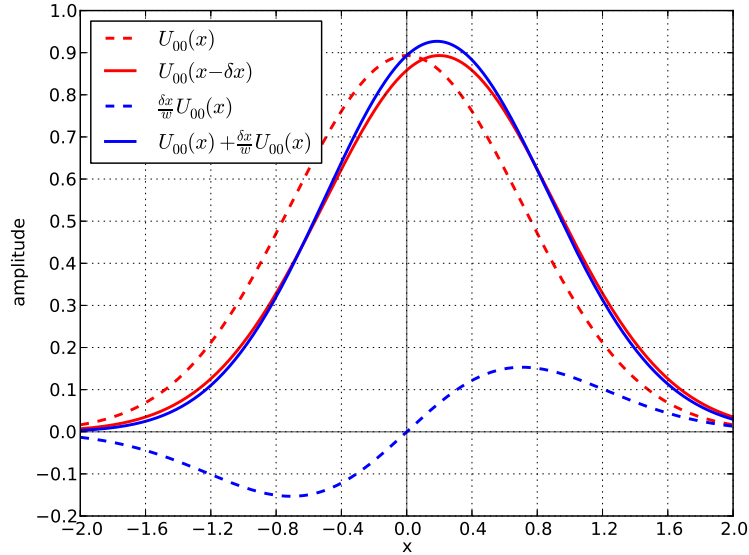


図 1: HG00 モードの平行移動を HG00 と HG10 の和で展開した様子。 $\delta x = 0.2$ 、 $w = 1$ とした。

3 通常の測定

3.1 セットアップ

図 2 のように、屈折による位置ずれ δx を QPD で検出するような系を考える。入射ビームは Gaussian ビームであり、光強度は $P_0 = E_0^2$ とする。なお、屈折がなかった時のビームの位置を QPD 上での x 軸の原点とする。

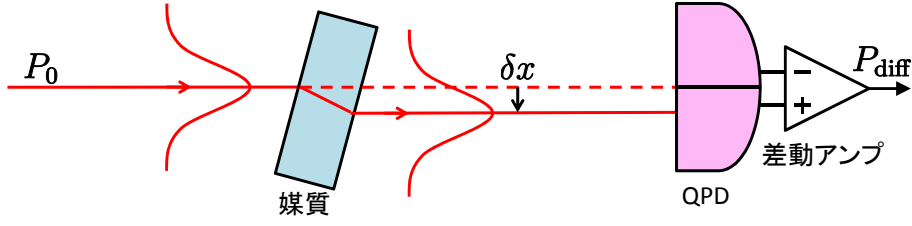


図 2: 通常の測定での QPD による位置ずれ検出のセットアップ

3.2 量子限界

入射ビームの電場は

$$E(x) = U_{00}(x)E_0 \quad (3.1)$$

と書くことができる。QPD 上ではビームが x 軸方向に δx だけ平行移動しているの、QPD 上での強度分布は式 (2.3) より

$$\begin{aligned} P(x) &= E_0^2 U_{00}^2(x - \delta x) \\ &\simeq P_0 \left(U_{00}(x) + \frac{\delta x}{w} U_{10}(x) \right)^2 \\ &= P_0 \left(U_{00}^2(x) + \left(\frac{\delta x}{w} \right)^2 U_{10}^2(x) + \frac{2\delta x}{w} U_{00}(x) U_{10}(x) \right) \end{aligned} \quad (3.2)$$

したがって、 $x > 0$ の領域と $x < 0$ の領域の強度の差は

$$\begin{aligned} P_{\text{diff}} &= P(x > 0) - P(x < 0) \\ &= \frac{2\delta x}{w} P_0 \int_0^\infty dx U_{00}(x) U_{10}(x) \\ &= \frac{2\delta x}{w} P_0 \int_0^\infty dx \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \frac{2x}{w} \exp\left(-\frac{2x^2}{w^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{P_0 \delta x}{w} \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。 P_{diff} が δx に比例しているため、これをビームの位置ずれ検出に用いることができる。 P_{diff} から δx へのキャリブレーション係数はしたがって、

$$\frac{\partial P_{\text{diff}}}{\partial(\delta x)} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{P_0}{w} \quad (3.4)$$

となる。

ところで、散射雑音とは光検出器に届く光子の数が量子的に揺らぐことによって生じる雑音であり、Heisenberg の不確定性原理に由来する量子雑音の 1 つである。散射雑音は白色雑音であり、光検出器に流れる電流を I_0 とすると、そのパワースペクトル密度は

$$\delta I_{\text{shot}} = \sqrt{2eI_0} \quad (\text{単位は } \text{A}/\sqrt{\text{Hz}}) \quad (3.5)$$

と表すことができる [4]。この式を量子効率 η を用いて表すことを考える。量子効率の定義は入射光子 1 つあたりの出力電子数なので、光検出器に届く光の強度を P_{PD} とすると

$$\eta \equiv \frac{I_0/e}{P_0/(h\nu)} \quad (3.6)$$

と書けるので

$$I_0 = \frac{e}{h\nu} \eta P_0 \quad (3.7)$$

となる。ここで e は電荷素量、 h は Planck 定数、 ν はレーザー周波数である。

これを式 (3.5) に代入すると、散射雑音に起因する QPD による光強度変化の検出限界は

$$\delta P_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{2h\nu P_0}{\eta}} \quad (3.8)$$

となることがわかる。以下では量子効率 $\eta = 1$ とする。

以上より、散射雑音による位置の検出限界は

$$\begin{aligned} \delta x_{\text{shot}} &= \delta P_{\text{shot}} \left(\frac{\partial P_{\text{diff}}}{\partial(\delta x)} \right)^{-1} \\ &= \sqrt{\frac{\pi h\nu w^2}{4P_0}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{4}} \frac{w}{\sqrt{N_0}} \quad (3.10)$$

となる。ここで $N_0 = P_0/(h\nu)$ は QPD に入射する光子数である。

ちなみに [5, 6] によると

$$\delta x_{\text{shot}} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{w}{\sqrt{N_0}} \quad (3.11)$$

なので計算が $\sqrt{2}$ 合わない。片側スペクトルかどうかの問題？

4 弱測定

4.1 セットアップ

図 3 のように複屈折で生じる H 偏光と V 偏光の QPD 上での位置の差 δx を測定する系を考える。偏光板 1 で複屈折媒質に入射する H 偏光成分と V 偏光成分は同じ強度になるよう調整されており (事前選択)、強度はそれぞれ $P_0 = E_0^2$ になっているとする。また、事後選択用の偏光板 2 の回転角を θ とする。 $\theta = \pi/2$ のとき、偏光板 1 と偏光板 2 は直交している。なお、H 偏光のビームの位置を QPD 上での x 軸の原点とする。

単純化してはいるものの、やっていることは [7] や [8] などと同様の測定セットアップになっているはずである。

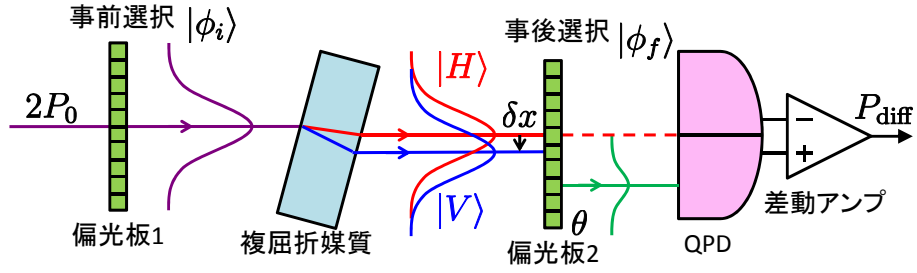


図 3: 弱測定での QPD による位置ずれ検出のセットアップ

4.2 弱測定での量子限界

H 偏光は QPD 上で中心に来ており、V 偏光が δx だけ平行移動しているとするとき QPD 上での電場の x 軸分布は

$$E(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right)U_{00}(x)E_0 + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)U_{00}(x - \delta x)E_0 \quad (4.1)$$

$$= aU_{00}(x)E_0 + bU_{00}(x - \delta x)E_0 \quad (4.2)$$

となる。ここで $\cos\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \equiv a$ 、 $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \equiv b$ とした。

強度分布 $P(x) = E^2(x)$ をプロットしたものが図 4 である。赤線と青線はそれぞれ事後選択前の H 偏光、V 偏光の強度分布、緑からピンクの線がそれぞれの θ における事後選択後 QPD 上での強度分布 $P(x)$ を表している。 θ を $\pi/2$ に近づけるほど、輝度中心の 0 からのずれが大きくなっていることがわかる。

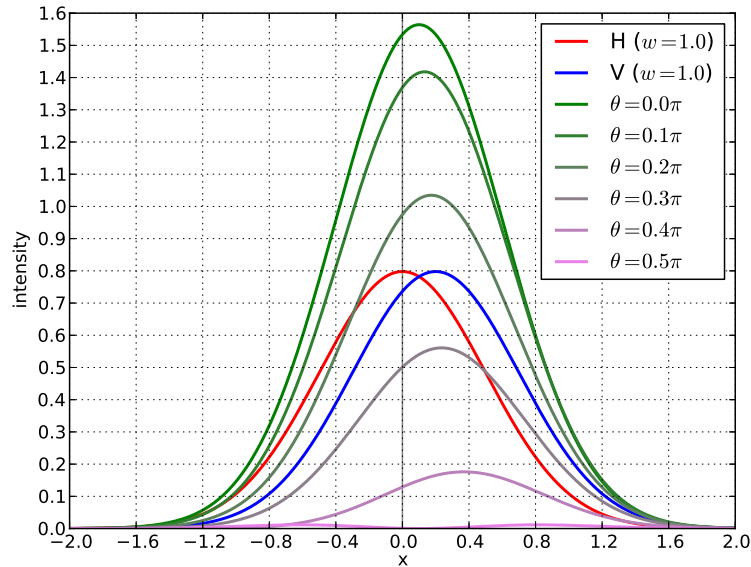


図 4: QPD 上での強度分布。 $\delta x = 0.2$ 、 $w = 1$ とした。

QPD に入射する全パワーは

$$\begin{aligned}
P_{\text{tot}} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx E^2(x) \\
&= E_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} dx [a^2 U_{00}^2(x) + b^2 U_{00}^2(x - \delta x) + 2ab U_{00}(x) U_{00}(x - \delta x)] \\
&= P_0 \left[a^2 + b^2 + 2ab \int_{-\infty}^{\infty} dx \sqrt{\frac{2}{\pi w^2}} \exp\left(-\frac{x^2 + (x - \delta x)^2}{w^2}\right) \right] \\
&= P_0 \left[a^2 + b^2 + 2ab \exp\left(-\frac{\delta x^2}{2w^2}\right) \right] \tag{4.3}
\end{aligned}$$

$$\simeq (a + b)^2 P_0 \tag{4.4}$$

である。最後の変形には $\delta x/w \ll 1$ を用いた。

一方、 $x > 0$ の領域と $x < 0$ の領域の強度の差は、QPD 上での強度分布が近似的に

$$\begin{aligned}
P(x) &\simeq \left[a U_{00}(x) E_0 + b \left(U_{00}(x) + \frac{\delta x}{w} U_{10}(x) \right) E_0 \right]^2 \\
&= P_0 \left((a + b)^2 U_{00}^2(x) + \left(\frac{b \delta x}{w} \right)^2 U_{10}^2(x) + \frac{2(a + b) b \delta x}{w} U_{00}(x) U_{10}(x) \right) \tag{4.5}
\end{aligned}$$

と表せることから、前章と同様に計算して

$$P_{\text{diff}} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{(a + b) b P_0 \delta x}{w} \tag{4.6}$$

したがって

$$\frac{\partial P_{\text{diff}}}{\partial(\delta x)} = \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{(a + b) b P_0}{w} \tag{4.7}$$

$$\delta P_{\text{shot}} = \sqrt{2 h \nu (a + b)^2 P_0} \tag{4.8}$$

となるので、散射雑音による位置ずれの検出限界は

$$\begin{aligned}
\delta x_{\text{shot}} &= \delta P_{\text{shot}} \left(\frac{\partial P_{\text{diff}}}{\partial(\delta x)} \right)^{-1} \\
&= \sqrt{\frac{\pi h \nu w^2}{4 P_0}} \frac{1}{b} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

4.3 通常の測定との比

H 偏光をなくし、事後選択もなくすと前章と同じ測定となる。QPD に入射する全パワー P_{tot} 、キャリブレーション係数 $\frac{\partial P_{\text{diff}}}{\partial(\delta x)}$ 、散射雑音による位置ずれの検出限界 δx_{shot} の通常の測定と弱測定の場合の比はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\sqrt{P_{\text{tot}}^w} / \sqrt{P_{\text{tot}}^c} &= a + b \\
&= \sqrt{2} \cos \theta \tag{4.10} \\
\frac{\partial P_{\text{diff}}^w}{\partial(\delta x)} / \frac{\partial P_{\text{diff}}^c}{\partial(\delta x)} &= (a + b) b
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \delta x_{\text{shot}}^w / \delta x_{\text{shot}}^c &= \frac{1}{b} \\ &= \frac{1}{\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)} \end{aligned} \quad (4.12)$$

となる。ここで w、c は弱測定と通常の測定を区別するための記号である。

各値の前章の場合と弱測定の場合の比をプロットすると図 5 のようになる。図 4 で θ を $\pi/2$ に近づけると輝度中心が δx よりも大きくずれることがわかったが、QPD に入射するパワー P_{tot} が減るため、キャリブレーション係数 $\frac{\partial P_{\text{diff}}}{\partial(\delta x)}$ は必ずしも大きくはならない。キャリブレーション係数が最大になるのは $\theta = \pi/8$ の時である。散射雑音による位置ずれの検出限界 δx_{shot} が最小になるのは $\theta = \pi/4$ の時で、この時前章の通常の測定と一致する。つまり、弱測定によって δx_{shot} が小さくはならない。

なお、H 偏光と V 偏光の強度をそれぞれ P_0 としているため、用いている全強度は前章の 2 倍になっていることを付記しておく。

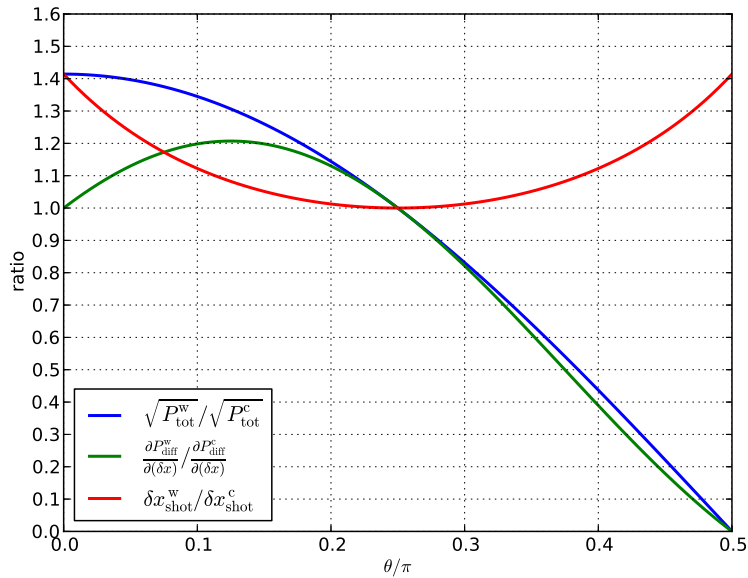


図 5: 弱測定と前章の通常の測定の比

4.4 輝度中心

ここまでの計算だと弱測定による信号増幅はない感じがする。[8] などを見ると、QPD で信号取得はしているものの、キャリブレーションは輝度中心のずれを CCD で見に行っているようだ。そこで輝度中心を計算してみる。 $\delta x/w$ 依存性が重要になってくるので、ここでは近似を使わずに求めると、輝度中心の位置は

$$x_m = \frac{1}{P_{\text{tot}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x P(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{P_0}{P_{\text{tot}}} \int_{-\infty}^{\infty} dx x [a^2 U_{00}^2(x) + b^2 U_{00}^2(x - \delta x) + 2ab U_{00}(x) U_{00}(x - \delta x)] \\
&= \frac{P_0}{P_{\text{tot}}} \left[b^2 \delta x + ab \delta x \exp\left(-\frac{\delta x^2}{2w^2}\right) \right] \\
&= \frac{b^2 + ab \exp\left(-\frac{\delta x^2}{2w^2}\right)}{a^2 + b^2 + 2ab \exp\left(-\frac{\delta x^2}{2w^2}\right)} \delta x
\end{aligned} \tag{4.13}$$

となる。ここで P_{tot} には近似のない式 (4.3) を代入した。

増幅率 $x_m/\delta x$ をプロットすると図 6 のようになる。事後選択で θ を $\pi/2$ に近づけていくと x_m は大きくなっていくが、ある所で最大になって $\theta = \pi/2$ では元に戻ってしまう。増幅率の限界は $\delta x/w$ に依存しており、これが小さいほど増幅率の最大値が大きい。増幅率の限界があるのは、輝度中心の位置が V 偏光の電場分布の外には出られないことから明らかである。 δx や θ を固定すると、増幅率が 1 を超えた領域ではビーム径 w を大きくするほど増幅率が高くなるのがわかるが、これは [8] などの実験で用いられている。

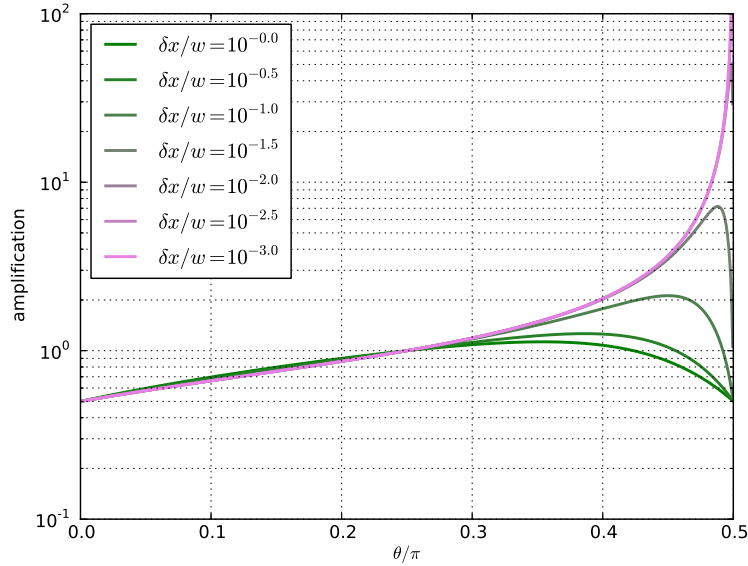


図 6: 弱測定による増幅率。輝度中心の位置 x_m と V 偏光の位置ずれ δx の比をプロットしている。

5 結論

弱測定では事後選択で光の大部分を捨ててしまっているため、散射雑音的には得をしなそうである。しかし、CCD で輝度中心の位置ずれを測定するときなど、空間分解能が必要な測定では役に立ちそうである。これは弱値増幅をしても統計誤差は改善しないのに対し、系統誤差は改善し得るとした [9] の計算結果とも合う。

[8] などの実験で信号増幅が行われているように見えるのは、位置ずれを QPD を使って直接キャリアブレーションしているのではなく、CCD を使って輝度中心の移動量からキャリアブレーションしているためだと考えられる。

参考文献

- [1] H. Kogelnik and T. Li: [Appl. Opt. 5, 1550 \(1966\)](#).
Laser Beams and Resonators
- [2] 朽久保邦治: [東京大学 修士論文 \(1996\)](#).
「Fabry-Perot 共振器のアラインメント制御」
- [3] E. Morrison *et al.*: [Appl. Opt. 33, 5041 \(1994\)](#).
Automatic alignment of optical interferometers
- [4] 三尾典克: 『重力波をとらえる』(中村卓, 三尾典克, 大橋正健 編著, 京都大学学術出版会, 1998)
p.210.
- [5] C. Fabre *et al.*: [Opt. Lett. 25, 76 \(2000\)](#).
Quantum limits in the measurement of very small displacements in optical images
- [6] N. Treps *et al.*: [Phys. Rev. Lett. 88, 203601 \(2002\)](#).
Surpassing the Standard Quantum Limit for Optical Imaging Using Nonclassical Multimode Light
- [7] O. Hosten and P. Kwiat: [Science 319, 787 \(2008\)](#).
Observation of the Spin Hall Effect of Light via Weak Measurements
- [8] P. B. Dixon *et al.*: [Phys. Rev. Lett. 102, 173601 \(2009\)](#).
Ultrasensitive Beam Deflection Measurement via Interferometric Weak Value Amplification
- [9] J. Lee and I. Tsutsui: [arXiv:1305.2721](#)
Uncertainty of Weak Measurement and Merit of Amplification