

Notes on the Pound-Drever-Hall technique

道村唯太

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 修士1年

2010年12月17日*

1 はじめに

Pound-Drever-Hall 法 [1] の信号というと共振付近の “0 から上がって下がって 0 に戻る” というきれいな図しか見たことがなかったが、実際に実験してみると、そうはならなかったりする ([1] の Fig.2 のように)。Optickle のシミュレーションを始めて、これは何か変なことが起こっているのではなく、sideband の共振だと知った。復調 phase によってはこの sideband の共振によって生じる PDH 信号が carrier のそれだと勘違いしてしまうということが起こったので、今のうちに簡単にまとめておく。PDH 法の入門は [2]。詳しい式の導出は [3] など。

以下ではまず PDH 信号の定量的な大きさを導き、この式による計算値と Optickle によるシミュレーション結果を比較してみる。

2 Pound-Drever-Hall 法

2.1 Fabry-Perot 共振器の反射率と透過率

フロントミラー、エンドミラーの振幅反射率、振幅透過率をそれぞれ r_1 、 r_2 、 t_1 、 t_2 とする。Fabry-Perot 共振器の振幅反射率は

$$r(\phi) = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{2i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\phi}} \quad (2.1)$$

振幅透過率は

$$t(\phi) = \frac{t_1 t_2 e^{i\phi}}{1 - r_1 r_2 e^{2i\phi}} \quad (2.2)$$

これらはそれぞれレーザーの周波数 ω に依存する。 ϕ は光が共振器長 L だけ進むときの位相変化で、

$$\phi = \frac{\omega L}{c} \quad (2.3)$$

*2010年12月21日: I phase、Q phase、feedback 符号に関する注を追加。
2011年1月24日: 式 (2.5) の打ち間違いを修正。

2.2 位相変調

PDH 法では入射光に位相変調をかける。

$$\begin{aligned} E &= E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin \Omega t)} \\ &\simeq E_0 [J_0(\beta) e^{i\omega t} + J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t}] \end{aligned} \quad (2.4)$$

ここで β は変調指数、 Ω は変調周波数、 J_n は第一種 Bessel 関数。 $\beta < 1$ として 1 次の sideband だけ考える。

2.3 透過光 (共振ピーク)

透過光強度は従って、

$$\begin{aligned} P_t &= |E_t|^2 \\ &= E_0^2 \left| J_0(\beta) t(\omega) e^{i\omega t} + J_1(\beta) t(\omega + \Omega) e^{i(\omega + \Omega)t} - J_1(\beta) t(\omega - \Omega) e^{i(\omega - \Omega)t} \right|^2 \\ &= P_0 \left[|J_0(\beta) t(\omega)|^2 + |J_1(\beta) t(\omega + \Omega)|^2 + |J_1(\beta) t(\omega - \Omega)|^2 \right] \\ &\quad + 2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \operatorname{Re}([t(\omega) t^*(\omega + \Omega) - t^*(\omega) t(\omega - \Omega)] e^{-i\Omega t}) \\ &\quad + (2\Omega \text{ terms}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

ここで入射光の全パワー $|E_0|^2 \equiv P_0$ とした。上式第 1 項が DC 成分である。

2.4 反射光 (PDH 信号)

反射光強度も同様に計算できるが、今度は変調周波数成分だけを取り出すと

$$P_r^{(\text{RF})} = 2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \operatorname{Re}([r(\omega) r^*(\omega + \Omega) - r^*(\omega) r(\omega - \Omega)] e^{-i\Omega t}) \quad (2.6)$$

これを in phase (レーザーの位相変調と同じ $\sin \Omega t$ ¹) で復調²したのが PDH 信号であり、

$$P_{\text{demod}}^{\text{I}} = P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \operatorname{Im}(r(\omega) r^*(\omega + \Omega) - r^*(\omega) r(\omega - \Omega)) \quad (2.7)$$

なお、quadrature phase で復調すると

$$P_{\text{demod}}^{\text{Q}} = P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) \operatorname{Re}(r(\omega) r^*(\omega + \Omega) - r^*(\omega) r(\omega - \Omega)) \quad (2.8)$$

2.5 共振付近での PDH 信号

carrier の共振付近 $\phi = n\pi + \delta\phi$ ($\delta\phi \ll 1$) では、 $r(\omega + \Omega) \simeq r^*(\omega - \Omega) \simeq r_s (\sim -1)$ となっていることを用いると式 (2.7) は

$$\begin{aligned} P_{\text{demod}}^{\text{I}} &\simeq 2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) r_s \operatorname{Im}(r(\omega)) \\ &= \frac{2P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2 r_s \sin(2\phi)}{1 + r_1^2 r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(2\phi)} \\ &\simeq \frac{4P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2 r_s}{(1 - r_1 r_2)^2} \delta\phi \end{aligned} \quad (2.9)$$

¹式 (2.6) が $P_r^{(\text{RF})} = 2P_{\text{demod}}^{\text{I}} \sin \Omega t + 2P_{\text{demod}}^{\text{Q}} \cos \Omega t$ と書けることからわかるように、ここでいう in phase は $P_r^{(\text{RF})}$ の in phase ではない (共振付近での PDH 信号の傾きを最大化する phase ではない)。しかし式として $P_{\text{demod}}^{\text{I}}$ を PDH 信号としている文献が多いので、ここでもそのように書く。4.1 節のグラフも参照。

²復調時に \sin をかけて DC 成分を取り出すと、元の係数の半分になる。 $A \sin \Omega t \times \sin \Omega t = (A - A \cos 2\Omega t)/2$

となり、PDH 信号は共振付近で $\delta\phi$ に比例した信号となっていることがわかる。

PDH 法では共振器長変動 δL とレーザー周波数の変動 $\delta\omega$ の区別がつかないが、仮に $\delta\omega = 0$ だとすると、

$$P_{\text{demod}}^{\text{I}} = \frac{8\pi P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2 r_s}{\lambda(1 - r_1 r_2)^2} \delta L \quad (2.10)$$

3 Fabry-Perot 共振器の AC 応答

これまでは Fabry-Perot 共振器が準静的な場合について考えてきたが、 δL が早く変動する場合には有効ではない。Fabry-Perot 共振器は 1 次のローパス特性を持っていて、それも考慮に入れると式 (2.10) は³

$$P_{\text{demod}}^{\text{I}}(f) = \frac{8\pi P_0 J_0(\beta) J_1(\beta) t_1^2 r_2 r_s}{\lambda(1 - r_1 r_2)^2} \frac{1}{1 + if/f_{\text{cp}}} \delta L(f) \quad (3.1)$$

ここで f は δL の変動周波数で、 f_{cp} はカットオフ周波数 (cavity pole)。

光の平均滞在時間は finesse

$$\mathcal{F} = \frac{\pi\sqrt{r_1 r_2}}{1 - r_1 r_2} \quad (3.2)$$

を用いて

$$\tau = \frac{2L\mathcal{F}}{\pi c} \quad (3.3)$$

と書けるので、Fabry-Perot 共振器のカットオフ周波数は

$$f_{\text{cp}} = \frac{1}{2\pi\tau} = \frac{c}{4L\mathcal{F}} \quad (3.4)$$

ちなみに、これは共振の半値「半」幅 ($f_{\text{FWHM}}/2$) に等しい。

4 Optickle との比較

最後に、Optickle によるシミュレーション結果と上で導いた式を比較してみる。

Optickle は MATLAB 上で動く干渉計シミュレーションツールである。

パラメータとしては DPF BBM のものを用いた。すなわち、レーザー波長 $\lambda = 1064 \text{ nm}$ 、共振器長 $L = 30 \text{ cm}$ 、各ミラーの反射率 $r_1 = \sqrt{0.98}$ 、 $r_2 = \sqrt{0.99}$ 、変調周波数 $\Omega/(2\pi) = 15 \text{ MHz}$ 。

入射光強度、変調指数はそれぞれ便宜的に $P_0 = 1 \text{ W}$ 、 $\beta = 1 \text{ rad}$ とした。

4.1 Pound-Drever-Hall 信号

透過光 PD の DC で見る共振ピークの形は式 (2.5) の第 1 項で計算でき、反射光 RF PD で見る PDH 信号は式 (2.7) で計算できる。Optickle でエンドミラーを sweep した結果と比較したものが図 1 である。シミュレーション結果は点で、式を用いた計算結果を線で表している。いい感じ。

図からわかるように、feedback 時の符号を間違えると sideband の方にロックがかかってしまい得ることに注意。TEM₀₀ の高い透過光共振ピークが立っているのに、なぜか“弱い TEM₀₀”にロックがかかってしまうということが実際にあったが、符号を反転させたらうまくいった。“弱い TEM₀₀”の正体は sideband だったのだと思われる。

³ そのうちちゃんと書く。ローパス特性の導出は [4] など。

また、Q phase で復調すると、PDH 信号は式 (2.8) になって、結果は図 2 のようになる。carrier の共振部分での PDH 信号の傾きが I と Q の間で反転してることからわかるように、I と Q の間に carrier の PDH 信号の傾きが 0 になる phase が存在する (PDH 信号を最大化する phase から 90° ずれた phase。脚注 1 参照)。このような phase では sideband の PDH 信号が目立って carrier のものだと勘違いし得るので注意。

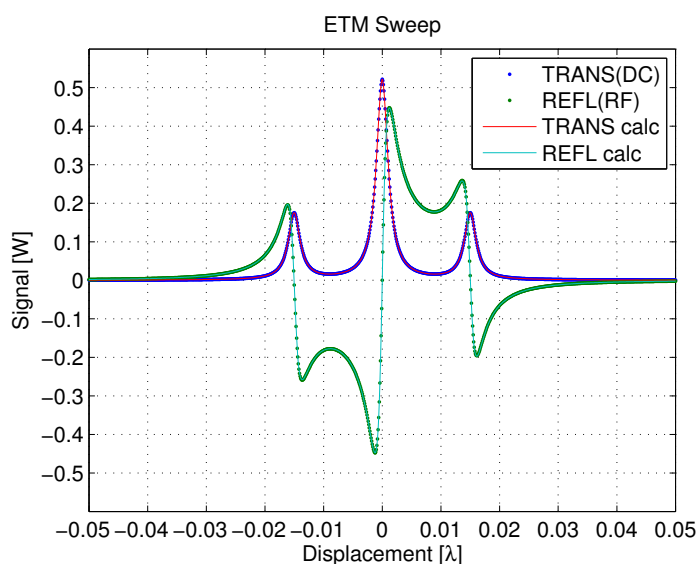


図 1: Fabry-Perot 共振器の透過光強度と PDH 信号 (I phase)

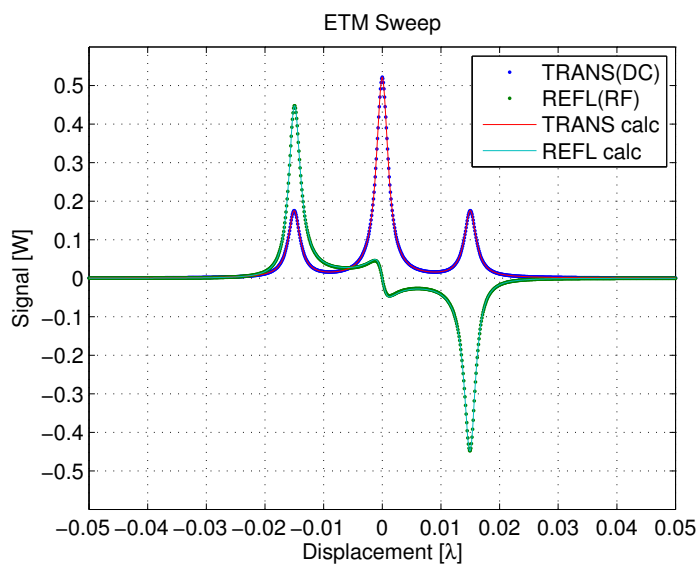


図 2: Fabry-Perot 共振器の透過光強度と PDH 信号 (Q phase)

4.2 tickle

Optickle では鏡などの光学素子を任意の周波数で tickle することにより、あるポートにどのくらいの応答が出るかシミュレートすることができる。エンドミラーを各周波数で tickle し、共振付近での PDH 信号の応答を調べた結果が図 3 である。式 (3.1) から計算した結果といい感じで合っている。なお、sideband の反射率 $r_s = -1$ として計算した。

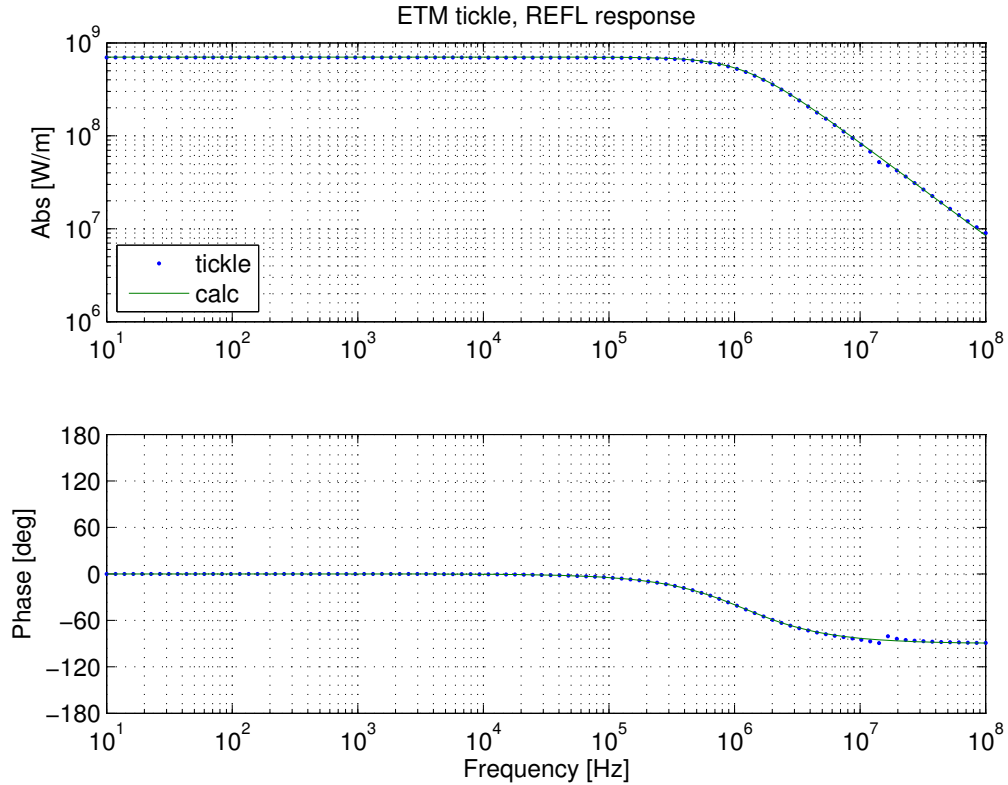


図 3: エンドミラーの位置変動に対する PDH 信号

参考文献

- [1] R. W. P. Drever, J. L. Hall *et al.*: Appl. Phys. B **31** (1983) 97.
- [2] E. D. Black: Am. J. Phys. **69** (2001) 79.
- [3] 和泉究: 東京大学 修士論文 (2009).
- [4] 麻生洋一: 東京大学 修士論文 (2002).