非線形領域で制御したときの非線形項の雑音への影響

道村唯太
東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 修士 1 年

2011 年 2 月 25 日*

1　はじめに

通常 Pound-Drever-Hall 法によって鏡の変位を制御するときは、鏡の変位に対してエラー信号が線形になる領域を使って制御する。しかし、detune することにより線形領域から外れた場合は、非線形項の効果が現れてくる。これが雑音にどの程度影響を与えるか問題になったので、まとめておく。

以下ではまず、$x^2(t)$ のような項のパワースペクトルの表式を求め、実際にこの表式が正しいか時系列データを使って確認してみる。そして実際に、LCGT の signal recycling cavity 長 (SRCL) 制御、arm cavity 長の差動変動 (DARM) 制御における非線形項の影響について計算した結果を示す。

表式の導出に関しては、[1] を参考にした。

2　非線形項のパワースペクトル

線形領域で制御する際は入力 $v(t)$ と出力 $u(t)$ の間に $u(t) = av(t)$ の関係があるとして計算していくが、非線形項が大きくなる場合は次の 2 乗の項を考えて $u(t) = av(t) + bv^2(t)$ としなければならない。

ここでは

$$u(t) = av^2(t) \tag{2.1}$$

の関係がある 2 乗検波器を考え、この前後におけるパワースペクトルの関係を導く。この際に、入力としてガウス雑音を仮定する。

2.1　ガウス雑音

雑音 $v(t)$ の確率分布関数 $P(v)$ がガウス関数で表されるとき、$v(t)$ はガウス雑音であるという。$v(t)$ の平均値が 0 であるとき、その分散は

$$\sigma_v^2 = E[v(t)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} v^2 P(v) \mathrm{d}v = \langle v^2 \rangle \tag{2.2}$$

となる。

*2011 年 3 月 17 日: MATLAB への実装の仕方を変更 (式 (2.6) の変更)。DARM 制御についての計算を追加。

2.2　2 乗検波後のパワースペクトル

不規則変数 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4$ の平均値がいずれも 0 で、分散がいずれも σ であり、その相互相関が

$$\langle x_1 x_2\rangle = \langle x_2 x_3\rangle = \langle x_3 x_4\rangle = \langle x_4 x_1\rangle$$

である結合ガウス過程では、

$$\langle x_1(t)x_2(t)x_2(t)x_3(t)\rangle = \langle x_1x_2\rangle\langle x_3x_4\rangle + \langle x_1x_3\rangle\langle x_2x_4\rangle + \langle x_1x_4\rangle\langle x_2x_3\rangle \tag{2.3}$$

が成り立つらしい。

さて、この式 (2.3) を使うと 2 乗検波出力 $u(t)$ の自己相関関数は

$$\begin{aligned}
C_u(\tau) &= \langle u(t)u(t+\tau)\rangle \\
&= \langle a^2 v(t)v(t)v(t+\tau)v(t+\tau)\rangle \\
&= a^2\langle v(t)v(t)\rangle\langle v(t+\tau)v(t+\tau)\rangle + 2a^2\langle v(t)v(t+\tau)\rangle^2 \\
&= a^2\sigma_v^4 + 2a^2 C_v^2(\tau)
\end{aligned}$$

となる。

したがって、自己相関関数とパワースペクトルの関係 (Wiener-Khintchine の定理) を使えば $u(t)$ のパワースペクトルは

$$\begin{aligned}
S_u(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_v(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{a^2\sigma_v^4}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau + \frac{2a^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} C_v^2(\tau)e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= a^2\sigma_v^4\delta(\omega) + \frac{2a^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega')e^{i\omega'\tau}\mathrm{d}\omega'\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega'')e^{i\omega''\tau}\mathrm{d}\omega''\right]e^{-i\omega\tau}\mathrm{d}\tau \\
&= a^2\sigma_v^4\delta(\omega) + 2a^2\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega')S_v(\omega'')\delta(\omega'+\omega''-\omega)\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\omega'' \\
&= a^2\sigma_v^4\delta(\omega) + 2a^2\int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega')S_v(\omega'-\omega)\mathrm{d}\omega' \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

となる。

2.3　間違った表式

$u(t)$ のフーリエ変換 $U(\omega)$ が $v(t)$ のフーリエ変換 $V(\omega)$ の畳み込みで表せることと、

$$S_v(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{2\pi|V_T(\omega)|^2}{T}$$

から

$$S_u(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{2\pi|U_T(\omega)|^2}{T}$$

となりそうなことから強引に変形していくと、離散で考えて

$$\sqrt{S_u(\omega)} = a\sqrt{\frac{f_\mathrm{s}}{N}}\sum\sqrt{S_u(\omega')}\sqrt{S_u(\omega'-\omega)} \tag{WRONG}$$

のような表式が求まるが、これは間違いのようである。平方根を取った $\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ の畳み込みではなく、式 (2.4) のように m^2/Hz の畳み込みを考えなければならない。

2.4　時系列データを用いた確認

ここでは実際に時系列データを用いて、式 (2.4) が正しいことを確認する。

その前に、式 (2.4) は両側パワースペクトルの表式であるから、片側パワースペクトルでの表式を求めておこう。$S(-\omega)=S(\omega)$ に注意して S_v の中の周波数が全て正になるように変形していくと

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} S_v(\omega')S_v(\omega'-\omega)\mathrm{d}\omega' &= \int_{-\infty}^{0} S_v(\omega')S_v(\omega'-\omega)\mathrm{d}\omega' + \int_{0}^{\omega} S_v(\omega')S_v(\omega'-\omega)\mathrm{d}\omega' + \int_{\omega}^{\infty} S_v(\omega')S_v(\omega'-\omega)\mathrm{d}\omega' \\ &= \int_{0}^{\infty} S_v(\omega')S_v(\omega'+\omega)\mathrm{d}\omega' + \int_{0}^{\omega} S_v(\omega')S_v(\omega-\omega')\mathrm{d}\omega' + \int_{0}^{\infty} S_v(\omega'+\omega)S_v(\omega')\mathrm{d}\omega' \\ &= \int_{0}^{\omega} S_v(\omega')S_v(\omega-\omega')\mathrm{d}\omega' + 2\int_{0}^{\infty} S_v(\omega')S_v(\omega+\omega')\mathrm{d}\omega'\end{aligned}$$

片側パワースペクトル $G(f)=4\pi S(\omega)$ に注意すると式 (2.4) は

$$G_u(f) = 4\pi a^2\sigma_v^4\delta(f) + a^2\int_0^f G_v(f')G_v(f-f')\mathrm{d}f' + 2a^2\int_0^\infty G_v(f')G_v(f+f')\mathrm{d}f' \tag{2.5}$$

となる。

第 1 項は DC 項を表していて、通常パワースペクトルを 0Hz までプロットしないので気にしなくてよい。2 つの正弦波が掛け合わされると、2 つの周波数の和と差の周波数の成分が出てくるが、第 2 項は和が f になる up conversion の効果を表わしており、第 3 項は差が f になる down conversion の効果を表している。我々が通常扱う雑音は高周波で小さくなるため、特に気になるのは up conversion の項である。

さて、図 1 は時系列データ $u(t)=av^2(t)$ から直接求めたスペクトル (緑) と、式 (2.5) を用いて、$G_v(f)$ から計算したスペクトル (赤) を比較したものである。確かに、よく一致していることが確認できる。

なお、$v(t)$ としてはガウス型白色雑音に、干渉計ノイズに似たような形のフィルタをかけたものを用い、単位は m とし、$a=10^9\,\mathrm{m}^{-1}$ とした。

また、実際に MATLAB 上で用いた計算式は

$$G_u^{\mathrm{calc}}(j) = a^2[\mathrm{upconv}(j) + 2\mathrm{downconv}(j)]df \tag{2.6}$$

upconv(j) は $\texttt{conv}(G_v, G_v)$ の $j-1$ 番目の要素 ($j=1$ では upconv$(1)=0$)

downconv(j) は $\texttt{conv}(G_v, \texttt{fliplr}(G_v))$ の $N+j$ 番目の要素 ($j=N$ では upconv$(N)=0$)

である[1]。ここで df はスペクトルの帯域で、隣り合う周波数点の間隔である。

[1] 3 月 17 日の変更前は $G_u^{\mathrm{calc}}(j) = a^2\sum_{k=1}^{n} G_v(k)\left(G_v(j-k)+2G_v(j+k)\right)df$ としていた。ここで n は積分範囲であり、十分大きくする必要があるが、計算時間の関係で $n=100$ としていた。変更後は MATLAB の組み込み関数 conv を使うことで高速化している。conv の仕様については http://www.mathworks.com/help/techdoc/ref/conv.html を参照。変更前と後で結果のスペクトルは当然ほとんど変わらないが、スペクトルの図も更新してある。

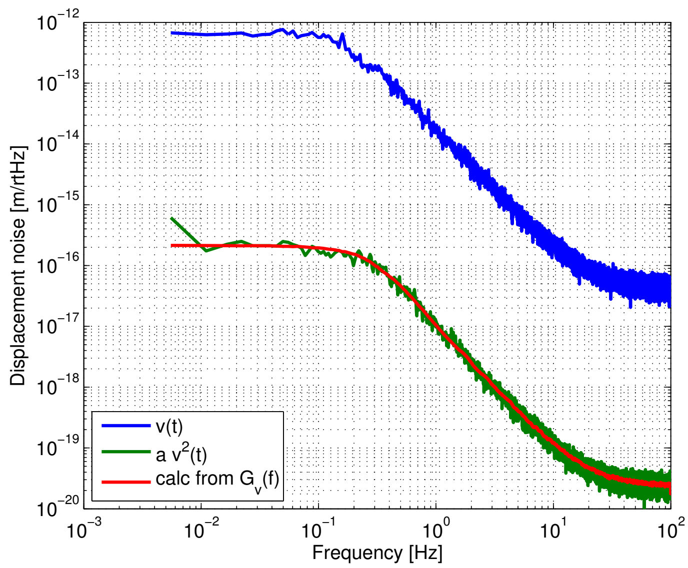

図 1: $v(t)$ と $av^2(t)$ のスペクトル

3　LCGT の signal recycling cavity 長制御

LCGT では SRC を detune するが、非線形項の影響がどの程度なのかの計算が必要になった。鏡の変位を $x(t)$ と置くと、PDH 信号は $x^2(t)$ の項まで考えて

$$y(t) = \alpha x(t) + \beta x^2(t)$$

のようになり、α[W/m] で較正すると変位のエラー信号は

$$x_{\mathrm{e}}(t) = \frac{1}{\alpha} y(t) = x(t) + \frac{\beta}{\alpha} x^2(t)$$

となる。$\beta/\alpha \equiv a$ は LCGT では $10^8\,\mathrm{m}^{-1}$ 程度になると計算された。

式 (2.5) がここにも適用できるとすると、$x_{\mathrm{e}}(t)$ への $x^2(t)$ 項の効果が計算できる。その結果が図 2 である。青線は SRM の非制御時の変位スペクトルを表しており、SRM を懸架する Type-B SAS のスペクトル[2]とショットノイズ[3]の和である。緑線はフィードバック制御中の SRM の変位スペクトルであり、図 3 のように仮定した UGF 50 Hz の制御により $1/(1+G)$ されている。この緑線が $x(t)$ のスペクトルに対応し、このスペクトルから式 (2.5) を用いて計算した $ax^2(t)$ のスペクトルが赤線である。

スペクトルを見ると、$a = 10^9\,\mathrm{m}^{-1}$ としても赤が緑より小さくなっているため、LCGT の SRCL 制御では非線形項の雑音への影響は無視できると言える。

[2]高橋さん提供。
[3]麻生さんの計算で $2.9 \times 10^{-16}\,\mathrm{m}/\sqrt{\mathrm{Hz}}$ と求められた。

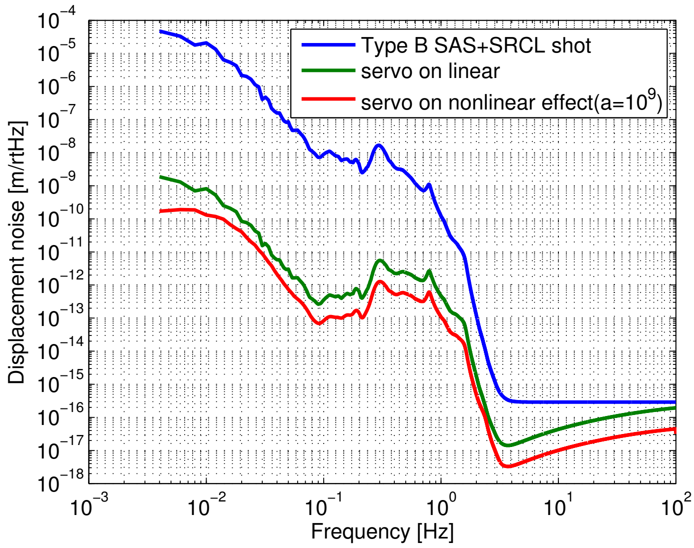

図 2: SRCL 制御における非線形項の影響

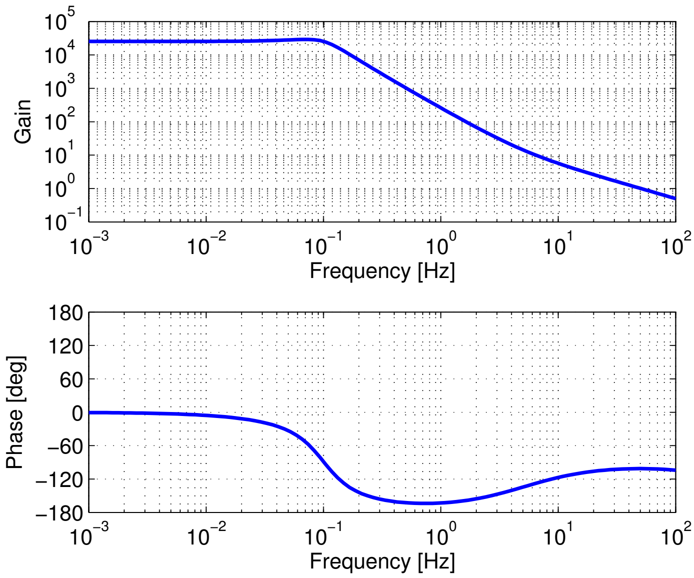

図 3: 仮定した SRCL 制御のオープンループ伝達関数

4 LCGT の arm cavity 長差動変動制御

LCGT の DARM 制御についても、同様の計算を行った。DARM では特に、バイオリンピークにサイドローブがどの程度生成されてしまうかが問題となった。

DARM のノイズスペクトルは図 4 のようになっており[4]、DARM 制御では $a = 1.5 \times 10^{12}\,\mathrm{m}^{-1}$ と計算された。

非線形項の効果を計算した結果が図 5 である。$a = 10^{13}\,\mathrm{m}^{-1}$ として計算したが、非線形項の影響が十分小さいことがわかる。また、サイドローブの影響も大きくない。

ただし、これは制御のオープンループ伝達関数を図 6 のように仮定したときの結果である。UGF 200Hz とし、非線形項の影響を小さく抑えるため、DC ゲインをブーストしている。

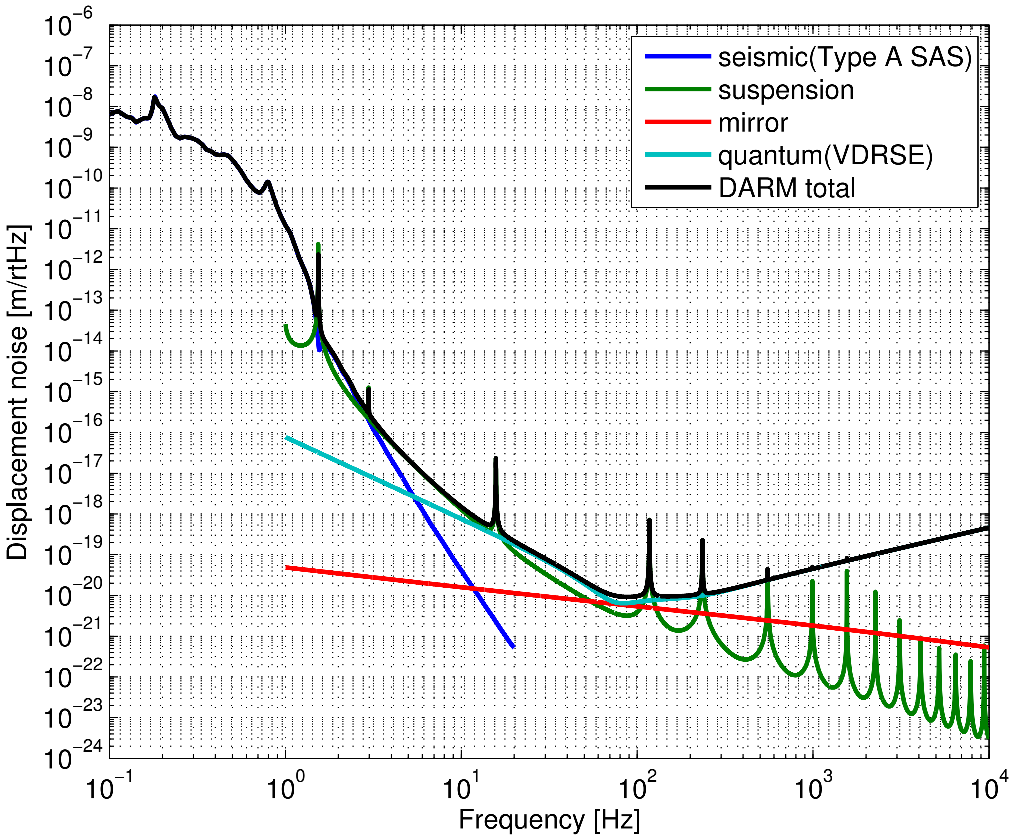

図 4: DARM のノイズスペクトル (LCGT の感度)

[4]ITM や ETM を懸架する Type-A SAS のスペクトルは高橋さん提供。その他のスペクトルは宗宮さんによる計算。

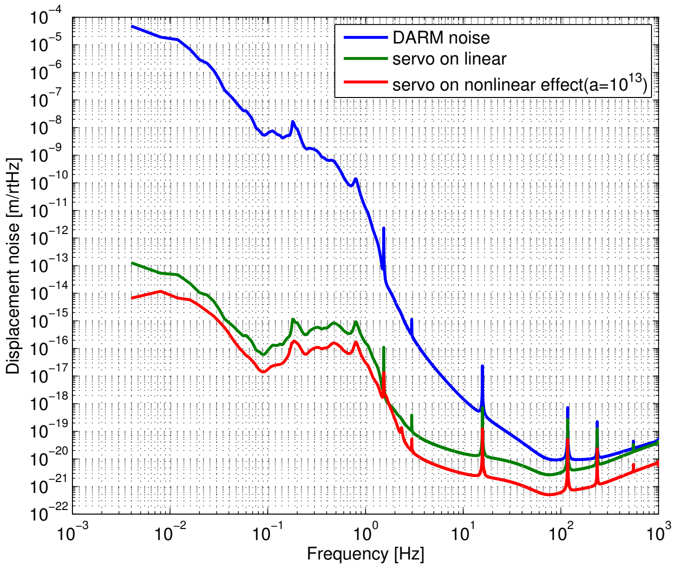

図 5: DARM 制御における非線形項の影響

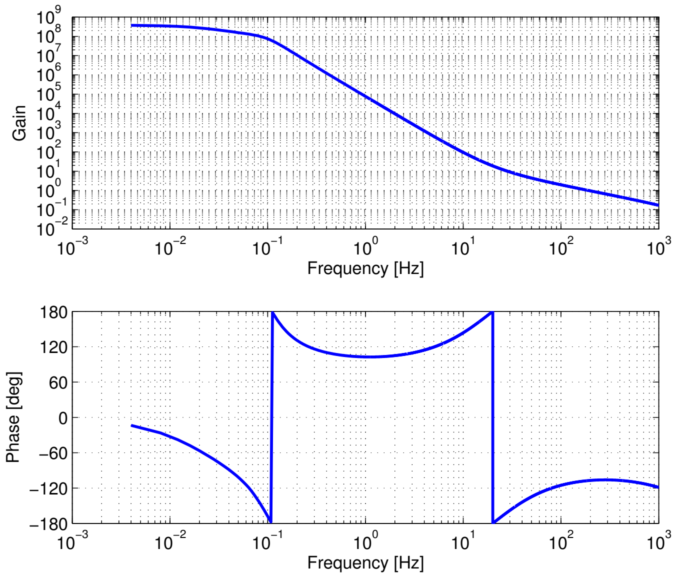

図 6: 仮定した DARM 制御のオープンループ伝達関数

参考文献

[1] 桜井捷海、霜田光一: 『応用エレクトロニクス』(裳華房、1984) 5.2 節.