

Fabry-Perot-Michelson 干渉計の長さ制御

道村唯太

東京大学大学院 理学系研究科 物理学専攻 修士 1 年

2011 年 2 月 3 日*

1 はじめに

Fabry-Perot-Michelson 干渉計の長さ制御については、[1] の第 4 章が式も追いやすく、わかりやすい。ここではその結果をまとめ、Optickle によるシミュレーション結果と比較する。

Fabry-Perot-Michelson 干渉計としては以下のものを想定している。具体的な値は計算時に用いる値であり、LCGT を意識している。

- レーザーの波長と出力は $\lambda = 1064 \text{ nm}$ 、 $P_0 = 82 \text{ W}$ 。
- 1 つの位相変調のみをかける pre-modulation 法を用いる。変調周波数 $\Omega/(2\pi) = 11.25 \text{ MHz}$ 、変調指数 $\gamma = 0.1 \text{ rad}$ 。
- BS はビームを等分し、ロス は BS に限らず一切考えない。
- BS から ITMX、ITMY までの距離はそれぞれ $l_x = 26.6481 \text{ m}$ 、 $l_y = 23.3171 \text{ m}$ 。すなわち Schnupp asymmetry $l_D = 3.3310 \text{ m} = \lambda_{\text{mod}}/8$ 。
- 2 つの腕の Fabry-Perot 共振器は同一。共振器長 $L_x = L_y = 3000 \text{ m}$ 。ITM、ETM の振幅反射率はそれぞれ $r_1 = \sqrt{0.996}$ 、 $r_2 = 1$ 。

2 長さ信号の取得

Fabry-Perot-Michelson 干渉計の長さ制御に必要な信号は、2 つの Fabry-Perot 共振器の共振器長の差動信号 $\delta L_D \equiv \delta L_x - \delta L_y$ および同相信号 $\delta L_C \equiv \delta L_x + \delta L_y$ 、そして BS から 2 つの ITM までの距離の差動信号 $\delta l_D \equiv \delta l_x - \delta l_y$ の 3 つである¹。これら 3 つの信号のうち、 δL_D と δL_C は ETM に返して 2 つの Fabry-Perot 共振器が carrier に対して常に共振するよう制御を行い、 δl_D は BS に返すことで antisymmetric port が dark fringe になるよう制御を行う。

δL_C と δl_D はそれぞれ、reflection port に置かれた PD の I phase と Q phase でとる。また、 δL_D は antisymmetricport の Q phase でとる²。

*2014 年 12 月 2 日: 変調指数の記号を γ に。誤植修正。

¹BS から ITM までの距離の同相 $\delta l_C \equiv \delta(l_x + l_y)$ は今回は制御する必要がなく、また原理的にも出ない。power recycling を行う場合には必要となってくる。

²ここで I phase と Q phase は位相変調をかけた位相から見て、である。例えば $\cos \Omega t$ で位相変調をかけたとすれば、信号に $\cos \Omega t$ かけて DC 成分を取り出せば I phase となる。

しかし、実際にはこれらの信号は独立に取り出せるわけではなく、混合している。動作点において各ポートでどのような信号が出るのかを行列で表すと、下記のようなになる³。

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial L_D} \\ \frac{\partial}{\partial L_C} \\ \frac{\partial}{\partial l_D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\text{REFL}}^I & P_{\text{REFL}}^Q & P_{\text{AS}}^I & P_{\text{AS}}^Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial P_{\text{REFL}}^I}{\partial L_D} & \frac{\partial P_{\text{REFL}}^Q}{\partial L_D} & \frac{\partial P_{\text{AS}}^I}{\partial L_D} & \frac{\partial P_{\text{AS}}^Q}{\partial L_D} \\ \frac{\partial P_{\text{REFL}}^I}{\partial L_C} & \frac{\partial P_{\text{REFL}}^Q}{\partial L_C} & \frac{\partial P_{\text{AS}}^I}{\partial L_C} & \frac{\partial P_{\text{AS}}^Q}{\partial L_C} \\ \frac{\partial P_{\text{REFL}}^I}{\partial l_D} & \frac{\partial P_{\text{REFL}}^Q}{\partial l_D} & \frac{\partial P_{\text{AS}}^I}{\partial l_D} & \frac{\partial P_{\text{AS}}^Q}{\partial l_D} \end{pmatrix} \\ & = \frac{4\pi}{\lambda} P_0 J_0(\gamma) J_1(\gamma) \times \\ & \begin{pmatrix} r_c |r'_s| \sin \beta \sin \alpha & -r_c |r'_s| \cos \beta \sin \alpha & |r'_c| r_s \sin \beta \sin \alpha & -|r'_c| r_s \cos \beta \sin \alpha \\ -|r'_c| r_s \cos \beta \cos \alpha & -|r'_c| r_s \sin \beta \cos \alpha & 0 & 0 \\ -r_c r_s \sin \beta \sin \alpha & r_c r_s \cos \beta \sin \alpha & r_c r_s \sin \beta \sin \alpha & -r_c r_s \cos \beta \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (2.1) \end{aligned}$$

ここで r_c と r_s はそれぞれ carrier、sideband に対する Fabry-Perot 共振器の振幅反射率を表している。 Φ を光が Fabry-Perot 共振器を往復するときの位相変化だとすれば、Fabry-Perot 共振器の振幅反射率は

$$r(\Phi) = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\Phi}}{1 - r_1 r_2 e^{-i\Phi}} \quad (2.2)$$

と書ける。よって、Fabry-Perot 共振器が carrier に対して共振、sideband に対してほぼ反共振であることを用いれば

$$r_c = -r_1 + \frac{t_1^2 r_2}{1 - r_1 r_2} \quad (2.3)$$

$$r_s = -r_1 - \frac{t_1^2 r_2}{1 + r_1 r_2} = -1 + \frac{(1 - r_1)(1 - r_2)}{1 + r_1 r_2} \quad (\simeq -1) \quad (2.4)$$

また r'_c と r'_s は $r(\Phi)$ を Φ で微分したときの微係数で

$$r'_c = \frac{-it_1^2 r_2}{(1 - r_1 r_2)^2} \quad (\simeq -i \frac{2\mathcal{F}}{\pi}) \quad (2.5)$$

$$r'_s = \frac{it_1^2 r_2}{(1 + r_1 r_2)^2} \quad (\simeq 0) \quad (2.6)$$

ただし、sideband に関しては $r'_s \simeq 0$ となってしまうことからより正確を期す必要があり、 $\Phi_{\text{mod}} = 2L\Omega/c$ を用いて

$$r'_s = \frac{-it_1^2 r_2 e^{-i\Phi_{\text{mod}}}}{(1 + r_1 r_2 e^{-i\Phi_{\text{mod}}})^2} \quad (2.7)$$

とする方がよい。以下の計算ではこちらを用いている。

さらに、 α と β は

$$\alpha \equiv \frac{l_D \Omega}{c} \quad (2.8)$$

$$\beta \equiv \frac{l_C \Omega}{c} \quad (2.9)$$

である。

³[1] の 4.4.7 節にまとまっている。 P_{AS}^I に関しては記述がないが、式を追えば計算できる。

β は変調が BS と ITM の間を往復する際に生じる位相であり、位相変調をかけた位相と信号の位相のずれを表す。 β を変えると I phase と Q phase の信号分離比が変わることが式 (2.1) からわかる。実際に信号を取得する時はこの位相のずれを補うように復調位相を合わせるため、信号強度を考えると式 (2.1) で、 $\beta \rightarrow 0$ とすればよい⁴

また、 α は BS と ITM の間を変調が通る際に生じる 2 つの腕の位相差である。同相信号と差動信号の強度比を決めており、例えば距離に差をつけないで $\alpha = 0$ とすると差動信号を取ることができない。非対称性をつけることで antisymmetric port が carrier に対しては dark であることを保ったまま、sideband に対しては dark でなくするのが賢いところであり、この距離の差 l_D のことを Lise Schnupp の名前をとって Schnupp asymmetry と呼ぶ [2]。

なお、今回は準静的な場合、つまり Fabry-Perot 共振器の cavity pole より十分低い周波数での応答を考えている。

3 Optickle との比較

先に上げた具体的な値を用いて、式 (2.1) から計算した信号強度と、Optickle 上で同じ Fabry-Perot-Michelson 干渉計を構成してシミュレートした結果を比較する。

3.1 計算値

信号を最大化することを考え、式 (2.1) の β に 0 を代入して、各ポートに現れる信号を計算すると下記の表 1 のようになる。式 (2.1) の転置の形で数字が並んでることに注意。

表 1: Fabry-Perot-Michelson 干渉計の長さ信号行列の計算値 (単位は [W/m])

| PD | δL_D | δL_C | δl_D |
|--------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| REFL I | +0 | 3.40×10^{10} | +0 |
| REFL Q | -1.55×10^5 | +0 | -3.41×10^7 |
| AS I | -0 | 0 | -0 |
| AS Q | 3.40×10^{10} | 0 | 3.41×10^7 |

表 1 から、例えば δl_D の信号は reflection port に置かれた PD の Q phase から取ればよいことなどがわかる。

なお、符号のついた 0 は β に 0 を代入したために 0 になった信号である。復調位相が完全に合っていないと I phase と Q phase の信号分離が完全にならず、これらには信号が漏れ出す。

3.2 Optickle によるシミュレーション結果

Optickle では実際の干渉計とは異なり、RFmodulator から BeamSplitter、BeamSplitter から Probe までの距離を 0 にすることができ、余分な位相変化を考えなくてすむ。そのため、Probe の復調位相に式 (2.9) から求まる値をそのまま代入すれば、信号強度を最大化できる。実際に I phase

⁴実際には出てくる信号が $\cos(\Omega t + \beta)$ の形であるのに、計算上 $\cos \Omega t$ で復調したために残った $\cos \beta$ であると考えればよい。

の復調位相を式 (2.9)、Q phase の復調位相を式 (2.9) に 90° 足したものにして、各ポートに出る信号強度をシミュレートした結果が図 1 である。cavity pole ($\simeq 16$ Hz) より十分低い周波数 (0.1 Hz) で tickle することで、これらの値を得た⁵。

Length Sensing Matrix [W/m]

| | | | |
|----------|------------|------------|------------|
| REFL_1Ia | -5.95e+002 | 3.40e+010 | -1.28e+005 |
| REFL_1Qa | -1.55e+005 | -1.28e+008 | -3.41e+007 |
| AS_1Ia | 1.28e+008 | -4.47e-001 | 1.28e+005 |
| AS_1Qa | 3.40e+010 | -1.19e+002 | 3.41e+007 |
| | DARM | CARM | MICH |

図 1: Fabry-Perot-Michelson 干渉計の長さ信号行列

ここで DARM は ETM を差動で動かすこと、CARM は ETM を同相で動かすこと、MICH は 2 つの Fabry-Perot 共振器を共振器長を保ったまま差動で動かすこと⁶であり、それぞれ δL_D , δL_C , δl_D に対応している。

大きく出る、必要な信号に関しては、表 1 とよく一致している。どの信号でも、その対になる phase に 0.4% ほど信号が漏れ出てしまっているが、これは復調位相が完全に合っていないためだと考えられる⁷。

以上より、計算値と Optickle の結果が合うことがわかった。

参考文献

- [1] 安東正樹: 東京大学 修士論文 (1996).
- [2] L. Schnupp: talk at European Collaboration Meeting on Interferometric Detection of Gravitational Waves (Sorrento, 1988).

⁵tickle で得られる sigAC は時間遅れも考慮されているため、実部より十分小さいが虚部を持つ。図 1 では絶対値を取った上で、符号を残すため実部の符号をつけている。

⁶BS を $\sqrt{2}$ 倍動かしても同じことである。

⁷Optickle 上では式 (2.9) で求める値を復調位相としているため、理想的には完全分離になるはずだが、そうはなっていない。 $\beta = 0.00377$ などとするとより分離比を高めることができたが、ここではそこまでしない。