5. 電磁場の角運動量

電磁波の運動量

復習：点電荷に電磁波が入射したときの運動

(参考) 3.4 点電荷による電磁波の散乱

* 質量 m, 電荷 q で 外力 F を受けている点電荷に 平面波 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}$ が入射したとき, 運動方程式は

$$m\frac{d^2\boldsymbol{z}(t)}{dt^2} = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{z}(t)\big) + q\Big(\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{z}(t), t) + \boldsymbol{v}(t) \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{z}(t), t)\Big)$$

* ここで, $|\boldsymbol{B}_{\mathrm{in}}| = \frac{1}{c}|\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}|$ であることを考慮すると, 点電荷の速度が光速に比べて十分遅い時, 磁場の項は無視できる.

* 点電荷の位置の変化が入射電磁波の波長と比べて十分小さいとき, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}$ の中の $\boldsymbol{z}$ を, 点電荷の平均的な位置 $\boldsymbol{z}_0$ に置き換える.

→ $\boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}(\boldsymbol{z}(t), t) \cong \boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}_0 - \omega t)}$ とする.

復習：点電荷に電磁波が入射したときの運動

⇩

運動方程式: $m\dfrac{d^2\boldsymbol{z}(t)}{dt^2} = \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{z}(t)\big) + q\,\boldsymbol{E}_0 e^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{z}_0-\omega t)}$

*外力 F が無いとすると

簡単のため $\boldsymbol{z}_0 = 0$ とおいた

$$\boldsymbol{z}(t) = -\frac{q\boldsymbol{E}_0}{m\omega^2}e^{\mathrm{i}\omega t} \quad , \quad \dot{\boldsymbol{z}}(t) = -\frac{\mathrm{i}\,q\boldsymbol{E}_0}{m\omega}e^{\mathrm{i}\omega t}$$

*電磁波が単位時間当たりに与えるエネルギーは,

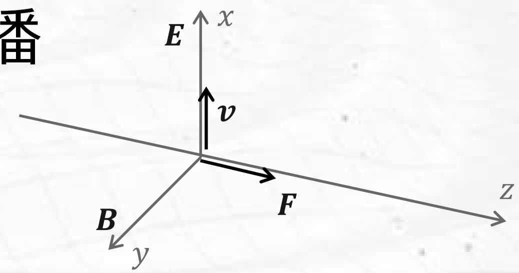
$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \dfrac{dW}{dt}$

$$\frac{dW}{dt} = \left|\dot{\boldsymbol{z}}\cdot q\,\boldsymbol{E}_0 e^{\mathrm{i}\omega t}\right| = \frac{q^2E_0^2}{m\,\omega}$$

電磁波の運動量

*電磁波の磁場を無視しないで考える：$B_0 = \frac{1}{c} E_0$

この磁場が与えるローレンツ力は, 電磁波の伝播方向に働き, その大きさは,



$$F = q|\dot{\boldsymbol{z}}|\frac{E_0}{c} = \frac{q^2 E_0^2}{m\,\omega\,c} = \frac{dW/dt}{c}$$

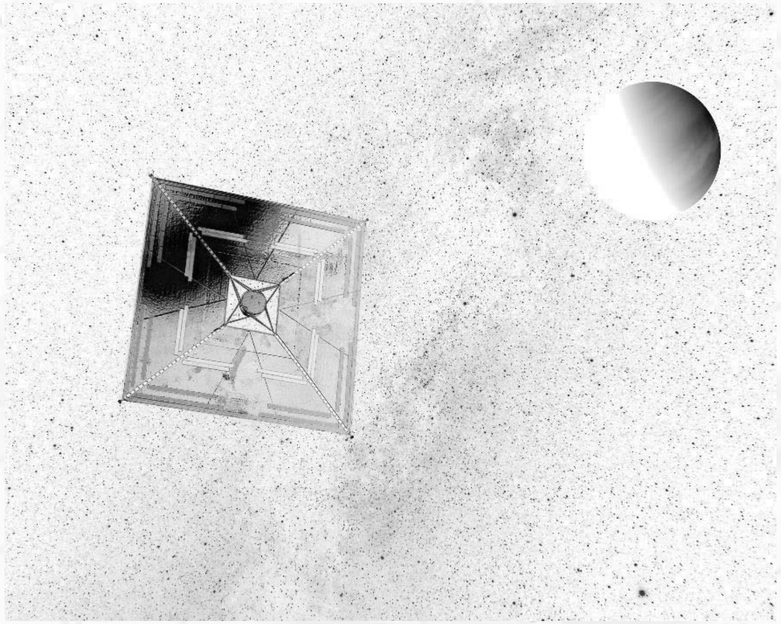
→ $p = \frac{W}{c}$ の運動量を与える.

*量子論の観点で解釈 → 光子は $W = h_{\mathrm{b}}\omega$ のエネルギーを持つ.

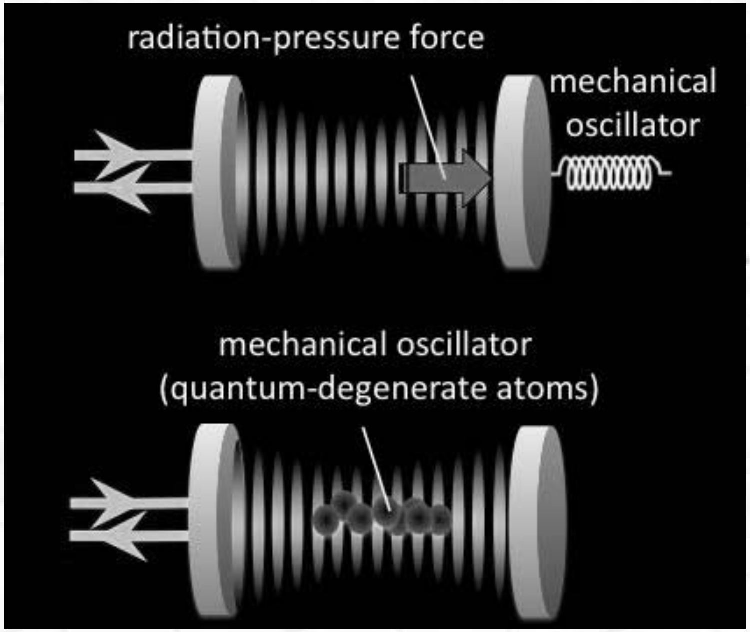
この光子が持つ運動量：　$p = \frac{h_{\mathrm{b}}\omega}{c} = h_{\mathrm{b}}\, k$

電磁波の運動量

・光子を鏡などで反射するとき運動量を受け取る.



ソーラーセイル IKAROS (イカロス, 2010年JAXA).



量子オプトメカニクス

電磁波の角運動量

円偏光の電磁波

・円偏光の電磁波: 電場ベクトルの方向が円運動する.

(2つの直交する同振幅の直線偏光成分を,

$\pi/2$ だけ位相をずらして重ねたものと考えても良い)

*点電荷に対して円偏光電磁波が入射したときの運動は?

→ 点電荷は角周波数 ω で円運動する.

減衰項を考えないと発散してしまうので注意.

- 点電荷が受けるトルク $\tau = \dfrac{dW/dt}{\omega}$
- 角運動量： $\tau\, dt = \dfrac{dW}{\omega}$ (右周り円偏光の場合)

向かってくる光を正面から見たときの,電場ベクトルが右回転.

円偏光の電磁波

*量子論の観点で解釈 → 光子は $W = h_{\mathrm{b}}\omega$ のエネルギーを持つ.

右円偏光の光子が持つ角運動量：$\tau\, dt = \dfrac{dW}{\omega} = h_{\mathrm{b}}$

左円偏光の光子が持つ角運動量：　$-h_{\mathrm{b}}$

ラゲール・ガウシアンモード

(参考) 4.2 (補)
レーザー光の伝播

・波動方程式の近軸近似の方程式

→ ラゲール・ガウシアン(Laguerre-Gaussian)モード

$$\psi_{pl}^{\mathrm{LG}}(r,\phi,z)=\sqrt{\frac{k_0}{\pi\, z_{\mathrm{R}}}}\sqrt{\frac{p!}{(p+l)!}}\left(\frac{\sqrt{k_0 z_{\mathrm{R}}}}{|q(z)|}r\right)^{l}L_p^{(l)}\left(\frac{k_0 z_{\mathrm{R}}}{|q(z)|^2}r^2\right)$$

$$\cdot\frac{z_{\mathrm{R}}}{|q(z)|}\left(\mathrm{i}\frac{|q(z)|}{q(z)}\right)^{1+2p+l}\exp\left[-\frac{\mathrm{i}k_0}{q(z)}\frac{r^2}{2}+\boxed{\mathrm{i}\,l\,\phi}\right]$$

佐々田博之
「光の角運動量制御」
光学 33 271 (2004)

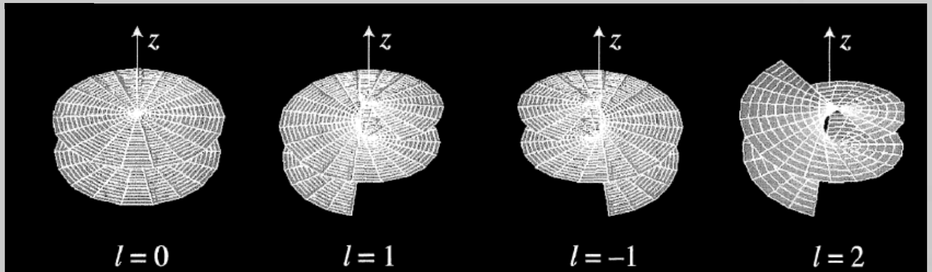


図3　l=0, 1, −1, 2 の LG ビームの等位相面．l=0 の面間隔は 1 波長，l=±1 では螺旋のピッチが 1 波長になる．l=2 では等位相面が 2 枚あり，螺旋のピッチが l=±1 の 2 倍になっている．これらの波面をもつ LG ビームが z 軸の正方向へ進むとき，1 光子あたり $l\hbar$ の角運動量をもつ．

進行方向に対して
らせん状の等位相面をもつ

⇨ $l\,h_{\mathrm{b}}$ の角運動量を持つ.