3. 荷電粒子がつくる電磁波

3.1 リエナール-ヴィーヒェルトのポテンシャル

運動する荷電粒子が出す電磁波

・これまで見てきたもの.

*自由電磁場：$\rho = 0,\ \boldsymbol{j} = \boldsymbol{0}$ の場合.

→ 伝搬, 反射, 屈折　など.

*電磁波の放射：$\rho \neq 0,\ \boldsymbol{j} \neq \boldsymbol{0}$ の場合.

→ 電磁波の生成. 遅延ポテンシャルや多重極展開で表現.

⇩

・ここからは, 荷電粒子が出す電磁波を考える.

*物質の中の原子核・電子で生成される電磁波.

*高エネルギー荷電粒子の性質.

・荷電粒子が等速運動をしている場合は,

静電場・静磁場をローレンツ変換する問題に帰着.

加速度運動成分がある場合 → 電磁波放射.

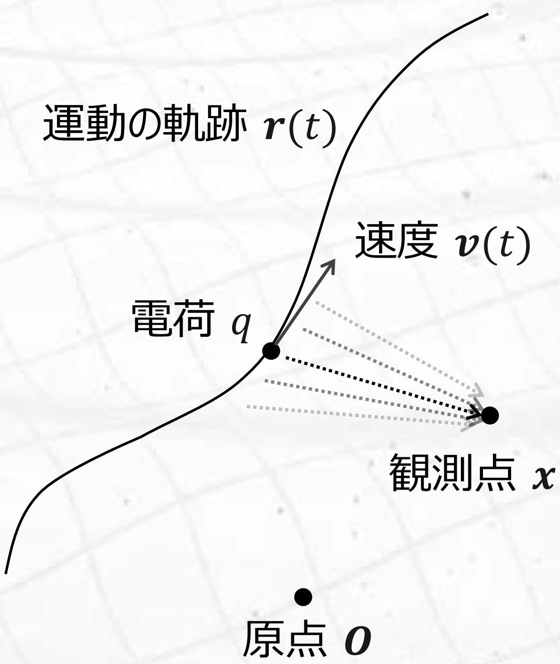
リエナール-ヴィーヒェルトのポテンシャル

・点電荷の運動による電磁ポテンシャル:
リエナール-ヴィーヒェルト (Liénard–Wiechert) のポテンシャル.

＊点電荷の運動による電荷・電流密度

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = q\,\delta^3\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)\big)$$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = q\,\boldsymbol{v}\,\delta^3\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)\big)$$



点電荷による遅延ポテンシャル

・以前に導いた遅延ポテンシャル (時間積分前, 資料1のA)

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\boldsymbol{x}'\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dt'\ \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\ \rho(\boldsymbol{x}',t')$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{x}'\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dt'\ \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\ \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}',t')$$

に点電荷の運動に起因する電荷・電流密度

$$\rho(\boldsymbol{x},t)=q\,\delta^3\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)\big)\quad,\quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)=q\,\boldsymbol{v}\,\delta^3\big(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t)\big)$$

を代入すると,

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3\boldsymbol{x}'\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dt'\ \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\,\delta^3\big(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{r}(t')\big)$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0\,q}{4\pi}\int d^3\boldsymbol{x}'\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dt'\ \frac{\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}{c}\right)}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\ \boldsymbol{v}\,\delta^3\big(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{r}(t')\big)$$

となる.

・空間積分を実行すると, スカラーポテンシャルは

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')|}\delta\left(t-t'-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')|}{c}\right)$$

となる.

*これは、デルタ関数に関する公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty}dt'\,f(t')\,\delta(g(t'))=\left.\frac{f(t')}{\left|\frac{dg(t')}{dt'}\right|}\right|_{g(t')=0}$$

において,

$$f(t')=\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')|}\ ,\ g(t')=t-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')|}{c}-t'$$

と置いたものと考えれば良い.

＊ $g(t') = 0$ を満たす t'

→ $t'_0 = t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t'_0)|}{c}$ の解: 発信時刻

＊ $\frac{dg(t')}{dt'} = \frac{d}{dt'}\left[t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')|}{c} - t'\right]$

$$= -\left(1 - \frac{1}{c}\cdot\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')|}\frac{d\boldsymbol{r}(t')}{dt'}\right) = -\left(1 - \frac{1}{c}\cdot\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t')|}\boldsymbol{v}(t')\right)$$

よって, スカラーポテンシャルは,

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t'_0)| - \frac{\boldsymbol{v}(t'_0)}{c}\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t'_0)\right)} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{S}\right]_{\mathrm{ret}}$$

ただし,

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t), \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$$

$$S = R(t)\left[1 - \frac{\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}{c}\right]$$

‘ret’ : Retarded (遅延)

$t'_0 = t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t'_0)|}{c}$

を満たす発信時刻での値.

・ベクトルポテンシャルも同様に求められる.

まとめると, 以下のようになる.

リエナール-ヴィーヒェルトのポテンシャル

$$\phi(\boldsymbol{x}, t) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{S}\right]_{\mathrm{ret}}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}, t) = \frac{\mu_0\, q}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{v}}{S}\right]_{\mathrm{ret}}$$

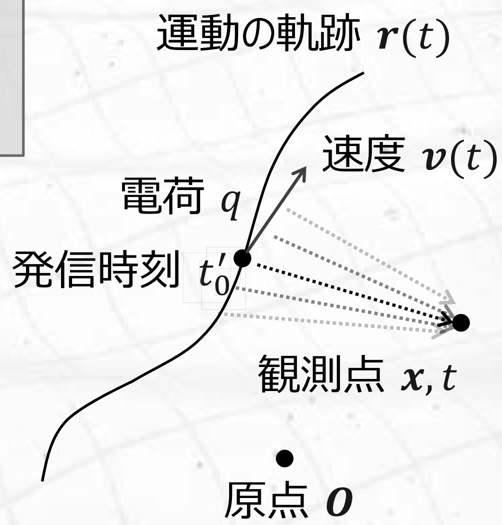
'ret' は,発信時刻

$$t_0' = t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t_0')|}{c} \quad .$$

ただし,

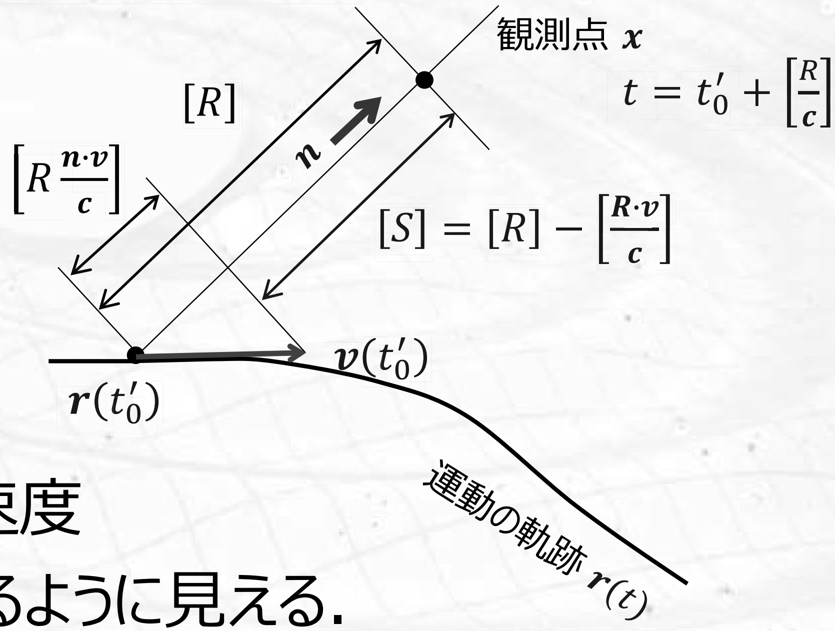
$$S = R(t)\left[1 - \frac{\boldsymbol{n}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t)}{c}\right]$$

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}(t), \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$$



※ 点電荷が静止しているとき → クーロンポテンシャルに帰着.

補足説明1：物理的解釈



・観測点 $\boldsymbol{x}$ におけるポテンシャルは,

* 時刻 t_0' に発信された波が,
距離 R を, 光速 c で伝搬する
時間だけ遅れて到着したもの.

* 感じるポテンシャルは, 視線方向速度
相当分だけ近く(遠く)に電荷があるように見える.

・点電荷が時間とともに位置を変えて動いているので,
その分を積分する必要がある.

→ $\frac{1}{1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}}$ 倍だけ伸びている.

(波が粒子を通過するのに要する時間)

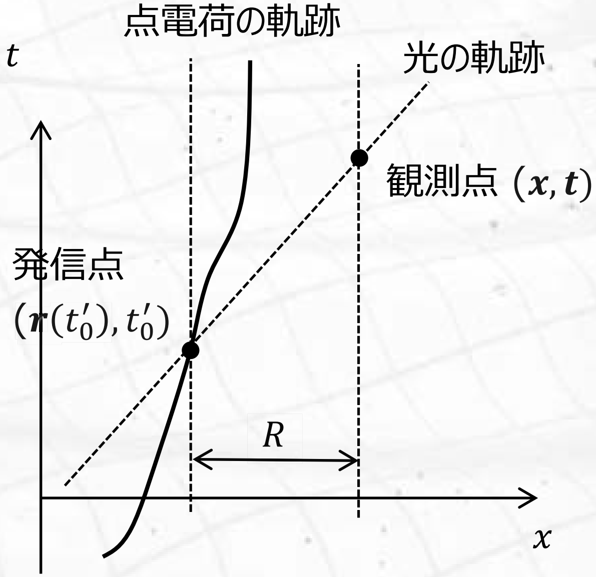
補足説明2：発信時刻

・発信時刻 t_0' について.

＊ t_0' は $t_0' = t - \frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}(t_0')|}{c}$ 満たす.

⇩

時空図において、観測点を含む光円錐と, 点電荷の軌跡の交点の時刻が解.



3.2 運動する荷電粒子が作る電磁波

運動する荷電粒子がつくる電磁波

・求めた電磁ポテンシャル　(リエナール-ヴィーヒェルトのポテンシャル)

$$\phi(\boldsymbol{x},t)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{S}\right]_{\mathrm{ret}}\quad,\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)=\frac{\mu_0\,q}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{v}}{S}\right]_{\mathrm{ret}}$$

に対して，　$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{E}=-\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\nabla}\phi$　を用いて計算.

⇩

運動する荷電粒子が作る電磁場

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R}{S^3}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2)+\frac{R^2}{c\,S^3}\boldsymbol{n}\times\left\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]_{\mathrm{ret}}$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,c}\left[\frac{R}{S^3}(1-\beta^2)(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{n})+\frac{R^2}{c\,S^3}\boldsymbol{n}\times\left\{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]_{\mathrm{ret}}$$

ただし，　$\boldsymbol{\beta}=\frac{\boldsymbol{v}}{c}$,　$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{R}}{R}$

* ここでも，　$\boldsymbol{B} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{c}}[\boldsymbol{n}] \times \boldsymbol{E}$　がなり立っている.

* $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ の表式で，

- 第1項：$\boldsymbol{\beta}$ のみを含む. 遠方では R^{-2} で減衰.
- 第2項：加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ を含む. 遠方では R^{-1} で減衰.

→ 電磁波の放射に関係.

* 速度 $\boldsymbol{v}$ が一定(等速運動)のとき，

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R}{S^3}(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2)\right]_{\mathrm{ret}}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, c}\left[\frac{R}{S^3}(1 - \beta^2)(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{n})\right]_{\mathrm{ret}}$$

補足：電磁場の計算 (1/4)

$[S]$ の時間・空間(x, y, z, t)偏微分.

→ $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{R}$ などを x, y, z, t' の関数で表現し,

その後, x, y, z, t へ変換することで計算.

・準備1

* $R^2 = (x - x'(t'))^2 + (y - y'(t'))^2 + (z - z'(t'))^2$ の両辺を t で偏微分.

$$R\frac{\partial R}{\partial t} = -(x - x'(t'))\frac{\partial x'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} - (y - y'(t'))\frac{\partial y'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t} - (z - z'(t'))\frac{\partial z'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

$$= -\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial t'}{\partial t}$$

* $R = c(t - t')$ の両辺を t で偏微分.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right)$$

ただし $\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{v}}{c}$, $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}$

$S = R - R(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})$

これらから $\left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t}\right) = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\frac{\partial t'}{\partial t}$ → $\underline{\frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})} = \frac{R}{S}}$

補足：電磁場の計算 (2/4)

・準備2

* $R^2 = (x - x'(t'))^2 + (y - y'(t'))^2 + (z - z'(t'))^2$ の両辺を x で偏微分.

$$R\frac{\partial R}{\partial x} = -(x - x')\left(1 - \frac{\partial x'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}\right) - (y - y')\frac{\partial y'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x} - (z - z')\frac{\partial z'}{\partial t'}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$= (x - x') - \boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}\frac{\partial t'}{\partial x}$$

* $R = c(t - t')$ の両辺を x で偏微分.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -c\frac{\partial t'}{\partial x}$$

これらから $\displaystyle \frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{1}{R\,c}(x - x') + \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}\frac{\partial t'}{\partial x}$

$$\rightarrow \quad \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{1-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})}\frac{-(x-x')}{R\,c} = -\frac{(x-x')}{S\,c}$$

従って $\displaystyle \underline{\boldsymbol{\nabla} t' = -\frac{\boldsymbol{R}}{S\,c}}$

補足：電磁場の計算 (3/4)

・準備3

$R = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|$

$S = R - R(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})$ の微分を考える.

* $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}^* + \boldsymbol{\nabla}t' \cdot \dfrac{\partial}{\partial t'}$ 　とおくと ($\boldsymbol{\nabla}^*$ は $t' = \mathrm{const.}$ とした場合の空間微分)

$$\boldsymbol{\nabla}[S] = \boldsymbol{\nabla}^*[S] + \boldsymbol{\nabla}t' \cdot \frac{\partial}{\partial t'}[S]$$

$$= [\boldsymbol{n} - \boldsymbol{\beta}] - \left[c\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta} - c\,\beta^2 + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\boldsymbol{\nabla}t'$$

* $\dfrac{\partial[S]}{\partial t} = -\left[c\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta} - c\,\beta^2 + \boldsymbol{R}\cdot\dot{\boldsymbol{\beta}}\right]\dfrac{\partial t'}{\partial t}$

$R^2 = (x - x'(t'))^2 + (y - y'(t'))^2 + (z - z'(t'))^2$ の両辺を t' で偏微分.

$$R\frac{\partial R}{\partial t'} = -(x - x'(t'))\frac{\partial x'}{\partial t'} - (y - y'(t'))\frac{\partial y'}{\partial t'} - (z - z'(t'))\frac{\partial z'}{\partial t'} = -\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}$$

したがって，$\dfrac{\partial R}{\partial t'} = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = -c\,\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta}$

補足：電磁場の計算 (4/4)

・$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{S^2}\right]\boldsymbol{\nabla}[S] - \frac{\mu_0\, q}{4\pi}\left[\frac{1}{S}\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} - \frac{\boldsymbol{v}}{S^2}\frac{\partial S}{\partial t}\right]$

ここで,
'ret'の文字は省略

→ $\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{R}{S^3}(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})(1-\beta^2) + \frac{R^2}{c\, S^3}\boldsymbol{n}\times\left\{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]$

・$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0\, q}{4\pi}\mathrm{rot}\left[\frac{\boldsymbol{v}}{S}\right] = \frac{\mu_0\, q}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{v}}{S^2}\times\boldsymbol{\nabla}S + \frac{1}{S}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{v}\right] \\
&= \frac{\mu_0\, q}{4\pi}\left[\frac{\boldsymbol{v}}{S^2}\times\boldsymbol{\nabla}^* S - \boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{R}}{c\, S^3}\frac{\partial S}{\partial t'} - \frac{\boldsymbol{R}}{c\, S^2}\times\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t'}\right] \\
&= \ \ldots \\
&= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\, c}\left[\frac{R}{S^3}(1-\beta^2)(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{n}) + \frac{R^2}{c\, S^3}\boldsymbol{n}\times\left\{\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}\right\}\right]
\end{aligned}$$

ここで、
$\mathrm{rot} = \mathrm{rot}^* - \frac{\boldsymbol{R}}{c\, S}\times\frac{\partial}{\partial t'}$
を用いる.

※ ここで, $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}) - \boldsymbol{C}\cdot(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ を用いた.

おまけ：ヘヴィサイド・ファインマンの表式

・ヘヴィサイド・ファインマン(Heaviside-Feynman)の表式

* $\boldsymbol{E} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left[\dfrac{\boldsymbol{n}}{R^2} + \dfrac{R}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{\boldsymbol{n}}{R^2}\right) + \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial t^2}\right]$

* $c\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}$

※「ファインマン物理学III」 式(20.1)

→ $\boldsymbol{B} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\, c^2}\left[\dfrac{\boldsymbol{n}}{R} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{n}}{\partial t} + \dfrac{1}{c}\boldsymbol{n} \times \dfrac{\partial^2 \boldsymbol{n}}{\partial t^2}\right]$

電場 = [(クーロン項) + (時間微分)x(時間) + (放射項)]

※ 上記の表式を各自で求めてみて下さい.

* $\phi, \boldsymbol{A}$ の空間積分する前の表式 (p.4) から出発.

* $\left[\dfrac{1}{S}\right] = \left[\dfrac{1}{R}\left(1 - \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial R}{\partial t}\right)\right]$, $[\boldsymbol{v}] = -[\dot{\boldsymbol{R}}] = -\left[\dfrac{S}{R}\dfrac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t}\right]$ を利用.