
4. 電磁波の伝播

4.3 電磁波の回折

電磁波の回折

・電磁波の重ね合わせ

* 干渉：波源の数が少数のときの
波の重ね合わせ。

* 回折：波源の数が多数の時。

* ホイヘンス (Huygens)の原理:

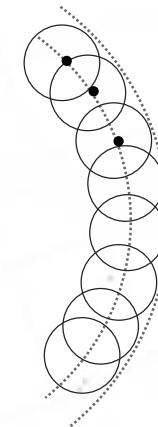
波動が伝播する際、波の先端上の各点が中心となって球面波が生じ、それらの球面波の包絡線が、新しい波動の先端となる。

→ 後方に進む波動がないという事実を説明できない。

クリスティアーン・ホイヘンス
(オランダ, 1629 - 1695)



タイタンの発見, 土星の環の解明, 遠心力, 衝突, 振り子時計, ホイヘンスの原理, 波動, 複屈折, 縮閉線, 31平均律



キルヒホフの積分表示

・伝播現象の数学的定式化

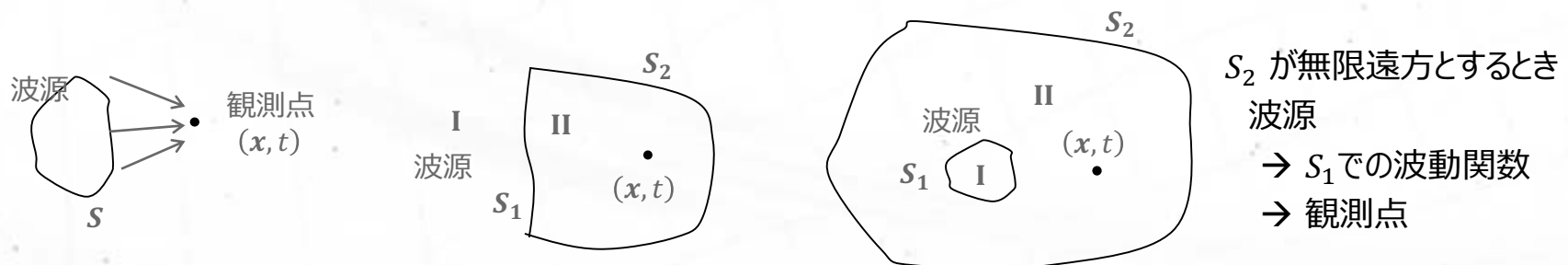
→ キルヒホフ (Kirchhoff) の積分表示.

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S dS'$$

$$\mathbf{n}'(\mathbf{x}') \cdot \left(\frac{\nabla' \psi(\mathbf{x}', t')}{R} - \frac{R}{R^3} \psi(\mathbf{x}', t') - \frac{R}{cR^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right)$$

$$\text{ただし, } t' = t - \frac{R}{c}$$

: 観測点における波動関数 $\psi(\mathbf{x}, t)$ は,
表面 S での波動関数の値で決まる.



キルヒホフの積分表示の導出 (1/5)

・電磁場において, E, B のうち1つのみを考え, その成分を $\psi(x, t)$ とする.

*閉曲面 S に囲まれた空間 V の中で定義された

n' は外向きの
法線ベクトル

任意の関数 $\psi(x, t), \phi(x, t)$ に対してGreenの定理が成り立つ:

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) d^3 x' = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n}' dS' \quad \text{-- ①}$$

ここで $\psi(x, t)$ として, 波動関数を満たす関数: $(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}) \psi = 0 \quad \text{-- ②}$

また, 以下を満たすGreen関数 $G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t)$

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G_{\text{ret}}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{c^2} \delta(t) \delta^3(\mathbf{x}) \quad \text{-- ③}$$

観測点 x は
空間 V の内の点

を考え, $\phi(\mathbf{x}', t')$ を以下で与える.

$$\phi(\mathbf{x}', t') = G_{\text{ret}}(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') \equiv \frac{1}{4\pi c} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - c(t - t'))$$

(G_{ret} は 過去 t' から, 未来 t への伝播を表す.)

キルヒホフの積分表示の導出 (2/5)

* ①を $t_0 < t' < t_1$ の範囲で積分

$$\begin{aligned} & \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_V d^3x' \{ \phi(\mathbf{x}', t') \nabla'^2 \psi(\mathbf{x}', t') - \psi(\mathbf{x}', t') \nabla'^2 \phi(\mathbf{x}', t') \} \\ &= \int_{t_0}^{t_1} dt' \int_S dS' \{ \phi(\mathbf{x}', t') \nabla' \psi(\mathbf{x}', t') - \psi(\mathbf{x}', t') \nabla' \phi(\mathbf{x}', t') \} \cdot \mathbf{n}' \end{aligned} \quad \text{-- ④}$$

② と ③ から,

$$\begin{aligned} (\text{左辺}) &= \frac{1}{c^2} \psi(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{c^2} \int_V d^3x' \int_{t_0}^{t_1} dt' \\ & \quad \frac{\partial}{\partial t'} \left[G_{\text{ret}}(\mathbf{R}, t - t') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} - \psi(\mathbf{x}', t') \frac{\partial}{\partial t'} G_{\text{ret}}(\mathbf{R}, t - t') \right] \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{R} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$, $|\mathbf{R}| = R$

キルヒホフの積分表示の導出 (3/5)

*ここで, $(t <) t' \leq t_1$ に対して, G_{ret} とその時間微分は 0.

したがって, $t_0 \rightarrow t'$ と置き換えると

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{c^2} \psi(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{c^2} \int_V d^3x'$$

$$\cdot \left[G_{\text{ret}}(\mathbf{R}, t - t') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} + \psi(\mathbf{x}', t') \frac{\partial}{\partial t'} G_{\text{ret}}(\mathbf{R}, t - t') \right] \quad \text{--- ⑤}$$

キルヒホフの積分表示の導出 (4/5)

* 一方, ④ の右辺で, $\mathbf{n}' \cdot \nabla' \psi(\mathbf{x}', t') = \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial n'}$ などとおくと

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial n'} G_{\text{ret}}(\mathbf{R}, t - t') \\ &= -\frac{1}{4\pi c} \cdot \frac{\mathbf{n}' \cdot \mathbf{R}}{R} \left\{ -\frac{\delta(R - c(t - t'))}{R^2} + \frac{1}{cR} \frac{\partial}{\partial t'} \delta(R - c(t - t')) \right\} \end{aligned}$$

であることに注意すると,

$$(\text{右辺}) = \dots = \frac{1}{4\pi c^2} \int_S dS' \mathbf{n}'$$

$$\cdot \left[\frac{\nabla' \psi(\mathbf{x}', t')}{R} - \frac{R}{R^3} \psi(\mathbf{x}', t') - \frac{R}{cR^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{t' = t - \frac{R}{c}} \quad \text{--- ⑥}$$

デルタ関数の公式

$$\int f'(x) \delta(x) dx = - \int f(x) \delta'(x) dx$$

を利用.

キルヒホフの積分表示の導出 (5/5)

* ⑤, ⑥ から

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{x}, t) = & \int_V d^3x' \left[G_{\text{ret}}(\mathbf{R}, t - t') \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} + \psi(\mathbf{x}', t') \frac{\partial}{\partial t'} G_{\text{ret}}(\mathbf{R}, t - t') \right] \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \mathbf{n}' \cdot \left[\frac{\nabla' \psi(\mathbf{x}', t')}{R} - \frac{R}{R^3} \psi(\mathbf{x}', t') - \frac{R}{cR^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{t'=t-\frac{R}{c}} \end{aligned}$$

ここで、体積積分の項は、全領域 V における ψ と $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ を、時刻 t' で与えたときの、時刻 $t (> t')$ における波動 ψ をあらわす。ただし、 G_{ret} がデルタ関数を含むことから、 $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = c(t - t')$ の条件を満たす点 \mathbf{x}' における

ψ と $\frac{\partial \psi}{\partial t'}$ のみが寄与する。→ \mathbf{x}' が領域 V の外にあるときには積分値は 0。

したがって

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \mathbf{n}' \cdot \left[\frac{\nabla' \psi(\mathbf{x}', t')}{R} - \frac{R}{R^3} \psi(\mathbf{x}', t') - \frac{R}{cR^2} \frac{\partial \psi(\mathbf{x}', t')}{\partial t'} \right]_{t'=t-\frac{R}{c}}$$

が得られる。

キルヒホフの積分表示について補足

- * キルヒホフの積分表示は, 波動方程式の解ではないことに注意.
(時刻 t' での ψ と $\nabla\psi$ の値を与えて ψ を求めるわけではない.)
境界条件を考慮した, 波動方程式の積分表現.
- * キルヒホフの積分表示の右辺では, ψ と $\nabla\psi$ の値は,
表面 S の上で同時に与えることはできない.
 - ψ もしくは $\nabla\psi$ の一方を与えると, ψ の値が一義的に決まる.
 - ψ の値をあたえる場合 : ディリクレ (Dirichlet) 型
 - $\nabla\psi$ の値をあたえる場合 : ノイマン (Neumann) 型

ホイヘンスの原理の確認

- キルヒホフの積分表示は, 領域 V 内の波動が, 表面 S 上の波動によって表現されることを意味している.
→ これを用いてホイヘンスの原理を導き, 確認してみる.

- * 原点 O の波源から球面波が出たとき, 観測点 P における波動は

$$\psi(r, t) = \frac{f}{r} e^{i\omega(t - \frac{r}{c})}$$

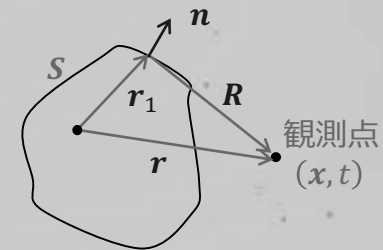
となる.

ただし, 球面波の振幅 f は定数とする.

これを表面 S からの波動の総和として求めることができるはず.

- キルヒホフの積分表示において, 領域 V を表面 S の外側にとる.
 $\rightarrow n = -n'$ とする.

*表面 S 上において, $\psi(r_1, t) = \frac{f}{r_1} e^{i\omega(t - \frac{r_1}{c})}$ から,



$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(r_1, t) = \frac{i\omega f}{r_1} e^{i\omega(t - \frac{r_1}{c})}$$

$$\nabla' \psi(r_1, t) = \frac{r_1}{r_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \psi(r_1, t) = -\frac{r_1}{r_1} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{i\omega}{c} \right) \frac{f}{r_1} e^{i\omega(t - \frac{r_1}{c})}$$

となる.

ここで, $t \rightarrow t - \frac{R}{c}$ と置き換えて, キルヒホフの積分表示に代入.

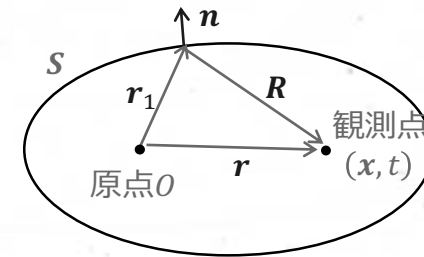
$$\psi(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_S dS' \left[\left\{ \frac{(r_1 \cdot n)}{r_1^2} + \frac{(R \cdot n)}{R^2} \right\} + \frac{i\omega}{c} \left\{ \frac{(r_1 \cdot n)}{r_1} + \frac{(R \cdot n)}{R} \right\} \right] \frac{f}{R r_1} e^{i\omega(t - \frac{r_1 + R}{c})}$$

が得られる.

*原点 O を囲む表面 S の内側に観測点があるとき.

表面 S は任意に選ぶことができる.

→ 原点 O と観測点 P を焦点
とする楕円を表面にとる.



このとき, 前頁の式は, r_1 と $-R$ に関して反対称になる.

従って, $\psi(x, t) = 0$



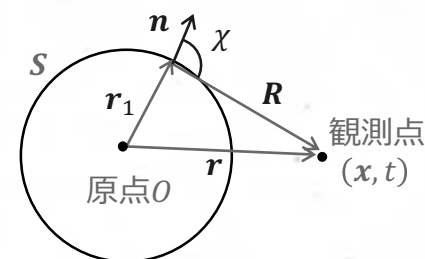
表面 S から発進する波動が逆行する成分はない.

→ 直観的なホイヘンスの原理の難点を解決.

*原点 O を囲む表面 S の外側に観測点があるとき.

→ 原点 O を中心とする球面を表面にとる.

また, 電磁波の波長 $\lambda = 2\pi c/\omega$ と比べて
 r_1 と R は十分大きいものとする.



このとき, 前々頁の式で, 第1項は無視できる:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{f}{4\pi} \frac{i\omega}{c} \int_S dS' \left[\frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n})}{r_1} + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})}{R} \right] \frac{1}{R r_1} e^{i\omega(t - \frac{r_1 + R}{c})}$$



この表面積分を計算すると,

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{i\pi f}{\lambda r} e^{i(\omega t - \frac{2\pi r_1}{\lambda})} \int_{r-r_1}^{r+r_1} (1 + \cos \chi) e^{-2\pi i \frac{R}{\lambda}} dR$$

と書きあらわすことができる.

*この積分から,

$$\psi(r, t) = \frac{f}{r} e^{i(\omega t - \frac{2\pi r}{\lambda})} \quad \text{がえられる.}$$

→ ホイヘンスの原理の証明.

小孔による回折

- 原点から出た電磁波が, 小孔があいたスクリーンに放射されたとき, その後ろ側における強度分布をしらべる.

Kirchhoffの近似 を用いる:

- スクリーン上では $\psi = \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$.
- 小孔での波動は, スクリーンがないときのものと一致.

(注) Kirchhoffの近似は, 数学的に矛盾を含んでいる.

- ψ と $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ を同時に与えている.
- 小孔の端での波動の歪みは無視している.

*小孔の部分から発せられる素源波を考えればよい ($S =$ 小孔).

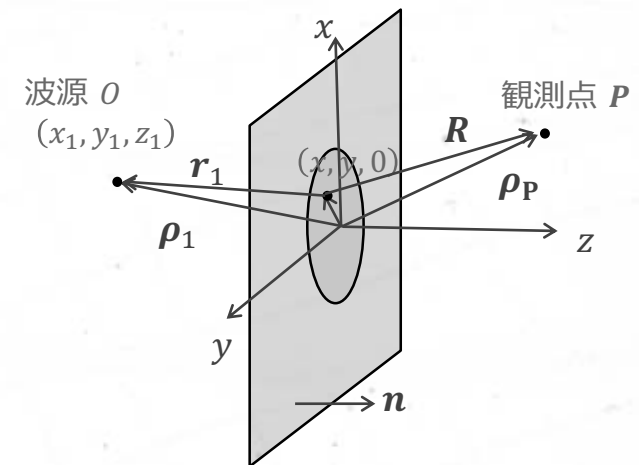
$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{if}{2\lambda} \int_S dS' \left[\frac{(\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n})}{r_1} + \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{n})}{R} \right] \frac{1}{R r_1} e^{i(\omega t - \frac{2\pi(r_1+R)}{\lambda})}$$

- ここで, 小孔では角括弧内の値は, 指数部と比較して変化が小さい. \rightarrow 積分の外にだす.
- スクリーン上に xy 平面をとり, それに垂直な \mathbf{n} の方向に z 軸をとる.

座標系の原点から

波源 O 方向 : $\boldsymbol{\rho}_1$

観測点 P 方向 : $\boldsymbol{\rho}_P$ とする.



$$\Rightarrow \psi(P, t) = \frac{-if}{2\lambda} \frac{1}{\rho_1 \rho_P} \left[\frac{(\boldsymbol{\rho}_1 \cdot \mathbf{n})}{\rho_1} - \frac{(\boldsymbol{\rho}_P \cdot \mathbf{n})}{\rho_P} \right] e^{i\omega t} \int_S dS' e^{-2\pi i \frac{r_1+R}{\lambda}}$$

*ここで, 孔が小さい ($x, y \ll \rho_1, \rho_P$) ことを用いた近似を行う

$$r_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + z_1^2 \cong \rho_1^2 - 2x_1x - 2y_1y$$

従って, $r_1 \cong \rho_1 - \alpha_1x - \beta_1y$

$$(ただし \alpha_1 = x_1/\rho_1, \beta_1 = y_1/\rho_1)$$

同様に $R \cong \rho_P - \alpha_Px - \beta_Py$ となる.

*これらを前頁の表式に代入する.

$$\begin{aligned} \psi(P, t) = & \frac{-if}{2\lambda} \frac{1}{\rho_1 \rho_P} \left[\frac{(\rho_1 \cdot \mathbf{n})}{\rho_1} - \frac{(\rho_P \cdot \mathbf{n})}{\rho_P} \right] e^{i\left(\omega t - 2\pi \frac{\rho_1 + \rho_P}{\lambda}\right)} \\ & \times \int \int_S dx dy e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(\alpha_1 + \alpha_P)x + (\beta_1 + \beta_P)y\}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow J = |\psi(P, t)|^2 = |A|^2 \cdot \left| \int \int_S dx dy e^{\frac{2\pi i}{\lambda}\{(\alpha_1 + \alpha_P)x + (\beta_1 + \beta_P)y\}} \right|^2$$

で波動の強度が与えられる (ただし, A は積分前の係数部分).

*係数 A を求める.

電磁波の入射方向と同方向で観測される波動の強度を J_0 とする.

このとき, $\alpha_P = -\alpha_1$, $\beta_P = -\beta_1$ であるから,

$$J_0 = |A|^2 \cdot \left| \int \int_S dx dy \right|^2 = |A|^2 S^2 \quad (S \text{ は小孔の面積})$$

$$\text{従って } |A|^2 = J_0/S^2$$



これを用いて前頁式を書き直すと,

$$J = \frac{J_0}{S^2} \cdot \left| \int \int_S dx dy e^{\frac{2\pi i}{\lambda} \{(\alpha_1 + \alpha_P)x + (\beta_1 + \beta_P)y\}} \right|^2 \quad \text{が得られる.}$$

• 波源と観測点がスクリーンから

- 有限の距離のとき

フレネル(Fresnel)回折

- 無限大の距離にあるとき

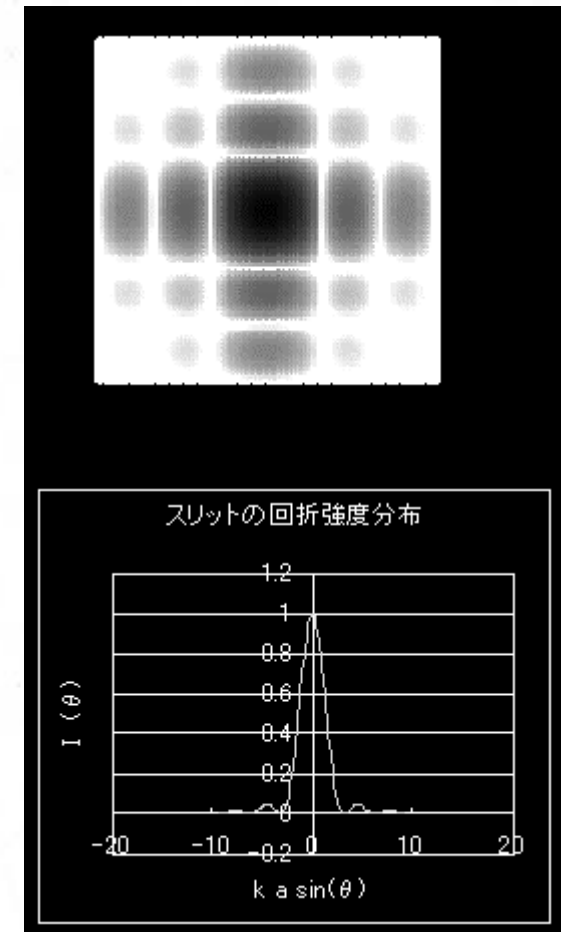
フラウンホーファー(Fraunhofer)回折

と呼ばれる。

• 長方形(大きさ $2a \times 2b$)の場合,

フラウンホーファー回折は ($\alpha_1 = \beta_1 = 0$ として)

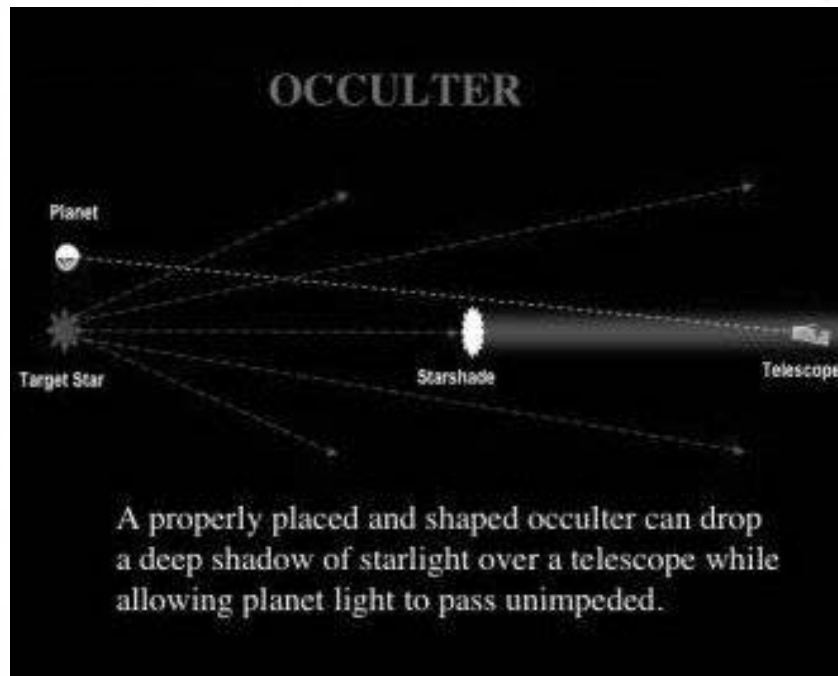
$$J = J_0 \left| \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} a \alpha_P}{\frac{2\pi}{\lambda} a \alpha_P} \right|^2 \left| \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} b \beta_P}{\frac{2\pi}{\lambda} b \beta_P} \right|^2$$



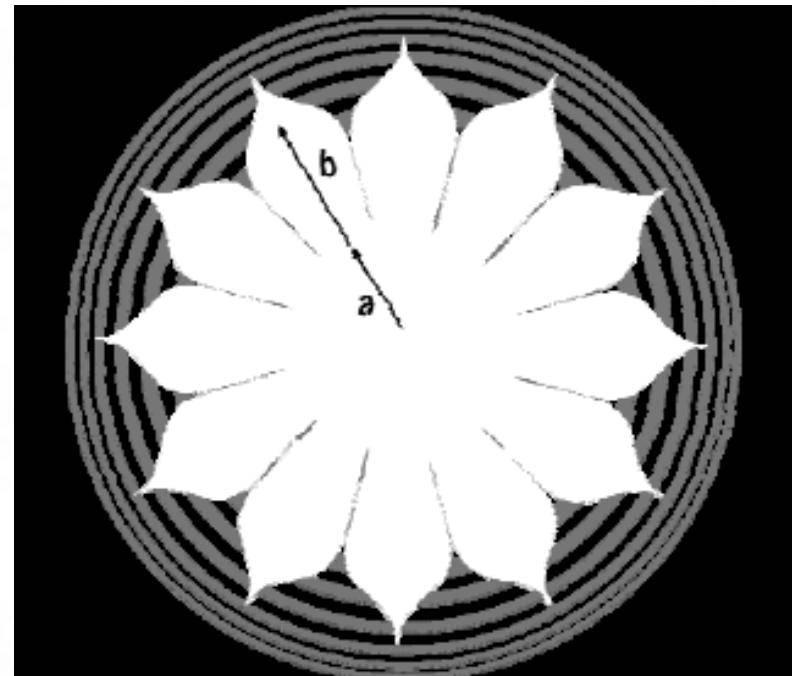
「国立科学博物館で学ぶ物理学」より

系外惑星探査

- ・系外惑星の直接撮像探査では, 中心星からの光が邪魔.
→ Starshade (掩蔽版, オカルター)で遮る.
このとき, 回折の影響が問題になる.



<http://newworlds.colorado.edu/> より



Starshade Design