
3.3 制動放射

運動する荷電粒子がつくる電磁波

- 求めた電磁ポテンシャル (リエナール-ヴィーヒェルトのポテンシャル)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{S} \right]_{\text{ret}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{S} \right]_{\text{ret}}$$

に対して, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi$ を用いて計算.



運動する荷電粒子が作る電磁場

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{S^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2) + \frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{R}{S^3} (1 - \beta^2)(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}) + \frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right]_{\text{ret}}$$

$$\text{ただし, } \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

制動放射

ブレームシュト랄ンク (独) → brake + radiation

- 制動放射 (Bremsstrahlung) :

点電荷が加速されることによって電磁波が放射される現象.

*電磁波に関連する項 ($\dot{\boldsymbol{\beta}}/r$ を含む項) だけを取り出す.

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} [\mathbf{n}] \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$$

→自由電磁波と同じ性質 : 横波, $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$

制動放射のエネルギー

*観測点 (\mathbf{x}, t) における, 単位時間・単位面積あたりのエネルギー

$$\begin{aligned} S(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E}(\mathbf{x}, t))^2 [\mathbf{n}] = \frac{1}{\mu_0 c} \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[\frac{R^4}{c^2 S^6} \mathbf{n} (\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\})^2 \right] \\ &= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \left[\frac{R^4}{S^6} \mathbf{n} (\mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\})^2 \right] \quad \text{————— (A)} \end{aligned}$$

※ 時間平均を求めるときは, 電磁場を複素数であらわし $\bar{S}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\mu_0 c} |\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)|^2 [\mathbf{n}]$

*注意: 点電荷は運動しているので, ‘単位時間あたりエネルギー’
の値が, 点電荷と観測点で異なる.

点電荷が時刻 $t'_0 = T_1$ から $t'_0 = T_2$ までの時間 $(T_2 - T_1)$
に放射する電磁波.

→ 観測点では $T_2 - T_1 + \frac{|x-r(T_2)|}{c} - \frac{|x-r(T_1)|}{c}$ の間に観測.

ここでは点電荷が放射するエネルギー量を求めたい.

制動放射のエネルギー（続き）

*時刻 t_1 から t_2 までの間に放射されたエネルギー

$$\int_{t_1+R(t_1)/c}^{t_2+R(t_2)/c} dt [S] = \int_{t_1}^{t_2} dt' \frac{dt}{dt'} S = \int_{t_1}^{t_2} dt' (1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}) S$$

よって、点電荷が単位加速時間に放射する全エネルギーは、
点電荷から距離 $R(t'_0)$ の球面上で積分して、

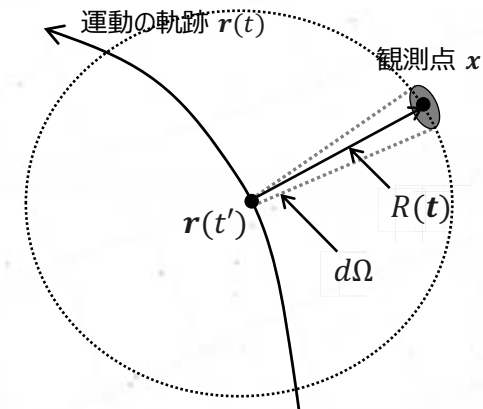
$$\frac{dW}{dt'} = \int S(\mathbf{x}, t) [\mathbf{n}(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R^2] d\Omega \quad \text{————— (B)}$$

とえられる。

*これから、

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int d\Omega \frac{(\mathbf{n}(t) \times \{(\mathbf{n}(t) - \boldsymbol{\beta}(t)) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t)\})^2}{(1 - \mathbf{n}(t) \cdot \boldsymbol{\beta}(t))^5}$$

$t' \rightarrow t$ と置き換えた



が得られる： 単位時間あたりの全放射エネルギー。

制動放射: 速度が遅い場合

(1) $\beta \ll 1$ の場合.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int d\Omega \left(\mathbf{n}(t) \times \{ \mathbf{n}(t) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}(t) \} \right)^2$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \int d\Omega \sin^2 \theta (\dot{\boldsymbol{\beta}}(t))^2$$

$$= \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} (\dot{\mathbf{v}}(t))^2 \int d\Omega \sin^2 \theta$$

$$= \frac{q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} (\dot{\mathbf{v}}(t))^2$$

$\mathbf{n}(t)$ と $\dot{\boldsymbol{\beta}}(t)$
のなす角 θ

$$\begin{aligned} \int d\Omega \sin^2 \theta &= \int d\theta d\phi \sin^3 \theta \\ &= 2\pi \left[-\frac{3}{4} \cos \theta + \frac{1}{12} \cos 3\theta \right]_0^\pi \\ &= 2\pi \times \frac{8}{6} = \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

: ラーモア (Larmor) の公式.

放射の角度分布は電気双極子放射と同様.

($\ddot{\mathbf{p}} = q\dot{\mathbf{v}}$ の対応)

$$* \text{全平均放射エネルギー} : \frac{d\bar{W}}{dt} = \frac{q^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} |\dot{\mathbf{v}}(t)|^2$$

制動放射: 加減速

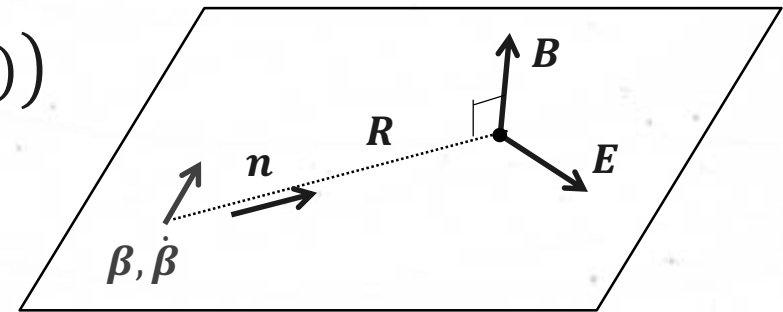
(2) $\beta \parallel \dot{\beta}$ の場合 : 運動方向への加減速.

$$\mathbf{n}(t) \times \{(\mathbf{n}(t) - \beta(t)) \times \dot{\beta}(t)\} = \mathbf{n}(t) \times (\mathbf{n}(t) \times \dot{\beta}(t))$$

従って,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n}(t) \times (\mathbf{n}(t) \times \dot{\beta}(t))$$

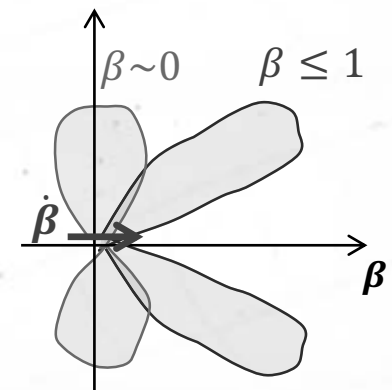
$$\mathbf{B} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{R^2}{c^2 S^3} \mathbf{n}(t) \times \dot{\beta}(t)$$



また, 放射エネルギーは,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2(\dot{v}(t))^2}{16\pi^2\epsilon_0 c^3} \int d\Omega \frac{(\sin\theta)^2}{(1-\beta\cos\theta)^5} = \frac{q^2(\dot{v})^2}{6\pi\epsilon_0 c^3(1-\beta)^3}$$

→ β が1に近づくにつれて, 前方に鋭く放射されるような角度分布に傾いていく (デモ ●).



制動放射：運動と垂直方向の加速度

- (3) $\beta \perp \dot{\beta}$ の場合：運動方向と垂直方向への加速。
→ 円軌道上を一定の速さでまわる。

一様磁場 B 内での荷電粒子の円運動

→ 角速度 $\omega = \frac{qB}{m} \sqrt{1 - \beta^2}$ となる (荷電粒子の質量 m)。

円運動は $x - y$ 平面内で, 観測点 x は $y - z$ 面内にあるとする。

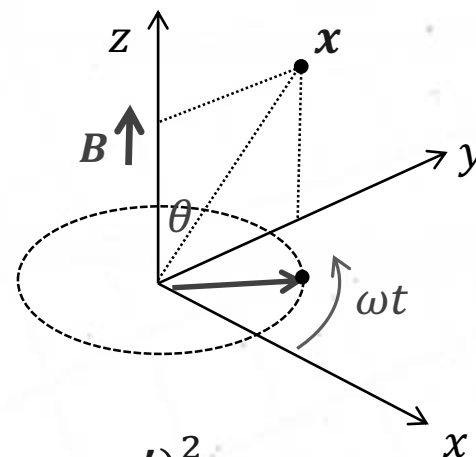
$$\beta = (-\beta \sin \omega t', \beta \cos \omega t', 0)$$

$$\dot{\beta} = (-\dot{\beta} \cos \omega t', -\dot{\beta} \sin \omega t', 0)$$

$$\mathbf{n} = (0, \sin \theta, \cos \theta)$$

これから

$$\frac{d^2W}{dt d\Omega} = \frac{q^2 v^2 \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(1 - \beta^2) \cos^2 \theta + (\beta - \sin \theta \cos \omega t')^2}{(1 - \beta \sin \theta \cos \omega t')^5}$$



制動放射: 運動と垂直方向の加速度

ここで, n と β がなす角を α とすると, それらのベクトルの内積から
 $\cos \alpha = \sin \theta \cos \omega t'$ と書くことができる.

$$\Rightarrow \frac{d^2W}{dt d\Omega} = \frac{q^2 v^2 \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(1-\beta^2)\cos^2 \theta + (\beta - \cos \alpha)^2}{(1-\beta \cos \alpha)^5}$$

* $x - y$ 平面内 ($\theta = \pi/2$) では,

$$\frac{d^2W}{dt d\Omega} = \frac{q^2 v^2 \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{(\beta - \cos \alpha)^2}{(1-\beta \cos \alpha)^5}$$

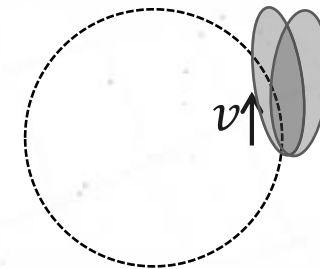
* $y - z$ 平面内では $\omega t' = 0$ のとき,

$$\frac{d^2W}{dt d\Omega} = \frac{q^2 v^2 \omega^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1-\beta \cos \alpha)^3}$$

$\cos \alpha = \sin \theta$

→光速に近い ($\beta \cong 1$) とき,

放射は, 運動の前方 ($\cos \alpha \sim 1$) に集中.



制動放射の全エネルギー

放射の全エネルギーは,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2 v^2 \omega^2}{6\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{1}{(1-\beta^2)^5}$$

→ シンクロトロン放射 (Synchrotron Radiation)

制動放射・シンクロトン放射

・制動放射・シンクロトン放射

*加速器におけるエネルギー損失

*放射光による物性測定



大型ハドロン衝突型加速器 LHC (CERN)
最大エネルギー: 7 TeV, 周長 :27 km



大型放射光施設 SPring-8 (JASRI)
最大エネルギー: 8GeV, 周長 :1,436m

(例) Rutherfordの水素原子模型

・陽子の周りを電子が円運動している場合

$$* \text{力のつりあい} : mr\omega^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

$$\rightarrow \text{加速度} \quad r\omega^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m r^2}$$

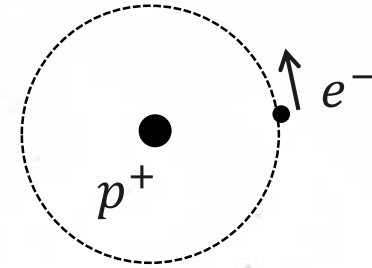
$$* \text{電子のエネルギー} \quad W = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r}$$

$$\therefore \frac{dW}{dt} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt}$$

*単位時間あたりに電子が失うエネルギー

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\text{加速度})^2 = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m r^2} \right)^2$$

$$\rightarrow \text{従って軌道半径の変化率} : \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{e^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{m r^2} \right)^2$$



Rutherfordの水素原子模型 (1911)

*電子が, 半径 a の円軌道から原子核に落ち込むまでの時間:

$$\int_0^T dt = -\frac{3}{4} \frac{m^2 c^3}{\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2} \int_a^0 r^2 dr$$

$$\therefore T = \frac{1}{4} \frac{m^2 c^3 a^3}{\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)^2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\alpha^5} \frac{h_b}{m c^2}$$

⇒ $T \sim 5 \times 10^{-11}$ sec
ごく微小時間で崩壊

ここで $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 h_b c} \cong \frac{1}{137}$: 微細構造定数

また, ボーア・モデル (Bohr-model) を仮定.

$$a = \frac{h_b^2}{m \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\right)} = \frac{\left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 h_b c}\right)^{-1} \cdot \frac{h_b}{m c}}{\alpha^{-1} = \left(\frac{1}{137}\right)^{-1}} \quad \text{コンプトン波長}$$

電子と電磁場の相互作用の
大きさを表わす定数 (無次元)

量子力学的な電子の
大きさの目安となる長さ

3.4 点電荷による電磁波の散乱

点電荷による電磁波の散乱

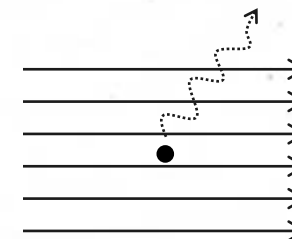
- 点電荷による電磁波の散乱:

点電荷に対して, 外部から電磁波が入射

→ 点電荷が加速運動

(電磁波はエネルギーの一部を失う)

→ 点電荷の加速度運動による電磁波放射.



* 質量 m , 電荷 q で外力 F を受けている点電荷に
平面波 $\mathbf{E}_{\text{in}}, \mathbf{B}_{\text{in}}$ が入射したとき, 運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{z}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)) + q(\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{z}(t), t) + \mathbf{v}(t) \times \mathbf{B}_{\text{in}}(\mathbf{z}(t), t))$$

点電荷の運動

- * ここで, $|\mathbf{B}_{\text{in}}| = \frac{1}{c} |\mathbf{E}_{\text{in}}|$ であることを考慮すると, 点電荷の速度が光速に比べて十分遅い時, 磁場の項は無視できる.
- * 点電荷の位置の変化が入射電磁波の波長と比べて十分小さいとき, \mathbf{E}_{in} の中の \mathbf{z} を, 点電荷の平均的な位置 \mathbf{z}_0 に置き換える.
→ $\mathbf{E}_{\text{in}}(\mathbf{z}(t), t) \cong \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)}$ とする.



$$\text{運動方程式: } m \frac{d^2 \mathbf{z}(t)}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{z}(t)) + q \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)}$$

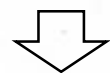
点電荷の運動による電磁波の放射

- 単位立体角・単位時間あたりに,
点電荷から放射される平均エネルギーは, (p.5)

$$\frac{d\bar{P}}{d\Omega} = \frac{d^2\bar{W}}{dt d\Omega} = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{z}}(t))|^2$$

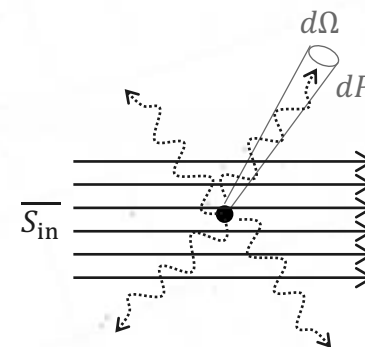
- 単位時間・単位面積あたりの入射電磁波の平均エネルギーは,

$$\overline{S_{\text{in}}} = \frac{1}{2 \mu_0 c} |\mathbf{E}_0|^2 = \frac{\epsilon_0 c}{2} E_0^2$$



電磁波が単位面積を通過して入射するとき, 単位時間に単位立体角内に放射される電磁波の強度 (散乱の微分断面積) は,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\bar{P}}{d\Omega} / \overline{S_{\text{in}}} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{q^2}{c^4 E_0^2} |\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \ddot{\mathbf{z}}(t))|^2$$



Thomson散乱

(1) Thomson散乱：自由電子による電磁波の散乱.

運動方程式： $m \ddot{\mathbf{z}}(t) = q \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \omega t)}$ より,

$$\ddot{\mathbf{z}}(t) = \frac{q \mathbf{E}_0}{m} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \omega t)} .$$

変位量小さいという
近似は用いていない

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left(\frac{q}{m c^2} \right)^2 \left(\mathbf{n} \times \left(\mathbf{n} \times \frac{\mathbf{E}_0(t)}{E_0} \right) \right)^2 = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 \sin^2 \Theta$$

ここで, Θ は, \mathbf{n} と \mathbf{E}_0 のなす角.

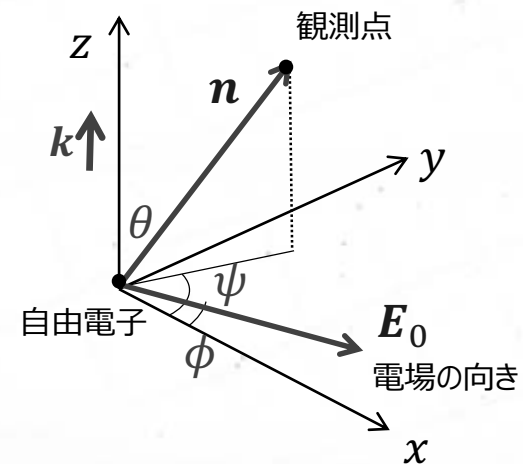
$$\sin^2 \Theta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \psi)$$

$$\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$$

$$\mathbf{E}_0 = E_0 (\cos \psi, \sin \psi, 0)$$

↓

$$\sin^2 \Theta = 1 - \cos^2 \Theta = 1 - \sin^2 \theta \cos^2(\phi - \psi)$$



*入射波が無偏光のとき, 角度 ψ について平均をとると,

$$\sin^2 \Theta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \theta)$$

となるので,

$$\frac{d\sigma_T}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \theta) \text{ が得られる.}$$

古典電子半径

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} = 2.8 \times 10^{-15} \text{ [m]}$$

$$\rightarrow \text{Thomson散乱の全断面積 } \sigma_T = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 m c^2} \right)^2$$

*これを書き換えて物理的な解釈をする.

$$\sigma_T = \frac{8}{3} \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 h_b c} \right)^2 \cdot \pi \left(\frac{h_b}{m c} \right)^2$$

コンプトン波長: 電子の大きさ

$$\alpha^2 = \left(\frac{1}{137} \right)^2 \text{ 電子雲との相互作用確率}$$

電磁波の波長が長い時に
適用可. 短いときはCompton
散乱がおきる.

→ Klein-Nishinaの公式

Rayleigh散乱

(2) Rayleigh散乱：電子が調和振動子として振る舞う場合。

振動周波数が $\omega_0/2\pi$ であるとする、運動方程式は、

$$m \ddot{\mathbf{z}}(t) + m \omega_0^2 \mathbf{z}(t) = q \mathbf{E}_0 e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)} \quad \text{となる.}$$

これを解くと、

$$\mathbf{z}(t) = \frac{q \mathbf{E}_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)}$$

$$\text{したがって, } \ddot{\mathbf{z}}(t) = \frac{-q \mathbf{E}_0 \omega^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}_0 - \omega t)} .$$

* 以上より、

$$\text{Rayleigh散乱の微分断面積} \quad \frac{d\sigma_R}{d\Omega} = \frac{d\sigma_T}{d\Omega} \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

$$\text{Rayleigh散乱の全断面積} \quad \sigma_R = \sigma_T \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}$$

* 入射電磁波の周波数が低い時 ($\omega_0 \gg \omega$)

$$\sigma_R \cong \sigma_T \frac{\omega^4}{\omega_0^4} = \sigma_T \frac{\lambda_0^4}{\lambda^4}$$

Rayleigh散乱の全断面積は, 入射波の波長の4乗に反比例.

(例) 空が青いのは Rayleigh散乱が関係.

*長波長近似について

ミクロなシステム → 不確定性関係

$$a \cdot p \sim h, \quad p = \frac{h_b \omega_0}{c}$$

$$\rightarrow \omega_0 \sim 2\pi c/a$$

原子サイズ 10^{-10} m とすると,

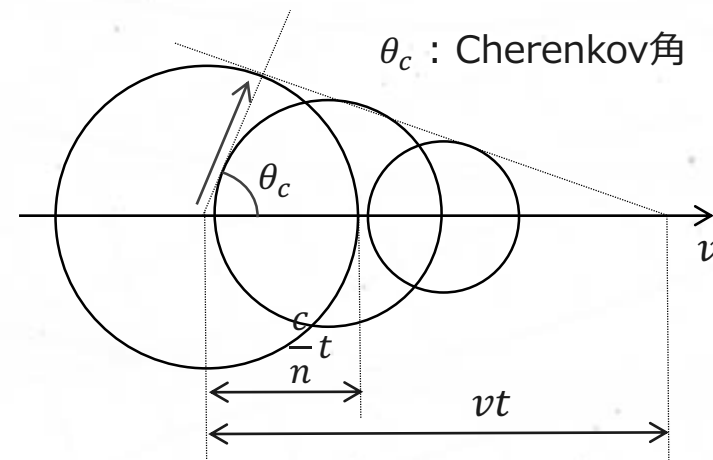
$$\omega_0 \sim 2 \times 10^{19} [\text{sec}^{-1}] \rightarrow h_b \omega_0 \sim 1 \text{ keV}$$

3.5 チェレンコフ放射

チェレンコフ放射

- チェレンコフ放射 (Cherenkov Radiation) :
荷電粒子の速度 $v (= \beta c)$ が, 物質中の光速 c/n を超えた時に出る光. (音の場合の衝撃波に相当).

1934年 パーヴェル・チェレンコフが発見.
1937年 イリヤ・フランク,イゴール・タムにより
理論的な説明.
1958年 3名にノーベル物理学賞



Cherenkov角の測定 → 粒子の速度がわかる.

チェレンコフ放射

*高エネルギー素粒子・宇宙線の検出実験で用いられる。

(例) スーパーカミオカンデ : 水の $n = 1.333 \rightarrow \beta > 0.75$ で放射。

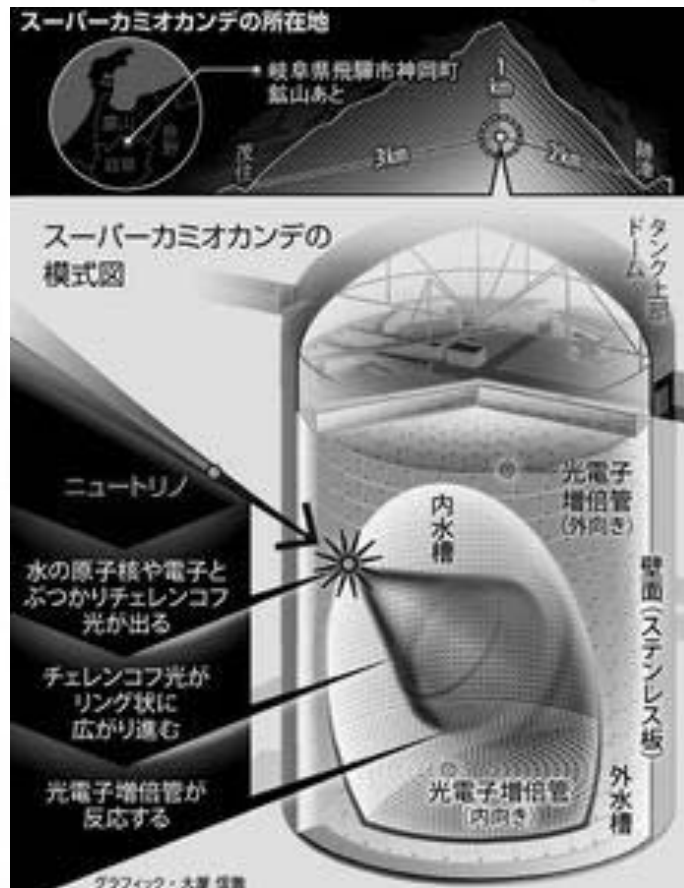
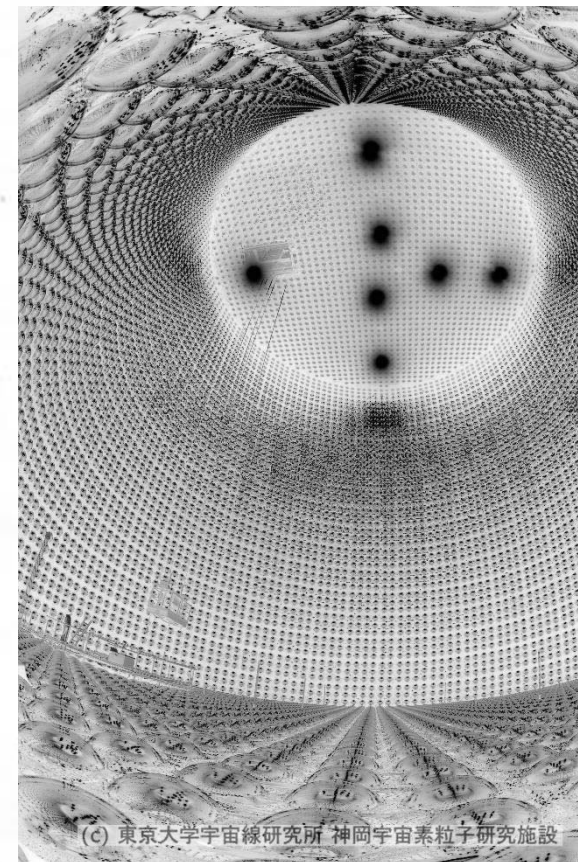


図:
Asahi.comより



チェレンコフ放射

・リエナール・ヴィーヒルトの電場から導く.

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right]_{\text{ret}}$$

*近似を行う

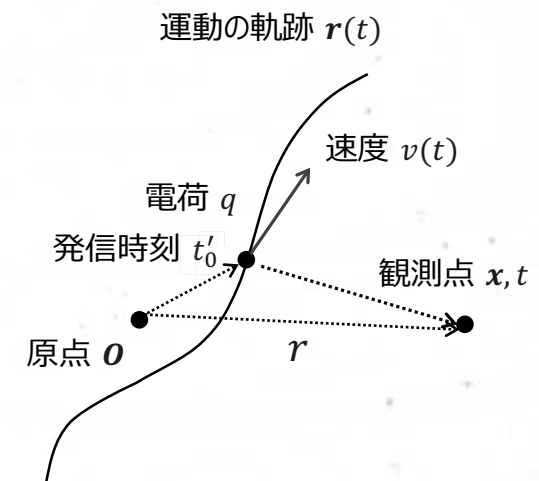
観測点は十分遠方とする:

- $|\mathbf{R}| = |\mathbf{x} - \mathbf{r}| \cong |\mathbf{x}| = r$
- $\mathbf{n} = \mathbf{R}/R \cong \mathbf{x}/r$
- r は時間変化しない.



$$\mathbf{E} \cong \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c r} \frac{1}{[1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}]} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}} \right] = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c r} \frac{d}{dt} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}} \right]$$

※ ここで, $\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{[1-\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\beta}]}$ を用いた.



*電場をフーリエ変換し, 部分積分

$$\mathbf{E}(\omega) = -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 c r} \int dt \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right] e^{i\omega t}$$

ここで, $t \rightarrow t'$ に変換, $R(t') \cong r - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}(t')$ とすると,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\omega) &= -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 c r} \int dt' (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})) e^{i\omega(t' + R(t')/c)} \\ &\cong -\frac{i\omega q}{4\pi\epsilon_0 c r} e^{i\omega r/c} \int dt (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})) e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c)} \end{aligned}$$

*単位立体角あたりの放射エネルギーは

$$\frac{dP}{d\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{1}{\mu_0 c} r^2 |\mathbf{E}|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{d^2 P}{d\Omega d\omega}$$

$$\frac{d^2 P}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \cdot \frac{1}{\pi} \left| \int dt (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})) e^{i\omega(t - \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}/c)} \right|^2$$

*媒質内では, 屈折率の効果は

$q \rightarrow q/n, c \rightarrow c/n$ と置き換えることで得られる.
(Maxwell方程式は, この置き換えで
自由空間のものと同じ形になる.)

*等速運動 $r = vt$ のとき, r と n のなす角を θ とすると,

$$\frac{d^2 P}{d\Omega d\omega} = \frac{q^2 \omega^2 n \beta^2 \sin^2 \theta}{(4\pi)^2 \varepsilon_0 c} \cdot \frac{1}{\pi} \left| \int dt e^{i\omega(t - n\beta \cos \theta)} \right|^2$$

$$\left| \int_{-T}^T dt e^{i\omega(t - n\beta \cos \theta)} \right|^2 = 4 \left| \frac{\sin\{\omega T(1 - n\beta \cos \theta)\}}{\omega(1 - n\beta \cos \theta)} \right|^2$$

$$\cong \frac{4\pi T^2}{\omega} \delta(T(1 - n\beta \cos \theta)) \quad (\omega \gg 1)$$

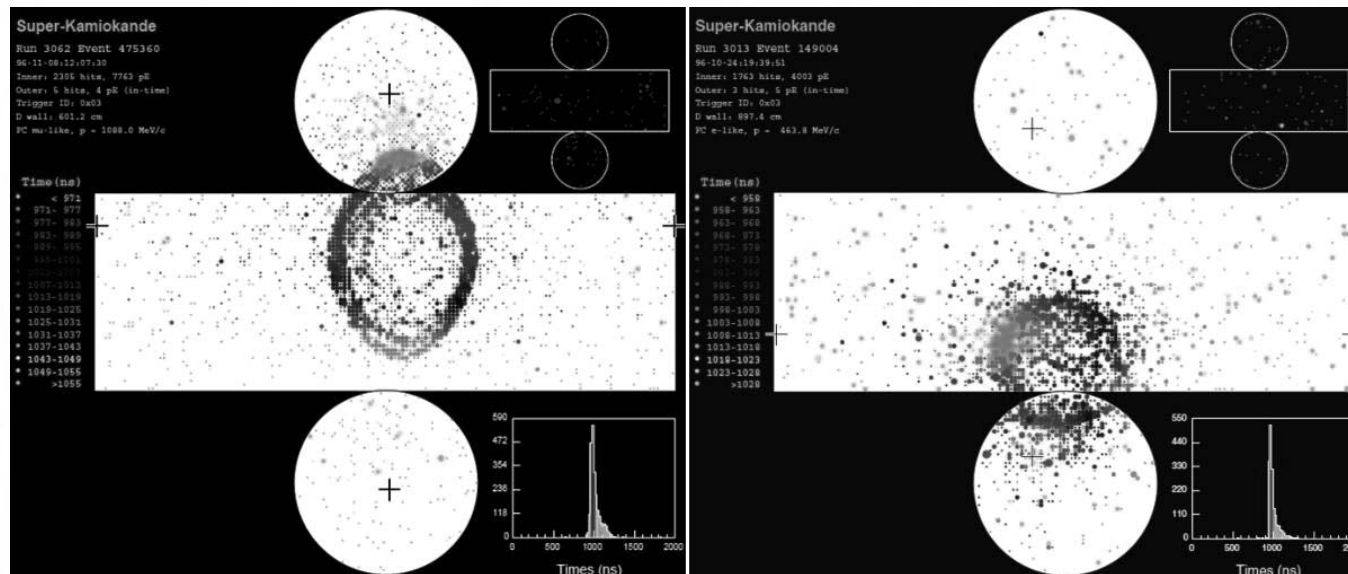
→電磁波は, $\cos \theta_c = \frac{1}{n\beta}$ の円錐状にある.

* 全立体角に放射されるエネルギーは,

$$\frac{dP}{d\omega} = 2vT \frac{\mu_0 q^2 \omega}{4\pi} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right)$$

単位飛程あたりの放射エネルギーは

$$\frac{d^2P}{d\omega dz} = \frac{\mu_0 q^2 \omega}{4\pi} \left(1 - \frac{c^2}{n^2 v^2}\right) \quad \text{となる.}$$



3.6 電磁波放射の反作用

電磁波放射の反作用

- 荷電粒子が加速度運動によって電磁波放射するとき, その力学的エネルギーは失われる (エネルギー保存則).
→ 荷電粒子の運動の減衰力として運動方程式に現れるはず.

*減衰力の大きさ :

$$\begin{array}{c} \overline{K} \\ \uparrow \\ \text{エネルギー放射} \\ \text{に起因する減衰力} \end{array} = - \frac{dW}{dx} = - \frac{dW}{dt} \frac{dt}{dx} \quad \rightarrow \quad \overline{K} \cdot \boldsymbol{v} = - \frac{dW}{dt}$$

\uparrow
エネルギー放射率

(参考)

揺動散逸定理: 熱力学系でのエネルギー散逸と揺動力の関係を示す.

荷電粒子の運動における反作用

- 速度が遅い時 → ラーモアの公式 (p.6)

$$\frac{dW}{dt} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} (\dot{\mathbf{v}}(t))^2$$

- 荷電粒子が周期運動をしており, ある2つの時刻 t_1, t_2 で速度が 0 になる ($\mathbf{v}(t_1) = \mathbf{v}(t_2) = \mathbf{0}$) 場合を考える.

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v} dt &= -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\mathbf{v}}(t))^2 dt \\ &= -\frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\underbrace{\left[\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \mathbf{v} \right]_{t_1}^{t_2}}_{=0} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v} dt \right] \end{aligned}$$

従って,
$$\mathbf{K} = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}(t)$$

減衰力の大きさ

・減衰力の式を変形して, その大きさを評価する

$$K = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{v}}(t) = \frac{2}{3} \underbrace{\left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 h_b c} \right)}_{\text{微細構造定数 } \alpha} \left(\frac{h_b}{m c^2} \right) m \ddot{\mathbf{v}}(t)$$
$$\rightarrow T_0 \equiv \frac{2}{3} \alpha \left(\frac{h_b}{m c^2} \right)$$

→ 電子の場合

$$T_0 = \frac{2}{3} \alpha \left(\frac{h_b}{m c^2} \right) \cong \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{137} \cdot 10^{-21} [\text{sec}] \sim 10^{-23} [\text{sec}]$$

*加速度変動の時間スケールが十分長い時 ($T_0 \ll T$), 減衰力は小さい.

巨視的な物体の場合, T_0 はさらに小さな値になる.

(例) 電荷を持つ調和振動子の減衰

- 点電荷が調和振動子として運動する場合を考える.

運動方程式は, $m\ddot{z} + \kappa z = K$

$$\rightarrow \ddot{z} + \omega_0^2 z = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} \ddot{z} \quad (m\omega_0^2 = \kappa)$$

減衰力が十分小さいとすると, この運動方程式の解は,

$$z(t) = ae^{(i\omega_0 - \frac{\gamma}{2})t} \quad \text{と書きあらわすことができる.}$$

ここで $\gamma = \frac{q^2 \omega_0^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3}$ (ただし, $\gamma \ll \omega_0$).

電子の場合 $10^{23} \text{ sec}^{-1} \gg \omega_0$ に相当.
 γ 線の角振動数よりも十分に小さい時になりたつ.

*このとき, 放射される電磁波は単色光ではない.

$$\overline{W} = \int_{-\infty}^{\infty} I(\omega) d\omega$$

$$\left(\text{ここで } I(\omega) \cong \frac{q^4 \omega_0^4 |a|^2}{6(2\pi)^2 \varepsilon_0 c^3} \cdot \frac{1}{(\omega_0 - \omega)^2 + (\gamma/2)^2} \right) \text{となる.}$$

*中心角周波数 ω_0 の周りに広がりをもつスペクトル.

$$\text{*半値全幅 } \gamma = \frac{q^2 \omega_0^2}{6\pi \varepsilon_0 m c^3}$$

→ 自然線幅 (Natural Line Bandwidth)

