
3. 荷電粒子がつくる電磁波

3.1 リエナール-ヴィーヘルトのポテンシャル

運動する荷電粒子が出す電磁波

・これまで見てきたもの.

*自由電磁場 : $\rho = 0, j = 0$ の場合.

→ 伝搬, 反射, 屈折 など.

*電磁波の放射 : $\rho \neq 0, j \neq 0$ の場合.

→ 電磁波の生成. 遅延ポテンシャルや多重極展開で表現.



・ここからは, 荷電粒子が出す電磁波を考える.

*物質の中の原子核・電子で生成される電磁波.

*高エネルギー荷電粒子の性質.

・荷電粒子が等速運動をしている場合は,

静電場・静磁場をローレンツ変換する問題に帰着.

加速度運動成分がある場合 → 電磁波放射.

リエナール-ヴィーヒェルトのポテンシャル

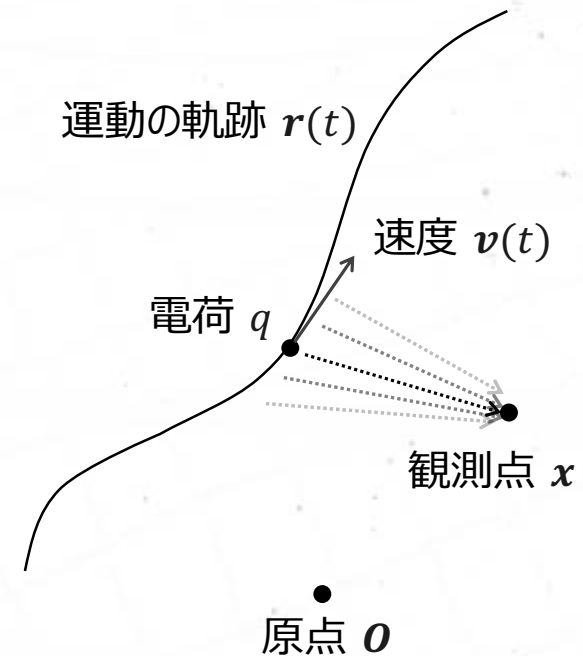
- 点電荷の運動による電磁ポテンシャル:

リエナール-ヴィーヒェルト (Liénard-Wiechert) のポテンシャル.

* 点電荷の運動による電荷・電流密度

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$$

$$\mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q \mathbf{v} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$$



点電荷による遅延ポテンシャル

- 以前に導いた遅延ポテンシャル (時間積分前, 資料1のA)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \rho(\mathbf{x}', t')$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \mathbf{j}(\mathbf{x}', t')$$

に点電荷の運動に起因する電荷・電流密度

$$\rho(\mathbf{x}, t) = q \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t)) \quad , \quad \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) = q \mathbf{v} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}(t))$$

を代入すると,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d^3\mathbf{x}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t'))$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \int d^3\mathbf{x}' \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}\right)}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \mathbf{v} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{r}(t'))$$

となる.

•空間積分を実行すると, スカラーポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|} \delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}{c}\right) \quad \text{となる.}$$

*これは、デルタ関数に関する公式:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(g(t')) = \frac{f(t')}{\left|\frac{dg(t')}{dt'}\right|} \Bigg|_{g(t')=0}$$

において,

$$f(t') = \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}, \quad g(t') = t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{r}(t')|}{c} - t'$$

と置いたものと考えれば良い.

* $g(t') = 0$ を満たす t'

$$\rightarrow t'_0 = t - \frac{|x-r(t'_0)|}{c} \quad \text{の解: 発信時刻}$$

$$\begin{aligned} * \frac{dg(t')}{dt'} &= \frac{d}{dt'} \left[t - \frac{|x-r(t')|}{c} - t' \right] \\ &= - \left(1 - \frac{1}{c} \cdot \frac{x-r(t')}{|x-r(t')|} \frac{dr(t')}{dt'} \right) = - \left(1 - \frac{1}{c} \cdot \frac{x-r(t')}{|x-r(t')|} v(t') \right) \end{aligned}$$

よって, スカラーポテンシャルは,

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x-r(t'_0)| - \frac{v(t'_0)}{c}(x-r(t'_0))} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{S} \right]_{\text{ret}}$$

ただし,

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

$$S = R(t) \left[1 - \frac{\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c} \right]$$

'ret' : Retarded (遅延)

$$t'_0 = t - \frac{|x-r(t'_0)|}{c}$$

を満たす発信時刻での値.

- ベクトルポテンシャルも同様に求められる。
まとめると、以下のようなになる。

リエナール-ヴィーヘルトのポテンシャル

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{S} \right]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{S} \right]_{\text{ret}}$$

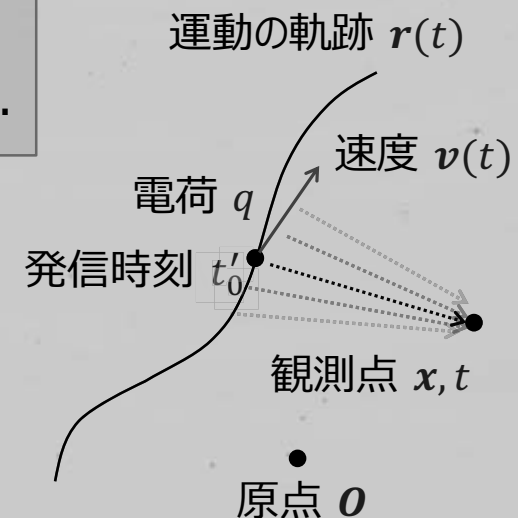
'ret' は、発信時刻

$$t'_0 = t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{r}(t'_0)|}{c}$$

ただし、

$$S = R(t) \left[1 - \frac{\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{v}(t)}{c} \right]$$

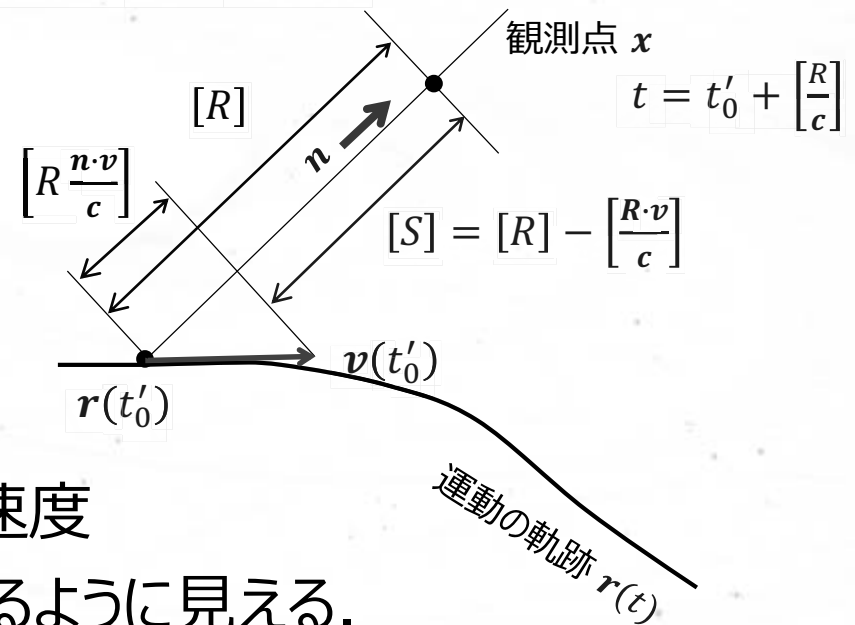
$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{x} - \mathbf{r}(t), \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$



※ 点電荷が静止しているとき → クーロンポテンシャルに帰着。

補足説明1：物理的解釈

- 観測点 x におけるポテンシャルは,
 - * 時刻 t'_0 に発信された波が、距離 R を、光速 c で伝搬する時間だけ遅れて到着したもの。



- * 感じるポテンシャルは、視線方向速度相当分だけ近く(遠く)に電荷があるように見える。

- 点電荷が時間とともに位置を変えて動いているので、その分を積分する必要がある。

→ $\frac{1}{1 - \frac{n \cdot v}{c}}$ 倍だけ伸びている。

(波が粒子を通過するのに要する時間)

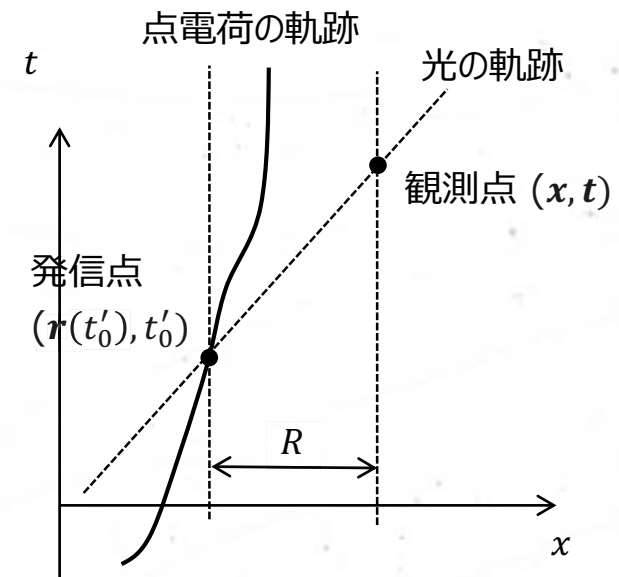
補足説明2：発信時刻

・発信時刻 t'_0 について.

* t'_0 は $t'_0 = t - \frac{|x - r(t'_0)|}{c}$ 満たす.



時空図において、観測点を含む
光円錐と、点電荷の軌跡の交点
の時刻が解.



3.2 運動する荷電粒子が作る電磁波

運動する荷電粒子がつくる電磁波

- 求めた電磁ポテンシャル (リエナール-ヴィーヒェルトのポテンシャル)

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{S} \right]_{\text{ret}}, \quad \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{S} \right]_{\text{ret}}$$

に対して, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, $\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi$ を用いて計算.



運動する荷電粒子が作る電磁場

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{S^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2) + \frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n} \times \{(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{R}{S^3} (1 - \beta^2)(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}) + \frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n} \times \{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}\} \right]_{\text{ret}}$$

$$\text{ただし, } \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$$

* ここでも, $\mathbf{B} = \frac{1}{c} [\mathbf{n}] \times \mathbf{E}$ がなり立っている.

* \mathbf{E}, \mathbf{B} の表式で,

- 第1項: $\boldsymbol{\beta}$ のみを含む. 遠方では R^{-2} で減衰.

- 第2項: 加速度 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ を含む. 遠方では R^{-1} で減衰.

→ 電磁波の放射に関係.

* 速度 v が一定(等速運動)のとき,

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{S^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2) \right]_{\text{ret}}$$

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{R}{S^3} (1 - \beta^2)(\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}) \right]_{\text{ret}}$$

補足：電磁場の計算 (1/4)

[S] の時間・空間 (x, y, z, t) 偏微分.

→ v, R などを x, y, z, t' の関数で表現し,
その後, x, y, z, t へ変換することで計算.

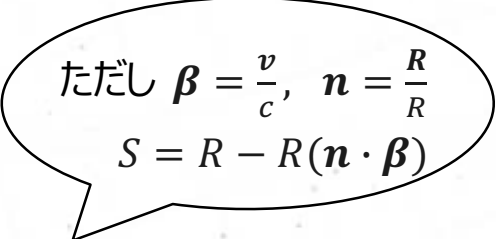
・準備1

* $R^2 = (x - x'(t'))^2 + (y - y'(t'))^2 + (z - z'(t'))^2$ の両辺を t で偏微分.

$$\begin{aligned} R \frac{\partial R}{\partial t} &= -(x - x'(t')) \frac{\partial x'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} - (y - y'(t')) \frac{\partial y'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} - (z - z'(t')) \frac{\partial z'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} \\ &= -\mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t'}{\partial t} \end{aligned}$$

* $R = c(t - t')$ の両辺を t で偏微分.

$$\frac{\partial R}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$



ただし $\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}$, $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{R}}{R}$
 $S = R - R(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$

$$\text{これらから } \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right) = -\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \frac{\partial t'}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial t'}{\partial t} = \frac{1}{1 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} = \frac{R}{S}$$

補足：電磁場の計算 (2/4)

・準備2

* $R^2 = (x - x'(t'))^2 + (y - y'(t'))^2 + (z - z'(t'))^2$ の両辺を x で偏微分.

$$\begin{aligned} R \frac{\partial R}{\partial x} &= -(x - x') \left(1 - \frac{\partial x'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \right) - (y - y') \frac{\partial y'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} - (z - z') \frac{\partial z'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial x} \\ &= (x - x') - \mathbf{R} \cdot \mathbf{v} \frac{\partial t'}{\partial x} \end{aligned}$$

* $R = c(t - t')$ の両辺を x で偏微分.

$$\frac{\partial R}{\partial x} = -c \frac{\partial t'}{\partial x}$$

これから
$$\frac{\partial t'}{\partial x} = -\frac{1}{R c} (x - x') + \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} \frac{\partial t'}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial t'}{\partial x} = \frac{1}{1 - (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})} \frac{-(x - x')}{R c} = -\frac{(x - x')}{S c}$$

従って
$$\underline{\nabla t' = -\frac{\mathbf{R}}{S c}}$$

補足：電磁場の計算 (3/4)

・準備3

$$R = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$$

$S = R - R(\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})$ の微分を考える.

* $\nabla = \nabla^* + \nabla t' \cdot \frac{\partial}{\partial t'}$ とおくと (∇^* は $t' = \text{const.}$ とした場合の空間微分)

$$\begin{aligned}\nabla[S] &= \nabla^*[S] + \nabla t' \cdot \frac{\partial}{\partial t'} [S] \\ &= [\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}] - [c \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - c \beta^2 + R \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}] \nabla t'\end{aligned}$$

$$* \frac{\partial[S]}{\partial t} = -[c \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta} - c \beta^2 + R \cdot \dot{\boldsymbol{\beta}}] \frac{\partial t'}{\partial t}$$

補足：電磁場の計算 (4/4)

$$\bullet \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A} - \nabla \phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{S^2} \right] \nabla[S] - \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{1}{S} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \frac{\mathbf{v}}{S^2} \frac{\partial S}{\partial t} \right]$$

ここで、 $\left[\frac{\partial S}{\partial t} \right] = \frac{\partial[S]}{\partial t}$
などを用いた。

$$\rightarrow \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{R}{S^3} (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta})(1 - \beta^2) + \frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n} \times \{ (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} \right]$$

'ret'の文字は省略

$$\bullet \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \text{rot} \left[\frac{\mathbf{v}}{S} \right] = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{S^2} \times \nabla S + \frac{1}{S} \text{rot } \mathbf{v} \right] \\ &= \frac{\mu_0 q}{4\pi} \left[\frac{\mathbf{v}}{S^2} \times \nabla^* S - \mathbf{v} \times \frac{R}{c S^3} \frac{\partial S}{\partial t'} - \frac{R}{c S^2} \times \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t'} \right] \\ &= \dots \end{aligned}$$

ここで、

$$\text{rot} = \text{rot}^* - \frac{R}{c S} \times \frac{\partial}{\partial t'}$$

を用いる。

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{R}{S^3} (1 - \beta^2) (\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{n}) + \frac{R^2}{c S^3} \mathbf{n} \times \{ \mathbf{n} \times (\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}} \} \right]$$

※ ここで、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ を用いた。

おまけ：ヘヴィサイド・ファインマンの表式

・ヘヴィサイド・ファインマン(Heaviside-Feynman)の表式

$$* \mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\mathbf{n}}{R^2} + \frac{R}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{n}}{R^2} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial t^2} \right]$$

※「ファインマン物理学III」式(20.1)

$$* c\mathbf{B} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}$$

$$\rightarrow \mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{\mathbf{n}}{R} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{n} \times \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial t^2} \right]$$

電場 = [(クーロン項) + (時間微分)×(時間) + (放射項)]

※ 上記の表式を各自で求めてみて下さい。

* ϕ, A の空間積分する前の表式 (p.7) から出発.

* $\left[\frac{1}{S} \right] = \left[\frac{1}{R} \left(1 - \frac{1}{c} \frac{\partial R}{\partial t} \right) \right]$, $[\mathbf{v}] = -[\dot{\mathbf{R}}] = -\left[\frac{S}{R} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t} \right]$ を利用.