Probing Planck-scale physics with quantum optics

安東研輪講 2014.11.13

小森健太郎

時空の量子化

- 時空に最小単位は存在するか？

他の物理量と同様、時空も離散的である可能性がある。

プランク時間 $t_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} = 5 \times 10^{-44}\ \mathrm{s}$

プランク長 $l_\mathrm{P} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} = 2 \times 10^{-35}\ \mathrm{m}$

プランクスケールがその有力候補

Loop Quantum Gravity

- 空間の量子化を主張する、Super String Theoryと並ぶ究極の理論候補

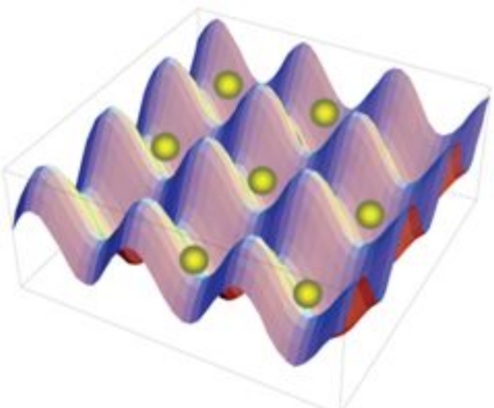
area operator

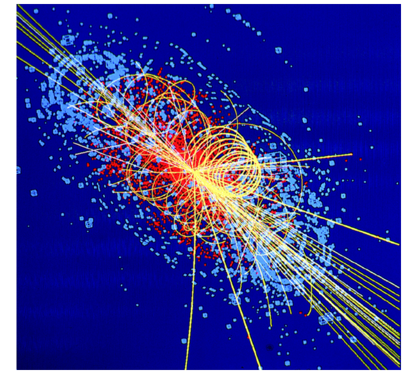
$$\hat{A}_{\Sigma}\psi_s = 8\pi \boxed{l_{\mathrm{P}}^2} \beta \sum_I \sqrt{j_I(j_I+1)}\psi_s$$

"最小面積"が存在する！

⇒ 何とかしてプランクスケールを見ることはできないだろうか

Direct Probing ?





光格子時計 重力波検出器 加速器

10^{-18} s 10^{-19} m 10^{4} GeV

25桁 16桁 15桁

$t_P = 10^{-43}$ s $l_P = 10^{-35}$ m $E_P = 10^{19}$GeV

不確定性関係

- ➢ Quantum Gravityを考えない通常の場合 ⇒ $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

- ➢ Quantum Gravityを考えると…

  ✧ 運動量の揺らぎ大

  ✧ Metricの揺らぎ大

  ✧ 位置の揺らぎ大

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0$$

不確定性関係

- ➢ 運動量の揺らぎ小
  - 通常の不確定性関係より位置揺らぎ大
- ➢ 運動量の揺らぎ極大
  - 一般相対性理論より位置揺らぎ大

⇩

- ✓ 位置揺らぎには最小値が存在！
- ✓ 運動量が非常に大きい領域では、通常の不確定性関係が成り立たない！

位置揺らぎの最小値

$$\boxed{\hbar = c = 1}$$

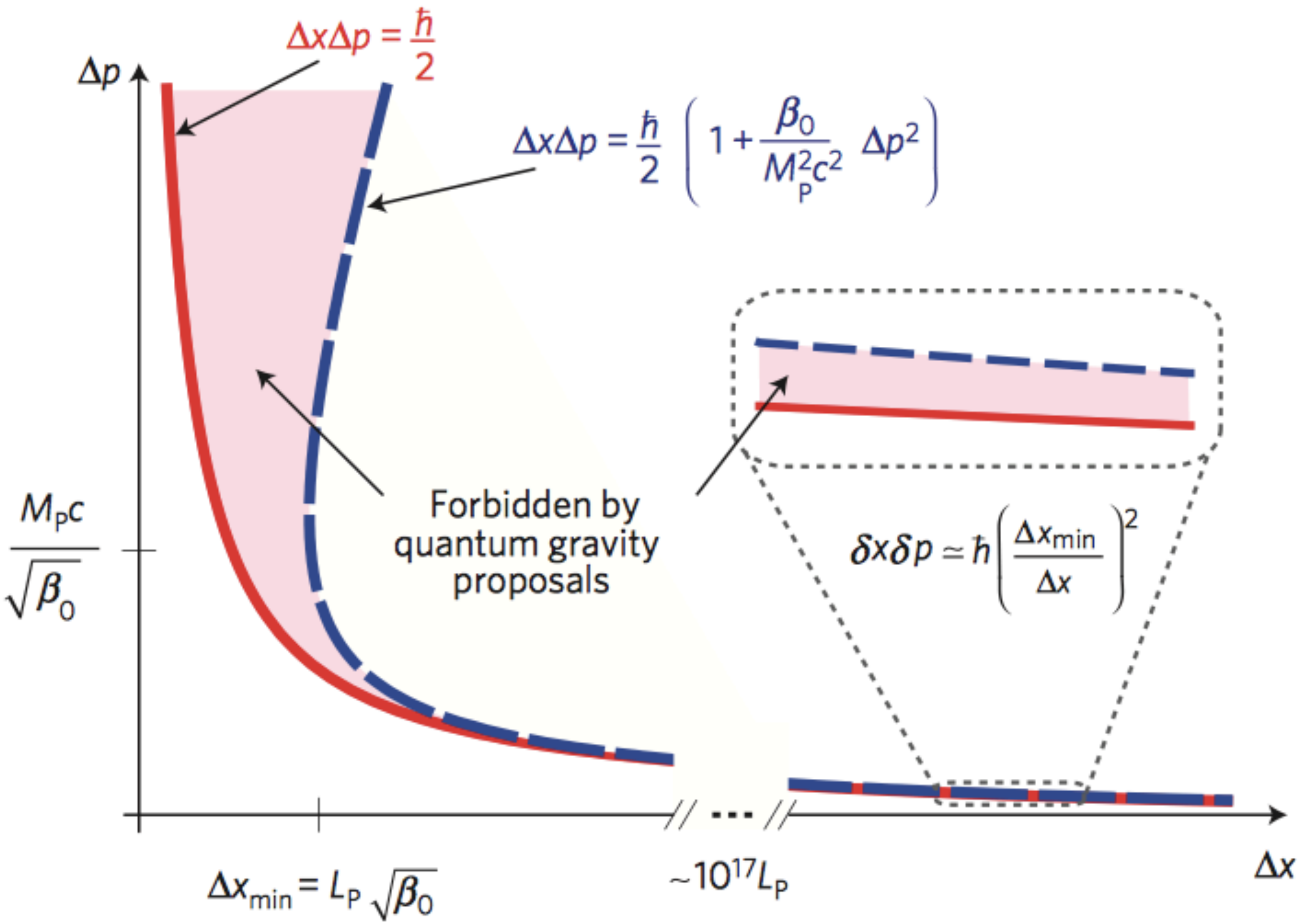
$$a = G\frac{m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad a \sim \frac{l_{\mathrm{P}}^2 \omega}{r^2}$$

$$\Rightarrow \quad x \sim l_{\mathrm{P}}^2 \omega \quad \Rightarrow \quad \Delta x \sim l_{\mathrm{P}}^2 \Delta p$$

$$\boxed{\Delta x \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\Delta p} + \beta_0 l_{\mathrm{P}}^2 \Delta p\right)}$$

$$\boxed{\Delta x_{\mathrm{min}} = \sqrt{\beta_0} l_{\mathrm{P}}}$$

不確定性関係



$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}$
Δp
$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}\left(1 + \frac{\beta_0}{M_P^2 c^2}\Delta p^2\right)$
$\frac{M_P c}{\sqrt{\beta_0}}$
Forbidden by
quantum gravity
proposals
$\delta x \delta p \simeq \hbar \left(\frac{\Delta x_{min}}{\Delta x}\right)^2$
$\Delta x_{min} = L_P\sqrt{\beta_0}$
$\sim 10^{17} L_P$
Δx

交換関係

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{1}{2} |[x, p]|$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \left[1 + \beta_0 \left(\frac{\Delta p}{m_{\mathrm{P}} c} \right)^2 \right]$$

Generalized Uncertain Principle

$$\boxed{[x, p]_{\beta_0} = i\hbar \left[1 + \beta_0 \left(\frac{p}{m_{\mathrm{P}} c} \right)^2 \right]}$$

交換関係

$$[x,p]_{\beta_0} = i\hbar\left[1 + \beta_0\left(\frac{p}{m_{\mathrm{P}}c}\right)^2\right]$$

$$[x,p]_{\mu_0} =$$

Table 1 | Current experimental bounds on quantum gravitational commutator deformations.

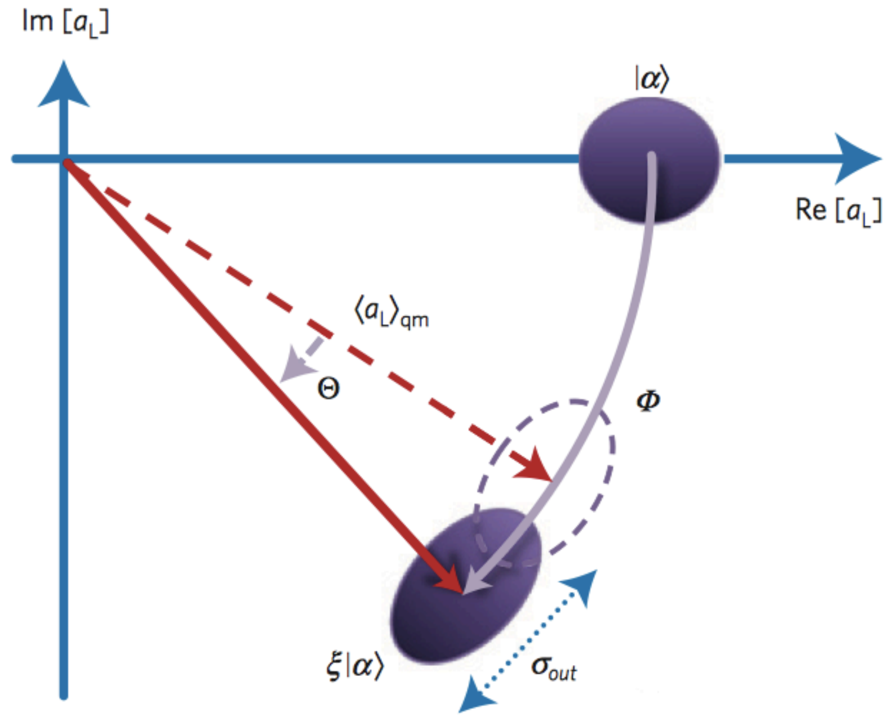
System/experiment	$\beta_{0,\max}$	$\gamma_{0,\max}$	References
Position measurement	10^{34}	10^{17}	20,21
Hydrogen Lamb shift	10^{36}	10^{10}	13,15
Electron tunnelling	10^{33}	10^{11}	13,15

The parameters β_0 and γ_0 quantify the deformation strengths of the modification given in equation (1) and of the modification given in equation (3), respectively. For electron tunnelling an electric current measurement precision of $\delta I \sim 1\,\mathrm{fA}$ was taken.

$$[x,p]_{\gamma_0} = i\hbar\left[1 - \gamma_0\frac{p}{m_{\mathrm{P}}c} + \gamma_0^2\left(\frac{p}{m_{\mathrm{P}}c}\right)^2\right]$$

実験原理

レーザー光のコヒーレント状態がどのように変化するかを測定



Intra-cavity Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_{\mathrm{m}} n_{\mathrm{m}} - \hbar g_0 n_{\mathrm{L}} X_{\mathrm{m}}$$

により発展

Optomechanical coupling rate $g_0 = \dfrac{\omega_{\mathrm{c}} x_0}{L}$

Zero point fluctuation $x_0 = \sqrt{\dfrac{\hbar}{m\omega_{\mathrm{m}}}}$ $p_0 = \sqrt{\hbar m \omega_{\mathrm{m}}}$

実験原理

$|\alpha\rangle$は $\exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}t\right)$ で時間発展

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_{\mathrm{m}} n_{\mathrm{m}} - \underbrace{\hbar g_0 n_{\mathrm{L}} X_{\mathrm{m}}}_{\text{支配的}}$$

⇩

パルス幅が振り子の共振周波数よりも十分短ければ、Effective unitary operator

$U = \exp(i\lambda n_{\mathrm{L}} X_{\mathrm{m}})$ で近似可能

条件その１ $\boxed{\omega_{\mathrm{m}} \ll \tau^{-1}}$

実験原理

Effective interaction strength

Const.

$$\lambda = \frac{g_0}{\kappa} \int dt e^{-2\kappa t} \kappa^2 \left[\int_{-\infty}^{t} dt' e^{\kappa t'} \alpha_{\mathrm{in}}(t') \right]^2$$

パルスがcavityによって変形してはいけない。

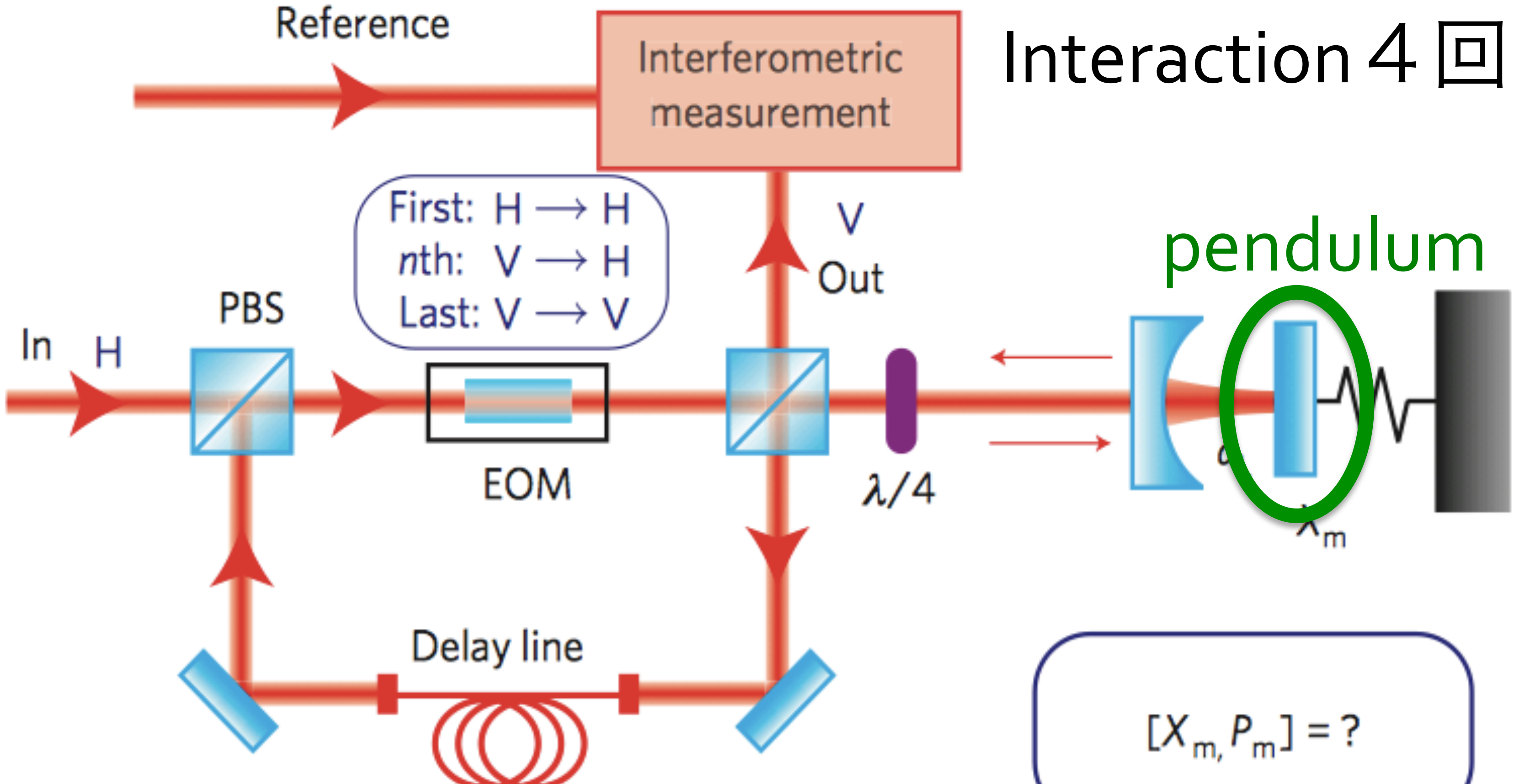
条件その２

$$\boxed{\tau^{-1} \ll \kappa}$$

このとき $\lambda \simeq \dfrac{g_0}{\kappa} = \dfrac{2\mathcal{F} x_0}{\lambda_{\mathrm{L}}}$ と近似できる。

実験原理

Interaction 4回



$[X_m, P_m] = ?$

Four-displacement operator

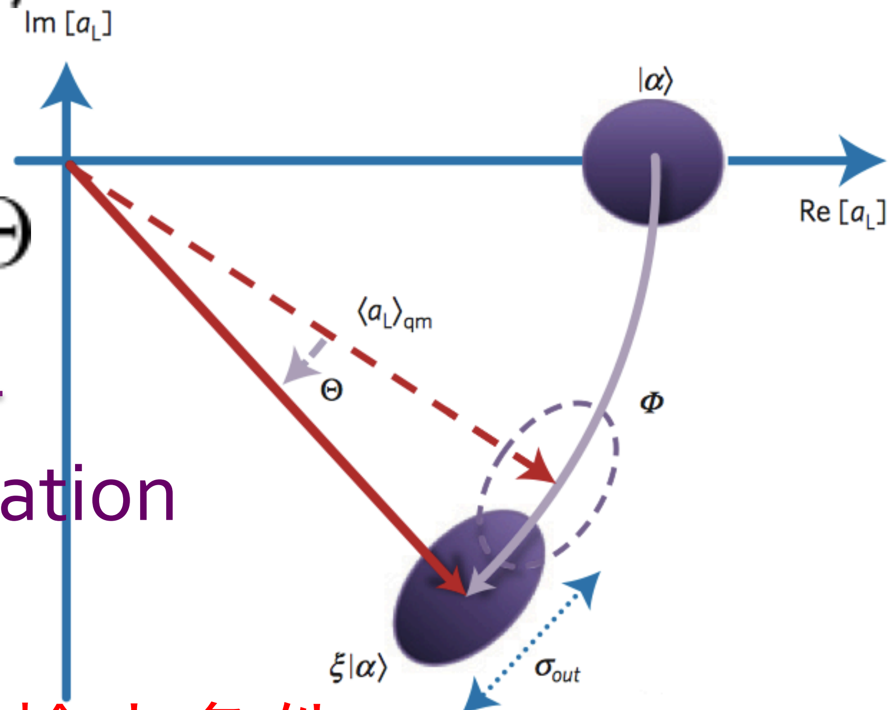
$$\xi = e^{i\lambda n_{\mathrm{L}} P_{\mathrm{m}}} e^{-i\lambda n_{\mathrm{L}} X_{\mathrm{m}}} e^{-i\lambda n_{\mathrm{L}} P_{\mathrm{m}}} e^{i\lambda n_{\mathrm{L}} X_{\mathrm{m}}}$$

実験原理

状態が $|\alpha\rangle \rightarrow \xi|\alpha\rangle$ と変化

Quadratureは

$$\langle a_{\mathrm{L}}\rangle \simeq \langle a_{\mathrm{L}}\rangle_{\mathrm{qm}} e^{-i\Theta}$$



通常の交換関係による変化分　deformation

検出条件

$$|\Theta| \simeq \beta_0 \frac{1024\hbar^3\mathcal{F}^4 N_{\mathrm{p}}^3}{3m_{\mathrm{p}}^2c^2\lambda_{\mathrm{L}}^4 m\omega_{\mathrm{m}}} > \delta\langle\Phi\rangle = \frac{1}{2\sqrt{N_{\mathrm{p}}N_{\mathrm{r}}}}$$

要求パラメーター

Table 2 | Experimental parameters to measure quantum gravitational deformations of the canonical commutator.

$[X_m, P_m]$ $\lvert\Theta\rvert$	Equation (2) $\mu_0 \frac{32\hbar\mathcal{F}^2 m N_p}{M_P^2 \lambda_L^2 \omega_m}$	Equation (3) $\gamma_0 \frac{96\hbar^2\mathcal{F}^3 N_p^2}{M_P c \lambda_L^3 m \omega_m}$	Equation (1) $\beta_0 \frac{1024\hbar^3\mathcal{F}^4 N_p^3}{3M_P^2 c^2 \lambda_L^4 m \omega_m}$
$\mathcal{F}$	10^5	2×10^5	4×10^5
m	10^{-11} kg	10^{-9} kg	10^{-7} kg
$\omega_m/2\pi$	10^5 Hz	10^5 Hz	10^5 Hz
λ_L	1,064 nm	1,064 nm	532 nm
N_p	10^8	5×10^{10}	10^{14}
N_r	1	10^5	10^6
$\delta\langle\Phi\rangle$	10^{-4}	10^{-8}	10^{-10}

The parameters are chosen such that a precision of $\delta\mu_0 \sim 1$, $\delta\gamma_0 \sim 1$ and $\delta\beta_0 \sim 1$ can be achieved, which amounts to measuring Planck-scale deformations.

要求パラメーター

フィネス４万、mirrorの質量１mg、
共振周波数１kHz、波長１０６４nm、
フォトン数2×10^{15}でもO.K.

条件 $\boxed{\omega_{\mathrm{m}} \ll \tau^{-1} \ll \kappa}$ を満たし

ながら達成できるか？

ω_{m} → １kHz　　κ → １MHz

現在のpendulumのロスは０.２MHz以下なので
問題なさそう。

要求パラメーター

線幅１MHz縛りなら、Cavity round trip length ３mmでフィネス５万！

$$\omega_{\mathrm{m}} \ll \tau^{-1} \ll \kappa$$

１kHz　　３０kHz　　１MHz

３０μsのパルス

光源１５WならCWレーザーでもフォトン数２×１０^{15}が可能！

線幅を大きくしようとするとcavity長を短くせざるを得ないため厳しいか。

他の要求値

✓ レーザー光のロス＋パルスの変形

$$\lambda_{i+1} = \underline{\eta}\lambda_i \qquad |\Theta| \propto \lambda^4 \to \eta^7\lambda^4$$

Distortion parameter

η～０.９で|Θ|はおよそ半分程度に

✓ 振り子の熱揺らぎ

$$\exp\left[\frac{-\bar{n}\lambda^2\left(1-\eta^2\right)\left(1-\eta^4\right)}{2}\right]$$

フォノン数は
３０程度以下

他の要求値

- ✓ パルス間で生じるmechanical decoherence

$$\langle a_{\mathrm{L}} \rangle_B \simeq \langle a_{\mathrm{L}} \rangle_0 \left(1 - \lambda^2 \frac{k_{\mathrm{B}} T}{\hbar \omega_{\mathrm{m}} Q} \right)$$

Q値１００万で温度１０mK程度以下なら十分デコヒーレンスの影響を抑えられる。

フォノン数３０以下が達成できればすでに条件満たしてる...？

実験の困難性

- ３０μs（長さ１０km）のパルスをおよそ１msの間隔で当てるため、１００km程度のdelay lineが必要。

- １００kmのシングルモードファイバーは存在するが、ロスが２０dB、つまり強度が１％まで減衰してしまう。

論文の謎な部分

- イントロではmassive system推しだったのに、検出条件は質量が小さい方が満たしやすい。
- 現実的にはEffective interaction strengthが非常に小さいため、フォノン条件、cooling条件があまりにゆるすぎる。
- フォトン数が多すぎると、いくら振動子の周期より短いパルスとはいえダイナミクスを変えてしまうのではないか？

まとめ

- オプトメカニクスは、テーブルトップな実験でもプランクスケールの物理を検証する可能性をもつ。
- 要求されるパラメーターは現実的で、条件さえ満たしていればよい。

$$\omega_{\mathrm{m}} \ll \tau^{-1} \ll \kappa$$

- Delay lineの問題は解決する必要がある。