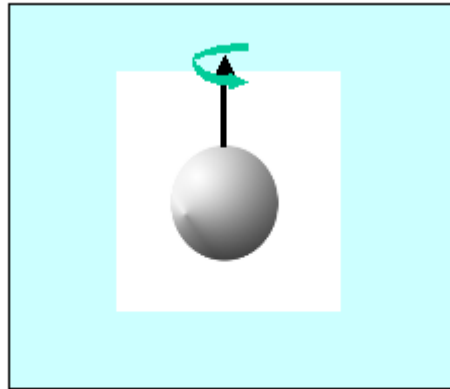


連続波探索

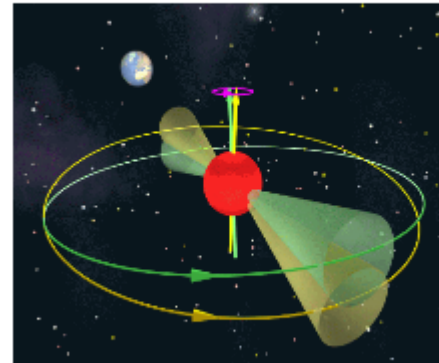
Yousuke ITOH
RESCEU, Univ. Tokyo

Target

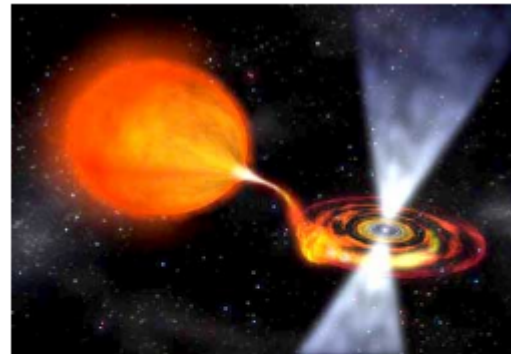
連続重力波を出す天体とはどんなものか(物理)



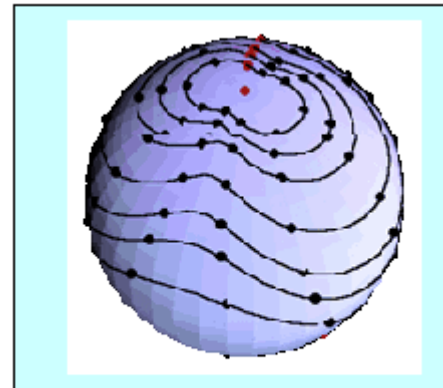
Mountain on a star



Wobbling star



Accreting star



Oscillating star

連続重力波を出す天体とはどんなものか(物理)

- 軸対称定常な系からは重力波でない。
- 高速自転する、表面がでこぼこしたコンパクト星(パルサー、高速自転するクォーク星 etc.)

- でこぼこの程度を表すパラメータ

$$\epsilon = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \quad \text{山の高さ} \sim 1\text{mm} \left(\frac{\epsilon}{10^{-7}} \right) \left(\frac{\text{中性子星の半径}}{10\text{km}} \right)$$

- 重力波パルサーが放射する重力波の振幅

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G}{c^4} \frac{\epsilon I_{zz} f^2}{r}$$
$$= 4.2 \times 10^{-27} \frac{\epsilon}{10^{-7}} \frac{I_{zz}}{10^{45}\text{g/cm}^2} \left(\frac{f_0}{100\text{Hz}} \right)^2 \left(\frac{r}{1\text{kpc}} \right)^{-1}$$

- Neutron star with large toroidal magnetic field (Cutler 2002)

$$\epsilon_B = \begin{cases} -1.6 \times 10^{-6} (\langle B_t \rangle / 10^{15} \text{ G}), & B_t < B_{c1}, \\ -1.6 \times 10^{-6} (\langle B_t^2 \rangle / 10^{30} \text{ G}), & B_t > B_{c1}, \end{cases}$$

Maximum ellipticity (Owen 2005)

(1) Normal conventional neutron star.

$$\begin{aligned} \epsilon_{\max} = & 3.4 \times 10^{-7} \left(\frac{\sigma_{\max}}{10^{-2}} \right) \left(\frac{1.4 M_{\odot}}{M} \right)^{2.2} \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^{4.26} \\ & \times \left[1 + 0.7 \left(\frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R} \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

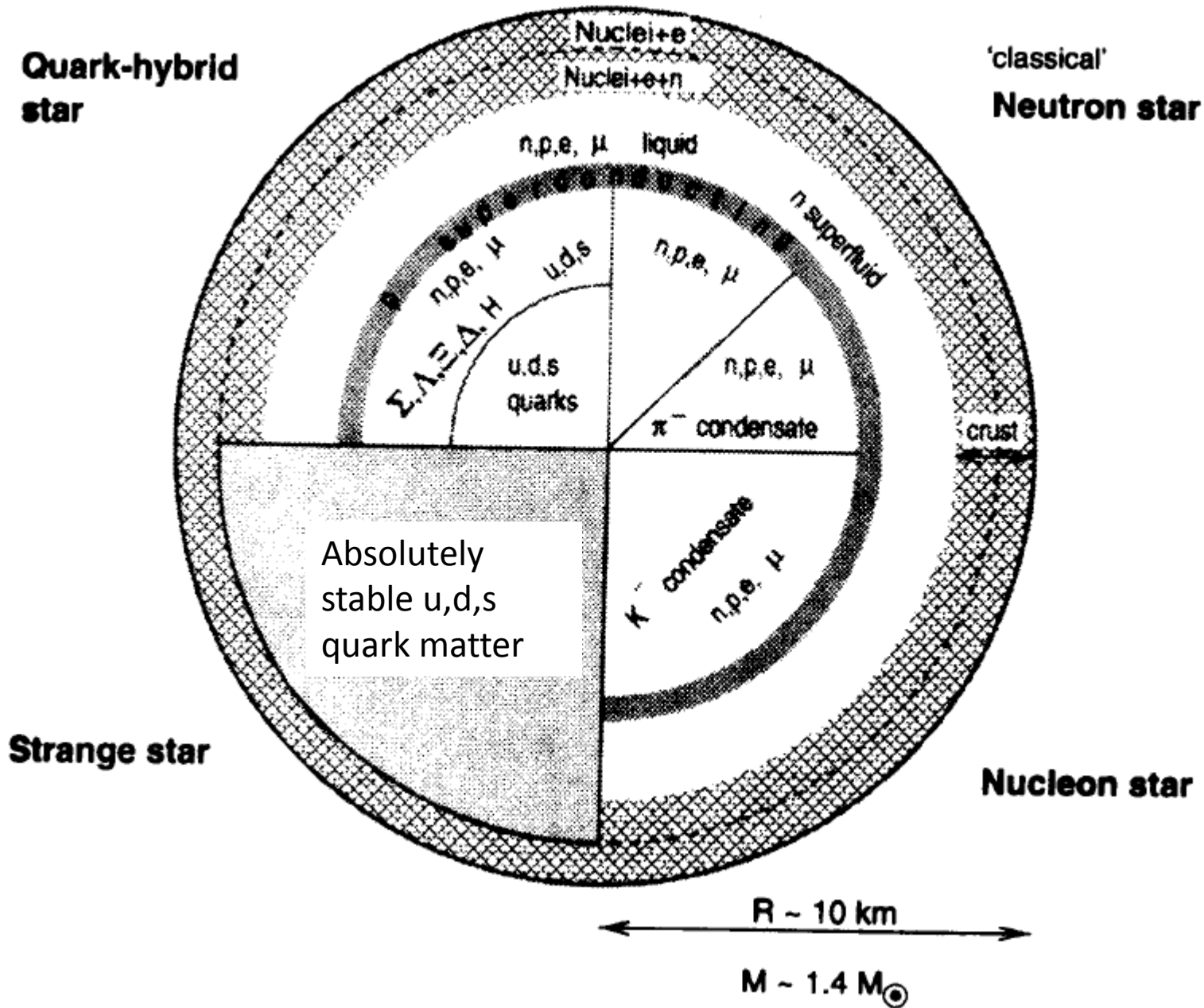
(2) Solid strange star

$$\begin{aligned} \epsilon_{\max} = & 2 \times 10^{-4} \left(\frac{\sigma_{\max}}{10^{-2}} \right) \left(\frac{1.4 M_{\odot}}{M} \right)^3 \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right)^3 \\ & \times \left[1 + 0.14 \left(\frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right) \left(\frac{10 \text{ km}}{R} \right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (9)$$

(3) Hybrid star

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon_{\max}}{5 \times 10^{-6}} = & \left(\frac{\sigma_{\max}}{10^{-2}} \right) \left(\frac{1.4 M_{\odot}}{M} \right)^2 \left(\frac{R_c}{8 \text{ km}} \right)^6 \left(\frac{10 \text{ km}}{R} \right)^2 \\ & / \left[1 + 0.7 \left(\frac{M}{1.4 M_{\odot}} \right) \left(\frac{R}{10 \text{ km}} \right) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

Internal structure of compact stars (F. Weber, 1999, Fig. 2.1 page 27)



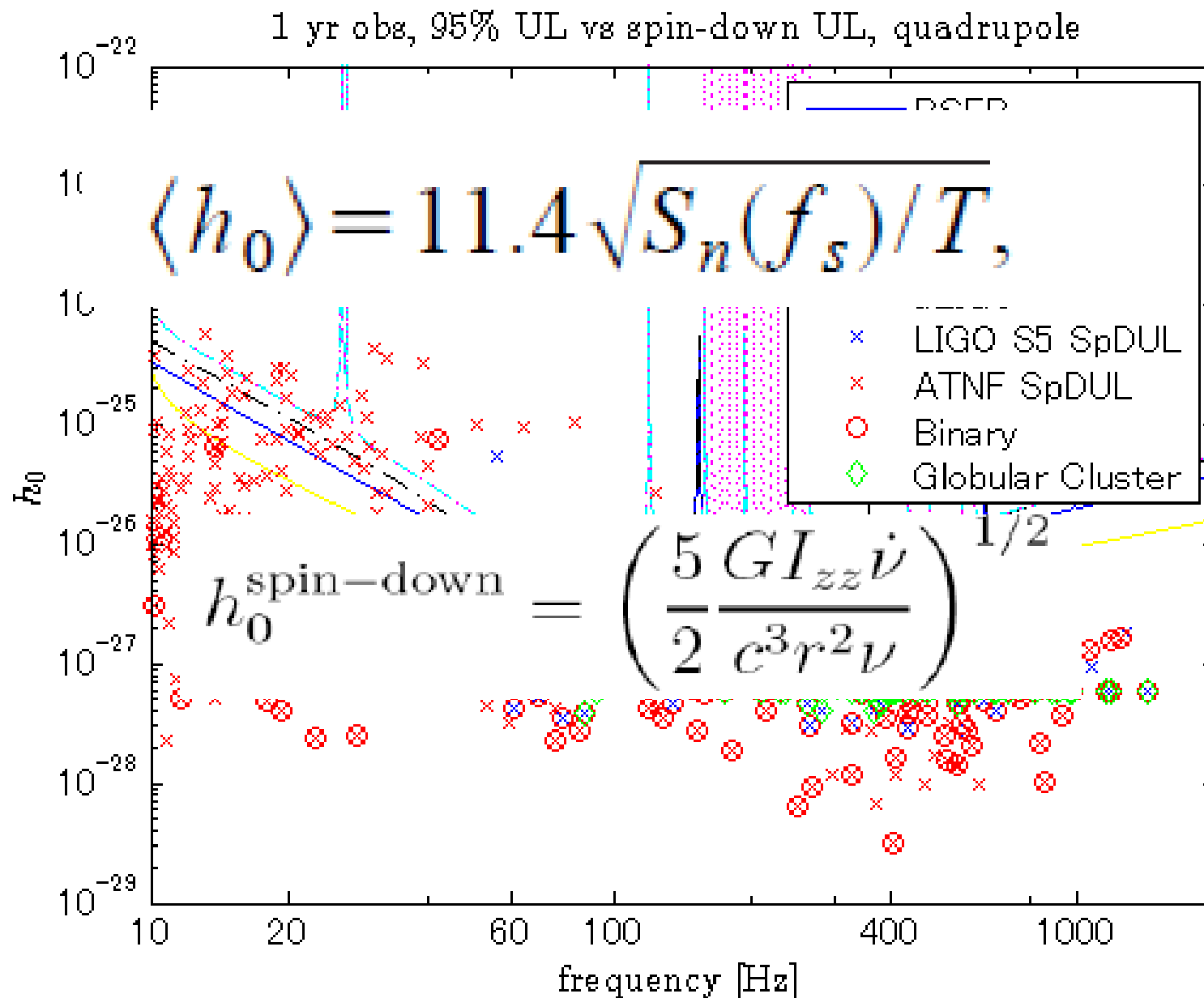
GW Pulsars

- Persistent source
 - Verifiable source
 - Signal to noise ratio increases as $\sqrt{T_{\text{obs}}}$.
 - We can detect it with one detector
 - Longer & stable observation eventually make it
- Known to exist there !
 - ATNF pulsar catalogue contains 1890 pulsars with frequencies, frequency derivatives and distances known.
 - Among 1890, 140 are in binaries.

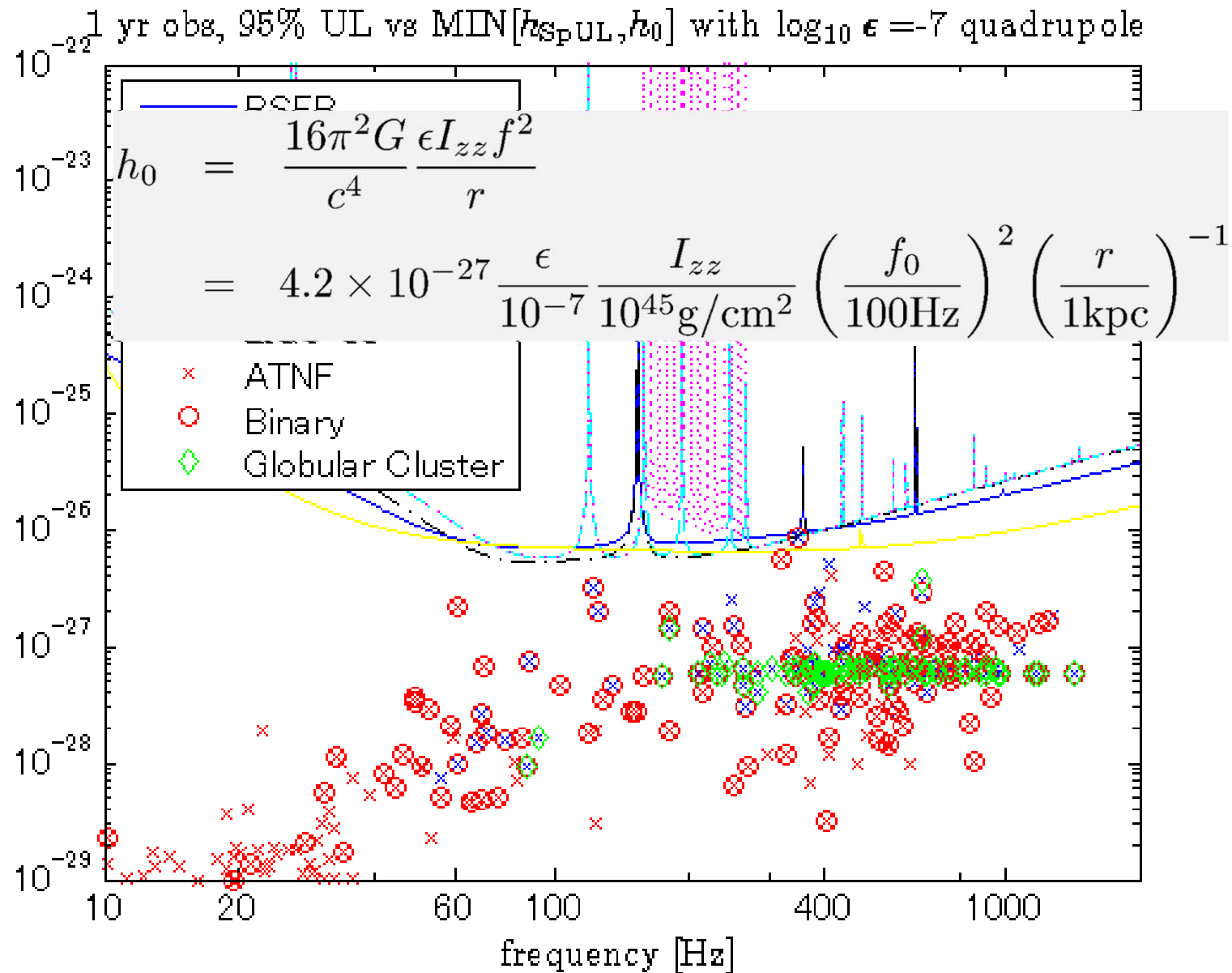
Reward from GW pulsars search

- Crust breaking strain if distance is known.
 - Quark star, hybrid star, large toroidal B-field
- Possible wobbling (rotation stability)
- Internal viscosity if r-mode GW is detected from a binary pulsar (LMXB)
- Spin-axis precession in a binary pulsar system.

1yr obs. 95% UL and spin-down UL



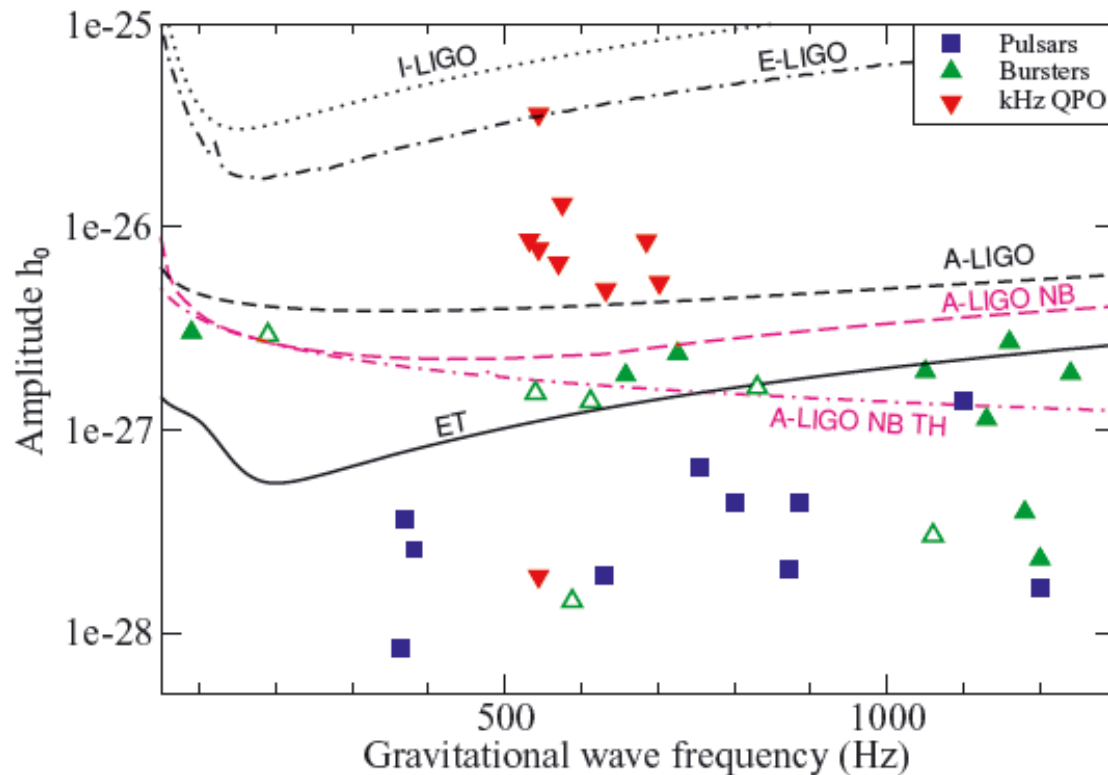
To be fair: PSR: Min of SpD-UL and $\epsilon = 10^{-7}$



We have a hope because there may be...

1. Binaries that may emit large amplitude GWs.
2. EM quiet pulsars just nearby
 - Blind Search
3. Hybrid stars, large internal magnetic field, Quark stars,
4. uncertainties in PSR radii and distances.

Known accreting pulsar search: best case scenario

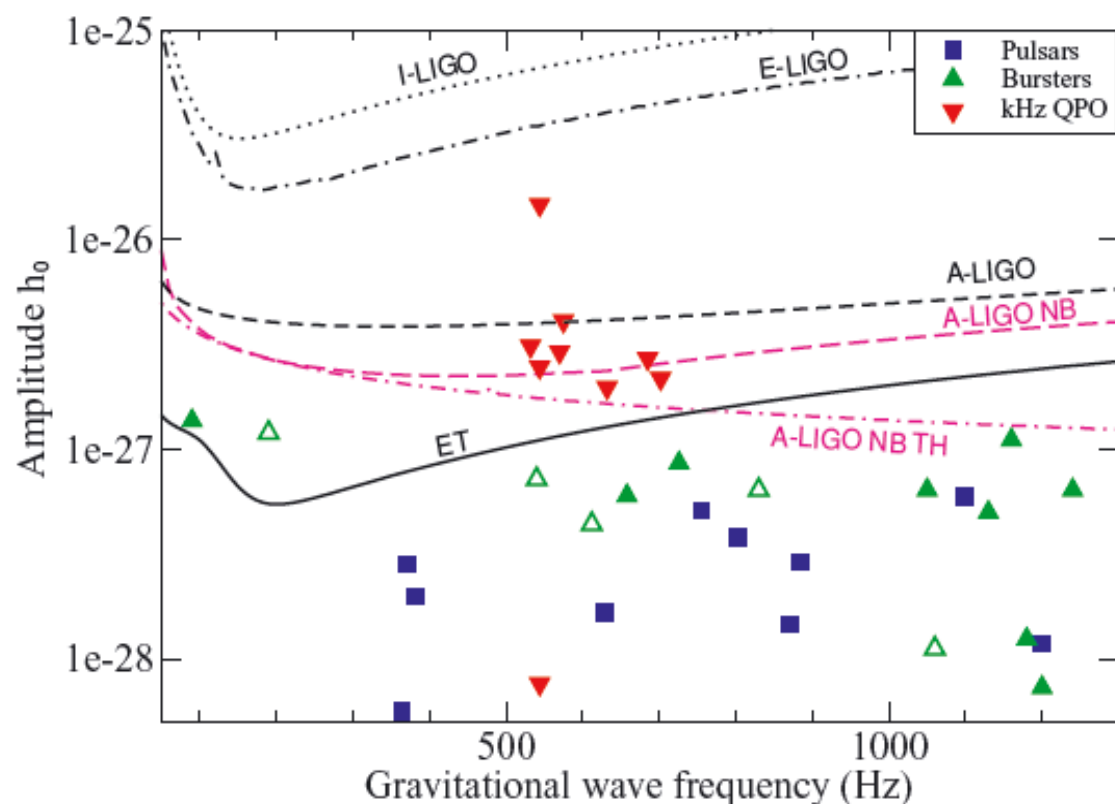


- Single template search
- 2 years integration
- quadrupole mode
- long-term average flux
- Perfect balance
- Open: frequency not known for sure.
- No limitation on computing power
- kHz QPOs are marginally detectable.

Watt et al. (2008)

$$h_0 = 3 \times 10^{-27} F_{-8}^{1/2} \left(\frac{R}{10\text{km}} \right)^{3/4} \left(\frac{1.4 M_\odot}{M} \right)^{1/4} \left(\frac{1 \text{ kHz}}{\nu_s} \right)^{1/2}$$

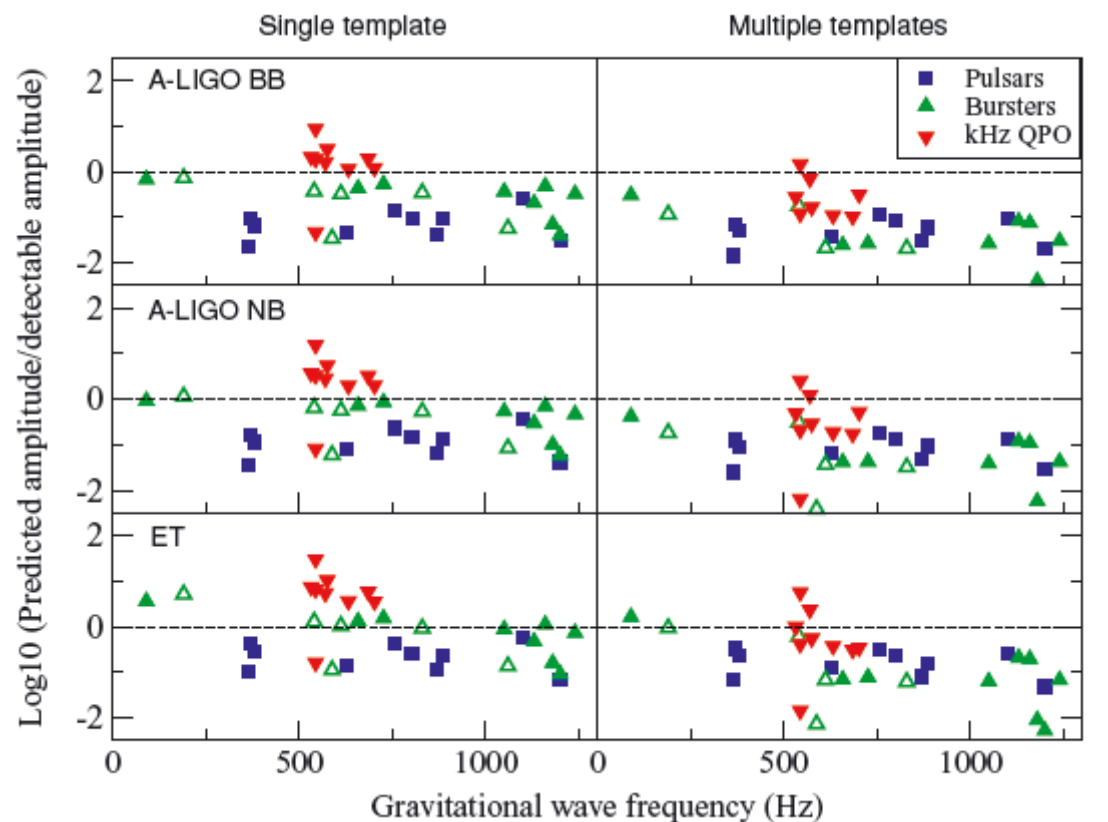
Known accreting pulsar search: better case scenario



Watt et al. (2008)

- Multi templates search only “look-elsewhere” effect is taken into account.
- 2 years integration
- quadrupole mode
- long-term average flux
- Perfect balance
- Open: frequency not known for sure.
- No limitation on computing power
- SCO-X1 is marginally detectable.

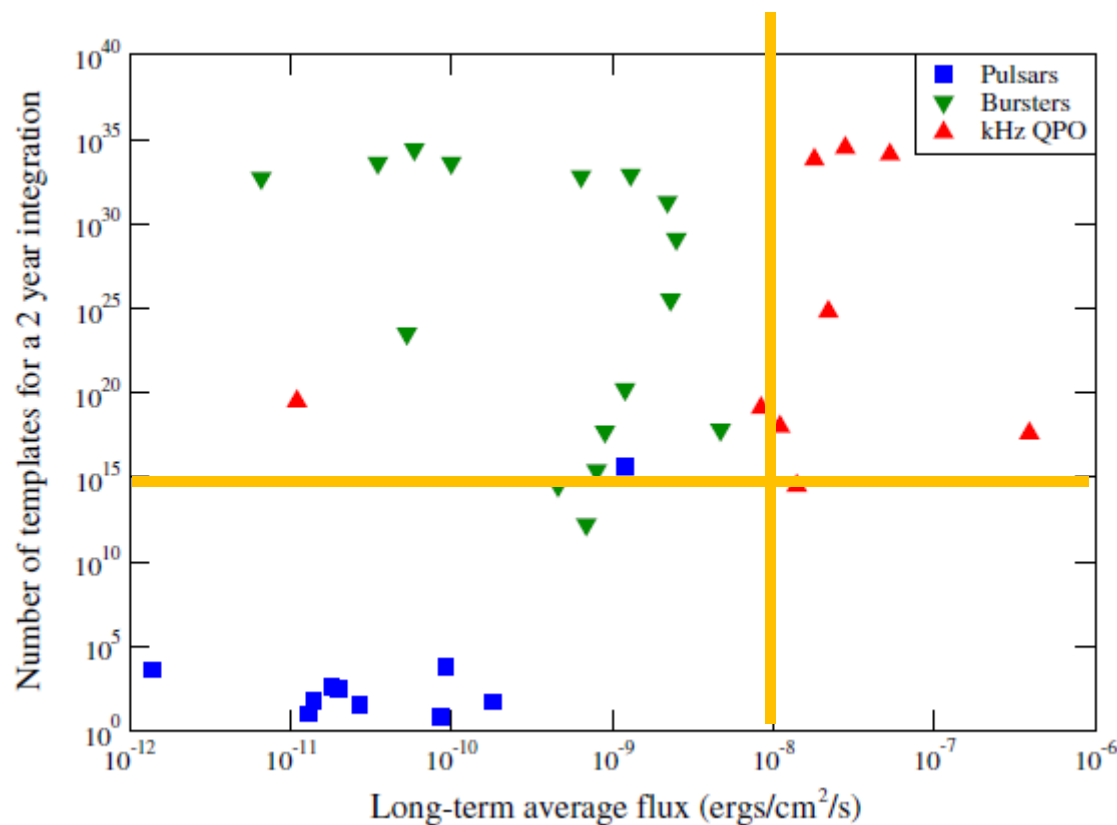
Known accreting pulsar search: realistic scenario



Watt et al. (2008)

- Multi templates search: “look-elsewhere” effect and computational limitation are taken into account.
- 2 years integration
- quadrupole mode
- long-term average flux
- Perfect balance
- Open: frequency not known for sure.
- 50 times faster computers for AdLIGO, 100 times faster for ET.
- SCO-X1 is marginally detectable.

Known accreting pulsar search: Number of templates



- Detectable if long-term average flux is larger than 10^{-8} .
- 10^{15} templates data can be analyzed by LIGO today.

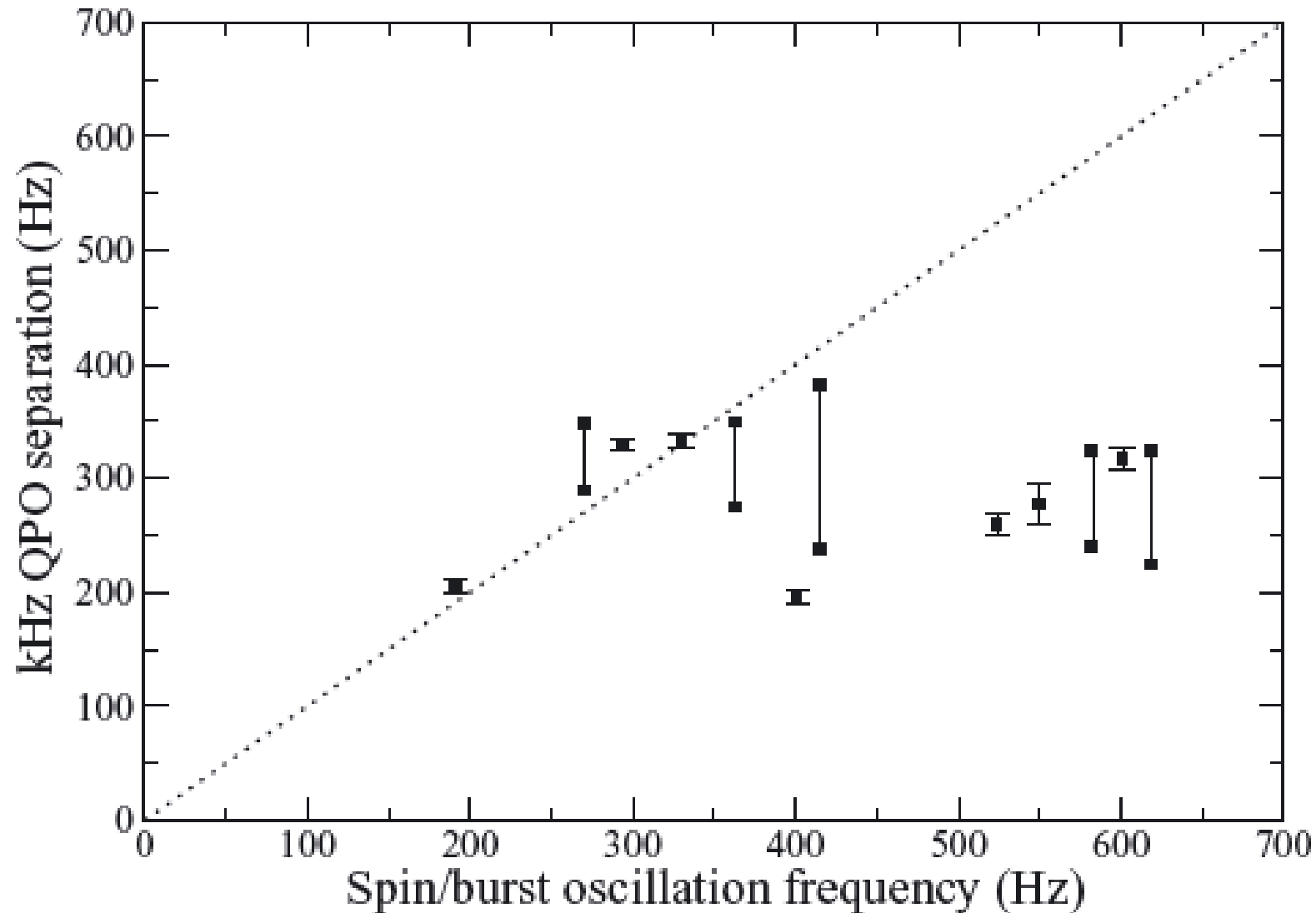
Watt and Krishnan (2009)

SCO-X1

- kHz QPO source: 272 ± 40 .
- Distance known by parallax: 2.8 ± 0.3 kpc
- Proper motion detected.
- No pulsations found (= no spin frequency measurement).
- No spin down measurement.
- Orbital motion moderately well determined.

Can we infer spin frequency from kHz QPO?

Watt et al. (2008)



Summary

- Pulsars are there.
- kHz QPOs would be marginally detectable by KLV if we have 50 x (current LSC computing power). Sco-X1 is most promising.
- Obstacles against possible detection are:
 - Computing power
 - Poor knowledge on the pulsar properties, especially spin frequency (and binary motion information).
 - Need to find a relationship between kHz QPO freq. and spin freq.
 - Need to have more precise and accurate measurements of pulsar and binary properties.

解析手法

解析手法 (LIGO)

- Single detector
 - Coherent
 - Bayesian Time domain
 - **Frequentist Frequency domain (F-statistic)**
 - Bayesian Frequency domain
 - Incoherent
 - Stack-slide
 - Powerflux
 - Hough
 - Sideband (?) for a pulsar in a binary: used in radio pulsar search in radio astronomy.
- Multi-detector
 - Coherent (Same as above)
 - Incoherent (Same as above)

日本で連続波探索をやっている人

0. 平川研究室 (論文読んだことないので触れません。)
1. K. Suida et. al, **“Search for continuous gravitational waves from the SN1987A remnant using TAMA300 data”**, Class. Quantum Grav. **20** (2003) S645–S654
2. T. Aktsu et. al., **“Search for continuous gravitational waves from PSR J0835-4510 using CLIO data”**, Class. Quantum Grav. **25** (2008) 184013
3. Koji Ishidoshiro, **“Search for low-frequency gravitational waves using superconducting magnetically-levitated torsion antenna”**, PhD thesis (2010)
4. 伊藤 (LSC, 2002-2005)

K. Soida et. al, TAMA SN1987A, **CQG2003**

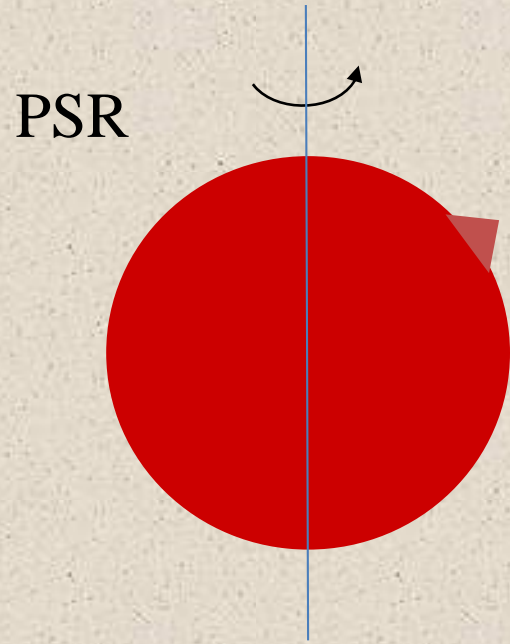
- LIGO-GEO S1 paper (2004)より早い結果。
- 5.2節で指摘しているように、Barycentric resamplingをしていないため、FFTはある周波数でのみ正しい結果を与える(たぶんFFTをやる意味が無い)。
- Complex heterodyning
- JKS98の結果を使ってパラメータを減らしていない。
- ノイズは Stationary Gaussian を仮定。

T. Aktsu et. al., Vera CLIO, CQG2008

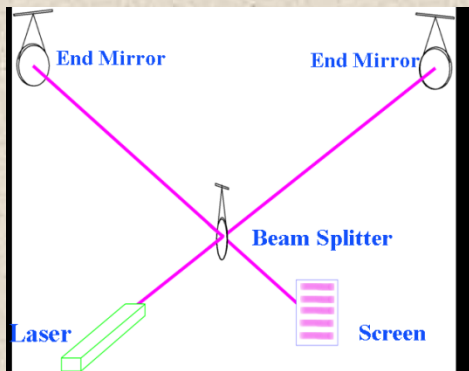
- Earth EphemerisはTEMPOとHORAIZONによって取得。
- Shapiro time delay (msec) を無視 = 22Hzで0.1 radiansの位相ミスマッチ = 1% SNR損。
- Soida et al. (2003)の方法 = FFTのうまみが無い。
- Complex heterodyning
- JKS98は使っていない。
- ノイズは Gaussian stationary を仮定。

解析手法 (一般論)

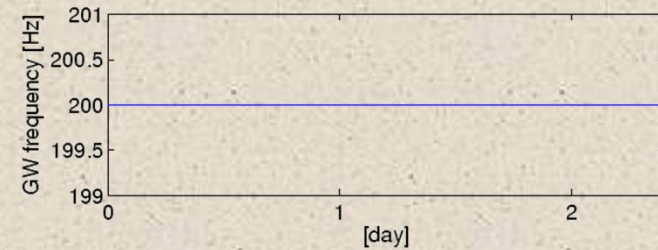
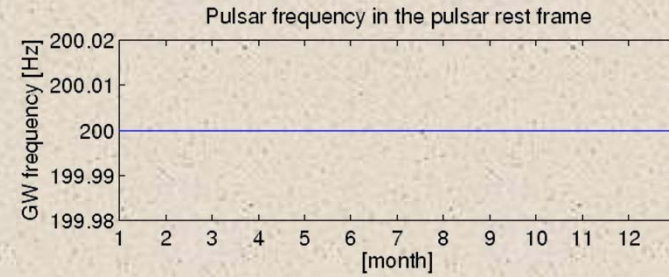
重力波パルサー(PSR)の探索方法(対PSR静止検出器)



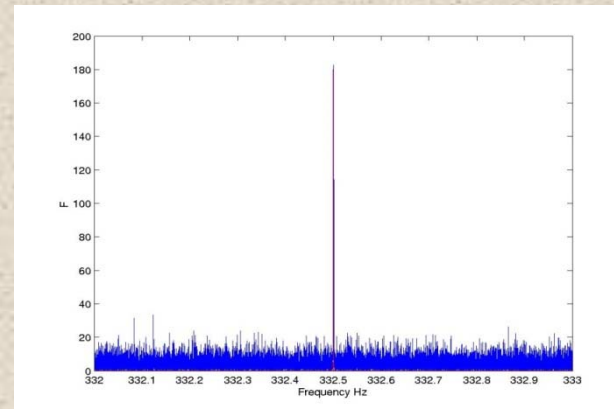
PSR静止系での検出器



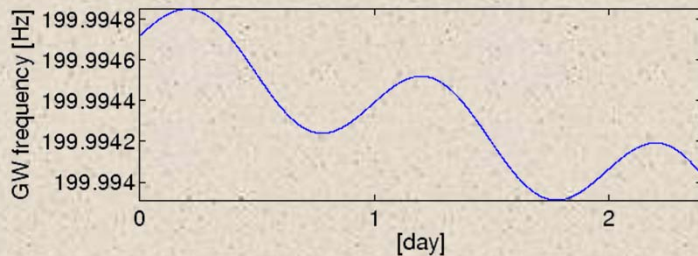
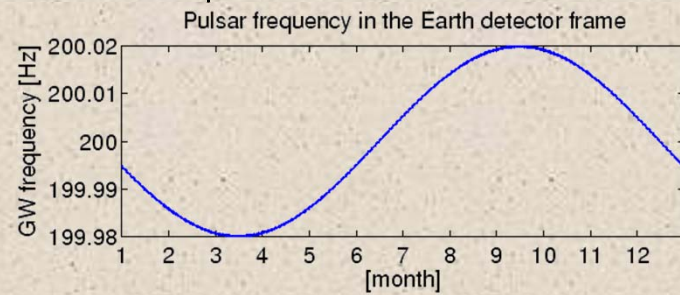
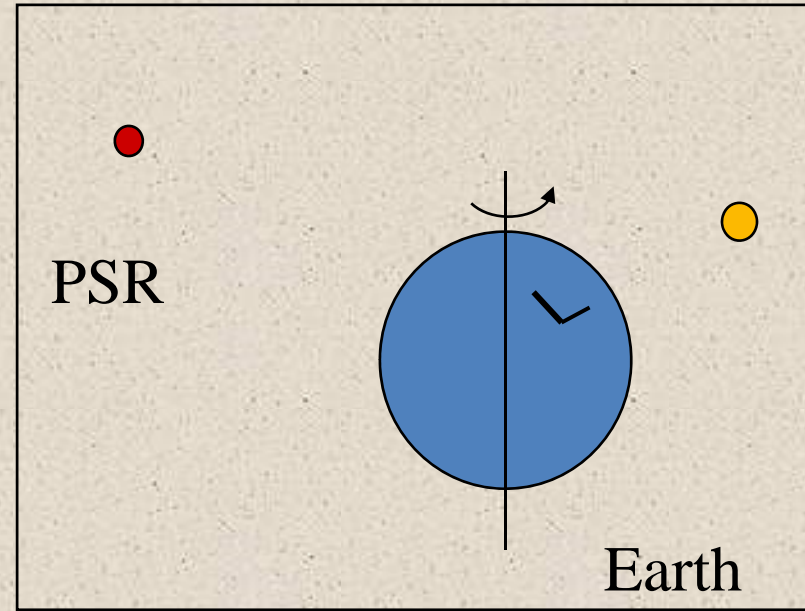
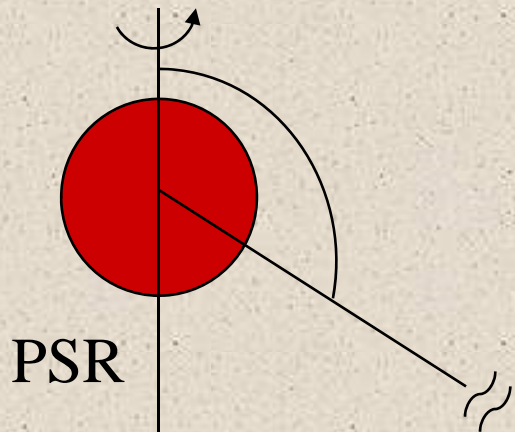
パルサー静止系での重力波周波数



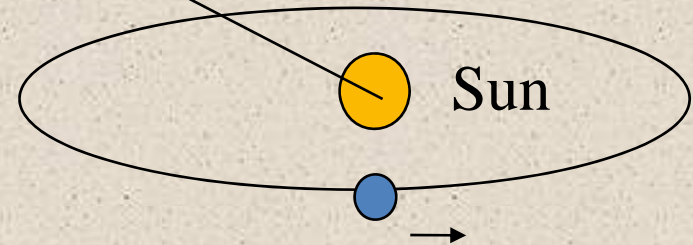
(Fast) Fourier Transform



重力波パルサーの探索方法(地上検出器)



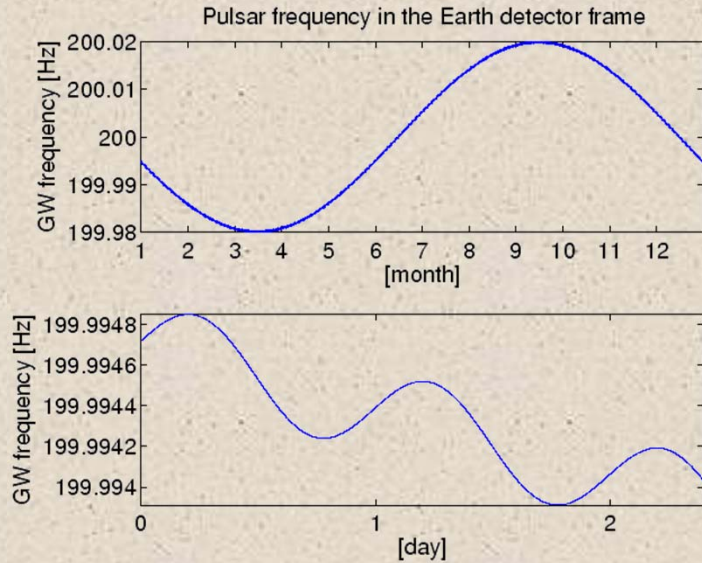
Doppler effect



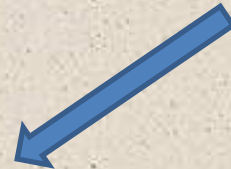
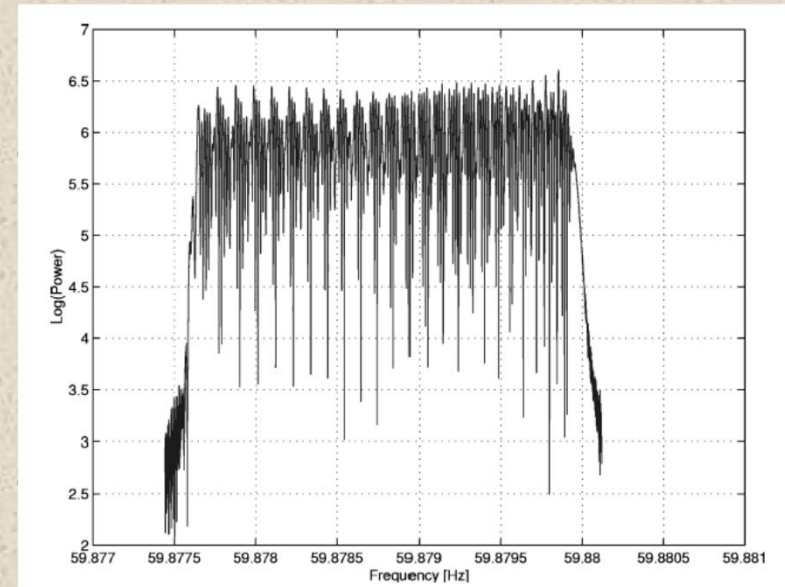
地球上の検出器での重力波周波数

重力波パルサーの探索方法(地上検出器)

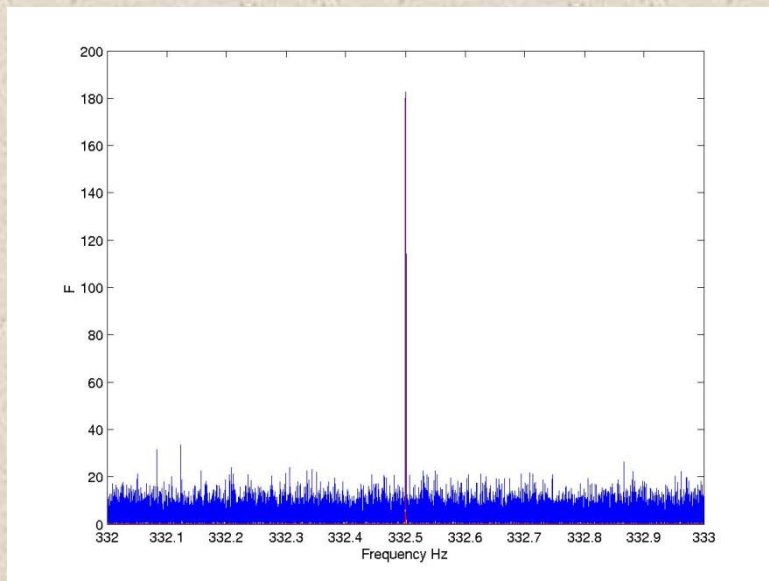
地球上の検出器での重力波周波数



Fourier Transform



Demodulation:
Doppler効果で複数の周波数ビンに広がったパワーを、周波数ビン1個にまとめて信号対雑音比 (Signal to noise ratio: SNR)を稼ぐ。



重力波パルサーの探索方法 (算数の準備, Jarawnoski, Krolak & Schutz 1998)

1. 検出器の出力 = ノイズ + 重力波信号 $x(t) = n(t) + h(t)$.

2. 重力波信号 = +x偏極の和 $h(t) = F_+(t)h_+(t) + F_\times(t)h_\times(t)$

3. +x偏極の和の係数: 波源方向への検出器の感度を表す関数 F_+, F_\times

$$F_+(t) = \sin \zeta [a(t) \cos 2\psi + b(t) \sin 2\psi]$$

$$F_\times(t) = \sin \zeta [b(t) \cos 2\psi - a(t) \sin 2\psi]$$

検出器の2本腕の向きと重力波の進行方向 (波源の方向 (α, δ))、重力波の偏極角 (polarization angle ψ) の関係に依存。地球の自転・公転によって時間変化。

$$a(t) = \frac{1}{16} \sin 2\gamma (3 - \cos 2\lambda) (3 - \cos 2\delta) \cos[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] - \frac{1}{4} \cos 2\gamma \sin \lambda (3 - \cos 2\delta) \sin[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)]$$

$$+ \frac{1}{4} \sin 2\gamma \sin 2\lambda \sin 2\delta \cos[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] - \frac{1}{2} \cos 2\gamma \cos \lambda \sin 2\delta \sin[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] + \frac{3}{4} \sin 2\gamma \cos^2 \lambda \cos^2 \delta$$

$$b(t) = \cos 2\gamma \sin \lambda \sin \delta \cos[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)] + \frac{1}{4} \sin 2\gamma (3 - \cos 2\lambda) \sin \delta \sin[2(\alpha - \phi_r - \Omega_r t)]$$

$$+ \cos 2\gamma \cos \lambda \cos \delta \cos[\alpha - \phi_r - \Omega_r t] + \frac{1}{2} \sin 2\gamma \sin 2\lambda \cos \delta \sin[\alpha - \phi_r - \Omega_r t].$$

- λ : 検出器の緯度
- L : 検出器の経度 (西向きに正)
- ζ : 検出器の2本腕の間の角
- γ : 検出器の2本腕の2等分線の方法 (東から計って正)

Detector	λ (degrees)	L (degrees)	γ (degrees)	ζ (degrees)
GEO600	52.25	-9.81	68.775	94.33
LIGO Hanford	46.45	119.41	171.8	90
LIGO Livingston	30.56	90.77	243.0	90
VIRGO	43.63	-10.5	116.5	90
TAMA300	35.68	-139.54	225.0	90

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t),$$

検出したい重力波モデル: $h_1(t)$ はwobble, $h_2(t)$ は非軸対称性.

$$h_1(t) = F_+(t)h_{1+}(t) + F_\times(t)h_{1\times}(t),$$

$$h_2(t) = F_+(t)h_{2+}(t) + F_\times(t)h_{2\times}(t),$$

$$h_{1+}(t) = \frac{1}{8} h_0 \sin 2\theta \sin 2\iota \cos \Psi(t),$$

$$h_{2+}(t) = \frac{1}{2} h_0 \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \iota) \cos 2\Psi(t),$$

$$h_{1\times}(t) = \frac{1}{4} h_0 \sin 2\theta \sin \iota \sin \Psi(t),$$

$$h_{2\times}(t) = h_0 \sin^2 \theta \cos \iota \sin 2\Psi(t).$$

重力波パルサーのパラメータ (グリッチ無し, wobble & triaxial)

- θ : 星の対称軸と回転軸の間の角度
- ι : 星の回転軸と視線方向の角度
- $f_0^{(k)}$: 周波数時間変化のk-回時間微分@t=0.
- $\mathbf{r}_d(t)$: 太陽系重心からの検出器の位置ベクトル
- \mathbf{n}_0 : 太陽系重心から見たパルサーの方向ベクトル

- 1 : wobbling パルサー
- 4/3: r-mode
- 2 : 非軸対称(山有り)パルサー

$$\Psi(t) = \Phi_0 + 2\pi \sum_{k=0}^s f_0^{(k)} \frac{t^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{2\pi}{c} \mathbf{n}_0 \cdot \mathbf{r}_d(t) \sum_{k=0}^s f_0^{(k)} \frac{t^k}{k!}$$

グリッチ有りのときは
 $f_0^{(k)}$ をアップデート。

Likelihood function (尤度関数) Λ

$$\Lambda \propto e^{-\frac{(n|n)}{2}} = e^{-\frac{(x-h|x-h)}{2}} \quad x[\text{検出器出力}] = n[\text{ガウスノイズ}] + h[\text{信号}]$$

内積

$$(x|y) := 4 \operatorname{Re} \int_0^\infty \frac{\tilde{x}(f) \tilde{y}^*(f)}{S_h(f)} df \quad \text{検出器のノイズパワースペクトル } S_h(f)$$

検出器出力 $x(t)$ に対して、パラメータ p に依存する適当な重力波モデル $h(t;p)$ を仮定して、尤度関数が最大になるようなパラメータ p を探す。”Maximum likelihood method”

JKS98の発見:

対数尤度($\log \Lambda$)は以下の4つの波源パラメータについては解析的に最大化できる。

- $h_0 \sin \Theta$: 振幅
- ι : 自転軸と視線方向のなす角度
- ψ : 重力波偏角
- ϕ : 初期重力波位相

F-Statistic (JKS98)

$$F = \max_{h_0, l, \psi, \Phi_0} \text{Log } \Lambda$$

具体的には、 $\mathcal{F} = \frac{T_0}{S_h(nf_0)} \frac{B|F_a|^2 + A|F_b|^2 - 2C\mathcal{R}(F_a F_b^*)}{AB - C^2}$

ただし (wobble $n=1$, r-mode $4/3$, triaxial $n=2$ etc.)、

$$F_a = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt x(t) a(t) \exp[-in\Phi_s(t)] \exp[-i2\pi n f_0 \{t + \Phi_m(t)\}]$$

$$F_b = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} dt x(t) b(t) \exp[-in\Phi_s(t)] \exp[-i2\pi n f_0 \{t + \Phi_m(t)\}]$$

ここで、重力波の位相を以下のように書いている。

$$\Phi(t) = 2\pi f_0 [t + \Phi_m(t; \alpha, \delta)] + \overset{(k)}{\Phi_s(t; f_0, \alpha, \delta)}$$

A, B, C は $A = (a || a)$, $B = (b || b)$, $C = (a || b)$
で内積は

$$(x || y) := \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) y(t) dt.$$

Detection statisticとしてのF-statistic

- 重力波信号のphase parameter ($f_0^{(k)}, \alpha, \delta$)が(近似的に)分かっている、ノイズがガウス分布にしたがうとする。
- 重力波信号が存在しないときには(ある n について、たとえばtri-axial pulsar $n=2$ について)、 $2F$ は自由度4の χ^2 分布にしたがう。

$$\chi_4^2(\mathcal{F})d\mathcal{F} = \mathcal{F}e^{-\mathcal{F}} d\mathcal{F}$$

- 重力波信号が存在するときには(ある n について)、 $2F$ は自由度4、非中心パラメータ d^2 の非中心 χ^2 分布にしたがう。

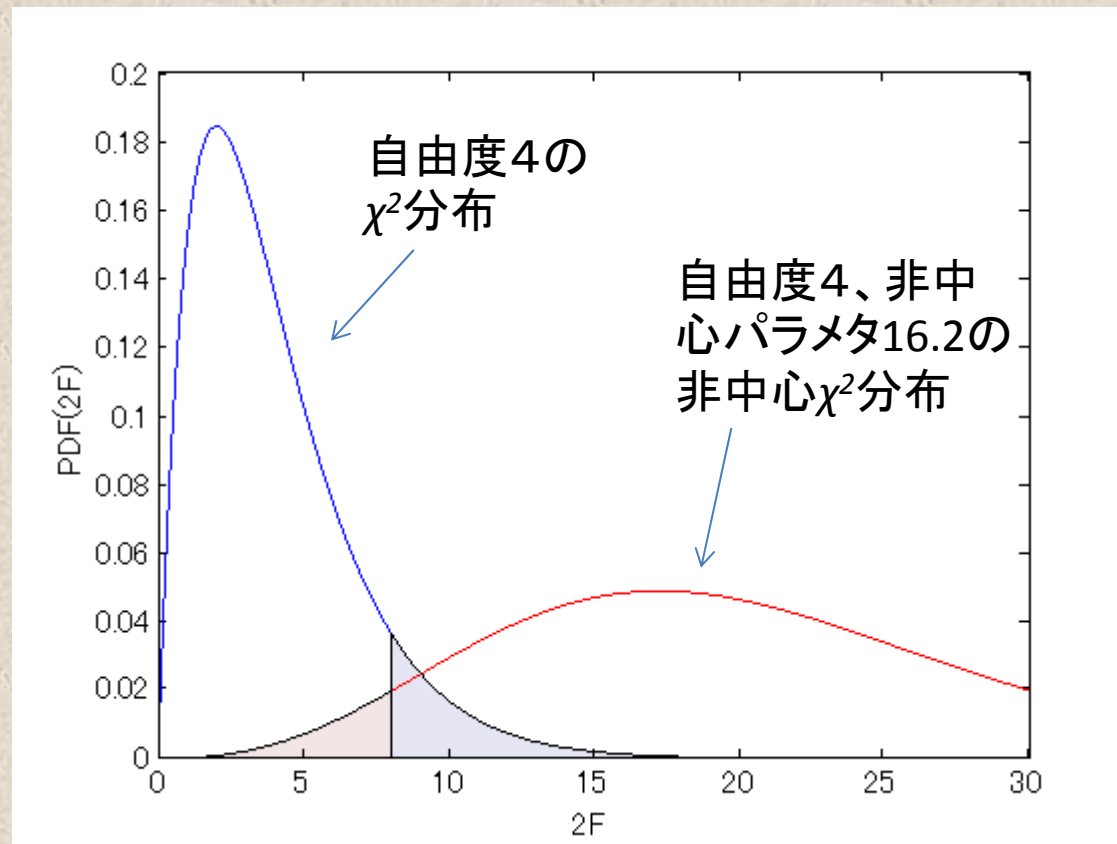
$$NC\chi_4^2(\mathcal{F}, d^2)d\mathcal{F} = \left(\frac{2\mathcal{F}}{d^2}\right)^{1/2} e^{-(\mathcal{F} + \frac{d^2}{2})} I_1(\sqrt{2\mathcal{F}d})d\mathcal{F}$$

ただし d^2 は、optimal signal to noise ratio

$$d^2 = (h|h) \simeq \frac{2}{S_h(nf_0)} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} [h_n(t)]^2 dt \propto \frac{T_0 h_0^2}{S_h}$$

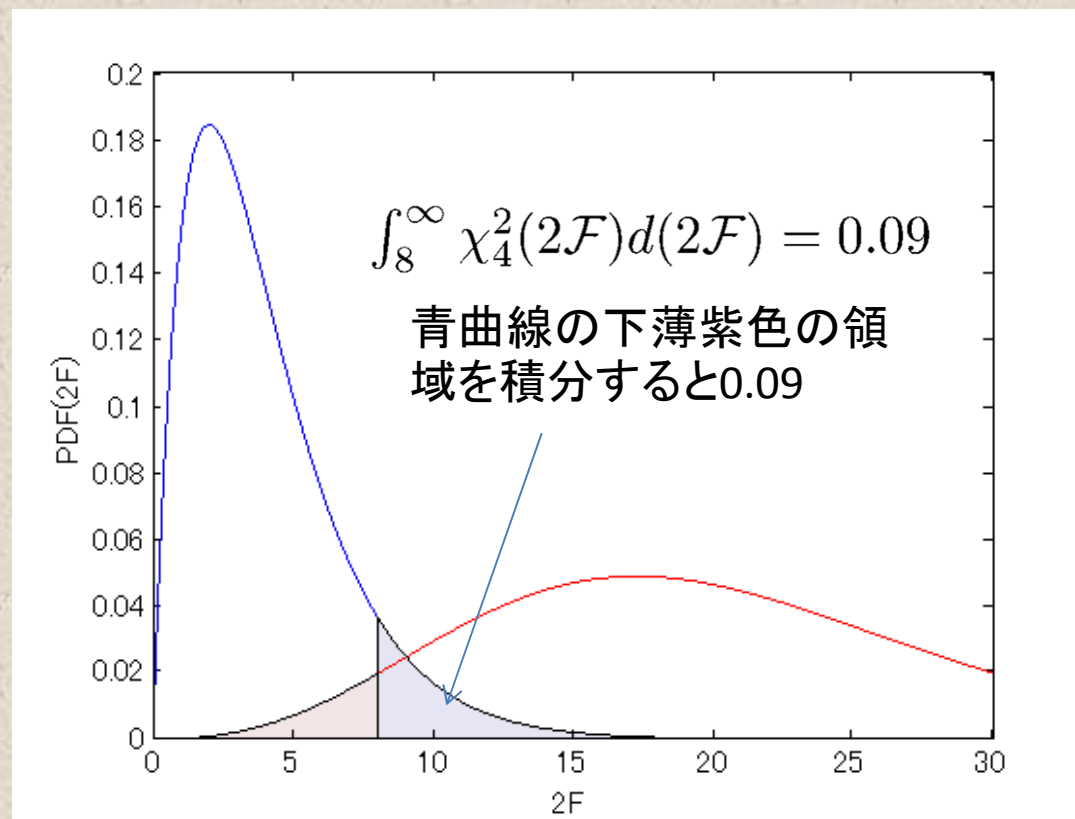
χ^2 分布と非中心 χ^2 分布の性質

- 自由度 n の χ^2 分布: 平均 $\langle 2\mathcal{F} \rangle = n$, 分散 $\langle (2\mathcal{F} - \langle 2\mathcal{F} \rangle)^2 \rangle = n$
- 自由度 n 、非中心パラメータ d^2 の非中心 χ^2 分布:
平均 $\langle 2\mathcal{F} \rangle = n + d^2$, 分散 $\langle (2\mathcal{F} - \langle 2\mathcal{F} \rangle)^2 \rangle = 2n + 4d^2$



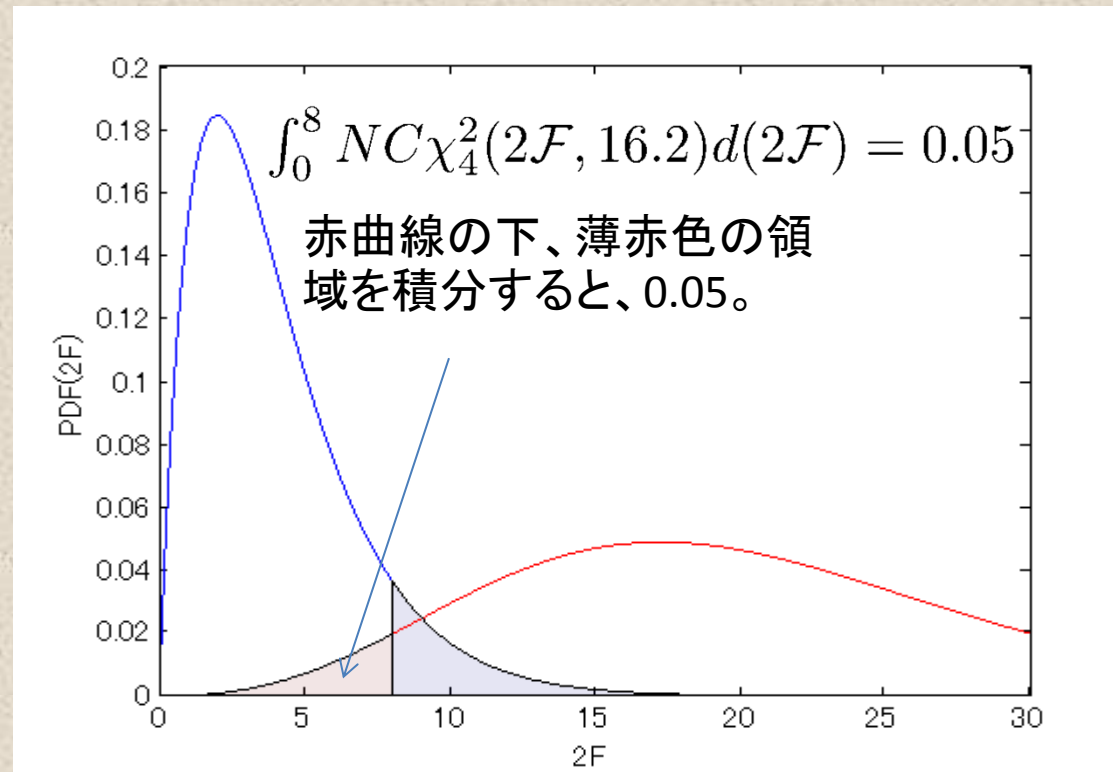
F-statisticの統計的性質がわかっていると何が嬉しいのか？：
候補イベントがどれぐらい重力波っぽいか決める。

- ある観測で $2F=8$ を得たとする。
- 重力波信号が存在しなくても、ノイズだけで $2F>8$ を与える確率は9%ある。
- 100回似たような観測をしたら、9回は重力波が存在しなくても8以上の $2F$ を得るということ。
- このイベントは確信を持って重力波由来とは言えない。

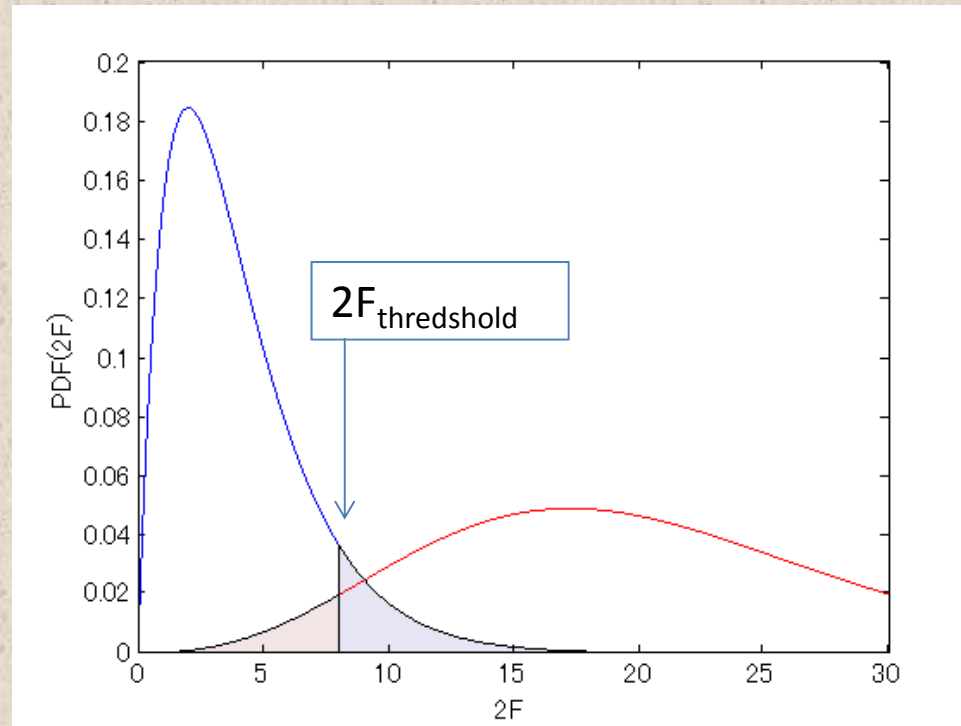


F-statisticの統計的性質がわかっていると何が嬉しいのか？：
重力波振幅の上限値を決める。

- ある観測で $2F=8$ を得たとする。
- $d^2 = 16.2$ であるような重力波信号が存在したとすると、 $2F < 8$ であるような確率は5%である。
- 重力波振幅に対する95%上限値が $h_0^{95} = \sqrt{16.2Sh}/Q$ と求まる (Q は波源の方角など振幅以外のパラメータに依存する $O(1)$ の数)。
- 100回似たような観測をしたら5回は8以下の $2F$ を得るような重力波振幅が Qh_0^{95} 。



F-statisticの統計的性質がわかっていると何が嬉しいのか？： False alarm rate と False dismissal rate



- 青が信号無しの際のDetection statistic (今は $2F$)の確率密度分布、赤が信号ありの際の確率密度分布とする。
- Detection statisticの閾値を $2F_{\text{threshold}}$ と事前に定めておくと
 - 薄紫色の面積がFalse alarm rate (FAR: ノイズを信号と誤判断してしまう確率)を与える。
 - 薄赤色の面積がFalse dismissal rate (FDR: 信号を誤って見落としてしまう確率)を与える。

パルサー探索でのF-statistic:ここまでのまとめ

- Pulsar search parameters: 「1 + s+2」 + 「4」
 $f, \lambda \equiv [f, \dot{f}, \ddot{f}, \dots, \alpha, \delta], \sigma \equiv [\Phi_0, \iota, \psi, h_0]$.
- F-statistic $F = F(f, \lambda)$
 - Partially maximized log-likelihood $\log \Lambda$
Analytically maximize $\log \Lambda$ over $\sigma = [\Phi_0, \iota, \psi, h_0]$
- Maximize F over f and λ
 - Fast-Fourier-Transform for f (not in “LALDemod”)
 - Template search for λ .
- 統計的性質がある程度わかっている。

データ解析の流れ(F-statistic coherent searchの場合)

前準備1

1. 地球の公転・自転運動について情報(ephemeris file)をあらかじめ得ておく(TEMPO2、LALなどのソフト)。
2. Known pulsar searchの場合は探索対象のパルサーの位相情報を電磁波天文学から得ておく(重力波探索開始時の周波数・その高階時間微分がいくらかを求める)。
3. Known pulsar searchでかつ探索対象パルサーが連星系をなしている場合は、連星運動のephemerisを電磁波天文学から得ておく。
4. Known pulsar searchでかつグリッチが起きていた場合、位相モデルに組み込む。

前準備2

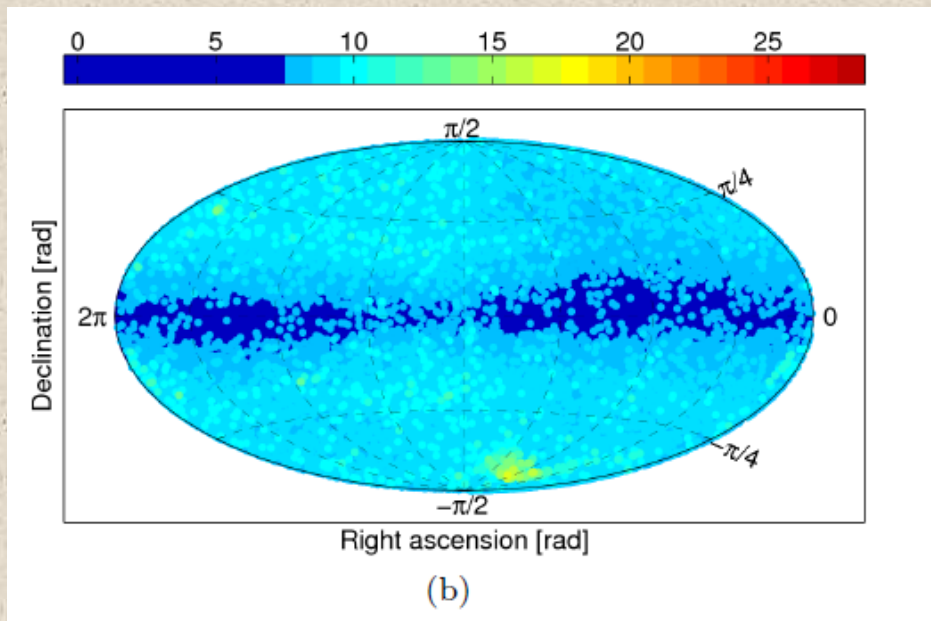
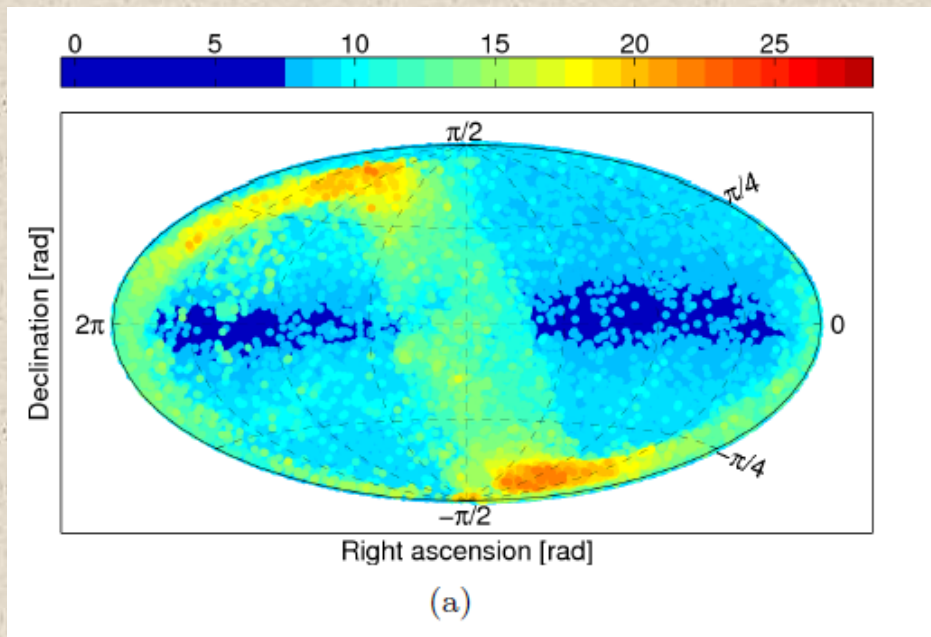
1. Low pass filter (step 2でのaliasingを防ぐ)
2. Down sample: 16kHz \rightarrow 4kHz (2kHzぐらいまで探索する。データ量低減のため)
3. 全 T_0 分のデータを長さ τ 分の $N=(T_0/\tau)$ 個のセグメントに分ける。セグメント長は、ドップラー効果による周波数シフトが1ビンを下回るように決めている。F-statistic計算コードの都合で長いほうが良いが、だいたい $\tau=30$ 分ぐらいが限度。
4. 各セグメントごとにtime domainでフィルターをかけて、 $t=0$, $t=\tau$ でデータがゼロになるようにする(step 5で余計なノイズを生成しないように)。
5. 各セグメントをそれぞれFourier Transformする(これをSFTと呼ぶ。)

ComputeFStatistic_v2 code (LALApps/LALSuiteのF-statistic計算コード):

1. パラメータ探索範囲を決める。(どの天域で、どのようなモデルに従う重力波を検出するか決める。)
2. 探索するパラメータ点を決める。(パラメータ空間は離散的にしか掃けないので、信号を失わないように密に、かつ計算時間がすくなくなるように疎に掃く。)
3. N個のSFTを取り込んでF-statisticを計算する。
4. 事前に設定した閾値よりも大きいFを持つイベントを記録しておく。閾値は設定するFAR, FDRに依存する。

Veto:

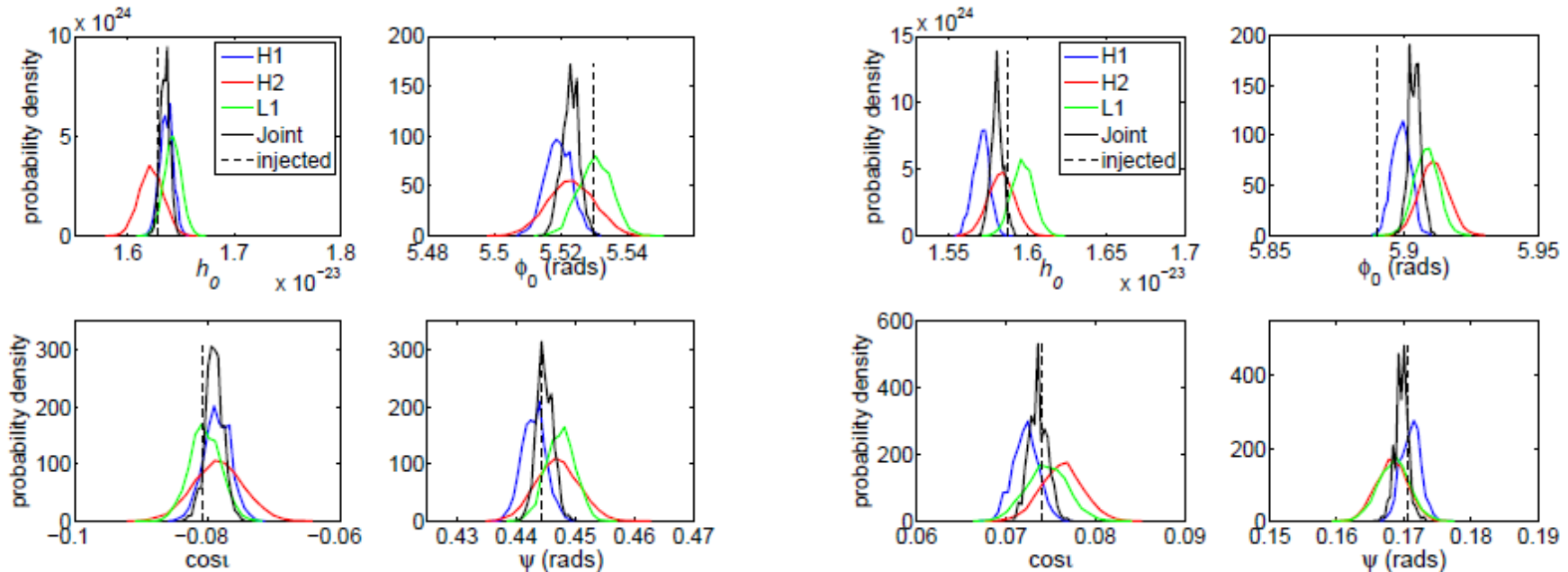
1. 重力波候補イベントが地球上の現象起源のノイズ(検出器起源のノイズなど)でないことを確かめる。(例: アメリカの電源: 60Hz → 60Hzとそのハーモニクスがスペクトル線として現れる。)
2. 他の検出器との整合性(異なる検出器で得られたパラメータセットは、互いに無矛盾か?)
3. “重力波信号らしい”イベントなのか?
 - a. Chi-square テスト (Itoh et al. 2004)
 - b. Terrestrial lineなら地球自転軸を通る大円上にならぶ (E@H) (ほとんどDoppler周波数ドリフトを受けない天域(自転では北・南極、公転では黄道の両極)があり、その方向の重力波は、もともとDoppler周波数ドリフトを受けない地球起源の線ノイズと区別をつけづらい。)



Einstein@Home on S5,
50-1500Hz all-sky search
result. (a) including
known instrumental
lines and hardware
injections. (b) without
known instrumental
lines.

重力波発見:

1. 候補イベントが”すべてのテスト”をパスしたら、検出。
2. パラメータの確率分布を与える。「(ベイジアンの場合は、)重力波振幅はこれこれの確率でこの範囲に入る。」
3. パラメータの確率分布はMCMCなどで決定。
4. イメージとしては下図の感じ。(Hardware injectionに対してtime domain Bayesian analysisでおこなったもの。LSC2010)



5. 物理について議論...

Setting upper limit:

1. 候補イベントが棄却されたら重力波振幅の上限を与える。
「この天域ではこの周波数領域には、これこれの性質を持つ重力波は、地球に到達していたとしてもxxパーセントの確率でこれ以下の振幅しか持たない。(これこれの振幅を持っている信号が到達していたとしていたら、我々はxxパーセントの確率で検出していたはずだ。)」
2. 上限を与えるためには、F-statistic(か、使用したdetection statistic)の統計的性質(=ノイズの統計的性質)を知る必要がある。
3. モンテカルロシミュレーションでノイズの統計的性質を求める。
 - 振幅の上限を与えるパラメータ領域から少しずれたパラメータ領域に、ある重力波振幅を仮定してソフトウェアインジェクションをX回おこない、 $2F_{\text{simulation}}$ を計算する。X個の $2F_{\text{simulation}}$ を得る。
 - X個の $2F_{\text{simulation}}$ のうち、xx個が実測の2Fを下回るようなoptimal signal to noise ratioを与える振幅を計算する。これがxx/Xパーセント上限値を与える。
4. ちなみにknown pulsar searchでノイズがガウスノイズの場合、1% FAR, 10%FDRを仮定すると、振幅以外のパラメータを平均したときの振幅の上限値は以下の式で与えられる。

$$\langle h_0 \rangle = 11.4 \sqrt{S_n(f_s)/T},$$

f_s は重力波周波数、 T は積分時間、 S_n は検出器ノイズパワースペクトル、数値11.4は仮定したFAR,FDRに依存する。

広帯域・広天域探索の問題

- Known pulsar search (は coherent search (F-statistic や time-domain での探索で問題無い。)
- 広周波数帯域、広天域探索では計算量が多すぎるといった問題が起こる。

どれくらい細かく天域を見ていく必要があるのか = 波源方向の推定精度

- 1つの周波数ビンに全てのパワーを集めたい。
- 周波数ビンは1/(積分時間)で細くなる。
- 検出器出力を単純にフーリエ変換すると、空の \vec{n} 方向にある周波数 f_0 の波源は時間に依存するDopplerドリフトで

$$f = f_0 \left(1 + \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{n}}{c} \right)$$

の帯域で信号を生成する。

- $\Delta\theta = |\overrightarrow{\Delta n}|$ だけ波源からずれた方向を探索すると、

$$\Delta f \sim \frac{|\overrightarrow{\Delta v}(t)| \cdot \Delta\theta}{c} f_0$$

程度周波数領域で広がった信号を得る。 $|\overrightarrow{\Delta v}(t)|$ は観測時間中の地球の公転・自転速度変化の大きさ。

- $f_0(\Delta v/c)(\Delta\theta) < 1/T$ の精度で天域を探索する必要がある。
- あるいは、方向決定精度は、

$$\Delta\theta < \frac{1}{f_0 \left(\frac{v_{orb}}{c} \right) w_{orb} T^2} \sim 10 \text{ arcsec} \left(\frac{10^6 \text{ s}}{T} \right)^2 \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f_0} \right)$$

注: 回折限界 ~ 2秒角@100Hz

- あるいは探索すべき (= de-modulation すべき) 空の方向は $4\pi/\Delta\theta \sim T^2$ で増えていく。

計算量の問題

- Template search:
 - spin down parameters & source sky position.

$$\lambda \equiv [\{f^{(k)}\}_{k=1}^{s_{\max}}, \theta, \phi].$$

- Number of templates (T: integration time):

$$\mathcal{N} \propto \int d^n \lambda \sqrt{g} \sim O((fT)^2) \prod_{k=1}^{s_{\max}} f^{(k)} T^{k+1}$$

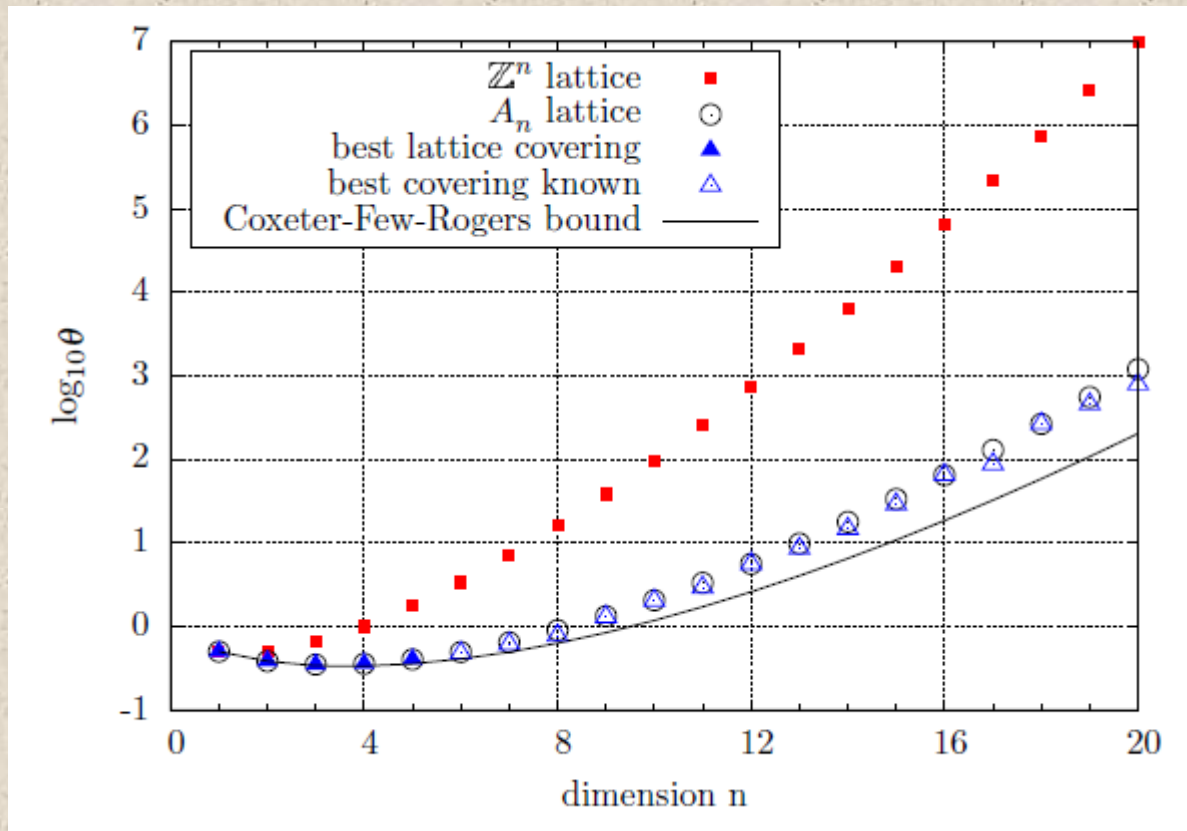
- LIGO S2 wide-band all-sky coherent search:
 - Less than 800 CPUs (2GHz), less than 1 month analysis time, all-sky, 160-730Hz → 10 hours LIGO data.
- 解析時間がたとえば T^4 で増えるアルゴリズムを採用した、1日分のデータを解析するのに1日かかるコードを使うと、1月分のデータを解析するのにかかる時間は $30^4 = 2000$ 年ぐらい。

計算量を減らす工夫と 計算能力を獲得する工夫

- 減らす工夫
 - Sphere covering problem
 - Random template bank (Messenger, Prix & Papa 2008)
 - Incoherent search
- 獲得する工夫
 - Einstein@Home (<http://einstein.phys.uwm.edu/>)

Sphere covering problem.

$$N_p = \theta m_{\max}^{-n/2} \sqrt{g} \int_{\mathbb{P}} d^n \lambda,$$



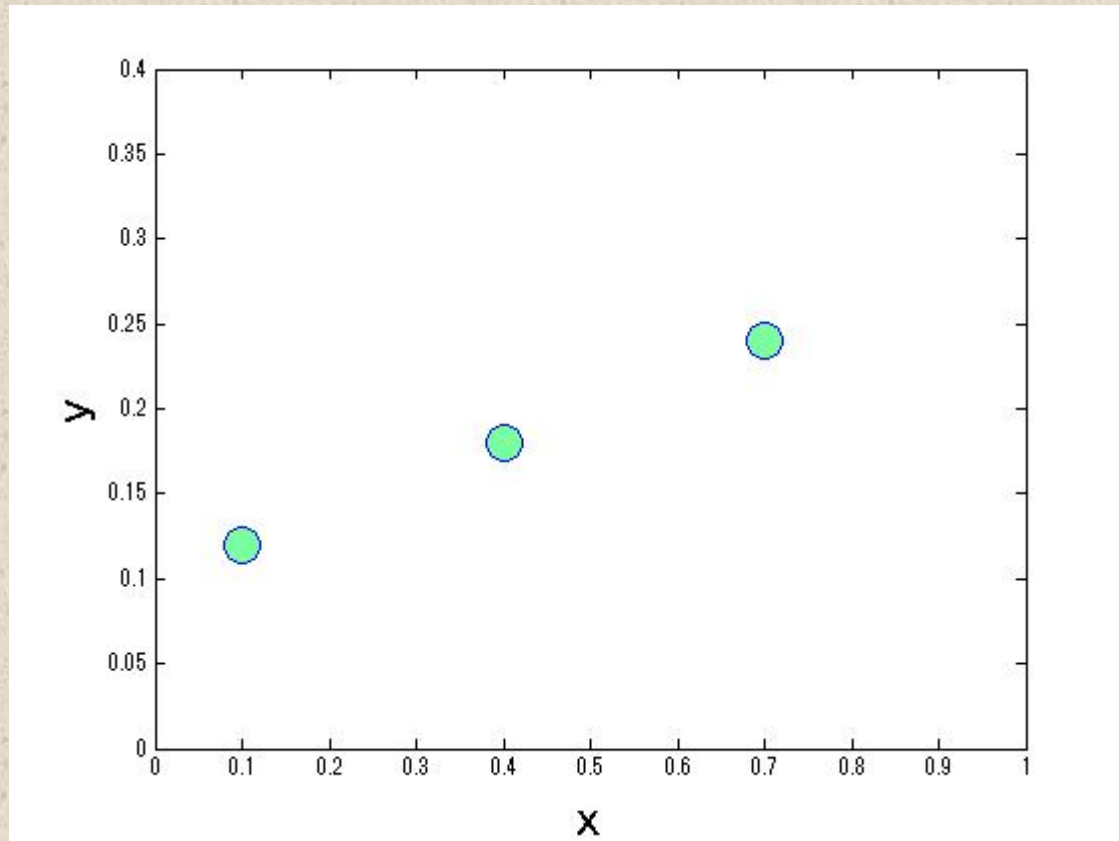
Prix 2007.

Hough Transform (used in GW community as well)

- Assume a master equation $y = f(x; p_i)$ with M parameters p_i .
- Given $N > M$ pair of “data” (x_k, y_k) , we obtain N curves in the M -dim param. space.
- If there is no noise, and if the master equation is correct, we get a solution as an intersection of the curves in the parameter space.
- When there is noise, there may be no solution. Yet, there may be a region where many intersections between two curves cluster.

Hough Transform (example)

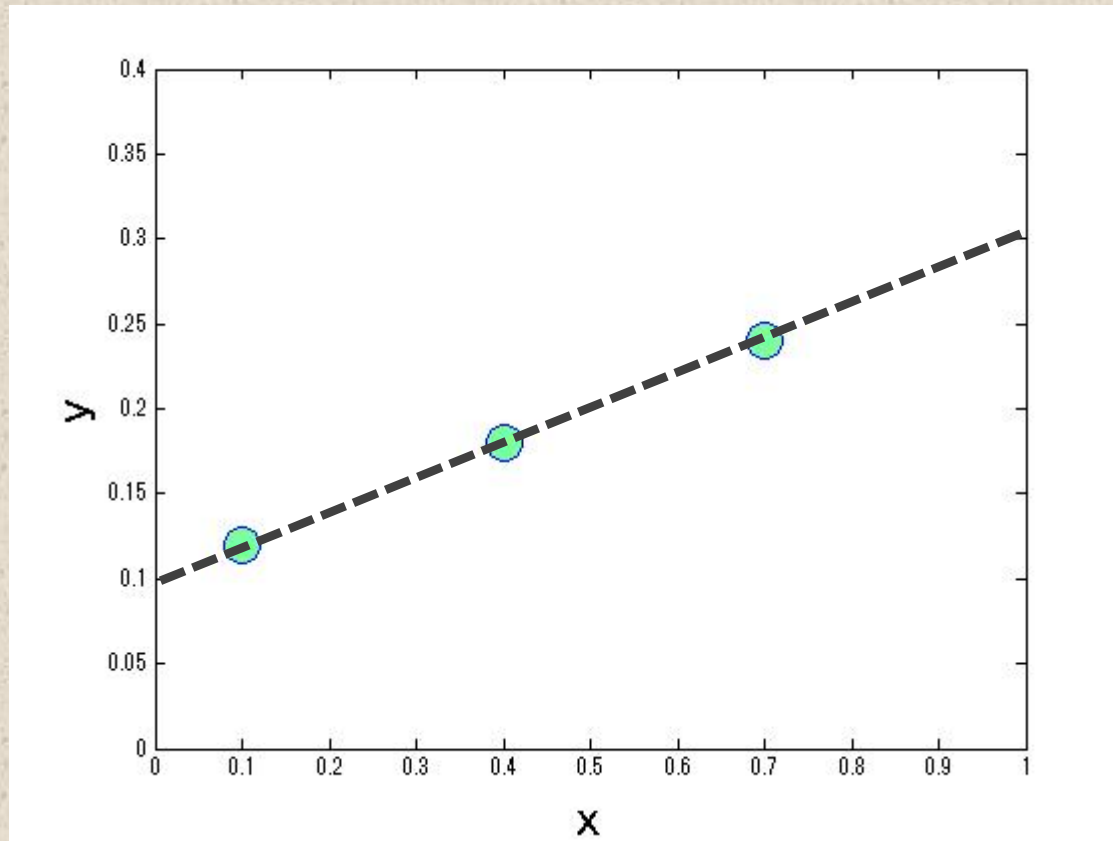
Straight line master eq.



Given 3 “data”.

Hough Transform (cont'd)

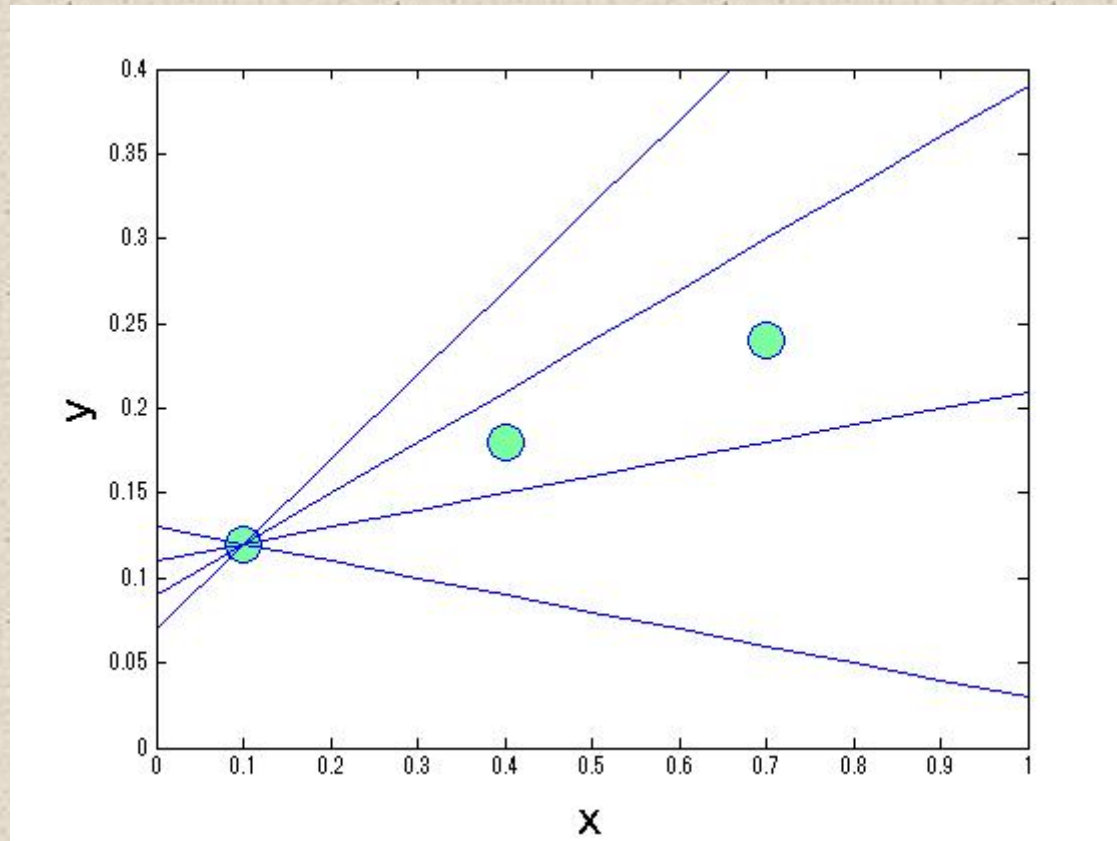
Straight line master eq.



This “data” is actually on $y = 0.2x + 0.1$ line.

Hough Transform (cont'd)

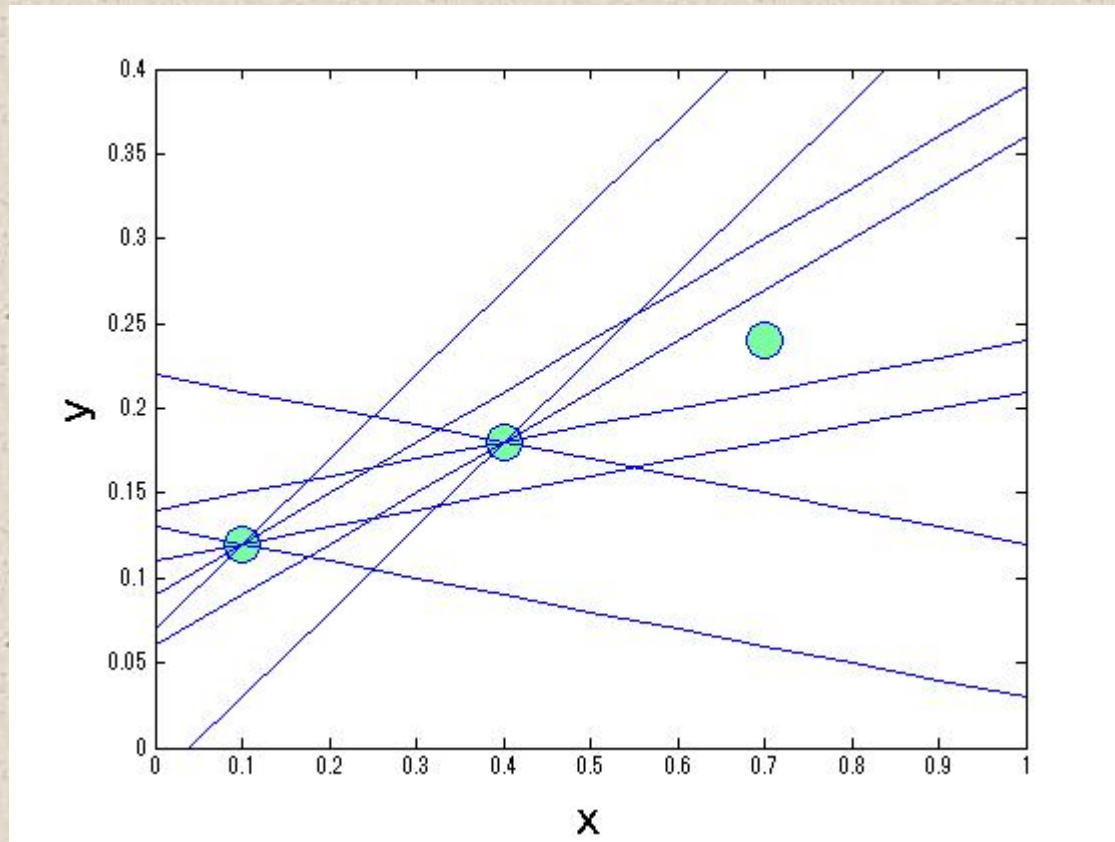
Straight line master eq.



For the rightmost data, plot a master equation (straight line in this example) that pass through the data.

Hough Transform (cont'd)

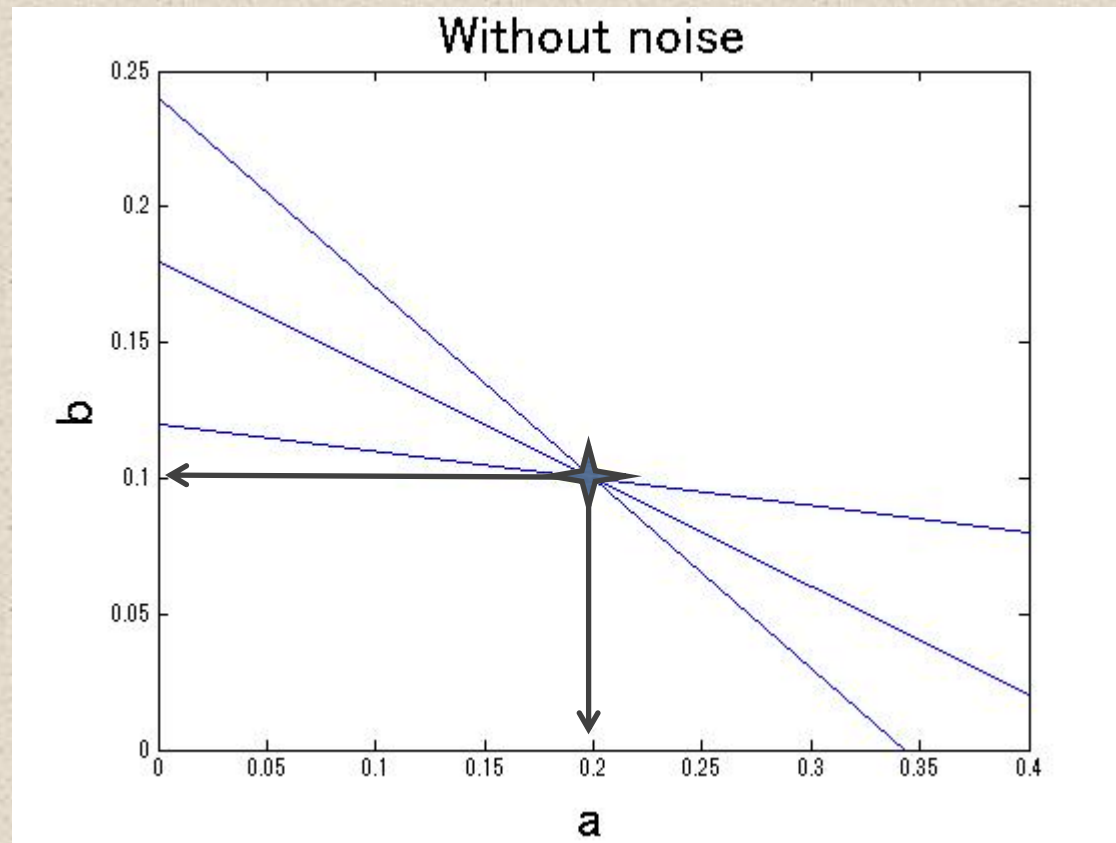
Straight line master eq.



Do the same for
the second data.

Hough Transform (cont'd)

Straight line master eq.



Move on to the parameter space.

Master eq. $y = a*x + b$

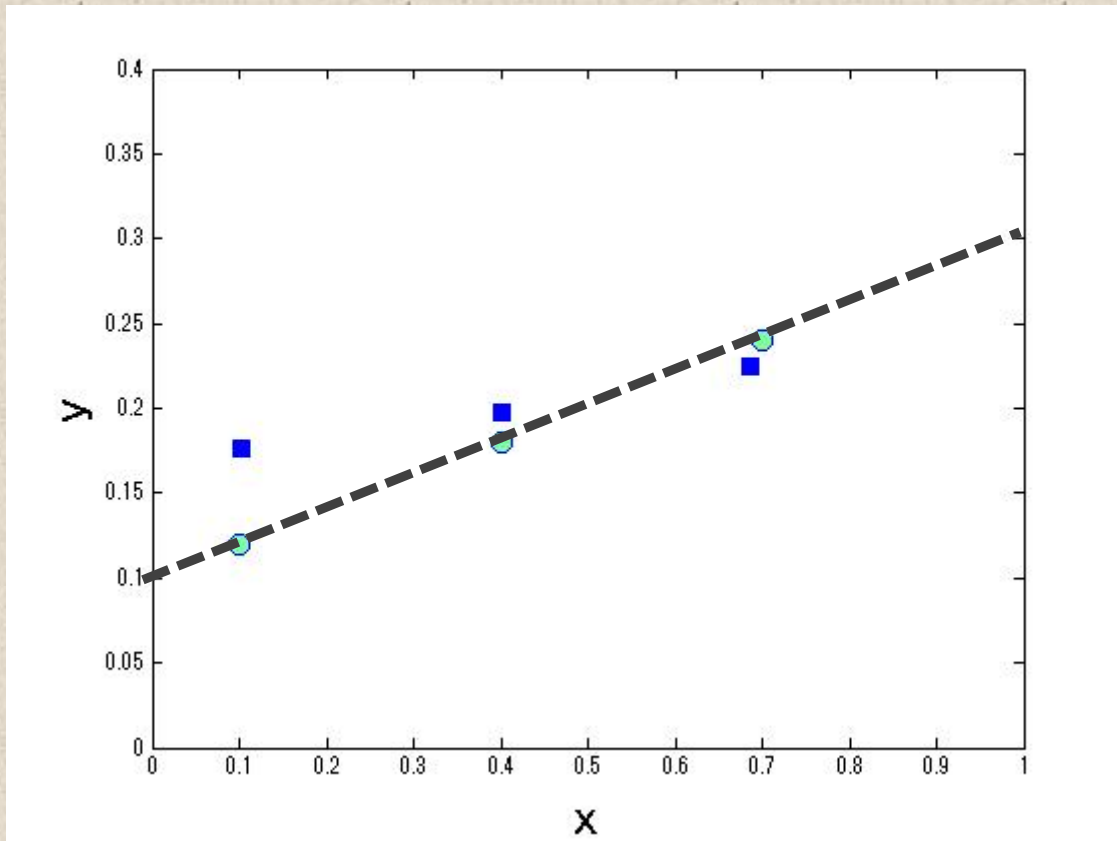
If there is no noise, we have “the” solution.

NOTE:

Correct equation is
 $y = 0.2 x + 0.1$

Hough Transform (cont'd)

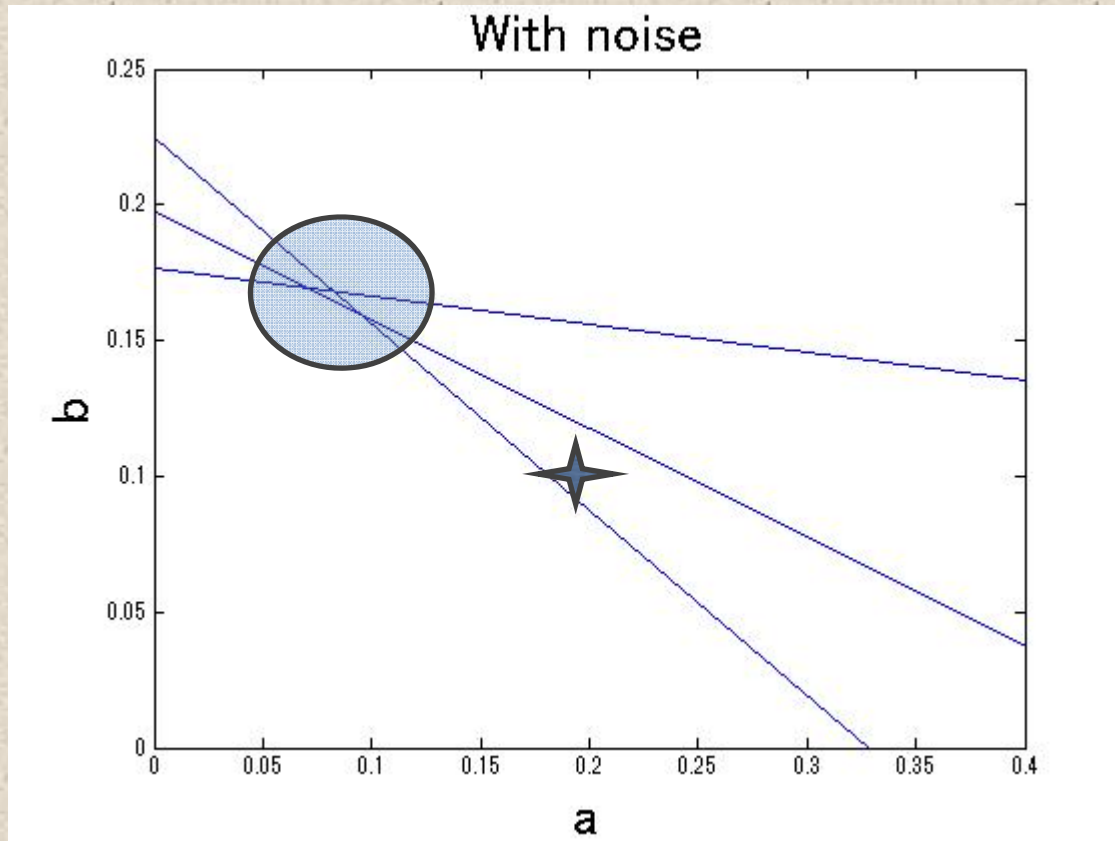
Straight line master eq.



In reality, there is noise.

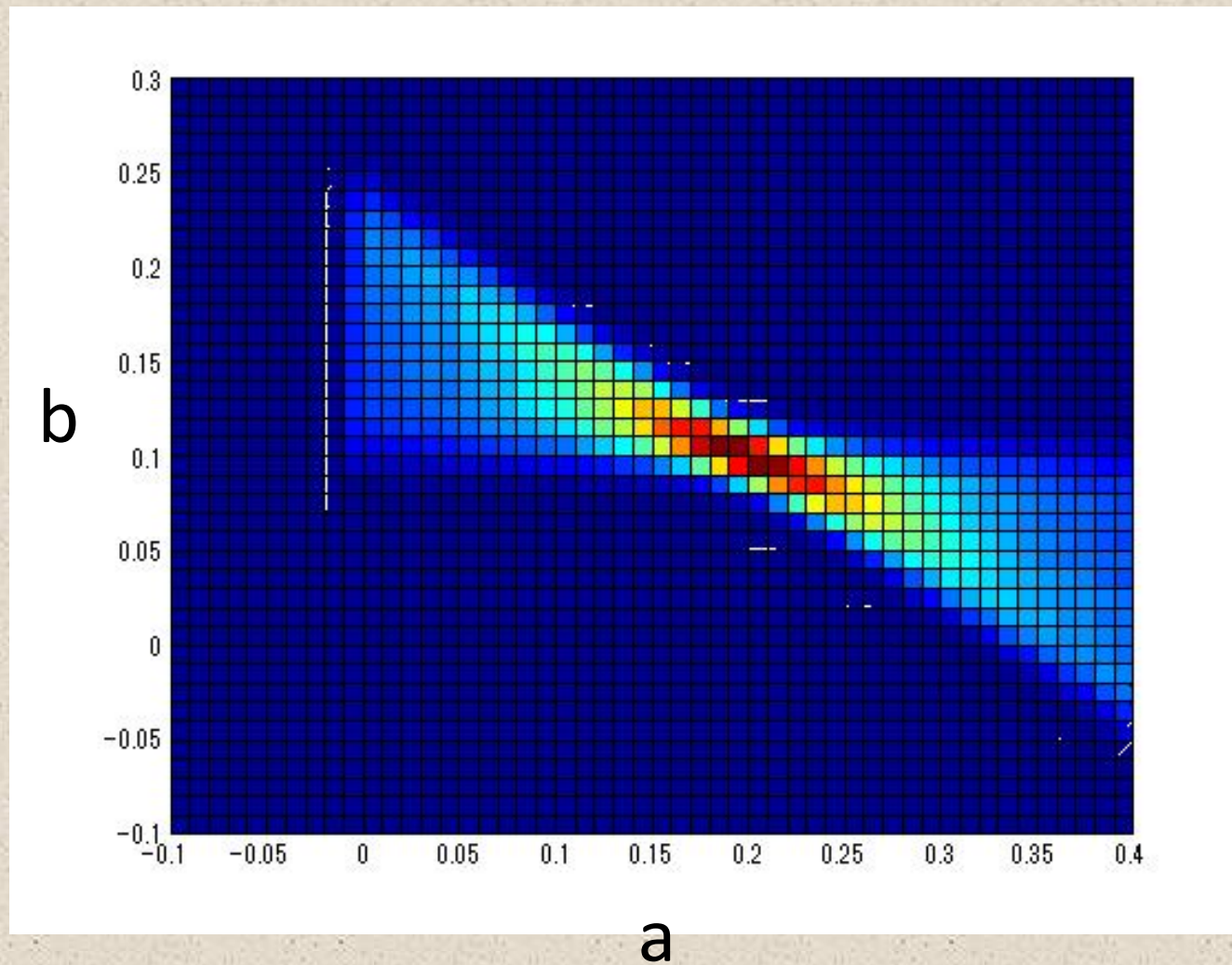
Hough Transform (cont'd)

Straight line master eq.

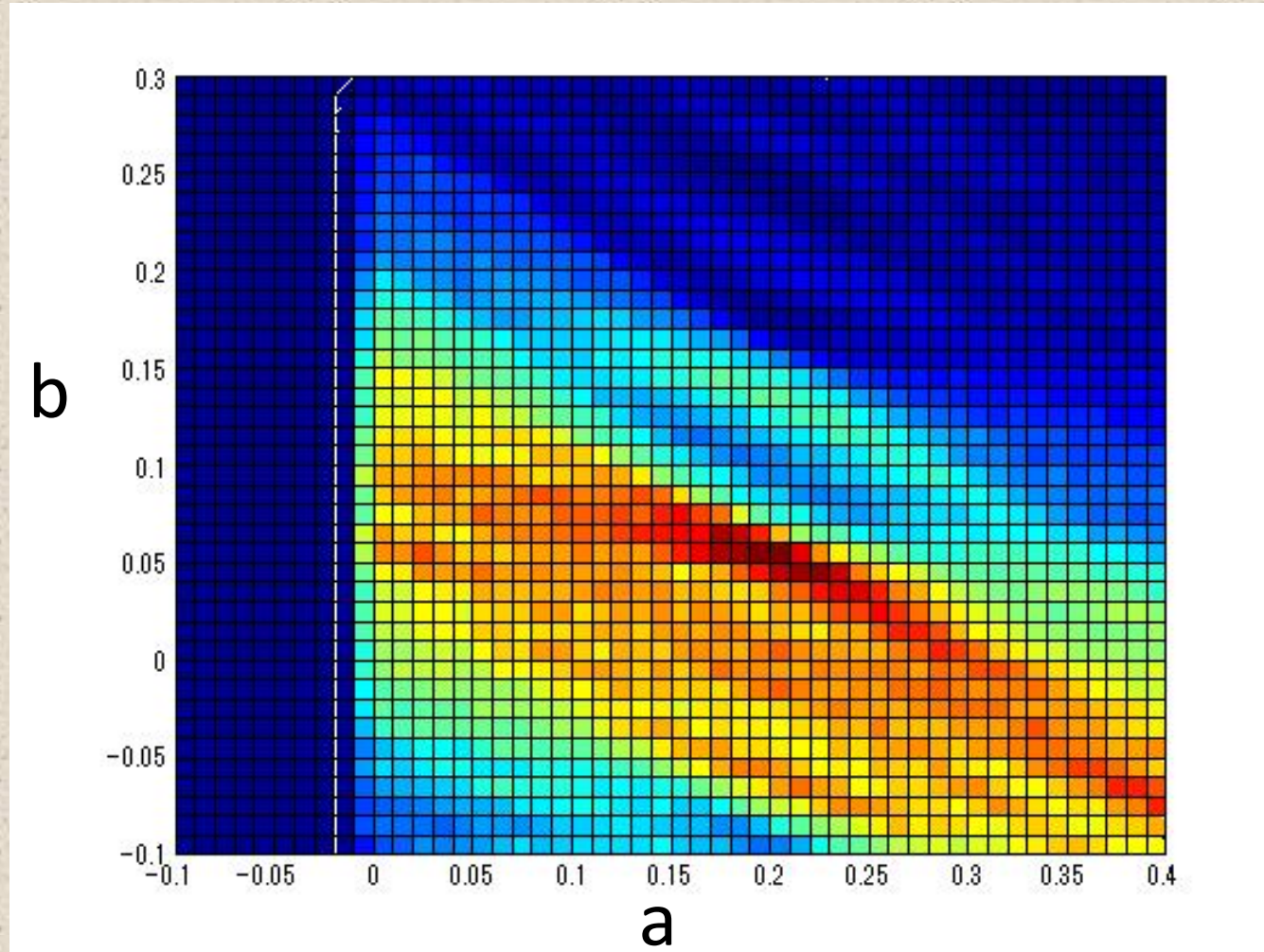


There is no “solution”.
Yet the intersections
cluster (hopefully)
around the true value.

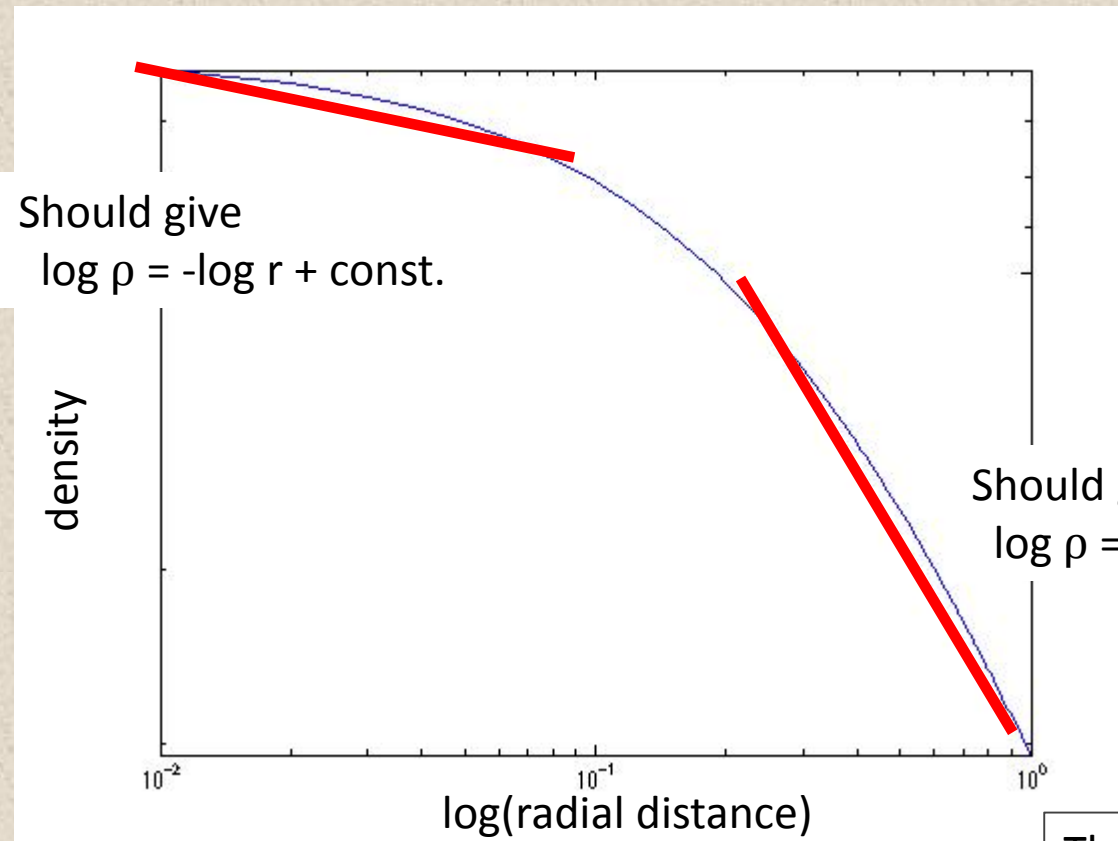
Do it many times....



Even when b is random variable



Example: Semi-parametric HT on NFW profile.



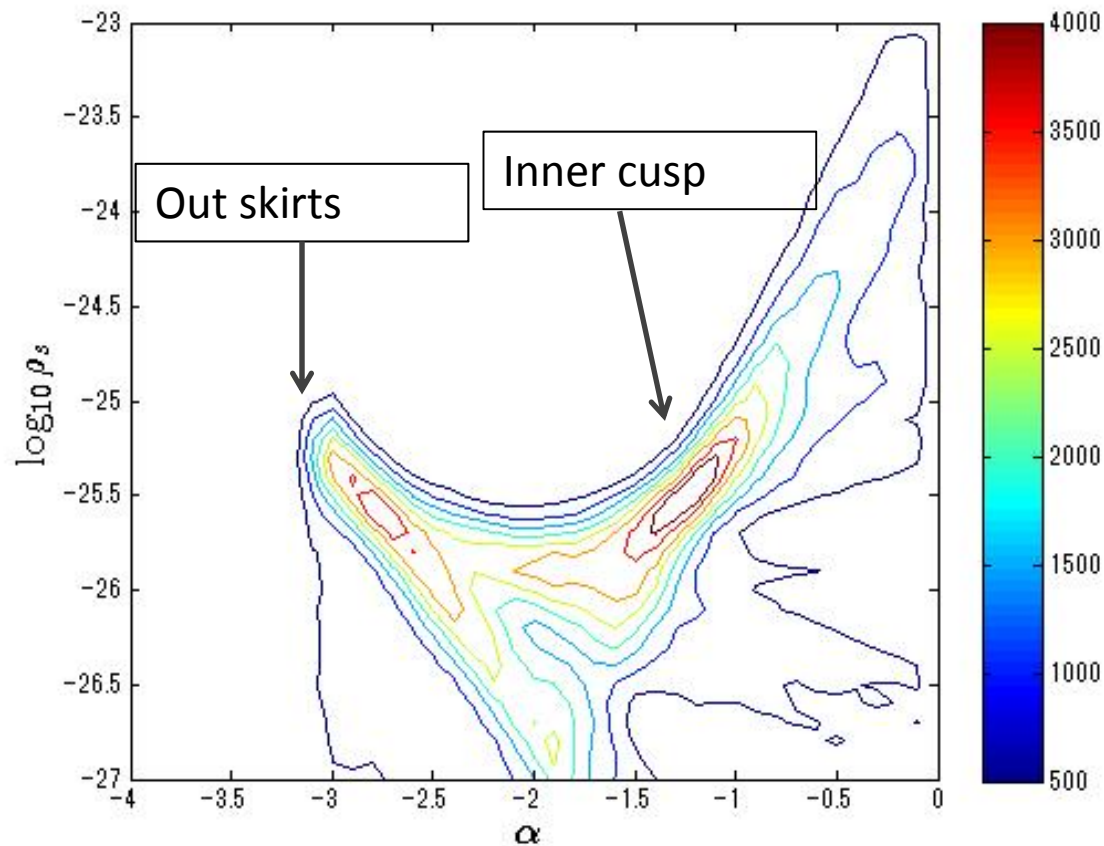
Master equation: $\log_{10} \rho(r) = a \log_{10} r + b$ ←

The parameter b
differs from cluster to
cluster.

Re-examining Toy model using Hough Transform

Fit 1000 $\log_{10}\rho(r)$ toy-data using a master equation

$$\log_{10} \rho(r) = a \log_{10} r + b$$



The parameter b differs from cluster to cluster.

課題

課題

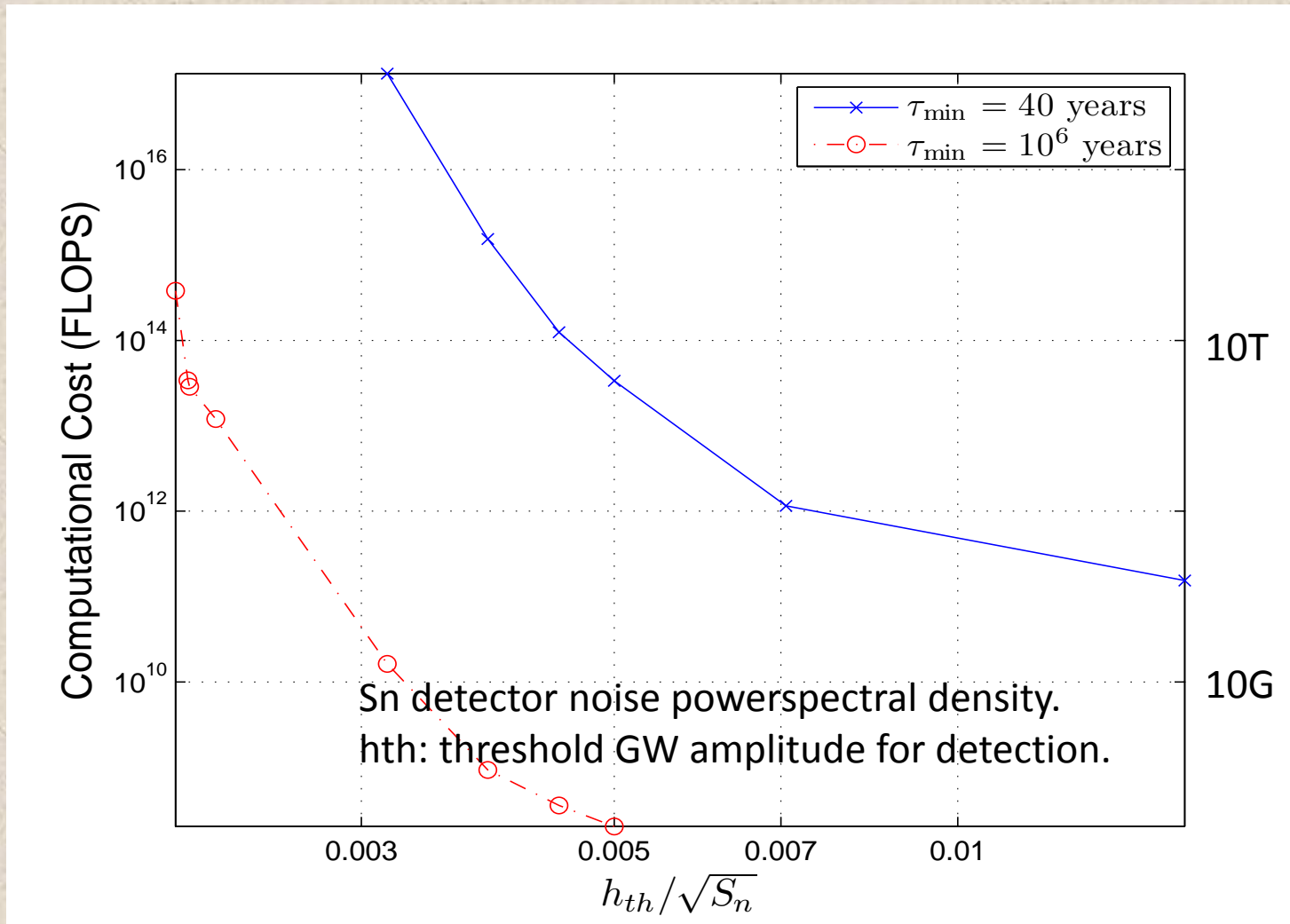
- 計算量の少ない解析手法
 - 賢いtemplate placement? (Lattice or stochastic?)
 - 賢いアルゴリズム (FFT?)
 - 事前情報の精密化 (マルチメッセンジャー)
- 計算能力の獲得
 - Einstein@Home?
 - GPGPU (伊藤科研費)
- 計算量の少ないVeto 手法
 - 伊藤の方法は計算量が多すぎて候補イベントが多いと実用的で無い。
- 計算量の少ない結果の統計的解釈の手法
 - データがGaussianだったらなあ。

Computation of Computational Cost & best observation configuration.

- Wish list
 - 1 year integration, 1 year analysis.
 - 2~3 spin down parameters (2nd~3rd time derivative of f).
 - Given threshold and given false dismissal rate (10% for the 1st stage, 1% for the later stage.)
- Assumed obs. configuration.
 - 3 incoherent stack-slide search
 - 1 coherent follow-up
- Optimize the obs. config. parameters
 - Parameter optimization (9 params: Time-duration for each step, # of stacks in each step, allowed loss in SNR in each step).
 - Nelder-Mead downhill simplex with simulated annealing

(This is the method by Culter, Gholami & Krishnan (2005) for LIGO)

Comp. Cost & Amplitude(KAGRA)



1-year integration, 1-year analy 、 All-Sky, up to 1kHz, 10-15% FA

Summary 1 (KAGRA)

- 100Tflops, All-sky, $f_{\max}=1\text{kHz}$, spin down age 1Myr, 1-year integration, 1-year analysis, 10-15% False Alarm, $\sqrt{Sn(LCGT)} \sim 1.5e-23 @ 1\text{kHz}$.

$$100 \frac{\sqrt{S_n}}{1.5 \times 10^{-23}} \simeq \left(\frac{\epsilon}{10^{-8}} \right) \left(\frac{I_{zz}}{10^{45} \text{gcm}^2} \right) \left(\frac{10 \text{kpc}}{r} \right) \left(\frac{f_{\text{GW}}}{1 \text{kHz}} \right)^2$$

→ Reach: 100 pc@1kHz

Summary 2(KAGRA)

- # of pulsars:
 - Birth rate = $1/(100-1\text{kyr})$? Life time = 100Myr?
→ 0.1Million pulsars/MWG? → a few within 100pc?
Cf) 10 radio pulsars within 300 pc (ATNF catalogue)
- All-sky, $r=100\text{kpc}$, $f=200\text{Hz}$, spin down age 100Myr, 1 year integration, 1 year analysis time
→ Comp. cost = $1e28\text{flops}$?

解析手法 (こまかいこと)

Barycentering

- GPS time accurate through nanoseconds (recorded in Frame data)
- WGS84 earth model (rotational ellipsoid) + geoid height + orthometric height (given by Saito san for KAGRA. NOT YET OFFICIAL?)
- DE405 or DE425 JPL ephemeris
- Leap seconds taken into account.
- LSC (C. Cutler) developed a barycentering routine validated against TEMPO through 4 microsecons level (0.01 radians phase offset, or $1e-4$ fractional loss in SNR). Roemer + Shapiro + Einstein, but not including tropospheric effect and solar plasma delay.
- KAGRA には独自の timing routine は無いらしい。

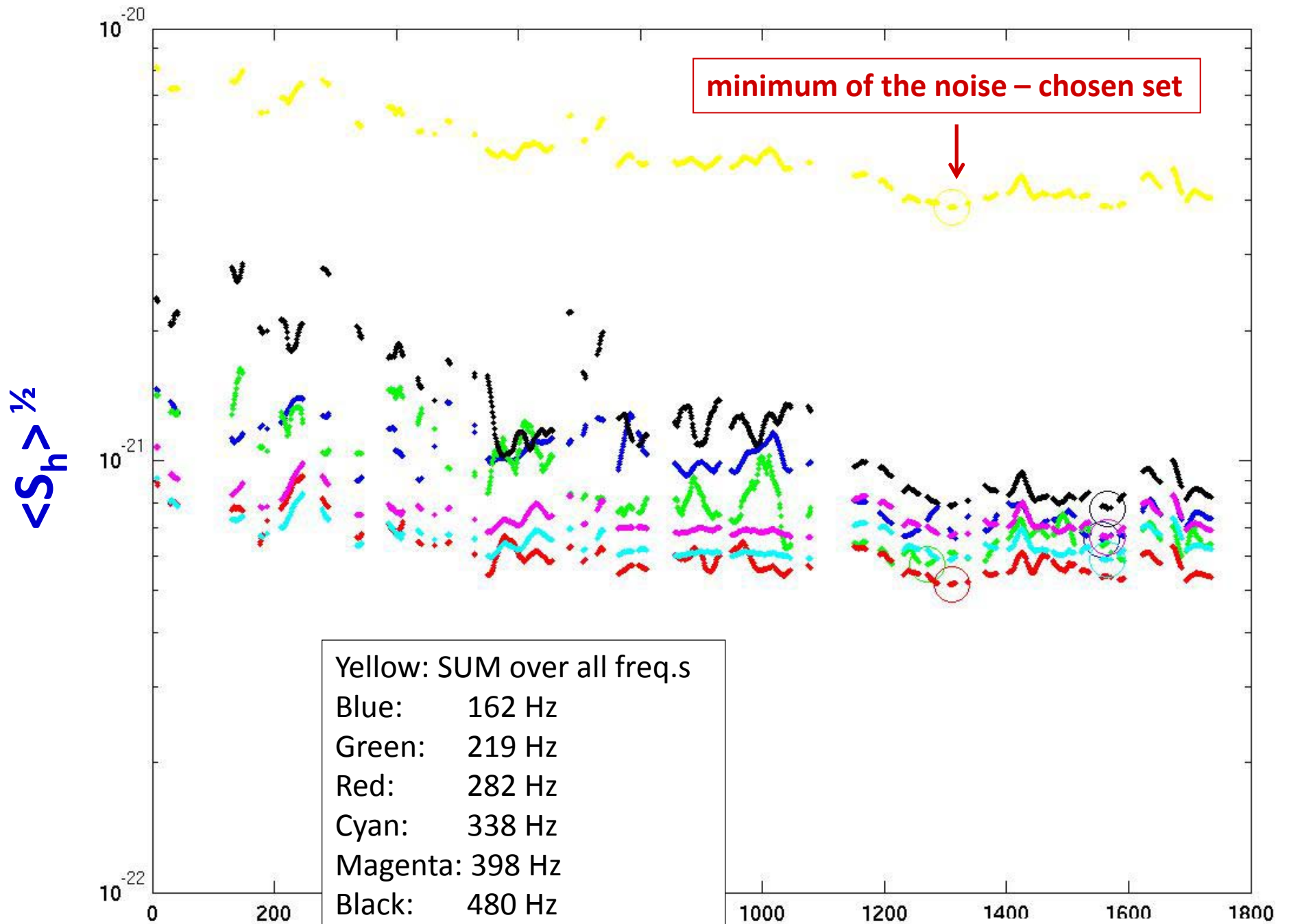
Short Fourier Transform

- 非定常性、データのギャップに対応するために、データを1800秒ごとにフーリエ変換したものを作り、Short Fourier Transformファイルと呼ぶ。
- F-statisticなどは複数のSFTファイルをCoherentにつなぎ合わせて求める。

Data Conditioning (Stationarity)

- 1800秒ごとに分けてShを評価。
 - 1800秒で良いというシステムティックな評価は見
たことない。
 - 計算効率上はSFTの長さは長い方が良く(SFTファ
イル数をMとすると、計算量 $M \log M$)、ただし、
Doppler 変調による周波数変化が1周波数ビン以
上にならない程度にしたい。
 - Incoherent search のSNRはStack数をMとすると、
 $1/M^{(1/4)}$ 。

The H1 data



Data Conditioning (line noise)

- 大振幅のline noiseは実験家と密に連絡取って取り除く必要がある。
- Pulsar グループは数日以上データを積分する。つまり、大抵の場合、小振幅のline noiseを発見するのはpulsar グループで、かつその発見は忘れられる。実際何本かvetoできない。
- 事前に分かっているline noiseの存在するバンドは、解析から除く。たとえば、Doppler demodulation の影響避けるために、近傍周波数のShを持つようなガウスノイズと置き換える。
- A. Sintesの除去方法もあるらしいが、使っていなかった。

Data Conditioning (line noise)

- LSC にはソフトがいっぱい。問題は使い勝手。
 - F-scan by R. Dupius and others.
 - Gaby が推薦？
 - Running median based line tracker.
 - 3つのコードがあり、Python, Matlab, C++ で書かれている。Multichannel 間の coherence を計算するコードあり。
 - GUI 無し。
 - データベースと連携、サマリーページ有り。
 - ロックしてようがいまいが構わず line hunting するらしい。
 - 実験家との連携が課題。
- KAGRA detchar で F-scan の移植もしくは、line noise tracker の開発が課題。伊藤がやることになったが手つかず。

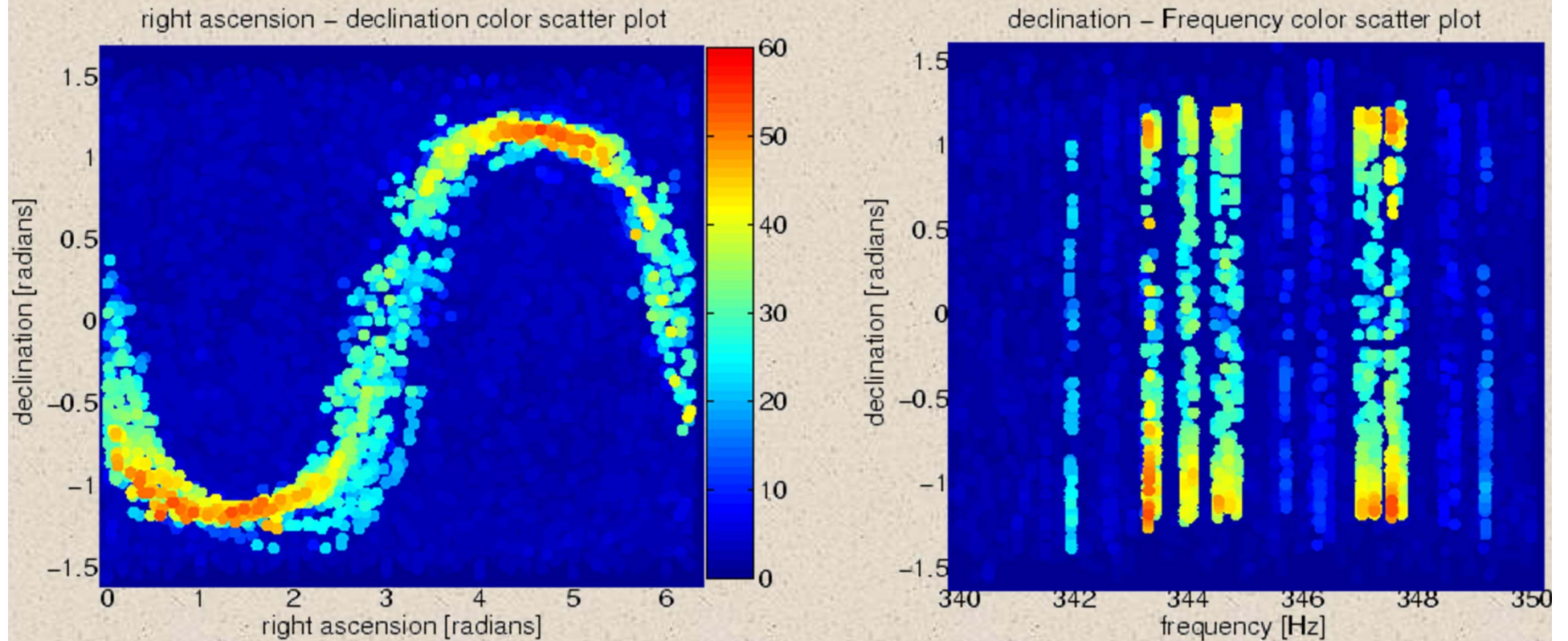
Data Conditioning (Noise estimate)

- Running median によるノイズフロアの評価を 1800 秒SFTそれぞれについておこなう。
- Medianはパワースペクトルのバイアスされた推定量なので、補正する。(Gaussianノイズについては、解析的に補正量が求まる。Cramer の”Mathematical Methods of Statistics”参照。)

Interpret results (veto)

- Global correlationを使う。
 - 地上起源のラインは黄道座標の極と赤道座標の極を結ぶ大円上に乗りやすい (Prix & Itoh 2005)。
自転と公転によるDoppler 効果が最小になるから。
- Itoh et al. (2004)の波形テストを使う。
 - 計算時間が大量にかかる。

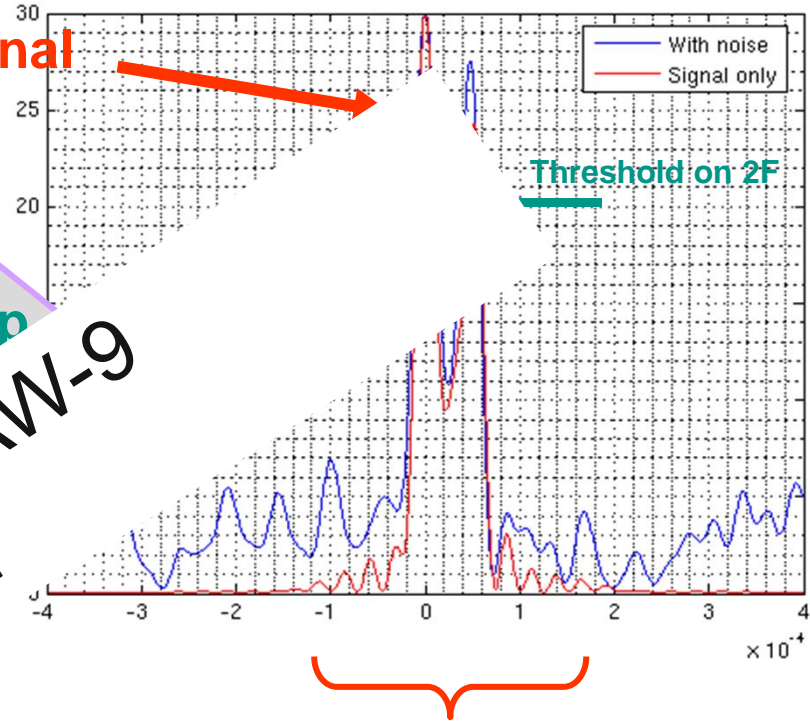
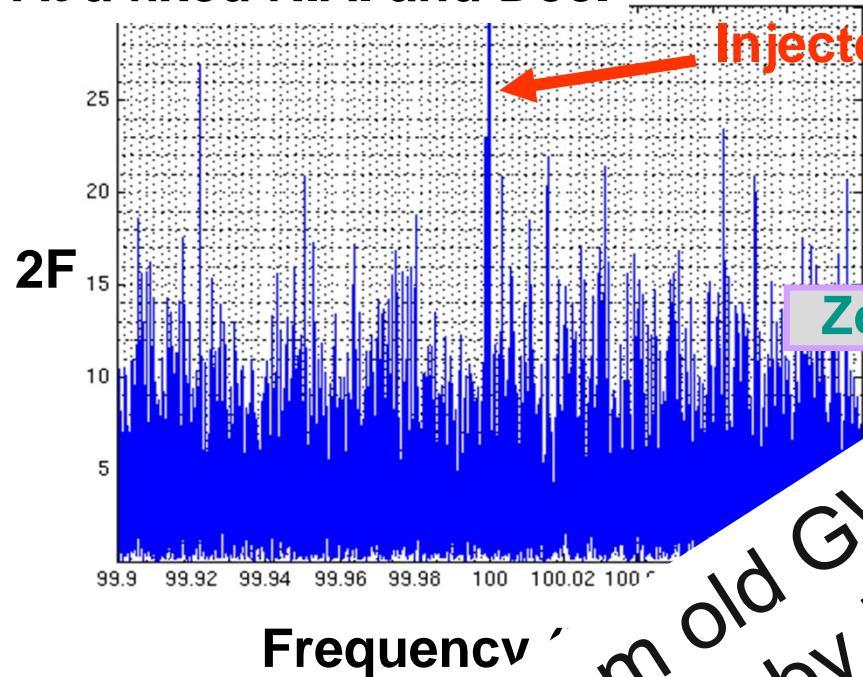
Global correlation



Taken from Einstein@Home web page.

New in S2: Frequency domain cluster identification

At a fixed R.A. and Dec.

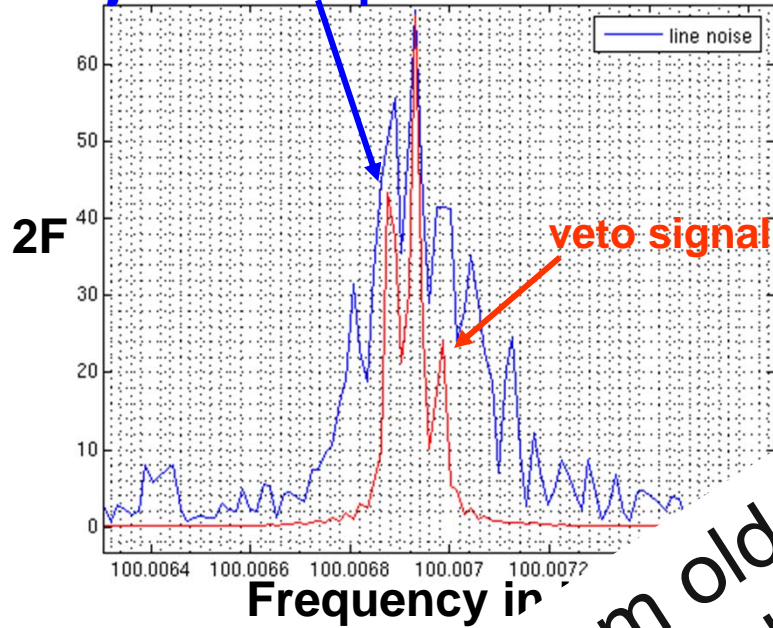


Taken from old GWDAAW-9 presentation by Itoh.

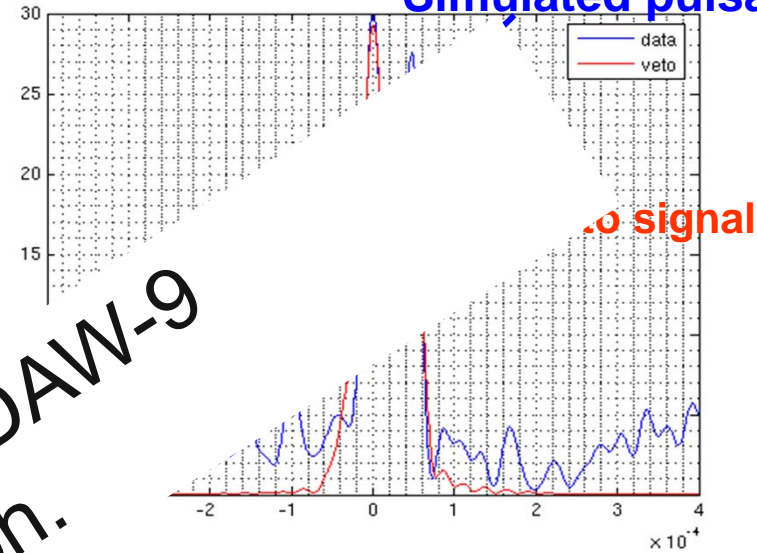
- If the frequency peaks are less than Δf they are considered as a single candidate event.
- $\Delta f = 1.4e-4$ Hz by MC.

Single candidate event

Injected damped sinusoid



Simulated pulsar signal



Procedure

- Generate a signal from MLE parameters of the candidate (outlier)
- Compute the profiles of the outlier and the veto signal.

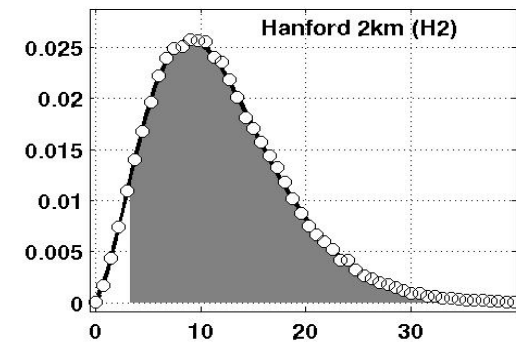
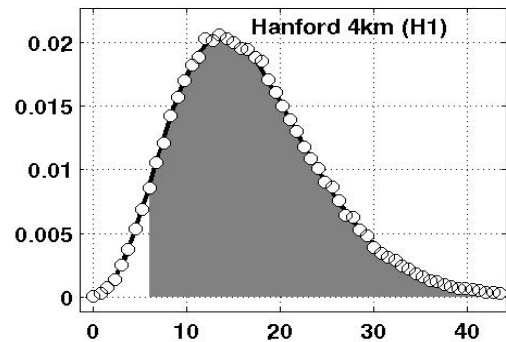
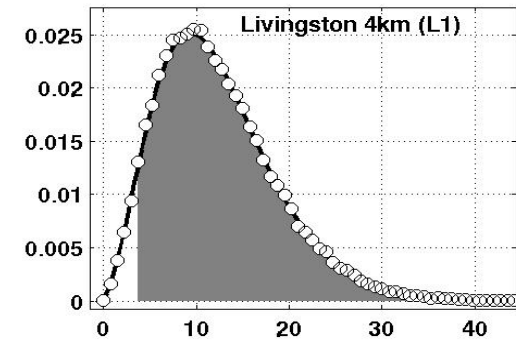
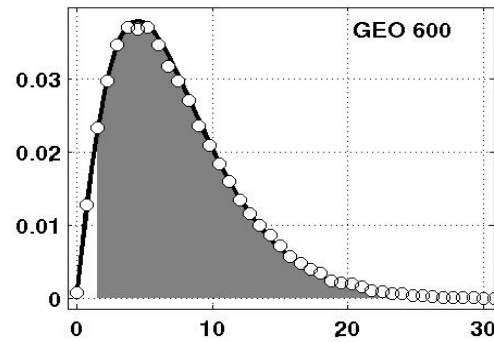
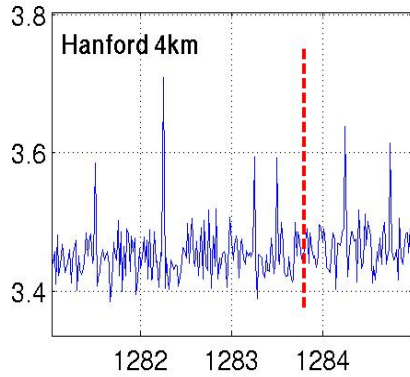
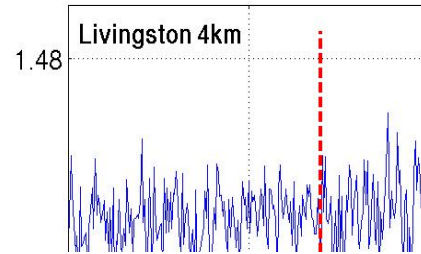
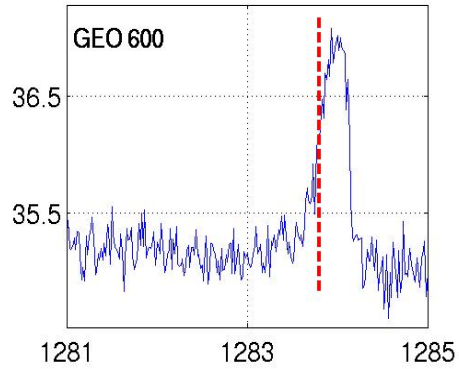
Reference: GWDAW8 Class. Quant. Grav. 21 S1667, 2004

Taken from old GWDAW-9 presentation by Itoh.

Interpret results (Statistical assessment, non-Gaussianity and Monte-Carlo)

- If the data is Gaussian, we use analytic probability distribution to have a statistical interpretation of the result.
- K-S test says it is Gaussian almost always. But we conducted MC anyway.

Gaussian ??



解析手法 (比較的最近の こと)

Heterodyne, Band-limit, Downsample

- LALDemod routineは N^2 -routine。
 - Known pulsar探索ではFFTを使う意義が薄い。
 - 周波数と相関する他のパラメータとの兼ね合い。
- 広帯域探索ではFFTを使いたい。
 - Einstein@Homeなどでは、データ量を減らしたいので、Complex heterodyne + band-limit + downsampling (1/60Hz).
 - 空の各方向について、Barycentric resamplingが必要になる。

Template placement

- Lattice template placement
- Random template placement
- Stochastic template placement

解析チーム (KAGRA)

Software engineering

- RESCEU Project Management Server
 - <https://vt001.resceu.s.u-tokyo.ac.jp/>
- Start developing KAGRA Algorithmic Library
 - “KAGALI” (篝火)
 - C-coding style guide with hopefully useful tools
 - Available from the RESCEU PMS.
 - Introduced in the “Boot-camp” 6/28-29 @ Osaka-City U.

“Boot Camp” June 28, 29 @ Oosaka City U.

https://yukimura.hep.osaka-cu.ac.jp/wiki/pages/h197q9t/Boot_Camp_2013.html

Aim of “Boot Cam

- face to face meeting (PDs, Students, Proposed-research researchers)
- 25 participants
- Discussion on how to proceed the A04 research
- Find possibilities of collaboration among project and proposed researches.
- Introduction of “KAGALI”

名前	所属
横澤 孝章	大阪市大
有馬 司	大阪市大
神谷 慶	大阪市大
讓原 浩貴	大阪市大
浅野 光洋	大阪市大
神田展行	大阪市大
山本尚弘	大阪市大
田中一幸	大阪市大
鳥谷仁人	大阪市大
端山和大	大阪市大
横山順一	東大RESCEU
枝 和成	東大RESCEU
伊藤洋介	東大RESCEU
中野 将也	富山大
廣林 茂樹	富山大
西澤篤志	京大
上野 昂	阪大
成川 達也	阪大
田越秀行	阪大
高橋 弘毅	長岡技術科学大学
辰巳大輔	国立天文台
大原謙一	新潟大
平沼悠太	新潟大
金山雅人	新潟大
若松剛司	新潟大

Project management server@RESECU

<https://vt001.resceu.s.u-tokyo.ac.jp>

- Joint Development of data analysis softwares needs
 - version control: git
 - Project management: redmine
 - Continuous integration: jenkins
- Aluminium: a package includes all.
 - Established a project management server (PMS) at RESCEU.

[RESCEU-PMS]

- Current
 - Nightly update by cron
 - KAGRA DAS white paper
 - KAGALI coding standards
- Plan
 - Nightly back-up (amanda/bacula/rsync ...)
 - KAGALI/LAL/GSL/FFTW3
 - Joint development
 - Nightly build by Jenkins
 - Control by alminium

KAGRA Data Analysis School @ RESCEU 2013

- September 27 (Fri.) 10:00 and 28 (Sat.) ~ 17:00
- RESCEU, University of Tokyo
- Continuous Gravitational Wave search
- Lecture on GW from neutron stars by Kojima san,
and pulsar timing by Dr. Rutger van Haasteren (AEI
Hannover)