

2018 年度 4A セメスター 特別実験 II
TOBA による重力波検出とパラメータ推定

理学部物理学科 B4 上田柊介 (05-171511)
共同実験者: 佐藤陽太郎

2019 年 1 月 28 日

目次

1	Introduction	1
2	パラメータ推定の理論	2
2.1	アンテナパターン	2
2.2	フィッシャー解析	3
3	連星合体の重力波モデル	4
3.1	物理パラメータ	4
3.2	PN の重力波の波形	5
4	セットアップ	6
4.1	ディテクター	6
4.2	重力波源	6
4.3	シミュレーションの詳細	7
5	結果と考察	8
6	まとめと展望	10
6.1	Triple-output TOBA	10
6.2	現象論的波形モデル	10
	謝辞	10
	参考文献	10

1 Introduction

LIGO による 2015 年 9 月の重力波の初観測以降, さまざまな重力波望遠鏡の開発を通して重力波天文学の研究が進められている. 現在主流に開発されている重力波望遠鏡はレーザー干渉を利用したもので, Advanced LIGO や Advanced Virgo, さらに日本の KAGRA などが次世代の重力波望遠鏡ネットワークとして設置が進められている.

これらの地上に設置する重力波望遠鏡は地面振動などの影響により低周波帯での感度が悪くなってしまうことが知られている. これらの問題を解決し, 低周波領域での観測を進めるために TOBA [2] や DECIGO といった重力波望遠鏡の開発も進められている. TOBA (torsion-bar antenna) は地上に設置した場合でもレーザーではなく実際の金属棒をつるして干渉計として用いており, 地面振動や熱振動の効果を抑えることによって金属棒の固有振動数 (\sim 数 mHz) 以上の周波数で高い精度で観測をおこなうことが可能になる. この低周波帯での高い感度は Advanced LIGO などのレーザー干渉型重力波望遠鏡にはないメリットである. また, 今回は扱わないが, DECIGO などの宇宙重力波望遠鏡は宇宙にレーザー干渉系を打ち上げることにより地面振動などのノイズの影響を減らし, かつ地上よりも簡単に装置を巨大化することで, 低周波領域も含め精度を高めようとするものである. ただし宇宙に打ち上げる関係上技術的な問題点が多く, 実現にはまだしばらく時間がかかるものと考えられる.

TOBA をはじめとした重力波望遠鏡で重力波信号の解析をおこなうにあたって, 重力波を決定している各種の物理パラメータをどれくらいの精度で決定できるかどうかは重要である. 一般にこのような信号解析に用いられる手法として後に述べるフィッシャー解析がある. 今回の特別実験では, Eda *et al.*, 2014 [3] や Takeda *et al.*, 2018 [7] の手法に従い, 質量 $10000m_{\odot}$ - $10000m_{\odot}$ 程度の中間質量ブラックホール連星が合体したときに放出される重力波信号に対して, TOBA がどれくらいの精度でパラメータ推定ができるのかを数値シミュレーションによって計算した. TOBA においては低周波領域 (= 長時間領域) の感度が高いため, 観測の途中で地球の自転などの時間発展の効果が重要になる. この効果は Advanced LIGO などの現在の重力波望遠鏡ではあまり入ってこないため, これからの TOBA や DECIGO による解析のために時間発展を考慮した解析方法を確立することは重要である. また, 時間発展を考慮しない望遠鏡では一台では重力波の飛来した方向などの角度パラメータを決定することは不可能であるが, 望遠鏡自体が移動する効果である時間発展を考慮した場合には一台でも角度パラメータを (ある程度の精度で) 決定することが可能になる. 今回用いた post-Newtonian 近似においては時間発展の効果はよく計算されており, Allen *et al.*, 2012 [1] や Eda, *et al.*, 2014 [3] に述べられている.

本レポートにおいては, まず第 2 節でフィッシャー解析について説明し, 続く第 3 節において重力波モデルの計算に用いる post-Newtonian 近似の結果について述べる. 第 4 節はシミュレーションの手法についての詳細を説明しており, その結果は第 5 節で述べられる. また, 連星合体から放出される重力波モデルの計算には今回用いた post-Newtonian 近似がよく知られているが, 現象論的なモデルとして PhenomD モデル [4, 5] や PhenomHM モデル [6] も近年開発されている. 最後の第 6 節では新しい波形モデルをはじめとしたこれからの展望について多少説明する.

以下では $c = G = 1$ とする単位系を用い, 物理量の単位はすべて秒で表す.

2 パラメータ推定の理論

この節では入射した重力波に対するディテクターの応答, またパラメータ推定をおこなうためのフィッシャー解析と呼ばれる手法について述べる.

2.1 アンテナパターン

まず, ディテクターおよび重力波の位置や方向を指定する角度パラメータについて述べる. 地球の中心を原点とし, 通常の球座標 (r, θ, φ) を取る. 各変数が増える方向の単位ベクトルは

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

である. テンソル計算に用いる基本ベクトル $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y$ としてはこの $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$ を角度 ψ だけ回転したものをとる. すなわち,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \mathbf{e}_\theta \cos \psi + \mathbf{e}_\varphi \sin \psi, \\ \mathbf{e}_y &= -\mathbf{e}_\theta \sin \psi + \mathbf{e}_\varphi \cos \psi \end{aligned}$$

とする.

以下, ディテクターの位置および方向を表す角度変数を $\boldsymbol{\theta}_e = (\theta_e, \varphi_e, \psi_e)$, 重力波の方向および偏向を表す角度変数を $\boldsymbol{\theta}_s = (\theta_s, \varphi_s, \psi_s)$ とする. それぞれについてディテクターテンソル d および偏向テンソル e_+, e_\times を

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2} [\mathbf{e}_x(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{e}_x(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\theta}_e)], \\ e_+ &= \mathbf{e}_x(\boldsymbol{\theta}_s) \otimes \mathbf{e}_x(\boldsymbol{\theta}_s) - \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\theta}_s) \otimes \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\theta}_s), \\ e_\times &= \mathbf{e}_x(\boldsymbol{\theta}_s) \otimes \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\theta}_s) + \mathbf{e}_y(\boldsymbol{\theta}_s) \otimes \mathbf{e}_x(\boldsymbol{\theta}_s) \end{aligned}$$

と定義すると, アンテナパターン関数 F_+ および F_\times は

$$F_+ = d_{ij} e_+^{ij}, \quad F_\times = d_{ij} e_\times^{ij}$$

と計算される. ここで i, j に関する和の記号は省略されている.

重力波の観測においては, 純粋な波形に加えてディテクターや地球の自転といった幾何学的な因子を考慮する必要がある. この幾何因子はアンテナパターン関数および後述する連星の inclination ι を用いて

$$G = \left[\frac{1 + \cos^2 \iota}{2} F_+ + i \cos \iota F_\times \right] e^{i\phi_D}$$

と表される^{*1}. ここで i は虚数単位であり, ϕ_D は地球の半径による効果で重力波の振動数 f , 地球の半径 r_\oplus を用いて

$$\phi_D = 2\pi f r_\oplus \mathbf{e}_r(\boldsymbol{\theta}_e) \cdot \mathbf{e}_r(\boldsymbol{\theta}_s)$$

^{*1} 文献によってこの幾何因子やディテクターのノイズのパワースペクトルが定数倍異なっていることがあるので注意が必要である. また, 幾何因子に $e^{i\phi_D}$ の項を含めるかどうかは文献による.

と計算できる. この効果および地球の自転によって θ_e が時間発展することにより, 幾何因子 G は重力波の振動数 f に依存する.

口述する重力波のモデル h_{model} とディテクター I の幾何因子 G_I が与えられたとき, 実際にディテクター I で検出される重力波信号 h_I は

$$h_I = G_I h_{\text{model}}$$

となる. ディテクター I のノイズの片側パワースペクトルを S_I とするとき, 信号の signal-to-noise ratio (SNR) ρ は

$$\rho^2 = 4 \sum_I \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{|h_I|^2}{S_I}$$

と計算できる. ここで f_{\min} および f_{\max} は解析に用いる周波数の下限および上限である. 以下では, この SNR が一定以上になるもののみを採用するという SNR テストをおこなってから解析に進むものとする.

2.2 フィッシャー解析

連星合体からの重力波 h_{model} は, 連星の質量やスピンなど複数の物理パラメータに依っている. これらのパラメータの誤差およびパラメータ間の相関係数を推定するのがフィッシャー解析と呼ばれる手法である.

物理パラメータを $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とするとき, フィッシャー行列 Γ_{ij} を

$$\Gamma_{ij} = 4 \text{Re} \sum_I \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{\partial h_I}{\partial \lambda_i} \frac{\partial h_I^*}{\partial \lambda_j} \frac{1}{S_I}$$

で定義する. この逆行列を用いて, パラメータ λ_i の誤差は

$$\Delta \lambda_i = \sqrt{\Gamma^{-1}_{ii}},$$

パラメータ λ_i と λ_j の相関係数は

$$C(\lambda_i, \lambda_j) = \frac{\Gamma^{-1}_{ij}}{\sqrt{|\Gamma^{-1}_{ii} \Gamma^{-1}_{jj}|}}$$

で与えられる.

実際には, 有限な定義域のあるパラメータについては, 誤差の大きさがその定義域の大きさを超えることがないように逆行列を取る前に “prior を課す” ことが多い. このためにはパラメータ λ_i の定義域の幅が w_i のとき (たとえば $\lambda_i = \theta_s$ のとき $w_i = \pi$), 対角成分 Γ_{ii} に $1/w_i^2$ を加える. すなわち,

$$\Gamma_{ij} = \frac{1}{w_i^2} \delta_{ij} + 4 \text{Re} \sum_I \int_{f_{\min}}^{f_{\max}} df \frac{\partial h_I}{\partial \lambda_i} \frac{\partial h_I^*}{\partial \lambda_j} \frac{1}{S_I}.$$

特に角度パラメータ θ_s および φ_s について, どれくらいの精度で重力波の方向を特定できるかの指標として sky localization error $\Delta \Omega_s$ という

$$\Delta \Omega_s = 2\pi |\sin \theta_s| \sqrt{(\Delta \theta_s)^2 (\Delta \varphi_s)^2 - C(\theta_s, \varphi_s)^2}$$

で定義されるものを用いることがある.

3 連星合体の重力波モデル

ブラックホールなどの連星合体の波形のモデルにはいくつかの種類がある。ここではニュートン力学の結果に高次の補正を加えた post-Newtonian 近似における周波数に依存した重力波のモデルを述べる。

3.1 物理パラメータ

Post-Newtonian モデル (以下 PN) においては次の 11 種類の物理パラメータ

$$M_{\text{ch}}, \eta, t_c, \phi_c, d_L, \chi_s, \chi_a, \theta_s, \varphi_s, \cos \iota, \psi_s$$

を用いる。ここではこれらのパラメータについて説明する。

- 光度距離 d_L : または赤方偏移 z が独立なパラメータである。ハッブルパラメータ H および宇宙論パラメータ Ω_m, Ω_Λ を用いて

$$d_L = \frac{1+z}{H} \int_0^z \frac{dz'}{\sqrt{\Omega_m(1+z')^3 + \Omega_\Lambda}}$$

として計算できる。

- チャープ質量 M_{ch} , 対称質量比 η : または連星のそれぞれの質量 m_1, m_2 (常に $m_1 \geq m_2$ となるように取る) が独立なパラメータである。以下での解析ではこの m_1, m_2 およびこれらから計算される量は赤方偏移を受けた値 (すなわち, m_1 および m_2 の代わりに $m_1(1+z), m_2(1+z)$ を用いればよい) を表すものとする。連星の全質量 $M_{\text{tot}} = m_1 + m_2$ を用いて, $\eta = m_1 m_2 / M_{\text{tot}}^2$, また $M_{\text{ch}} = \eta^{3/5} M_{\text{tot}}$ として計算できる*2。対称質量比 η の定義域は $(0, 1/4]$ である。なお, 式を簡単にするために $\delta = (m_1 - m_2) / M_{\text{tot}} = \sqrt{1 - 4\eta}$ という変数を用いることがある*3。
- 合体時の時間 t_c および位相 ϕ_c : 後に述べる PN の波形および時間発展の式に現れるパラメータである。ともに 0 に取ることが多い。合体時位相 ϕ_c の定義域は $[0, 2\pi)$ である。
- 対称/反対称スピンパラメータ χ_s, χ_a : または連星のそれぞれのスピンパラメータ χ_i ($i = 1, 2$) が独立なパラメータである。それぞれのスピン角運動量を \mathbf{S}_i , 軌道角運動量を \mathbf{L} とすると, スピンパラメータは

$$\chi_i = \frac{\mathbf{S}_i \cdot \mathbf{L}}{m_i^2}, \quad \chi_s = \frac{\chi_1 + \chi_2}{2}, \quad \chi_a = \frac{\chi_1 - \chi_2}{2}$$

として定義される。これらのスピンパラメータの定義域は $[-1, 1]$ である。

- 重力波の方向および偏向の角度パラメータ $\theta_s, \varphi_s, \psi_s$: 上に述べた通りである。それぞれの定義域は $[0, \pi), [0, 2\pi), [0, 2\pi)$ である。
- 連星の inclination ι : 解析には $\cos \iota$ を独立なパラメータとして用いる。重力波の方向 $\mathbf{e}_r(\theta_s)$ と連星の公転面の法線方向のなす角が ι である。パラメータ $\cos \iota$ の定義域は $[-1, 1]$ である。

*2 PN の高次の展開には M_{ch} ではなくて $M_{\text{tot}} (= \eta^{-3/5} M_{\text{ch}})$ を用いる。

*3 解析にそのまま用いる場合, η による数値微分の途中など $\eta > 1/4$ となることがあるので注意が必要である。

3.2 PN の重力波の波形

PN は連星合体の inspiral, merger, ringdown のうち inspiral の部分をニュートン力学の高次の補正で表したものである。周波数に依存した波形の振幅 A_{ins} および位相 ϕ_{ins} を

$$h_{\text{ins}}^{(\text{PN})} = A_{\text{ins}}^{(\text{PN})} e^{-i\phi_{\text{ins}}^{(\text{PN})}}$$

として表す。以下 PN の添字は省略する。

ニュートン力学からの寄与は、振幅の最低次で

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{6}\pi^{2/3}} \frac{1}{d_L} M_{\text{ch}}^{5/6} f^{-7/6}$$

と表される*4。これを用いて、PN の振幅は

$$A_{\text{ins}} = A_0 \sum_{i=0} a_i (\pi M_{\text{tot}} f)^{i/3}$$

と展開できる。高次の係数 a_i は

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_1 &= 0, \\ a_2 &= -\frac{323}{224} + \frac{451}{168}\eta, \\ a_3 &= \frac{27}{8}\delta\chi_a + \left(\frac{27}{8} - \frac{11}{6}\eta\right)\chi_s, \\ a_4 &= -\frac{27312085}{8128512} - \frac{1975055}{338688}\eta + \frac{105271}{24192}\eta^2 + \left(-\frac{81}{32} + 8\eta\right)\chi_a^2 - \frac{81}{16}\delta\chi_a\chi_s + \left(-\frac{81}{32} + \frac{17}{8}\eta\right)\chi_s^2, \\ a_5 &= \dots \end{aligned}$$

である。振幅についても同様の展開が³でき、

$$\phi_{\text{ins}} = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128} (\pi M_{\text{ch}} f)^{-5/3} \sum_{i=0} \phi_i (\pi M_{\text{tot}} f)^{i/3}$$

となる。高次の係数 ϕ_i は

$$\begin{aligned} \phi_0 &= 1, \\ \phi_1 &= 0, \\ \phi_2 &= \frac{3715}{756} + \frac{55}{9}\eta, \\ \phi_3 &= -16\pi + \frac{113}{3}\delta\chi_a + \left(\frac{113}{3} - \frac{76}{3}\eta\right)\chi_s, \\ \phi_4 &= \frac{15293365}{508032} + \frac{27145}{504}\eta + \frac{3085}{72}\eta^2 + \left(-\frac{405}{8} + 200\eta\right)\chi_a^2 - \frac{405}{4}\delta\chi_a\chi_s + \left(-\frac{405}{8} + \frac{5}{2}\eta\right)\chi_s^2, \\ \phi_5 &= \dots \end{aligned}$$

である。

*4 全体の係数はアンテナパターンや PSD との兼ね合いで文献によって異なることがある。

さて、今回の実験では重力波の低周波成分に注目し、そのため測定時間中の地球の自転の効果が重要になる。周波数領域における自転の効果の影響も PN モデルによって導入する。まず、地球の自転の効果は角度変数 φ_e の時間発展として

$$\varphi_e = \varphi_{e0} + \frac{2\pi}{\text{day}} t_e$$

と表される。ここで φ_{e0} は適当な初期値で、 t_e は地球での時間である。この t_e を周波数および PN の物理パラメータを用いて表す方法が知られており、

$$t_e = t_c - \frac{5}{256} M_{\text{ch}}^{-5/3} (\pi f)^{-8/3} \sum_{i=0} t_i (\pi M_{\text{tot}} f)^{i/3}$$

となる。高次の係数 t_i は

$$\begin{aligned} t_0 &= 1, \\ t_1 &= 0, \\ t_2 &= \frac{743}{252} + \frac{11}{3}\eta, \\ t_3 &= -\frac{32\pi}{5}, \\ t_4 &= \frac{3058673}{508032} + \frac{5429}{504}\eta + \frac{617}{72}\eta^2, \\ t_5 &= \dots \end{aligned}$$

と計算されている。

なお、地球の公転の効果およびその他天体が移動する効果については、自転の影響に比べて小さいので今回は無視している。

4 セットアップ

4.1 ディテクター

今回、重力波のディテクターには低周波領域に感度がある torsion-bar antenna (TOBA) を用いる。TOBA の設計感度は図 1 で与えられる。以下では TOBA は KAGRA の場所に設置されているものとして解析をおこなう。すなわちほぼ地球表面にあり、角度は $\theta_e = 53.6^\circ$, $\varphi_e = 137.3^\circ$, $\psi_e = 164.9^\circ$ である^{*5}。下で重力波源については角度パラメータをランダムに生成して解析をおこなうので、ここでのディテクターの位置は重要ではない。

4.2 重力波源

ハッブルパラメータは $H = 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$, 宇宙論パラメータは $\Omega_m = 0.30$, $\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m$ とする。

重力波源としては、 $10000m_\odot$ 程度の中間質量ブラックホールからなる連星の合体が、比較的地球に近い位置で起こったものとして用いる。すなわち、赤方偏移を $z = 0.022$ ($d_L = 99 \text{ Mpc}$), 連星の質量は $m_1 = m_2 = 10000m_\odot$ あるいは $m_1 = 15000m_\odot$, $m_2 = 5000m_\odot$ とする。ここで前者の設定は Eda *et al.*,

^{*5} 通常は ψ は東からの回転角で計るので、 $\psi_e = 74.9^\circ$ である。ただし、角度 ψ の 90° の違いは重要ではない。

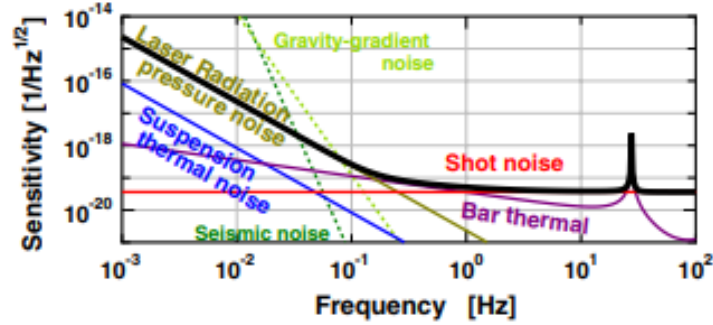


図1 今回のシミュレーションに用いる torsion-bar antenna (TOBA) の設計感度 [2]. 図中の黒太線が各種の効果を考慮した全体の感度を表す. 縦軸は振幅スペクトル密度 (ASD) で, 解析のときには二乗してパワースペクトル密度 (PSD) に変換して用いる.

2014 [3] に合わせたものである. 後者の設定は, 今回の精度では波形にパラメータ δ と χ_a の積しか現れないため, 同質量の連星 ($\delta = 0$) では χ_a の決定ができないために導入された設定である.

それぞれの質量に対して, 角度以外の物理パラメータについては $t_c = 0$, $\phi_c = 0$, またスピンパラメータは $\chi_s = \chi_a = 0$ として解析をおこなう.

角度パラメータ $\theta_s, \varphi_s, \iota, \psi_s$ についてはそれぞれの定義域において一様にランダムに生成した値を用いる.

4.3 シミュレーションの詳細

Advanced LIGO を用いた解析では $f_{\min} = 30$ Hz とすることが多い. 今回の TOBA は低周波領域に感度があるため $f_{\min} = 0.01$ Hz とする.

周波数の上限はインスパイラルの終了する周波数として ISCO (innermost stable circular orbit) のときの周波数 f_{ISCO} を用いる. ここで

$$f_{\text{ISCO}} = \frac{1}{6^{3/2}\pi M_{\text{tot}}}$$

で与えられている.

解析に用いる重力波モデルは上で述べた PN の結果を採用する. ただし高次の補正については Eda *et al.*, 2014 [3] に合わせて振幅は最低次 (a_0) のみ, 位相と時間発展の効果については 3 次の項 (ϕ_3 および t_3) までを計算に含めるものとする.

角度パラメータをランダムに設定した各重力波源について SNR テストをおこない, $\rho > 8$ となったもののみフィッシャー解析に進む. ここで 500 個以上の重力波源が SNR テストに合格することを要求し, それぞれの誤差および相関係数についてはフィッシャー解析の結果の中央値をシミュレーションの結果として採用する.

なお, $m_1 = m_2 = 10000m_\odot$ の場合のフィッシャー解析において, $\delta = \sqrt{1-4\eta}$ の $\eta = 1/4$ における微分が発散してしまうが, 式には $\chi_a = 0$ との積の形でしか現れないため, 微分の効果は常に 0 であるものとして発散を 0 で置き換えることによって解析をおこなった. 質量が異なる $m_1 = 15000m_\odot, m_2 = 5000m_\odot$ の場合にはこの問題は発生しない.

5 結果と考察

質量 $10000m_\odot$ - $10000m_\odot$ および $15000m_\odot$ - $5000m_\odot$ のそれぞれの場合について, SNR の中央値は 58.8, 48.3 であった. それぞれの場合についてフィッシャー解析の結果得られた角パラメータの誤差およびパラメータ間の相関係数について, 表 1 および表 2 に中央値をまとめた.

表 1 質量 $10000m_\odot$ - $10000m_\odot$ の場合の角パラメータの誤差およびパラメータ間の相関係数の中央値. 対角成分は誤差を, 非対角成分は相関係数を表す. 左下の相関係数については右上と同じなので示していない. なお, χ_a については今回の精度で連星の質量が等しい場合解析に現れないので, 誤差には prior とし課した 2 が現れ, 相関係数は表示していない.

	$\ln M_{\text{ch}}$	η	t_c	ϕ_c	$\ln d_L$	χ_s	χ_a	θ_s	φ_s	$\cos \iota$	ψ_s
$\ln M_{\text{ch}}$	0.004	-0.968	-0.666	-0.132	0.003	0.973	-	0.008	0.003	0.001	-0.004
η		0.184	0.813	0.181	0.000	-1.000	-	-0.010	0.001	-0.002	0.003
t_c			0.486	0.220	0.001	-0.797	-	0.004	0.004	0.001	0.006
ϕ_c				4.166	-0.000	-0.161	-	0.002	-0.002	-0.000	-0.016
$\ln d_L$					1.421	-0.000	-	0.019	-0.001	-0.024	0.001
χ_s						0.593	-	0.011	-0.001	0.001	-0.003
χ_a							2	-	-	-	-
θ_s								0.353	0.005	0.000	0.021
φ_s									0.564	-0.001	-0.019
$\cos \iota$										1.111	-0.000
ψ_s											2.738

表 2 質量 $15000m_\odot$ - $5000m_\odot$ の場合の角パラメータの誤差およびパラメータ間の相関係数の中央値. 対角成分は誤差を, 非対角成分は相関係数を表す. 左下の相関係数については右上と同じなので示していない. 質量が異なる場合には表 1 とは異なり χ_a も解析に現れるため, 解析の結果得られた誤差および相関係数を示している.

	$\ln M_{\text{ch}}$	η	t_c	ϕ_c	$\ln d_L$	χ_s	χ_a	θ_s	φ_s	$\cos \iota$	ψ_s
$\ln M_{\text{ch}}$	0.006	-0.986	-0.807	-0.399	-0.006	0.402	0.144	0.007	0.004	-0.001	-0.005
η		0.149	0.878	0.464	0.007	-0.406	-0.144	-0.004	-0.002	0.001	0.004
t_c			0.710	0.495	0.001	-0.339	-0.120	-0.006	0.001	0.000	0.005
ϕ_c				3.986	0.000	-0.177	-0.064	0.003	-0.003	0.000	-0.013
$\ln d_L$					1.187	-0.002	-0.001	-0.006	-0.011	-0.016	0.001
χ_s						1.087	-0.845	0.001	0.001	-0.000	-0.002
χ_a							1.754	0.000	0.000	-0.000	-0.001
θ_s								0.323	0.005	-0.000	0.032
φ_s									0.507	-0.002	-0.002
$\cos \iota$										0.924	0.000
ψ_s											2.420

また, パラメータ $\ln d_L$, $\cos \iota$, ψ_i の誤差および sky localization error Ω_s については, それぞれの質量の場合において, 誤差の累積ヒストグラムとして表したものを図 2 にまとめた. 縦軸は誤差の小さい方からの累積数を解析に用いた (SNR テストを通過した) 重力波源の数で規格化したもので, すなわちその誤差以内の精度でパラメータを決定できる確率を表している.

質量 $10000m_\odot$ - $10000m_\odot$ の場合については, 結果が正しいことを確認するために共同実験者とクロスチェックをおこなった. ただし, 今回の解析においては TOBA の設計感度 (図 1) がテキストデータとして手

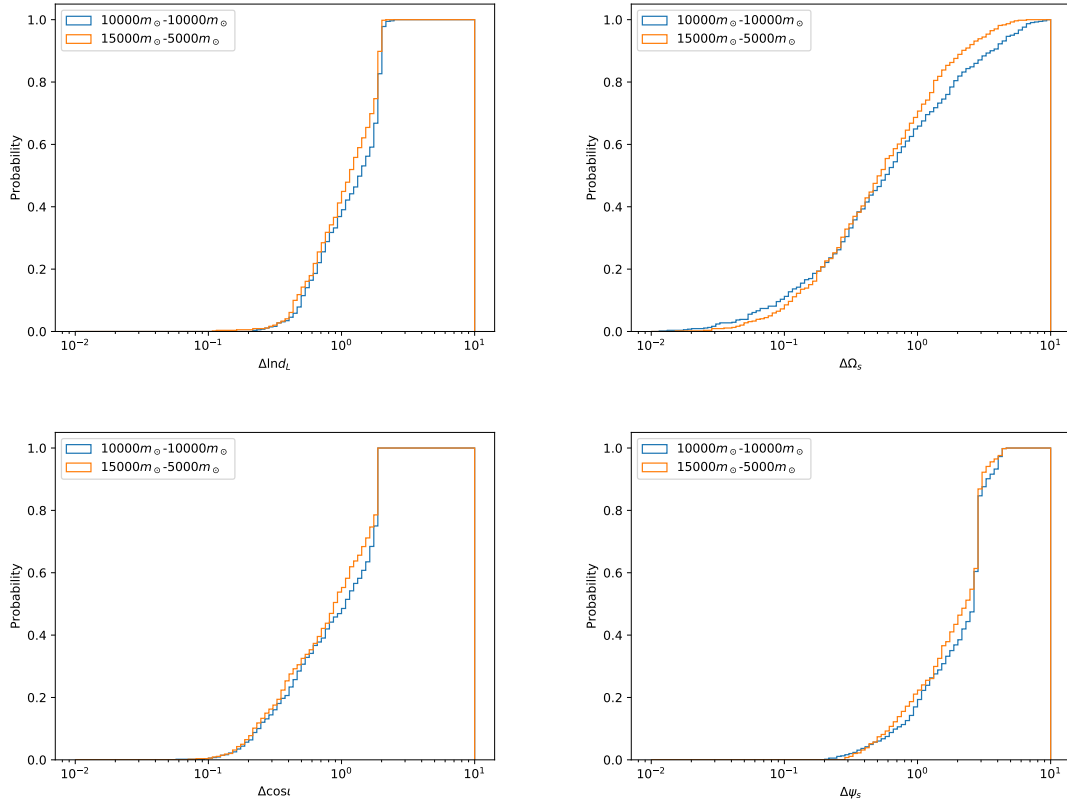


図2 パラメータ $\ln d_L$, $\cos i$, ψ_s の誤差および sky localization error Ω_s の累積ヒストグラム。横軸は誤差の大きさを、縦軸は誤差の小さい方からの累積数を解析に用いた (SNR テストを通過した) 重力波源の数で規格化したもので、すなわちその誤差以内の精度でパラメータを決定できる確率を表す。それぞれのグラフで青線は $10000m_\odot$ - $10000m_\odot$ の場合、オレンジの線は $15000m_\odot$ - $5000m_\odot$ の場合を示している。

に入らなかったため、図の曲線を WebPlotDigitizer*⁶ で読み取ったものを簡易的に用いている。そのため、読み取りの誤差に加え、生成した波形のなめらかでない形状によって数値解析の誤差が増幅され、相関係数の値の小さいもの (0.5 程度以下) については一致しない部分があった。対角成分の誤差および相関係数の値の大きいものについては数値解析の誤差の範囲内で一致したため、今回の特別実験においてはこの結果をレポートに採用している。

また、パラメータ χ_a の推定をおこなうために質量 $15000m_\odot$ - $5000m_\odot$ の解析を行ったが、この質量の差は表 2 および図 2 の結果から他の成分にはあまり大きな影響を及ぼさないことがわかる。このため、実際の重力波観測においてはパラメータ推定は表 2 に近い精度で行えるものと考えられる。

なお、今回はスピンパラメータ χ_s , χ_a についてはその値を 0 に固定して行ったが、実際のブラックホール連星についてスピンパラメータの分布がどうなっているかは別に考慮する必要がある。

*⁶ <https://automeris.io/WebPlotDigitizer>

6 まとめと展望

今回の特別実験では、時間の関係もあり、既存の手法を用いてパラメータ推定を試してみることしかできなかった。今後の計画として、以下に述べるような内容を考慮した上でパラメータ推定の見積もりをおこなうことが考えられる。

6.1 Triple-output TOBA

TOBA には今回計算した水平面内の回転として重力波の信号を取り出すほかに、それぞれの金属棒の鉛直面内での回転を利用してさらにふたつの独立な成分として重力波信号を取り出す機能がある [3]。今回の single-output TOBA に比べてこれらの三つの成分をすべて利用した triple-output TOBA の方がパラメータ推定の精度が上がる事が確かめられており、次に述べる新しい波形モデルにおいて精度がどうなるかを見積もることが今後の計画として上げられる。

6.2 現象論的波形モデル

今回、連星合体からの波形モデルとして用いたのは従来からよく知られている post-Newtonian モデル (PN) である。これはニュートン力学の結果を高次で補正したものであるが、連星合体の三つの段階のうち inspiral の部分にしか適用できないという欠点がある。

連星合体には、連星がお互いの周りを公転している inspiral, ISCO の内側に入って二つの天体が合体する merger, 合体後の全体の減衰振動として表される ringdown の三つの段階があることが知られている。Merger および ringdown については現象論的なモデルが別に存在し、これと PN の結果に補正を加え、なめらかにつないだものが PhenomD というモデルである [4, 5]。このモデルにおいては解析に用いる周波数領域が大きく広がるため、信号の SNR およびパラメータ推定の精度が大きく改善されることが期待される。

さらに近年では PhenomHM というさらに精度のいい現象論モデルも報告されている。PN や PhenomD などの従来のモデルでは球面展開の $(l, m) = (2, 2)$ の成分しか考慮していなかったが、この PhenomD に多重極成分の寄与をいくつか加えたものが PhenomHM モデルである [6]。これらの新しい波形モデルを用い、さらに低周波領域における時間発展の効果を考慮してパラメータ推定の見積もりをおこなうことは、TOBA やこれからの次世代重力波望遠鏡の開発を進める上で重要な指針となることが期待される。

謝辞

本特別実験を通して、内容の指導やクロスチェック、疑問点の解消などさまざまにお力を貸して下さった武田さんと、毎回の長いクロスチェックに付き合ってくれた共同実験者の佐藤くんに感謝します。また、なかなか進まない実験を見守って下さった安東先生と道村先生に感謝いたします。

参考文献

- [1] Allen, B., Anderson, W. G., Brady, P. R., Brown, D. A., & Creighton, J. D. (2012). *FINDCHIRP: An algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries*. Physical Review

- D, **85** (12), 122006.
- [2] Ando, M., Ishidoshiro, K., Yamamoto, K., Yagi, K., Kokuyama, W., Tsubono, K., & Takamori, A. (2010). *Torsion-bar antenna for low-frequency gravitational-wave observations*. *Physical Review Letters*, **105** (16), 161101.
- [3] Eda, K., Shoda, A., Itoh, Y., & Ando, M. (2014). *Improving parameter estimation accuracy with torsion-bar antennas*. *Physical Review D*, **90** (6), 064039.
- [4] Husa, S., Khan, S., Hannam, M., Pürrer, M., Ohme, F., Forteza, X. J., & Bohé, A. (2016). *Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. I. New numerical waveforms and anatomy of the signal*. *Physical Review D*, **93** (4), 044006.
- [5] Khan, S., Husa, S., Hannam, M., Ohme, F., Pürrer, M., Forteza, X. J., & Bohé, A. (2016). *Frequency-domain gravitational waves from nonprecessing black-hole binaries. II. A phenomenological model for the advanced detector era*. *Physical Review D*, **93** (4), 044007.
- [6] London, L., Khan, S., Fauchon-Jones, E., García, C., Hannam, M., Husa, S., ... & Pannarale, F. (2018). *First Higher-Multipole Model of Gravitational Waves from Spinning and Coalescing Black-Hole Binaries*. *Physical Review Letters*, **120** (16), 161102.
- [7] Takeda, H., Nishizawa, A., Michimura, Y., Nagano, K., Komori, K., Ando, M., & Hayama, K. (2018). *Polarization test of gravitational waves from compact binary coalescences*. arXiv:1806.02182.