特別実験　フィッシャー解析によるTOBAの測定精度計算

05171530 佐藤陽太郎

目 次

1　概要

フィッシャー解析の手法を用いて、binary black hole(BBH) からの inspiral 重力波が来た場合の TOBA の測定精度を計算した。より精度の良い予測を出すため、時間発展、ドップラーシフトの効果を入れた場合や、inspiral だけでなく merger,ringdown の重力波を考慮した場合についても考えた。

2　原理

2.1　フィッシャー解析

ある重力波が検出器に到達した際の、検出器の出力 (を時間に関して Fourier 変換したもの) を h と書く。h は振動数 f、重力波のパラメーター (方角、BH の質量、距離など) に依存する。考慮するパラメータの数を n 個とし、$\lambda_i (i = 1, \cdots, n)$ で表すことにすると、出力は $h(f, \lambda_i)$ と書ける。$h(f, \lambda_i)$ の関数形は考える対象により異なり、本実験で用いた関数形については次のセクションで解説する。

フィッシャー解析とは、matched filter などの手法で、観測された重力波のパラメーターを決定した際に、その測定誤差を与える計算手法である。この方法は、検出器のノイズがガウシアンであることを仮定し、また出力の signal-to-noise-ratio(SNR) が大きい場合に有効である。

検出器が重力波の信号をキャッチし、そのパラメーター推定の結果が $\hat{\lambda_i}$ であったとする。この時、パラメーターの分散、共分散は以下で与えられる [1][3]。

$$\langle \Delta\lambda_j \Delta\lambda_k \rangle = (\Gamma^{-1})_{jk}$$

ここで、Γ は Fisher information matrix といい、

$$\Gamma_{jk} = 4\mathrm{Re}\sum_N \int \mathrm{d}f \frac{\partial h_N}{\partial \lambda_j}(f, \hat{\lambda_i}) \frac{\partial h_N}{\partial \lambda_k}(f, \hat{\lambda_i}) / S_N(f) (+\mathrm{prior})$$

で表される。検出器が複数ある場合はその添え字を N とし、$S_N(f)$ は N 番目の検出器の PSD である。

特に、パラメーター λ_i の誤差は $\sqrt{(\Gamma^{-1})_{ii}}$ で与えられる。

$\hat{\lambda}_i$ の値によっては、角度などのパラメーターについて、誤差が本来取りうる値よりも大きくなってしまうことがある。さらにそれが他のパラメーターの結果にも影響してしまう。そのようなことを避けるため、Γ の対角成分に $1/(\lambda_i$ が取りうる値の幅$)^2$ を足してから逆行列をとる。これは prior と呼ばれる。

2.2 重力波の波形

本実験で使った、binary-blach-hole(BBH) の inspiral の Post-Newtonian(PN) モデル (地球中心の時間発展、ドップラー効果入り) について説明する。また、本実験では時間の都合上フィッシャー解析で使うまでには至らなかったが、inspiral,merger,ringdown の波形を現象論的につなぎ合わせた PhenomD モデルについても説明する。以下では $c = G = 1$ の単位系を用いる。

$h(f, \lambda_i)$ は主に 2 つの部分に分かれる。重力波のモード (plus,cross) ごとに、

$$h = \mathcal{G}_+ \tilde{h}_+ + \mathcal{G}_\times \tilde{h}_\times$$

と分けられる。$\tilde{h}$ は重力波の生の波形で、$\mathcal{G}$ は geometric factor と呼ばれる、重力波源と検出器の位置関係などに依存するものである。本実験で扱う波形では $\tilde{h}_+$ と $\tilde{h}_\times$ は同じなので、まとめて

$$h = \mathcal{G}\tilde{h}$$

と書ける。

2.2.1 アンテナパターン関数

地球の公転などの影響は無視し、地球の自転の影響のみを考慮した地球中心のアンテナパターン関数について説明する。

地球中心を座標原点にとり、検出器の位置を極座標で (R_E, θ_e, ϕ_e) と表す。R_E は地球半径である。ディテクターの腕の方向 (例えば、東向きを 0 として東向きと腕の 1 本のなす角として定義する) を ψ_e と書く。まとめて $\boldsymbol{\theta}_e = (\theta_e, \phi_e, \psi_e)$ と書く。また、重力波の来る方向、偏極の向きを同様に定義し、$\boldsymbol{\theta}_s = (\theta_s, \phi_s, \psi_s)$ と書く。

$e_r(\theta,\phi), e_\theta(\theta,\phi), e_\phi(\theta,\phi)$ を通常の極座標の基底ベクトルとし、

$$e_1(\theta,\phi,\psi) = e_\theta(\theta,\phi)\cos\psi + e_\phi(\theta,\phi)\sin\psi$$

$$e_2(\theta,\phi,\psi) = -e_\theta(\theta,\phi)\sin\psi + e_\phi(\theta,\phi)\cos\psi$$

と定義する。ディテクターテンソル、重力波偏極テンソルを

$$d(\boldsymbol{\theta}_e) = \frac{1}{2}[e_1(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes e_1(\boldsymbol{\theta}_e) - e_2(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes e_2(\boldsymbol{\theta}_e)$$

$$e_+(\boldsymbol{\theta}_s) = e_1(\boldsymbol{\theta}_s) \otimes e_1(\boldsymbol{\theta}_s) - e_2(\boldsymbol{\theta}_s) \otimes e_2(\boldsymbol{\theta}_s)$$

$$e_\times(\boldsymbol{\theta}_s) = e_1(\boldsymbol{\theta}_s) \otimes e_2(\boldsymbol{\theta}_s) + e_2(\boldsymbol{\theta}_s) \otimes e_1(\boldsymbol{\theta}_s)$$

で定義すると、アンテナパターン関数は以下で定義される [2][3]。

$$F_+(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\theta}_s) = d(\boldsymbol{\theta}_e)_{ij} e_+(\boldsymbol{\theta}_s)^{ij}$$

$$F_\times(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\theta}_s) = d(\boldsymbol{\theta}_e)_{ij} e_\times(\boldsymbol{\theta}_s)^{ij}$$

重力波の inclination を ι とすると、地球の自転を無視した geometric factor は、アンテナパターン関数を用いて以下のようにあらわされる。

$$\mathcal{G}_0(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\theta}_s, \iota) = \frac{1+\cos^2\iota}{2} F_+(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\theta}_s) + i\cos\iota F_\times(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\theta}_s)$$

地球の自転の影響により、ϕ_e に時間発展の効果が入ってくることと、Doppler phase ϕ_D が位相因子として入ってくる。

地球の自転角速度を Ω_r とすると、ϕ_e は $\phi_e + \Omega_r t(f)$ に置き換わる。$t(f)$ は時間だが、Fourier 変換して f の関数として書くことができる。inspiral ではこの関数形は近似的に以下の関数で書ける。

$$t(f) = t_c - \frac{5}{256} M_c^{-5/3} (\pi f)^{-8/3} \sum_{i=0}^{4} t_i (\pi M_{tot} f)^i$$

M_c, M_{tot} はそれぞれ BBH の chirp mass,total mass である。t_c は coalescence time である。t_i は展開係数で、

$$\begin{aligned}
t_0 &= 1 \\
t_1 &= 0 \\
t_2 &= \frac{743}{252} + \frac{11}{3}\eta \\
t_3 &= -\frac{32}{5}\pi \\
t_4 &= \frac{3058673}{508032} + \frac{5429}{504}\eta + \frac{617}{72}\eta^2
\end{aligned}$$

である。η は BBH の symmetric mass ratio である。$\boldsymbol{\theta}'_e = (\theta_e, \phi_e + t(f), \psi_e)$ とする。

Doppler shift ϕ_D は

$$\phi_D(f, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\theta}_s) = 2\pi f R_E e_r(\theta_e, \phi_e) \cdot e_r(\theta_s, \phi_s)$$

と書ける。結局、inspiral の geometric factor は

$$\mathcal{G}(f, M_c, \iota, \eta, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\theta}_s) = \mathcal{G}_0(\boldsymbol{\theta}'_e, \boldsymbol{\theta}_s, \iota) e^{i\phi_D(\boldsymbol{\theta}'_e, \boldsymbol{\theta}_s)}$$

となる。

2.2.2 Post-Newtonian

Post-Newtonian は、BBH の inspiral の波形についての、Newtonian order+相対論的補正項で作ったモデルである。binary の 2 つの質量を m_1, m_2 とする。BBH の total mass M_{tot}, symmetric mass ratio η,chirp mass M_c はそれぞれ

$$M_{tot} = m_1 + m_2, \eta = m_1 m_2 / M_{tot}^2, M_{ch} = \eta^{3/5} M_{tot}$$

と定義される。BBH 衝突時の条件として、衝突時間と衝突時位相を t_c, ϕ_c とする。重力波源と地球中心の距離 (光度距離で測るものとする) を d_L とする。また、2 つの BH のスピンを、dimensionless spin χ_1, χ_2 で表す。これらを用いて、symmetric,antisymmetric spin $\chi_s = (\chi_1 + \chi_2)/2, \chi_a = (\chi_1 - \chi_2)/2$ を定義する。Post-Newtonian の波形はこれらのパラメーターを用いて表され、geometric factor と合わせて、フィッシャー解析に用いるパラメーターは

$$\boldsymbol{\theta}_s, \iota, M_c, \eta, t_c, \phi_c, d_L, \chi_s, \chi_a$$

の 11 個である。

Post-Newtonian の波形は次で表される [2][3]。

まず、振幅部分について、

$$A_{\mathrm{PN}}(f, M_c, \eta, d_L, \chi_s, \chi_a) = A_0 \sum_{i=0}^{6} A_i (\pi M_{tot} f)^{i/3}$$

と書ける。ただし

$$A_0 = \sqrt{\frac{5}{24}} \frac{1}{d_L \pi^{2/3}} (M_c)^{5/6} f^{-7/6}$$

$M_{tot} f$ が小さい場合にはこれは展開の低次の項で切っていることになる。A_i

は展開係数で、

$$A_0 = 1$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = \frac{323}{224} + \frac{451}{168}\eta$$

$$A_3 = \frac{27}{8}\sqrt{1-4\eta}\chi_a + \left(\frac{27}{8} - \frac{11}{6}\eta\right)\chi_s$$

$$A_4 = \frac{27312085}{8128512} - \frac{1975055}{338688}\eta + \frac{105271}{24192}\eta^2 + \left(-\frac{81}{32} + 8\eta\right)\chi_a^2 - \frac{81}{16}\sqrt{1-4\eta}\chi_a\chi_s + \left(-\frac{81}{32} + \frac{17}{8}\eta\right)\chi_s^2$$

$$A_5 = -\frac{85}{64}\pi + \frac{85}{16}\pi\eta + \sqrt{1-4\eta}\left(\frac{285197}{16128} - \frac{1579}{4032}\eta\right)\chi_a + \left(\frac{285197}{16128} - \frac{15317}{672}\eta - \frac{2227}{1008}\eta^2\right)\chi_s$$

$$\begin{aligned} A_6 = &-\frac{177520268561}{8583708672} + \left(\frac{545384828789}{5007163392} - \frac{205}{38}\pi^2\right)\eta - \frac{3248849057}{178827264}\eta^2 + \frac{34473079}{638668}\eta^3 \\ &+ \left(\frac{1614569}{64152} - \frac{1873643}{16128}\eta + \frac{2167}{42}\eta^2\right)\chi_a^2 + \left(\frac{31}{12}\pi - \frac{7}{3}\pi\eta\right)\chi_s \\ &+ \left(\frac{1614569}{64152} - \frac{61391}{1344}\eta + \frac{57451}{4032}\eta^2\right)\chi_s^2 + \sqrt{1-4\eta}\chi_a\left(\frac{31}{12}\pi + \frac{1614569}{32256}\chi_s - \frac{165961}{2688}\eta\chi_s\right)\end{aligned}$$

とあらわされる。位相部分については同様に、

$$\phi_{\mathrm{PN}}(f, M_c, \eta, t_c, \phi_c, \chi_s, \chi_a) = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128}(\pi M_c f)^{-5/3}\sum_{i=0}^{6}\phi_i(\pi M_{tot} f)^{i/3}$$

ϕ_i は展開係数で、

$$\phi_0 = 1$$

$$\phi_1 = 0$$

$$\phi_2 = \frac{3715}{756} + \frac{55}{9}\eta$$

$$\phi_3 = -16\pi + \frac{113}{3}\sqrt{1-4\eta}\chi_a + \left(\frac{113}{3} - \frac{76}{13}\eta\right)\chi_s$$

$$\phi_4 = \frac{15293365}{508032} - \frac{27145}{504}\eta + \frac{3085}{72}\eta^2 + \left(-\frac{405}{8} + 200\eta\right)\chi_a^2 - \frac{405}{4}\sqrt{1-4\eta}\chi_a\chi_s + \left(-\frac{405}{8} + \frac{5}{2}\eta\right)\chi_s^2$$

$$\begin{aligned}\phi_5 = &(1 + \log(\pi M_{tot} f)) \\ &\times\left[\frac{38645}{756}\pi - \frac{65}{9}\pi\eta + \sqrt{1-4\eta}\left(-\frac{732985}{2268} - \frac{140}{9}\eta\right)\chi_a + \left(-\frac{732985}{2268} + \frac{24260}{81}\eta + \frac{340}{9}\eta^2\right)\chi_s\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_6 = &-\frac{11583231236531}{4694215680} - \frac{6848}{21}\gamma_E - \frac{640}{3}\pi^2 + \left(-\frac{15737765635}{3048192} + \frac{2255}{12}\pi^2\right)\eta + \frac{76055}{1728}\eta^2 - \frac{127825}{1296}\eta^3 \\ &- \frac{6848}{63}\log(64\pi M_{tot} f) + \frac{2270}{3}\pi\sqrt{1-4\eta}\chi_a + \left(\frac{2270}{3}\pi - 520\pi\eta\right)\chi_s\end{aligned}$$

である。γ_E は Euler 定数である。結局、重力波の波形はこれを用いて

$$\tilde{h}_{\mathrm{PN}}(f, M_c, \eta, t_c, \phi_c, d_L, \chi_s, \chi_a) = A_{\mathrm{PN}}(f, M_c, \eta, d_L, \chi_s, \chi_a)e^{-i\phi_{\mathrm{PN}}(f, M_c, \eta, t_c, \phi_c, \chi_s, \chi_a)}$$

となる。

2.2.3 PhenomD model

PN を拡張し、inspiral だけでなく merger,ringdown 期の重力波放出までモデルに加えたのが PhenomD である。波形は、inspiral 期 (ins)、merger ringdown 期 (mr) と、それを滑らかにつなぐ中間期 (int) に分かれ、

$$\begin{aligned}
A_{\mathrm{phenomD}} &= A_{ins}\theta(f_{a1}-f)+A_{int}\theta(f-f_{a1})\theta(f_{a2}-f)+A_{mr}\theta(f-f_{a2}) \\
\phi_{\mathrm{phenomD}} &= \phi_{ins}\theta(f_{p1}-f)+\phi_{int}\theta(f-f_{p1})\theta(f_{p2}-f)+\phi_{mr}\theta(f-f_{p2})
\end{aligned}$$

のようになる [4]。$\theta(x)$ は階段関数である。

フィッシャー解析のパラメーターは PN と同一とする。波形の切れ目の振動数は以下で与えられる。

$$\begin{aligned}
f_{a1} &= 0.014/M_{tot} \\
f_{a2} &= \left| f_{RD} + \frac{f_{RD}\gamma_3(\sqrt{1-\gamma_2^2}-1)}{2Q\gamma_2} \right| \\
f_{p1} &= 0.018/M_{tot} \\
f_{p2} &= 0.5F_{RD}
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
f_{RD} &= \frac{1.5251-1.1568(1-a_f^{\mathrm{eff}})^{0.1292}}{2\pi M_{tot}} \\
a_f^{\mathrm{eff}} &= S+(2\sqrt{3}-0.085S+0.101S^2-1.355S^3-0.868S^4)\eta \\
&\quad +(-4.399-0.5837S-2.097S^2+4.109S^3+2.064S^4)\eta^2+9.397\eta^3-13.181\eta^4 \\
S &= (1-2\eta)\chi_s+\sqrt{1-4\eta}\chi_a \\
Q &= 0.7+1.4187(1-a_f^{\mathrm{eff}})^{-0.499}
\end{aligned}$$

$\gamma_{1,2,3}$ はパラメーターであり、数値計算により決めることができる。

振幅に関しては、

$$\begin{aligned}
A_{ins} &= A_{\mathrm{PN}} + A_0\sum_{i=0}^{3}\rho_i(M_{tot}f)^{i/3+2} \\
A_{int} &= A_0\sum_{i=0}^{4}\delta_i(M_{tot}f)^i \\
A_{mr} &= A_0\gamma_1\frac{\gamma_3 f_{RD}/2Q}{(f-f_{RD})^2+\gamma_3^2(f_{RD}/2Q)^2}\exp\left[-\frac{2\gamma_2 Q(f-f_{RD})}{\gamma_3 f_{RD}}\right]
\end{aligned}$$

となる。A_{ins} は PN の高次の補正となっている。$\rho_{1,2,3}$ はパラメーターであり、数値計算により決められる。ins と mr をつなぐ A_{int} に関して、$\delta_{0,1,2,3,4}$

は、振幅が f の関数として C^1 級になるように決められる。すなわち、

$$
\begin{aligned}
A_{ins}(f_{a1}) &= A_{int}(f_{a1}) \\
A_{mr}(f_{a2}) &= A_{int}(f_{a2}) \\
A'_{ins}(f_{a1}) &= A'_{int}(f_{a1}) \\
A'_{mr}(f_{a2}) &= A'_{int}(f_{a2})
\end{aligned}
$$

を課す。これだけでは 5 つすべてを決められないので、数値計算により決められるパラメーター v_2 を用いて、

$$A_{int}((f_{a1}+f_{a2})/2) = A_0((f_{a1}+f_{a2})/2)v_2$$

を課す。これにより波形の振幅部分が得られる。

位相に関しても同様で、

$$
\begin{aligned}
\phi_{ins} &= \phi_{\mathrm{PN}} + \frac{1}{\eta}\left(\sigma_0 + \sum_{i=1}^{4}\frac{3}{i+2}\sigma_i (M_{tot}f)^{(i+2)/3}\right) \\
\phi_{int} &= \frac{1}{\eta}\left(\beta_0 + \beta_1 M_{tot}f + \beta_2 \log(M_{tot}f) - \frac{\beta_3}{3}(M_{tot}f)^{-3}\right) \\
\phi_{mr} &= \frac{1}{\eta}\left(\alpha_0 + \alpha_1 M_{tot}f - \alpha_2 (M_{tot}f)^{-1} + \frac{4}{3}\alpha_3 (M_{tot}f)^{3/4} + \alpha_4 \arctan\left(\frac{2Q(f-\alpha_5 f_{RD})}{f_{RD}}\right)\right)
\end{aligned}
$$

となる。$\alpha_{0,1}, \beta_{0,1}$ については位相が C^1 級になるように決められ、それ以外のパラメーター $\sigma_{0,1,2,3,4}, \alpha_{2,3}, \beta_{2,3}$ にいついては数値計算により決められる。これにより phenomD の波形が得られる。[4] に数値計算の結果が載っている。

3 結果

3.1 セットアップ

本実験では、Post-Newtonian の波形を使った。

ディテクターのノイズは TOBA のノイズデータを用い、位置は現在 KAGRA がある位置に置いた。つまり、

$$\theta_e = (90-36.4)\pi/180, \phi_e = 137.3\pi/180, \psi_e = 164.9\pi/180$$

とした。

フィッシャー解析のパラメーターとしては、

$$\lambda_i = \boldsymbol{\theta}_s, \cos\iota, \log M_c, \eta, t_c, \phi_c, \log d_L, \chi_s, \chi_a (i = 1, \cdots 11)$$

を用いた。

$\hat{\lambda}_i$ の値については、

$$
\begin{aligned}
m_1 &= m_2 = 10000 M_\odot \\
t_c &= \phi_c = 0 \\
z &= 0.022 \\
\chi_s &= \chi_a = 0
\end{aligned}
$$

を用いた。z は赤方偏移であり、これから光度距離を計算することができる。角度変数 $\boldsymbol{\theta}_s, \iota$ に関しては、ランダムにとった。重力波のモデルとして、振動数の幅を定めなければいけない。この定め方には任意性があるが、以下のように定めた。

$$f_{min} = 0.01, f_{max} = 0.0217/M_{tot}$$

f_{min} は TOBA の感度から決められるものであり、f_{max} は inspiral 期とみなせる振動数の上限と解釈される。

3.2 計算結果

重力波の来る方向をランダムに生成し、500 回繰り返しその中央値を求めた。ここで、SNR を同時に計算し、その値が 8 を下回るものは有効な波形とみなさず除外することにする。

結果を以下に表示する。結果の対角成分については $\sqrt{\langle \Delta\lambda_i^2 \rangle} = \sqrt{(\Gamma^{-1})_{ii}}$ を表示し、非対角成分については $\langle \Delta\lambda_i \Delta\lambda_j \rangle / \left(\sqrt{\langle \Delta\lambda_i^2 \rangle} \sqrt{\langle \Delta\lambda_j^2 \rangle} \right) = (\Gamma^{-1})_{ij} / \left(\sqrt{(\Gamma^{-1})_{ii}} \sqrt{(\Gamma^{-1})_{jj}} \right)$ を表示した。この計算において SNR が 8 を超えたものは 500 個中 487 個であった。

$$
\begin{pmatrix}
0.506 & 0.0 & -0.015 & -0.014 & 0.025 & -0.01 & -0.007 & 0.0 & 0.024 & 0.004 & 0.0 \\
0.0 & 0.774 & 0.0 & -0.007 & 0.01 & -0.002 & -0.005 & 0.005 & 0.0 & 0.005 & 0.0 \\
-0.015 & 0.0 & 1.92 & 0.0 & 0.009 & -0.007 & -0.006 & 0.0 & 0.0 & 0.009 & 0.0 \\
-0.014 & -0.007 & 0.0 & 0.588 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.002 & 0.0 & 0.004 & 0.0 \\
0.025 & 0.01 & 0.009 & 0.0 & 0.002 & -0.701 & -0.75 & 0.743 & -0.013 & 0.861 & 0.0 \\
-0.01 & -0.002 & -0.007 & 0.0 & -0.701 & 0.015 & 0.996 & -0.686 & 0.009 & -0.954 & 0.0 \\
-0.007 & -0.005 & -0.006 & 0.0 & -0.75 & 0.996 & 1.684 & -0.716 & 0.013 & -0.972 & 0.0 \\
0.0 & 0.005 & 0.0 & 0.002 & 0.743 & -0.686 & -0.716 & 5.122 & 0.0 & 0.844 & 0.0 \\
0.024 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.013 & 0.009 & 0.013 & 0.0 & 0.93 & -0.011 & 0.0 \\
0.004 & 0.005 & 0.009 & 0.004 & 0.861 & -0.954 & -0.972 & 0.844 & -0.011 & 0.089 & 0.0 \\
0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.0
\end{pmatrix}
$$

4 考察と展望

本実験では $m_1 = m_2$ であったので、χ_a は決定できなかったと考えられる。また、TOBA は低周波の感度が良いので、地球の自転の影響が大きく、そのため角度成分もある程度精度が良い。

PN でしか計算できなかったが、phenomD で計算することが次の目標となる。merger,ringdown の情報も使えば精度は向上すると考えられる。また、今回は TOBA1 台で計算したが、LIGO,DECIGO など複数台を用いて計算すれば、特に角度の精度が向上すると考えられる。

参考文献

[1] Michele Maggiore, "Gravitational Waves", Oxford univ. press

[2] H. Takeda et al., "Polarization test of gravitational waves from compact binary coalescences", arXiv, 1806.02182,2018

[3] K. Eda et al., "Improving parameter estimation accuracy with torsion-bar antennas", Physical Review D 90(6), 064039,2014

[4] S. Khan et al., "Frequency-domain gravitational waves froom non-precessing brack-hole binaries. II. A phenomenological model for the advanced detector era", Physical Review D 93(4), 04007,2016