

特別実験レポート TOBA 重力波データ解析システムの構築

05141528 佐藤遼太郎

2016年2月1日

目次

1	概要	2
2	原理	2
2.1	重力波検出器 TOBA	2
2.2	解析手法	3
3	方法	7
3.1	解析のためのコンピュータ環境構築	7
3.2	信号のキャリブレーションとセグメントへの分割	7
3.3	パワースペクトル密度の計算	8
3.4	観測データを用いた重力波探索	8
3.5	Injection Test	9
4	結果	9
4.1	ノイズのパワースペクトル密度	9
4.2	重力波探索	9
4.3	Injection Test	11
5	考察	12
5.1	mass parameter の刻み幅	12
5.2	Injection Test	12
5.3	計算の効率化	12

1 概要

ねじれ振り子型重力波検出器 TOBA の観測データを利用して、 $\sim 100M_{\odot}$ 程度の質量を持つ Intermediate Mass Black Hole Binaries(IMBHB) の探索を行う。また、観測データから導かれるノイズのパワースペクトルを利用し、TOBA が現在の性能で観測できる距離を見積もる。

2 原理

2.1 重力波検出器 TOBA

TOBA は Test mass と呼ばれる棒を吊るし、その微小な振動を通して重力波を検出することを目的とした装置である。Test mass の配置と、測定する Test mass の位置に関するパラメータを図 1 に示す。この実験では、以下全ての項目において $(\theta_1 - \theta_2)/2$ のデータを利用して解析を行った。

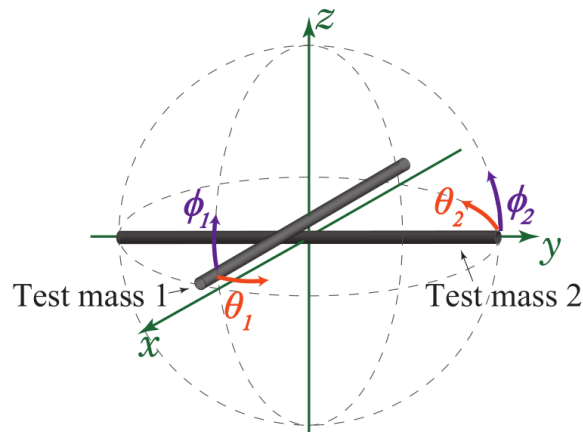


図 1 TOBA で重力波を感知する機構である Test mass の配置と、観測対象となるパラメータ (図は [2] より引用). 今回の実験では $s = (\theta_1 - \theta_2)/2$ を対象に解析を行った。

この装置の重力波の感応性は方角に依存する。天体の方角を記述するパラメータを (α, δ) として、この方角について望遠鏡が検出可能な天体の距離の最大値を $R(\alpha, \delta)$ で表すことにすると、この装置の観測可能な領域の体積 (detection volume) は

$$V = \int d\Omega \int_0^{R(\alpha, \delta)} r^2 dr$$

と表される。

$R(\alpha, \delta)$ は、重力波信号の S/N 比が 1 となるような天体までの距離を D 、重力波を検出したとみなす S/N 比の下限を ρ_{th} とおくと、

$$R(\alpha, \gamma) = \frac{D}{\rho_{th}} [F(\alpha, \delta)]^{1/2}$$

と表される。 F は装置の検出性能の方位依存性を表す関数である。TOBA で図 1 の $(\theta_1 - \theta_2)/2$ を使用して

解析する場合、 $D = \rho_{\text{th}} = 1$ としたとき $V = 1.2$ となる [2] ことから、detection volume は一般に

$$V = \int d\Omega \int_0^{\frac{D}{\rho_{\text{th}}}[F(\alpha, \delta)]^{1/2}} r^2 dr = \left(\frac{D}{\rho_{\text{th}}}\right)^3 \int_0^{[F(\alpha, \delta)]^{1/2}} r^2 dr = 1.2 \left(\frac{D}{\rho_{\text{th}}}\right)^3$$

と書かれる。

2.2 解析手法

重力波を対象としたデータ解析には、数値計算などを用いて理論的に予測されるテンプレートを利用する Matched filter という手法や、テンプレートを利用しない手法 [3] がある。今回の実験で使用した Matched filter についてここで原理を述べる。

なお、以下では時間を引数に持つ関数 $x(t)$ のフーリエ変換、並びにその逆変換を

$$\tilde{x}(f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-2\pi ift} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x}(f)e^{2\pi ift} dt$$

とする。

2.2.1 Matched filter

合体する (スピンのない) 質量 $m_1 + m_2$ の IMBHB からの重力波はその時間経過に応じて inspiral, merger, ringdown の 3 つの段階に分かれる。特に inspiral 段階の波形は次の式で表されると仮定する:

$$h(t) = - \left(\frac{GM}{c^2 D_{\text{eff}}}\right) \left(\frac{t_0 - t}{5GM/c^3}\right)^{-1/4} \cos[2\phi_0 + 2\phi(t - t_0; M, \mu)]$$

ここで合体時の重力波が検出器に到達する時刻を t_0 とし、また \mathcal{M} は chirp mass と呼ばれ、 $\mathcal{M} = \mu^{3/5} M^{2/5}$, $\mu = m_1 m_2 / M$, $M = m_1 + m_2$ と定義される。更に、重力波が一つの進行方向について 2 つの振動モードを持つことに由来する自由度と、連星合体時の波形の位相の自由度はまとめて一つのパラメータ ϕ_0 によって表現されている。 D_{eff} は有効距離 (effective distance) を表す。重力波の波形は m_1, m_2 に依存し、振幅は有効距離に反比例する。

今回の解析には $h(t)$ 自体でなくこれをフーリエ変換した結果

$$\tilde{h}(f) = \left(\frac{1\text{Mpc}}{D_{\text{eff}}}\right) \mathcal{A}_{1\text{Mpc}}(M, \mu) f^{-7/6} e^{-i\Psi(f; M, \mu)}$$

$$\mathcal{A}_{1\text{Mpc}} = - \left(\frac{5}{24\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{GM_{\odot}/c^2}{1\text{Mpc}}\right) \left(\frac{\pi GM_{\odot}}{c^3}\right)^{-1/6} \left(\frac{\mathcal{M}}{M_{\odot}}\right)^{5/6}$$

$$\Psi = 2\pi f t_0 - 2\phi_0 - \pi/4 + \frac{3}{128\eta} \left[\nu^{-5} + \left(\frac{3715}{756} + \frac{55}{9}\eta\right) \nu^{-3} - 16\pi\nu^{-2} + \left(\frac{15293365}{508032} + \frac{27145}{504}\eta + \frac{3085}{72}\eta^2\right) \nu^{-1} \right]$$

を用いる。

観測によって得られた波形データ $\tilde{s}(f)$ から重力波の候補を見つけるにあたって、次のような計算が行われる:

$$z(t_0) = 4 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{s}(f)[\tilde{h}_{\text{template}}^*(f)]_{\phi_0=0}}{S_n(f)} df = 4 \int_0^{\infty} \frac{\tilde{s}(f)[\tilde{h}_{\text{template}}^*(f)]_{t_0=0, \phi_0=0}}{S_n(f)} e^{2\pi if t_0} df$$

ここで、 S_n はノイズの片側パワースペクトル密度である。この操作は、時系列データ $s(t)$ を入力し $z(t)$ を出力する線形フィルタと解釈でき、特に Matched filter と呼ばれている。この操作によって、入力信号 s とテンプレート重力波 h の類似の度合いが判定できる。

以下では特に質量などのパラメータが異なるテンプレートが複数用意されているとき、その種類を表す添え字を m として、テンプレート波形を $h_m(t)$ と表記して区別することにする。

テンプレート波形が $h_m(t)$ のとき、S/N 比は

$$\rho_m(t) = \frac{|z_m(t)|}{\sigma_m}$$

$$\sigma_m^2 = 4 \int_0^\infty \frac{|\tilde{h}_{1\text{Mpc},m}(f)|^2}{S_n(f)} df$$

で表される。ここで、 $\rho_m(t)$ の最大値を与える t を特に t_0 とおこう。 s が h_m に比例する信号をもたない純粋なガウシアンノイズである場合、 $\rho_m(t)$ は $\langle \rho_m^2 \rangle = 2$ という性質を示す。一方、有効距離 D_{eff} [Mpc] からの重力波が信号に含まれる場合、 $\langle \rho_m(t_0) \rangle = 1\text{Mpc} \cdot \sigma_m / D_{\text{eff}}$ という性質を満たすので、重力波の候補が見つかった場合、この値は天体の有効距離に対応づけられる。

2.2.2 χ^2 VETO

前節で計算方法を述べた S/N 比 ρ_m は、Matched filter が線形フィルタであることから分かるように、例えば信号に想定されていない大振幅のノイズが乗ってしまった場合には信号が重力波を含むか否かに関わらず大きな値をとってしまう。信号に、重力波やもともと仮定しているパワースペクトル密度 S_n に従うノイズの他に予期せぬノイズが乗ってしまっているかどうかを判定し、余分なノイズのせいで大きな ρ の値を得てしまっているようなイベントを棄却することは重要である。このための方法として、今回の実験では [1] に述べられている χ^2 VETO を用いる。以下でこれを説明する。

ρ_m^2 は次の式で計算されていた:

$$\rho_m^2 = \frac{|z_m|^2}{\sigma_m^2}$$

$$z_m = 4 \int_0^\infty \frac{\tilde{s}^*(f)\tilde{h}_m(f)}{S_n(f)} df, \quad \sigma_m^2 = 4 \int_0^\infty \frac{|\tilde{h}_m(f)|^2}{S_n(f)} df$$

なお、簡単のため $t_0 = 0$, $\phi_0 = 0$ としている。まず、上の式の積分区間 $(0, \infty)$ を p 個の区間 (f_{l-1}, f_l) ($l = 1, \dots, p$, $f_0 = 0, f_p = \infty$) に分割することを考える。この際、各区間で、 σ_m^2 の計算の際の積分への寄与が等しくなるように、つまり

$$4 \int_{f_{l-1}}^{f_l} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{S_n(f)} df = \frac{\sigma_m^2}{p}$$

が成り立つようにする。この分割を利用すると、 z を p 個の区間での積分の和で表せる。すなわち、

$$z = \sum_{l=1}^p z_l, \quad z_l = 4 \int_{f_{l-1}}^{f_l} \frac{\tilde{s}^*(f)\tilde{h}_m(f)}{S_n(f)} df.$$

もし入力信号 s が重力波の信号に一致する場合 ($s = Ah_m$)、上の定義から $z_1 = \dots = z_p = z/p = A\sigma_m^2/p$ が成り立つことが分かる。

さて、イベントの棄却判定に用いる値 χ^2 の定義は

$$\chi^2 = \sum_{l=1}^p \frac{|z_l - z/p|^2}{\sigma_m^2/p}$$

である。 z が単純なガウシアンノイズである場合、この値は自由度 $2p-2$ の χ^2 分布に従うことが知られている。また、 z が重力波の信号を含む場合も、重力波の寄与は z_l と z/p の引き算で相殺されるため、この場合も χ^2 は自由度 $2p-2$ の χ^2 分布に従う。あるしきい値を決め、 χ^2 の値がそれを上回った場合、信号には予期せぬノイズが加わっていると判断し、このデータを棄却することになる。このようにして、重力波信号の有無にかかわらず、信号に含まれるノイズ成分のパワースペクトルの形状の異常を判定することができる。

実際の解析では、 χ^2 の代わりに、

$$\Xi_{m,n}(t) = \frac{\chi_{m,n}^2(t)}{p + \delta \rho_{m,n}^2(t)}$$

で定義される Ξ を用いる。 $\delta = 0.03$ とした。 Ξ のしきい値は 2 に設定し、 $\Xi_{m,n}(t) > 2$ をみたすイベントを棄却する。

なお、この章では周波数領域の積分領域を $(0, \infty)$ としているが、低周波領域に行くにつれ検出器の雑音強度が大きくなること、ナイキスト周波数の問題、連星の公転周波数がある値を超えると重力波波形を inspiral 段階のもので表すのが不適当になることなどから、実際の解析の際には上限と下限を設けた領域 $(f_{\text{low}}, f_{\text{high}})$ で積分を行うこととなる。今回の解析では $f_{\text{low}} = 1\text{Hz}$ とし、 f_{high} は文献 [1] に倣っている。

2.2.3 テンプレート質量の決定

2.2.1 で述べたように、スピンのない IMBHB からの重力波は 2 天体の質量 m_1, m_2 、合体時刻 t_0 、合体時の位相 ϕ_0 で特徴づけられ、異なる m_1 や m_2 をもった天体を探索する際には、その組み合わせに応じた複数のテンプレートを用意して、それぞれのテンプレートに応じた Matched filter を用いる必要がある。ここでは [4] に従い、効率的に対象天体を目的の領域で探索するためのテンプレート質量の決め方を論じる。

以下、この節ではテンプレート $h(t)$ は $\sigma_m = 1$ となるよう規格化されていると仮定し、更に次のような関数同士の内積を導入する：

$$\langle a|b \rangle = 4\text{Re} \left[\int_0^\infty \frac{\tilde{a}^*(f)\tilde{b}(f)}{S_n(f)} df \right]$$

すると σ_m についての仮定より $\langle h|h \rangle = 1$ 。すると、Matched filter の表式は

$$z(t_0) = \langle s|h \rangle$$

と書かれる*1。

テンプレートの波形は t_0, ϕ_0, m_1, m_2 に依存して決まる。これらのパラメータを、Matched filter にかける前の段階で固定しないとイケないもの (extrinsic parameters) と、Matched filter にかける前に決めておく必要のないもの (intrinsic parameters) に分類する。今回の場合では、 ϕ_0 は $z(t)$ の偏角を調べることで決定出来るパラメータで [1]、 t_0 は $z(t)$ の絶対値が最大になる時刻を見つければよいため、これらは前者に含まれるが、一方 m_1 や m_2 については各 (m_1, m_2) の組み合わせについて一つずつ波形のテンプレートを作成し、逐

*1 2.2.1 での Matched filter の表式では積分の実部をとる操作が省かれているが、2.2.1 の式では \tilde{h} の残された自由度 ϕ_0 を固定していることと関連している。

一 Matched filter を計算しなければいけないので、後者に分類される。intrinsic parameters を並べたベクトルを $\boldsymbol{\mu}$ 、extrinsic parameters を並べたベクトルを $\boldsymbol{\lambda}$ と書くと、テンプレート波形は $h(t; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda})$ と書かれ、今回の例では $\mu^1 = t_0, \mu^2 = \phi_0, \lambda^1 = m_1, \lambda^2 = m_2$ となる。

テンプレートに設定された質量と観測対象の質量が異なる場合に、 ρ の値がどのように振る舞うか考える。簡単のため観測信号は全て重力波に起因するものでノイズを含んでいないとし、観測する波形も規格化した状況 ($s = h$) を考えて、テンプレートのもつパラメータ、信号に含まれる波形のパラメータをそれぞれ $\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} + \Delta\boldsymbol{\lambda}$ とおくと、Matched filter による ρ の値は

$$M(\boldsymbol{\lambda}, \Delta\boldsymbol{\lambda}) = \max_{\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu}} \langle h(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda}) | h(\boldsymbol{\mu} + \Delta\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\lambda} + \Delta\boldsymbol{\lambda}) \rangle$$

と書かれる。この M は、テンプレートのパラメータと観測対象のパラメータが異なる場合に ρ の値が M 倍小さく出てしまう、という意味を持つ。

特にテンプレートと観測天体のパラメータのずれが微小な場合を考えるために、 $\Delta\boldsymbol{\lambda} \simeq 0$ 付近で展開すると、

$$M(\boldsymbol{\lambda}, \Delta\boldsymbol{\lambda}) \simeq 1 - g_{ij}(\boldsymbol{\lambda}) \Delta\lambda^i \Delta\lambda^j$$

$$g_{ij}(\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial \Delta\lambda^i \partial \Delta\lambda^j} \right)_{\Delta\lambda^k=0}$$

ここで、 M は $\Delta\boldsymbol{\lambda} = 0$ で最大値 1 をとるため、 g_{ij} は正定値となる。したがって g_{ij} を $\boldsymbol{\lambda}$ のとりうる値の空間に付随する計量とみなすことができる。

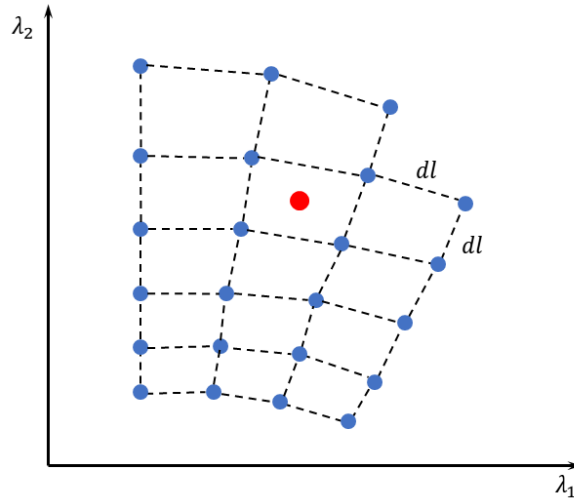


図2 テンプレートの観測天体のパラメータの配置の、extrinsic parameter の空間が2次元 ($N = 2$) の場合のイメージ図。青い点一つが一個のテンプレートに対応している。隣接するテンプレート同士を結ぶ点線の、計量 g_{ij} で測った長さは全て dl である。観測する重力波が赤い点で表されるようなパラメータを持っていた場合に、最近接テンプレートからの距離が最も遠くなる (S/N 比が最も悪くなる)。

重力波探索を行う際、各テンプレート間の計量 g_{ij} で測った距離が dl となるようにパラメータの刻み幅を設定したとしよう (図2)。このように用意したテンプレート群に対して、最も ρ が低くなる信号について、extrinsic parameter の個数を N とすると、

$$g_{ij} \Delta\lambda^i \Delta\lambda^j = N(dl/2)^2$$

が成り立つ。この時の M の値を minimal match(MM) と呼ぶことにすると、

$$MM = 1 - N(dl/2)^2$$

が成立する。

実際の解析にあたっては、まず重力波を検出したとみなす ρ のしきい値 ρ_{th} を決める必要がある。そして、最初はこれより小さめにとったしきい値 $\rho_{th} \cdot MM$ を用いて重力波の候補を探し、候補が検出された場合はさらに細かくパラメータの刻み幅を設定し再度 Matched filter を利用するという流れで解析が行われる。先の考察より、1つのテンプレートあたり、パラメータ λ の空間内の計量 g_{ij} で測った体積 dl^N だけの領域で重力波を見つけることができる。したがって、全パラメータ領域を網羅するために必要なテンプレートの個数は、

$$\mathcal{N} = \frac{\int d^N \lambda \sqrt{\det g_{ij}}}{(2\sqrt{(1-MM)/N})^N} \quad (1)$$

で与えられると考えられる。

このレポート中の解析では $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2) = (m_1, m_2)$ としている。

3 方法

3.1 解析のためのコンピュータ環境構築

解析には Windows 7 (64bit) 環境下で Python 2.7.10 の 64bit 版を用いた*2。FFT には scipy 0.16.1 の fftpack を利用し、他にパッケージ numpy 1.9.3, matplotlib 1.5.0 を用いている。

3.2 信号のキャリブレーションとセグメントへの分割

観測は 2014/12/11 6:18:00 UTC より 24 時間行われ、データはサンプリング周波数 256Hz で保存された。この生データは研究室に保存されていたコード make_spe_TM1.py, make_spe_TM2.py, calib.py によってキャリブレーションされ、重力波信号へと変換される。このデータは更に $N_s = 862$ 個のセグメントに分割されている。一つのセグメントは 200 秒の長さで、各セグメントとも前後のセグメントと 100 秒ずつ重なりを持っている。このデータは Hann 窓をかけられ、更に FFT をかけられた形で signals200sec.dat に出力される。

signals200sec.dat は 5 つの numpy.ndarray 配列からなる list が pickle.dump メソッドで格納されており、この list の一つ目の要素には周波数を表す 25600 次元配列、二つ目の要素にはその周波数での \tilde{s} の値を表す $(N_s, 25600)$ 次元配列が格納されている*3。

一つのセグメントの時間長を、観測したい波形の長さより長く設定することは重要である。解析に使用する周波数帯域の下限を f_{low} とおくと、inspiral 波形の周波数が f_{low} に到達してから合体するまでの時間 T_{chirp} は例えば [1] の (3.5) 式で与えられるが、この値がセグメント長以下になるようにしなければならない。

今回の解析では、 $f_{low} = 1$ Hz としている。

*2 32bit 版では解析がうまく実行できない。取り扱う解析データが大きすぎるのが原因だと考えられる。

3 本来一つのセグメントについて FFT をかけた結果は 51200 個の要素を持つが、FFT をかける前の時系列信号は実数値だから、 $\tilde{s}[n] = \tilde{s}^[51200 - n]$ が成立するため、余分な情報である後半 25600 個分の要素 $\tilde{s}[25600], \dots, \tilde{s}[51999]$ はキャリブレーションの段階で捨てられている。また、出力された signals200sec に格納されているデータは、全てのセグメントで 0Hz の要素が無限大の値になっている。

3.3 パワースペクトル密度の計算

観測信号からのパワースペクトル密度の計算は、文献 [1] の VI 節の手法に従った。個別のセグメントについて解析する場合には、そのセグメントの前後各 5 セグメント、計 10 セグメントについて、median-mean average spectrum を計算し、これをパワースペクトル密度として使用した。

なお、Matched filter を使って実際に解析を行う際には、式中に現れる $1/S_n(f)$ の代わりに $Q(f)$ という量を用いる。 $Q(f)$ の構成方法は文献 [1] の VII 節で述べられている。ここで、 $T_{\text{spec}} = 10 \text{ s}$ とした。

3.4 観測データを用いた重力波探索

TOBA の観測データを対象に、IMBHB 由来の重力波の有無を判別するシステムについて述べる。

3.4.1 テンプレートの設定

共振型検出器である TOBA は、LIGO, Virgo 等の干渉計を用いた重力波検出器に比べ、TOBA は 0.1–1Hz 程度の低周波領域でのノイズを小さく抑えられると期待されている。この特性をふまえ、今回の探索で対象とする IMBHB の質量の範囲は [3] より高めの $100M_{\odot} \leq m_1, m_2 \leq 500M_{\odot}$ と定めた。

以上の領域の重力波が仮に存在する場合それを漏れなく検出できるように、用意するテンプレートの個数と各テンプレートのパラメータ (m_1, m_2) を決める。最初に $M = 200M_{\odot} + 200M_{\odot}$ のテンプレートを作成し、ノイズを全く乗せず有効距離 10^{-9}Mpc からの重力波のみで構成した信号波形について、どのような (m_1, m_2) の組の信号波形で正しく重力波が検出されるかを確かめた。

計算の結果、 M の値が $402.3M_{\odot}$ を超えた領域では VETO を通らず信号が棄却されることが分かった。VETO で棄却されなかった、 $M = 201M_{\odot} + 201M_{\odot}$ の波形に対しては、 ρ_m の値は $M = 200M_{\odot} + 200M_{\odot}$ の場合の 0.87 倍まで落ち込んでいた。このことから、 MM を 0.87 より小さくしてしまうと、重力波として扱われるべきイベントが VETO を通らず見逃されてしまう可能性があると分かる。本来 MM は 0.98 程度の、できるだけ 1 に近い値に設定した方がよいが、今回は計算量の都合上、 MM を 0.87 に設定して重力波探索の第一段階を行うこととした。

また、今回は解析の都合上 $m_1 = m_2$ となるテンプレートのみを作成して探索を行った。以下、 (m_1, m_2) の組の決定方法を述べる。まず、 $\lambda_0 = (m_1, m_2) = (100, 100)$ (単位は太陽質量、以下同じ) について、この地点での g_{ij} を計算する。 $m_1 = m_2$ の状況では必ず $g_{11} = g_{22}$, $g_{12} = g_{21}$ が成立するので、 g_{ij} を行列とみなした時の固有ベクトルは $\mathbf{v}_1 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ と $\mathbf{v}_2 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ となる。 \mathbf{v}_i に対応する固有値を l_i とし、次に用意するテンプレートのパラメータ λ_1 は

$$\lambda_1 = \lambda_0 + a \cdot \sqrt{\frac{1 - MM}{2l_1}} \mathbf{v}_1 \quad (0 < a \leq 2)$$

とする。同様の操作を m_1 と m_2 が 500 を超えるまで繰り返して、得られた $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ をパラメータに持つテンプレートを作成すれば、原理上 $m_1 = m_2$ をみたく十分振幅の大きい重力波を漏らさず検出できる。今回の解析では $a = 1.84$ 程度としたところ、 m_1 と m_2 が初めて 500 を超えるまでに 162 個のテンプレートが生成された。

3.4.2 解析の実行

前節の方法に基づいて作成した 162 個のテンプレートに対して、全 862 セグメントで探索を行う。重力波を検出したとみなす S/N 比のしきい値は、[2] に倣い、False Alarm Rate が 10^{-5} events/year となるよう設定する。重力波信号が存在しない場合は ρ^2 は自由度 2 の χ^2 分布に従うと期待されることから、 $\rho_{\text{th}}^2 = 48.3$ と設定された。

3.5 Injection Test

今回構築したパイプラインの検出性能を確かめるため、予期される重力波信号を TOBA の観測信号に上乘せし、TOBA が検出可能な IMBHB の有効距離を調べる。

4 結果

4.1 ノイズのパワースペクトル密度

まず、全 862 セグメントを同時に使用してパワースペクトル密度を [1] に挙げられた三つの手法で計算した (図 3)。[2] に述べられている結果とは形状が異なっている。

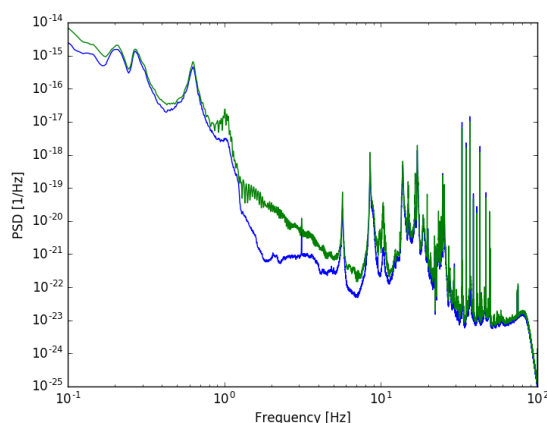


図 3 1 日分の観測の全データを使用して計算されたパワースペクトル密度。青色、緑色の線はそれぞれ median-mean average spectrum, mean average spectrum を表している。mean average spectrum は median mean average spectrum と形状がほぼ一致し、このグラフに重ねてプロットしても差異は見られなかった。

実は、観測信号に含まれるノイズの強度は 24 時間の測定の中でも時間に依存して変化しており、各セグメントの解析にあたって全セグメントから計算したパワースペクトル密度を用いるのは好ましいことではない。

4.2 重力波探索

まず、テンプレートとして $200 + 200 [M_{\odot}]$, $200 + 400 [M_{\odot}]$, $200 + 600 [M_{\odot}]$ の 3 種類の波形のみ、パワースペクトル密度として全 862 セグメントの mean spectrum を用いて、24 時間分の観測データに対して重力

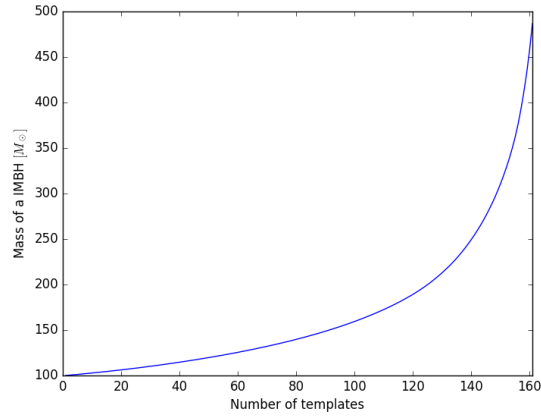


図4 テンプレートに使用された質量の分布。横軸で目盛 i の位置の縦軸の値は、 i 番目のテンプレートのブラックホール 1 個の質量を意味する。質量が小さい方の領域で多くのテンプレートが必要になることがグラフからも分かる。

波探索を行った。結果、VETO を通過した上で ρ がしきい値を上回るイベントが検出された。

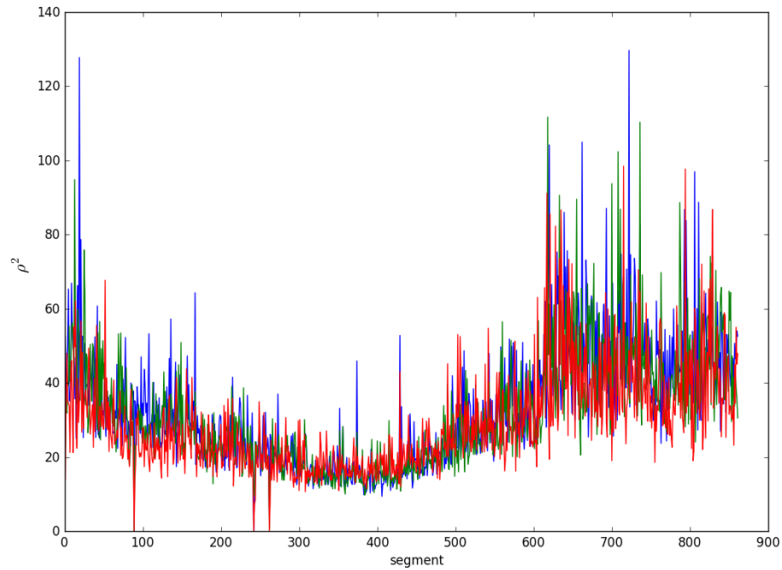


図5 各セグメント中の VETO を通過した時刻のなかでの、Matched filter の出力の最大値。青色、赤色、緑色はそれぞれ、テンプレートの質量が $200 + 200 [M_\odot]$, $200 + 400 [M_\odot]$, $200 + 600 [M_\odot]$ の状況である。

次に、162 個のテンプレートを用いて、24 時間分の観測データに対して重力波探索を行った (図 6)。このとき、パワースペクトル密度の算出の際には、対象となるセグメントの前後各 5 セグメントを使った median-mean average spectrum を用いた (最初の 5 セグメントと最後の 5 セグメントでは、前後の各 5 セグメントを確保できないため、パワースペクトル密度計算に用いたセグメント数が少なくなっている)。解析の

結果、 ρ が $MM \cdot \rho_{th}$ を上回るイベントは検出されなかった。

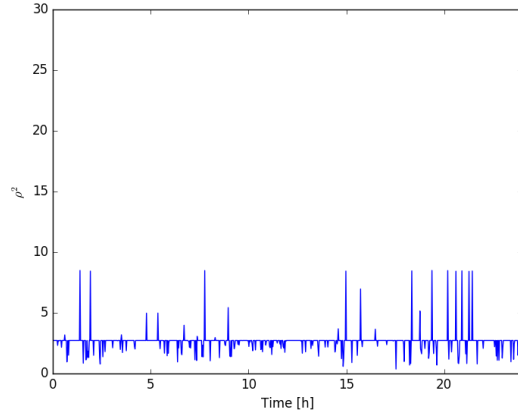


図6 各セグメントで VETO を通過したデータについて、全ての時刻、全てのテンプレートでの ρ^2 の最大値をプロットした。

4.3 Injection Test

2通りの方法で重力波信号を埋め込むセグメントを選択し、TOBA の detection volume V と、体積 V をもつ球の半径である R_{vis} を計算した (図8)。

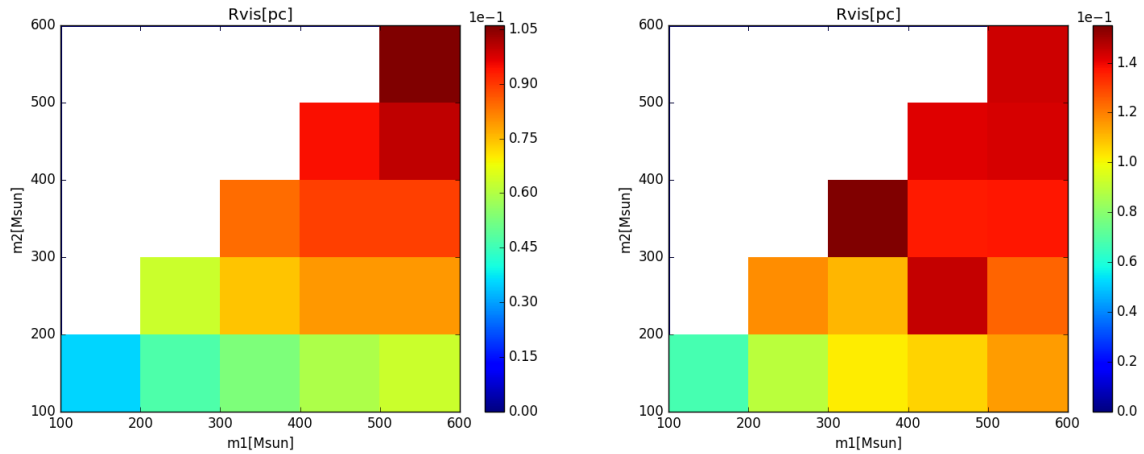


図7 (左図) Injection Test によって推定された、IMBHB の質量に対する R_{vis} の値。重力波を埋め込むセグメントを、862 セグメントの中で、図5の値が中央値付近となるような20セグメントにとっている。(右図) 左図と同じく IMBHB の質量に対する R_{vis} の値を示すが、重力波を埋め込むセグメントを、図5の値が最小値付近を示す20セグメントにとっている。

5 考察

5.1 mass parameter の刻み幅

今回の探索では 162 個のテンプレートを作成したが、このテンプレートで目的の重力波探索に十分であったか検討する。まず、テンプレートの質量を $(200M_{\odot}, 200M_{\odot})$ に固定し、このテンプレートで検知可能な IMBHB の質量の範囲を調べる。入力信号はノイズを持たない純粋な重力波とし、有効距離は 7.64×10^{-2} pc(S/N 比が 1 となる) と設定した。図 8 に、入力信号の質量を変化させた際の ρ の変化の様子を示す。

(1) 式は、いわば図 8 のパラメータの動く領域全体を、図中に描かれた青い線で囲まれた楕円状の領域いくつで覆うことができるか? という考え方のもと \mathcal{N} を求めている。計量 g_{ij} から定まる青線の楕円は、パラメータ (m_1, m_2) の動く領域の形状に対して歪な(長軸の長さが m_1, m_2 の動ける幅のスケールに対して長すぎ、一方短軸は短すぎる)ため、(1) 式の計算で得られた \mathcal{N} という値は実際にテンプレートの組を作成するにあたっては特に意味を持たない。

次に m_1, m_2 それぞれについて $100M_{\odot}$ から $500M_{\odot}$ まで $5M_{\odot}$ 刻みで動かし、今回用意した 162 個のテンプレートで探索を行った場合正しく検出が行われるかどうかを確かめた(図 9)。結果、 χ^2 VETO を用いない場合(例えば、[2] では χ^2 VETO の代わりに RMS VETO を用いている)は、今回調べた全ての質量パラメータの領域で $\rho_m > \rho_{\text{th}}$ が成立するテンプレート m が存在することが分かった。一方、 χ^2 VETO を用いた場合は、 $M = 450M_{\odot} \sim 700M_{\odot}$ の領域でうまく検出が行われないパラメータが生じることが分かった。以上の結果は、今回のナイーブなテンプレートの決め方では、 χ^2 VETO を用いた場合重力波信号を捉え漏らす可能性があることを示している。

5.2 Injection Test

検出器の観測可能な距離の上限は、ノイズのスペクトル密度から見積もることが可能である。 $D_{\text{eff}} = (\sigma_m/\rho_m)$ Mpc と表せるから、 ρ_m の下限 ρ_{th} を用いて $r = (\sigma_m/\rho_{\text{th}})$ Mpc が検出器が観測可能な有効距離の上限である。

5.3 計算の効率化

我々が行った FINDCHIRP に基づく重力波探索で最も時間を要したのは、 χ^2 VETO の処理において周波数分割地点を決定する部分であった。3.3 で触れたように、この分割の計算には $1/S_n(f)$ ではなく $Q(f)$ を用いているが、inspiral 波形の場合 $|\tilde{h}(f)| \propto f^{-7/6}$ が成立することより、実際に行われる計算は

$$\sum_{k=k_{l-1}}^{k_l-1} Q[k]k^{-7/3} = \frac{1}{p} \sum_{k=k_{\text{low}}}^{k_{\text{high},m}-1} Q[k]k^{-7/3}$$

を満たす k_l ($l = 1, \dots, p, k_0 = k_{\text{low}}, k_p = k_{\text{high},m}, f = k\Delta f$) を決定することである。 $k_{\text{high},m}$ はテンプレートに依存するため、今回のプログラムではこの計算をテンプレート毎に個別に実行していた。具体的な操作としては、数列 $Q[k]k^{-7/3}$ の初項 ($k = k_{\text{low}}$) から第 n 項までの和を各 n について計算する操作を行っていたが、

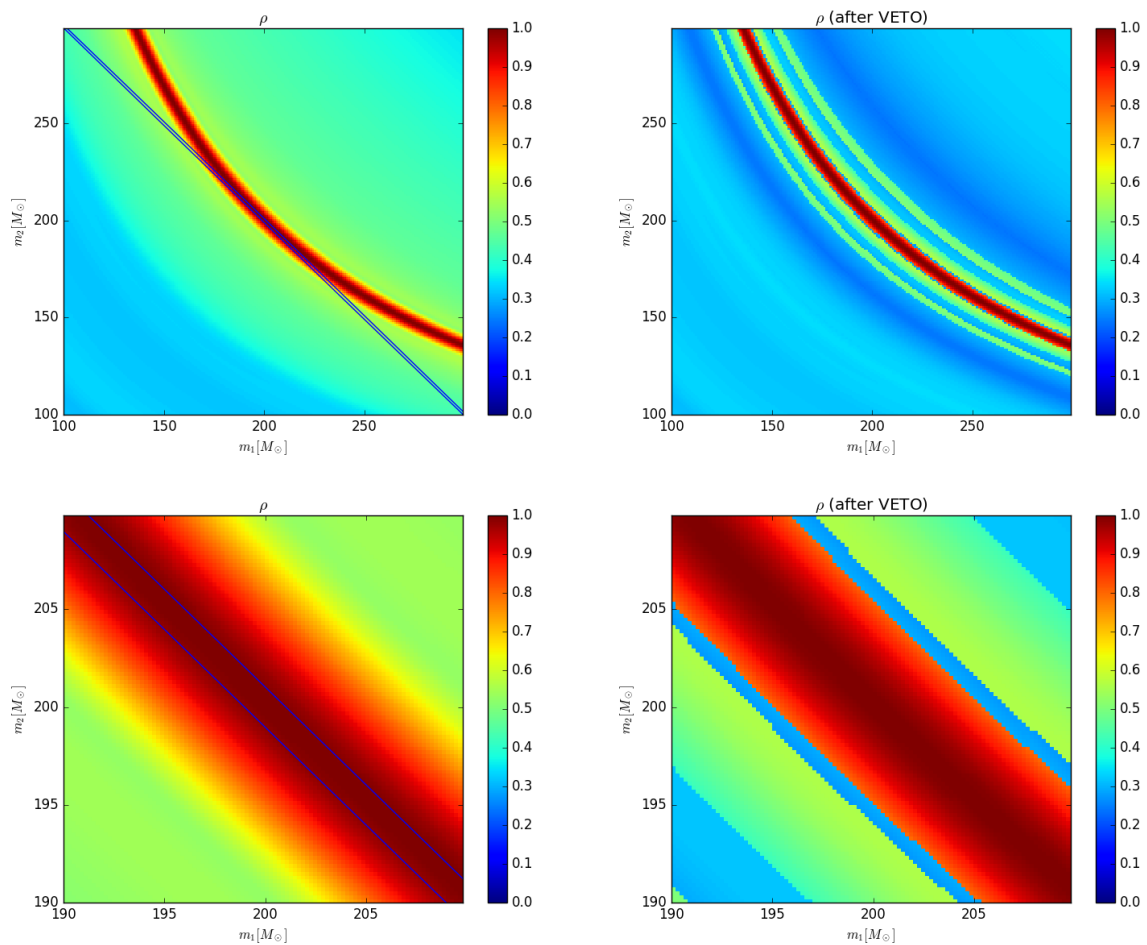


図8 (左上・左下図) ρ の m_1, m_2 依存性の概形. VETO はかけておらず、最大値を 1 に規格化している. 青い線は、 g_{ij} を (m_1, m_2) について $(200M_\odot, 200M_\odot)$ のまわりで最低次でテイラー展開した際に $\rho = 0.99$ がみたされる楕円状の領域を示す. (右上・右下図) ρ^2 の m_1, m_2 依存性. VETO を通過したものの中での最大値をプロットしている.

そもそもこの操作

$$Q_{\text{sum}}[k] \equiv \sum_{k'=0}^k Q[k'] k'^{-7/3} \quad (k = 0, \dots, N/2)$$

はノイズのパワースペクトルのみ依存し、テンプレート質量など他のパラメータに依存しないため、最初に一度計算して結果を保存しておけば再度同じ計算を行う必要がなくなる。

今回作成した Python のコードでは、この $Q_{\text{sum}}[k]$ に類する数列の $Q[k]$ からの作成に 1 分程度を要するため、予め $Q_{\text{sum}}[k]$ を計算した結果を保存しておく方が効率的である。

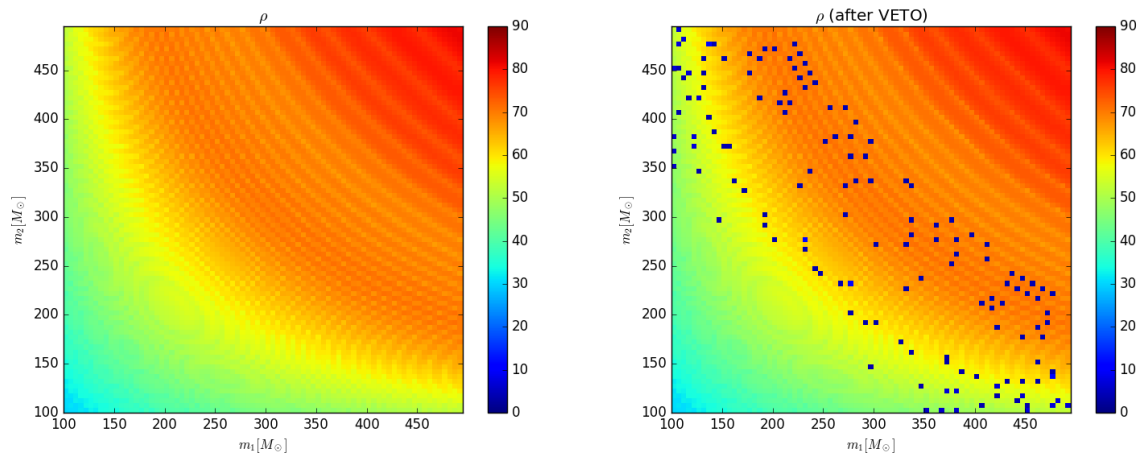


図9 (左図) 質量 m_1 (横軸)、 m_2 (縦軸) をもつ IMBHB の重力波信号に対して 162 個のテンプレートで Match filter を行った際の ρ の最大値をプロットしたもの。 m_1, m_2 は $100M_\odot$ から $500M_\odot$ まで、 $5M_\odot$ 刻みで計算している。IMBHB の有効距離は 10^{-2} pc としている。(右図) 左図と同様に ρ の最大値をプロットしているが、予め χ^2 VETO をかけて、これを通過したものの中の最大値をプロットしている。

参考文献

- [1] Allen, Bruce, et al. "FINDCHIRP: An algorithm for detection of gravitational waves from inspiraling compact binaries." *Physical Review D* 85.12 (2012): 122006.
- [2] 正田 "Development of a High-Angular-Resolution Antenna for Low-Frequency Gravitational-Wave Observation." 博士論文 (2014 年度)
- [3] Aasi, J., et al. "Search for gravitational radiation from intermediate mass black hole binaries in data from the second LIGO-Virgo joint science run." *Physical Review D* 89.12 (2014): 122003.
- [4] Owen, Benjamin J. "Search templates for gravitational waves from inspiraling binaries: Choice of template spacing." *Physical Review D* 53.12 (1996): 6749.