

特別実験レポート
PD 受光感度の非一様性の測定

05101505 枝 和成
共同実験者 渡辺 篤史

2011年9月14日提出

目次

第 1 章	はじめに	2
1.1	背景	2
1.2	実験の目的	2
1.3	実験の概略	2
第 2 章	実験装置	4
2.1	収容ケース	4
2.2	電気回路	4
2.3	ピエゾ付きミラー	4
第 3 章	実験とその結果	5
3.1	ビームプロファイル測定	5
3.1.1	ナイフエッジ法の原理	5
3.1.2	ナイフエッジ法によるビームプロファイル測定	6
3.2	QPD を用いたピエゾのキャリブレーション	8
3.2.1	QPD	8
3.2.2	ピエゾ	10
3.3	非一様性の測定	12
第 4 章	考察とまとめ	14
4.1	考察	14
4.2	まとめ	15
補遺 A	ガウシアンビーム	16
補遺 B	ABCD 行列	19
補遺 C	ロックインアンプの検出原理	21
補遺 D	収容ケース	22
補遺 E	回路図	23
参考文献		24
感想		25

第1章 はじめに

1.1 背景

重力波は時空の歪みがさざ波のように伝わる現象であり、その影響は物の伸縮や二点間の距離の変化として現れる。二点間の距離変化を測定するには主にレーザー干渉計が用いられる。周知のように重力波の振幅は非常に小さく、検出は困難を極め、検出が期待されるような感度を達成するには数多くの雑音を低減しなければならない。

その雑音の一つにレーザーに由来するものがある。光源となるレーザーは理想的ではなく、周波数雑音や強度雑音などがあり、それらの雑音が干渉計に影響を及ぼす。従って、高い精度が要求される重力波検出のような実験には、レーザーの周波数安定化や強度安定化などを行う必要がある。強度安定化は基本的に、レーザー光の一部をフォトディテクター (PD) に入れ、その出力信号をもとにして、レーザーの強度あるいは光路途中に置かれた強度変調素子をフィードバック制御することで行われる。

1.2 実験の目的

今回の実験では、レーザーの強度安定化の際に邪魔になるビームジッター雑音に焦点を当てた。レーザーの出力ビームは、主に地面振動の影響で、PD に当たる位置が絶えず変化する。PD の受光感度がビームの当たる位置に依らず一様ならば問題はないが、非一様であれば捉えたい信号とは無関係の雑音が発生してしまう。これは強度安定化の際に障害となりうる。従って、なるべく一様な領域を探し出し、そこへビームを当てる必要が出てくる。今回の実験では、その一様な領域を探す方法論を提示する。

1.3 実験の概略

ビームの微弱な揺れに対するの PD の応答を観測するのが本実験の目標である。図 1.1 に実験の概念図を示す。ミラー背面にピエゾ素子を取り付け、ピエゾ素子にファンクションジェネレーターから正弦波を送り込む。こうすることで、ミラーを介して PD 表面へ到達したビームは、送り込んだ正弦波と同周期で振動する。PD の受光感度が、ビームの当たる位置に依らず一様でないとするれば、ビームの微弱な振動によって交流電圧が発生する。これをロックインアンプ¹で検出する。ロックインアンプには、ファンクションジェネレーターからピエゾへ送り込んだものと同じ周期の方形波を参照信号として入れており、ここから、検出された交流電圧が PD の受光感度の非一様性に起因するものと同定できる。

¹ロックインアンプの原理については補遺 C を参照。

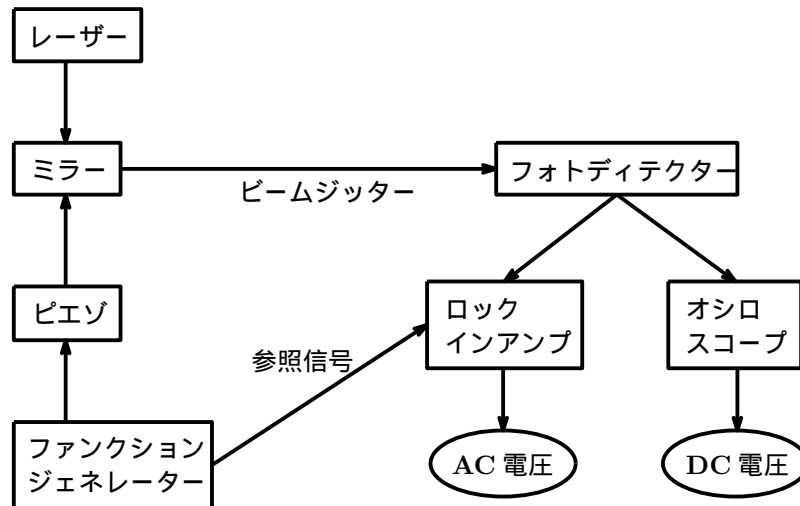


図 1.1 : 概念図

本実験は次の三つの小実験からなる。

1. ビームプロファイル測定

ビームプロファイルを測定することで、適切な位置にレンズを配置し、PD 表面でのビームの太さを自由に²調節できるようにした。

2. QPD を用いたピエゾのキャリブレーション

印加した電圧に応じてピエゾ素子がどの程度伸縮するかを調べた。これにより PD 表面でのビームの動く範囲を知ることができる。

3. 非一様性の測定

PD 表面各点における、ビームジッターによって生成される交流電圧をロックインアンプにより検出した。得られたデータから、PD のある領域における受光感度の非一様性の指標を与えるマップを作成した。

²実験スペースと実験室にあるレンズの種類により、ある程度の制約は受ける。

第2章 実験装置

この節では、PDの收容ケース、回路、ピエゾ付きミラーについて述べる。

2.1 收容ケース

PDの電気回路を收容するためのケースを補遺Dに示す。收容ケースは $40 \times 150 \times 100$ mmの直方体であり、その上部には、中心にフォトダイオードを露出するための直径2cmの穴をあけてある。この穴からは、箱を開けなくてもフォトダイオードが交換可能であり、様々な種類ものを調べることを想定してある。フォトダイオードの位置はネジを回しゴムで挟むことで固定される。

2.2 電気回路

補遺Eに作成したPDの回路図を示す。今回の実験では、フォトダイオードにはS11499-01を使用した。その受光感度は 0.6 A/Wであり、レーザーの強度が 2.78 mWであることを考えると、PDは理想的には 8.34 Vの電圧を出力する。実際にテスターで測定したところ 0.80 Vで、ほぼ予想通りに動いていることがわかった。なお、実験室内の蛍光灯のみの場合、PDは 0.5 mVを出力し、レーザーの出力と比べて無視できるものであった。PDの出力はAC出力とDC出力の二つを用意したが、実験ではすべてDC出力のみを用いた。また、二つのオペアンプには動作を安定化するために、いずれにも電源付近に図E.2のバイパスコンデンサをつけている。

2.3 ピエゾ付きミラー

直径 25.8 mmのアルミ円板の中心に直径 5 mmの穴をあけ、図2.1に示す通り、その穴の周囲に正三角形形状にピエゾ素子を配置し接着した。穴からピエゾ素子の配線を通し、ミラーを図2.2のようにその三つのピエゾ素子の上に接着した。実験をする際には、アルミ円板をミラーホルダーで固定し、ピエゾ素子に電圧を印加してミラーを揺れ動かした。ピエゾAに正弦波を入れた場合には垂直方向にミラーが振動し、ピエゾBとピエゾCに互いに逆位相の正弦波を入れた場合には水平方向にミラーが振動する作りとなっている。印加電圧とビームのPD表面での動く範囲との関係については3.2章で議論する。

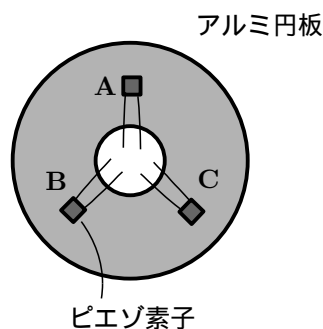


図 2.1 : ピエゾ素子の配置

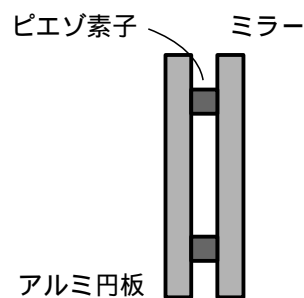


図 2.2 : ピエゾ付きミラーを横から見た図

第3章 実験とその結果

3.1 ビームプロファイル測定

3.1.1 ナイフエッジ法の原理

ビームプロファイル測定にはナイフエッジ法が用いられる。原理は次の通りである¹。レーザー光はガウシアンビームで近似でき、ガウシアンビームはビーム半径 $w(z)$ が求めれば一意に定まる。図 3.1 のように、伝搬方向とは垂直な面において、カッターの刃でビームを徐々に遮断していくとき、透過するビーム強度はその遮断された面積に応じて徐々に減少する。その強度の変化をフォトディテクター (PD) を用いて測定する。得られたデータをフィッティングすることで、ある位置 $z = z_1$ での $w(z_1)$ が求まる。同様に、カッターを動かし、様々な位置 $z = z_1, z_2, \dots$ での強度変化を測定することで $w(z_1), w(z_2), \dots$ が得られ、これらをフィッティングすることで、関数 $w(z)$ が決定する。

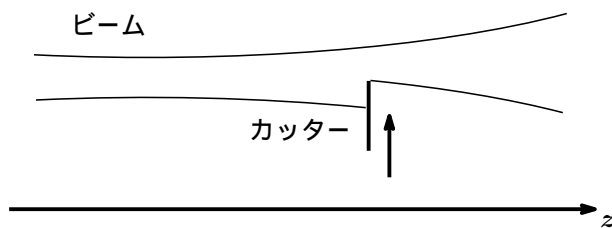


図 3.1 : ナイフエッジ法の概略図

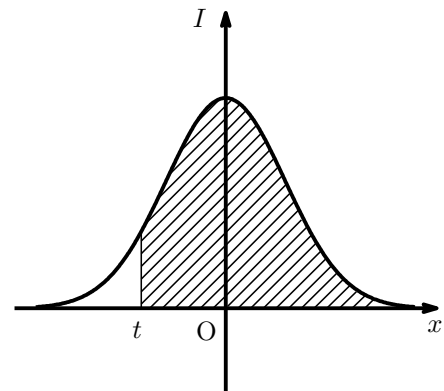


図 3.2 : ビーム強度

z 軸方向に進行するレーザー光を考え、それとは垂直な面上に x, y 軸をとる。このとき、光電場の振幅 E は、補遺 A を参考にすれば

$$|E(x, y, z)| = E_0 \exp\left(-\frac{x^2}{w_x(z)}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{w_y(z)}\right) \quad (3.1)$$

と表せる²。レーザー光の強度は、振幅の二乗に比例し

$$I(x, y, z) = I_0 \left(\frac{2}{\pi w_x(z)^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2}{\pi w_y(z)^2}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2x^2}{w_x(z)}\right) \exp\left(-\frac{2y^2}{w_y(z)}\right) \quad (3.2)$$

とかける。ただし、 I_0 はビームを遮らないときの全強度である。従って、カッターの刃でビームを $x = t$ の位置まで遮断したとき、測定されるビーム強度は、図 3.2 の斜線部の面積であるから

$$I(t, z) = \int_t^\infty dx \int_{-\infty}^\infty dy I(x, y, z) = \frac{I_0}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{2} \frac{t}{w_x(z)}\right)\right] \quad (3.3)$$

¹[3] を参考にした。

²補遺 A では x と y について対称なガウシアンで議論した。しかし、実際のレーザー光は歪んでおり x と y について非対称であるので、ビームプロファイル測定の際には楕円のガウシアンで近似した。

となる。ただし、 $\text{erf}(x)$ は誤差関数で

$$\text{erf}(x) = \int_{-x}^x \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{\pi}} dt \quad (3.4)$$

と定義される。

PD で測定されるのは電圧であるが、これはビーム強度と比例関係にある。従って、ビームを遮らないときの全電圧を V_0 、 $x = t$ まで遮ったときの電圧を $V(t, z)$ とすれば、

$$P(t, z) \equiv \frac{V(t, z)}{V_0} = \frac{I(t, z)}{I_0} = \frac{1}{2} \left[1 - \text{erf} \left(\sqrt{2} \frac{t}{w_x(z)} \right) \right] \quad (3.5)$$

という関係が成り立つ。これより、様々な t, z での $P(t, z)$ を測定することで、フィッティングから $w_x(z)$ が求まる。 y 軸方向についても同様に行えば、 $w_y(z)$ が求まる。

3.1.2 ナイフエッジ法によるビームプロファイル測定

図 3.3 のように z 軸をビームの進行方向にとり、ある位置 z_1 において、ビームに対して垂直な x, y 軸方向からカッターの刃を挿入していき、そのとき PD での電圧の変化をテスターを用いて測定した。

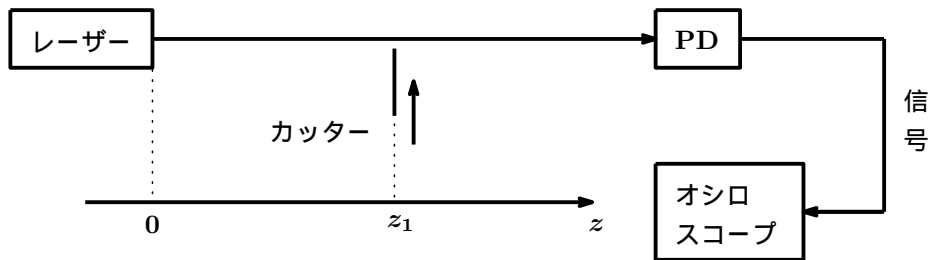


図 3.3 : ナイフエッジ法によるビームプロファイル測定

こうして前節で説明した原理から、レーザーの先端を $z = 0$ として、 $z = 6.5, 9.5, 12, 15, 17, 19.5, 22, 24.5, 27, 29.5, 32, 34.5, 39.5, 44.5, 49.5, 54.5$ の計 16ヶ所でのビーム半径 $w_x(z), w_y(z)$ を求めた。結果、図 3.4 と図 3.5 を得た。フィッティングにより、 x, y 軸方向でのビームウェスト z_0 とウェストでのビーム半径 w_0 はそれぞれ

	ビームウェスト z_0 [cm]	ウェストサイズ w_0 [mm]
x 軸方向	40.1 ± 0.1	0.3024 ± 0.0009
y 軸方向	27.2 ± 0.2	0.278 ± 0.001

表 3.1 : ビームプロファイル

と求まった。

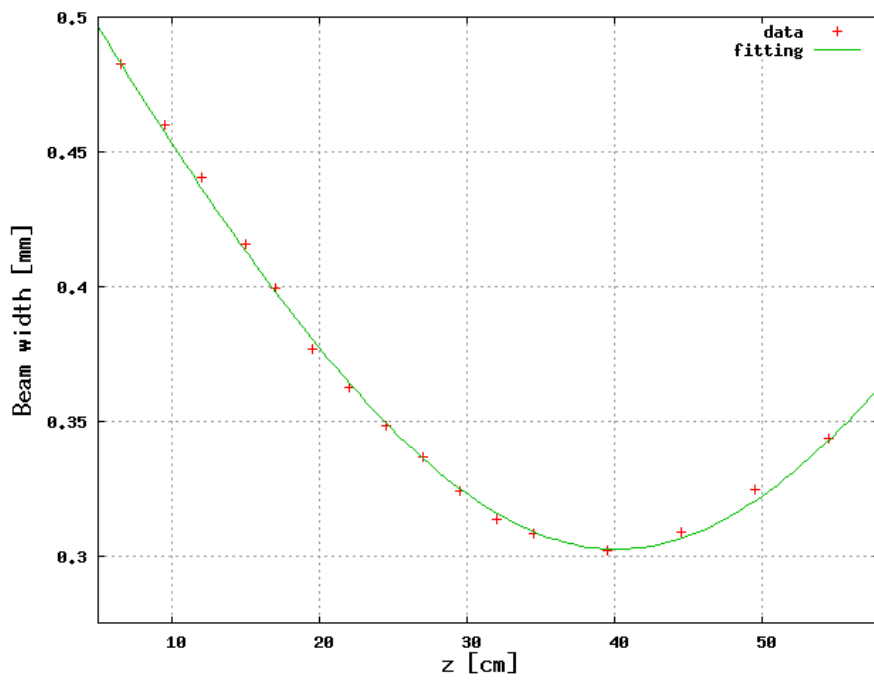


図 3.4 : x 軸方向でのビーム半径

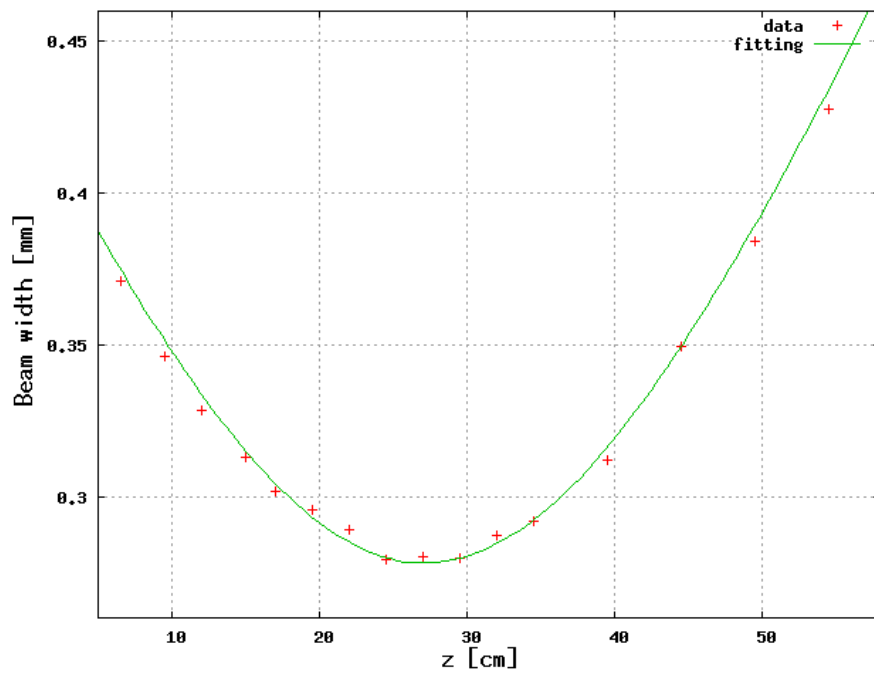


図 3.5 : y 軸方向でのビーム半径

3.2 QPDを用いたピエゾのキャリブレーション

QPDを用いて、ピエゾ素子に印加した電圧と、PD表面でのビームの動く範囲とを関係付けた。

3.2.1 QPD

受光面が四つの領域 A、B、C、D に分割されている四分分割フォトディテクター (QPD) の中心にビームを当て、そこから QPD を微小に動かしたとき、各領域の出力電圧 V_A, V_B, V_C, V_D がどのように変化するかを調べた。ビームの方向を z 軸として図 3.6 のように各軸をとった。ビームプロファイル測定の結果から、ビームは円形ではなく歪んだ形をしていたので、QPD の中心を $V_A + V_B = V_C + V_D$ かつ $V_A + V_D = V_B + V_C$ が成り立つ点と定めた。

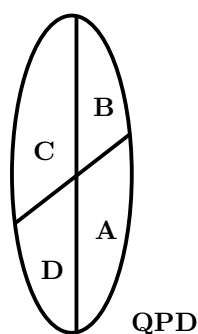


図 3.6 : QPD とビームの関係

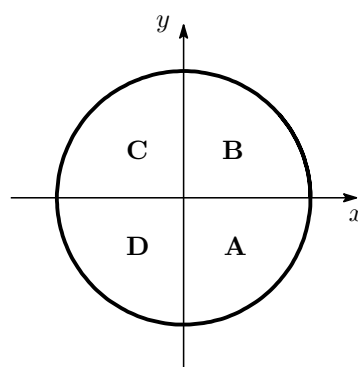


図 3.7 : QPD を正面から見た図

QPD の中心にビームを当て、取り付けられたマイクロメーターで QPD を x 軸方向に動かした。このときの QPD 各領域の電圧変化をオシロスコープで測定した。結果、図 3.8 を得た。図 3.8 において、横軸はマイクロメーターの目盛り、縦軸は領域 C と D での出力電圧の和 $V_C + V_D$ を全体の電圧 $V_{\text{all}} = V_A + V_B + V_C + V_D$ で規格化した値を表す。図 3.8 からわかるように、中心付近においてマイクロメーターの目盛りと QPD の出力電圧は比例関係にある。この直線をフィッティングにより求めると、表 3.2 の x 軸方向の欄のようになった。同様に、中心から y 軸方向にマイクロメーターを動かすことによって図 3.9、フィッティングにより表 3.2 を得た。

	傾き [mm^{-1}]	切片 [mm]
x 軸方向	0.94 ± 0.01	-4.51 ± 0.06
y 軸方向	0.95 ± 0.01	-4.38 ± 0.07

表 3.2 : マイクロメーターの変動に対する電圧の変化

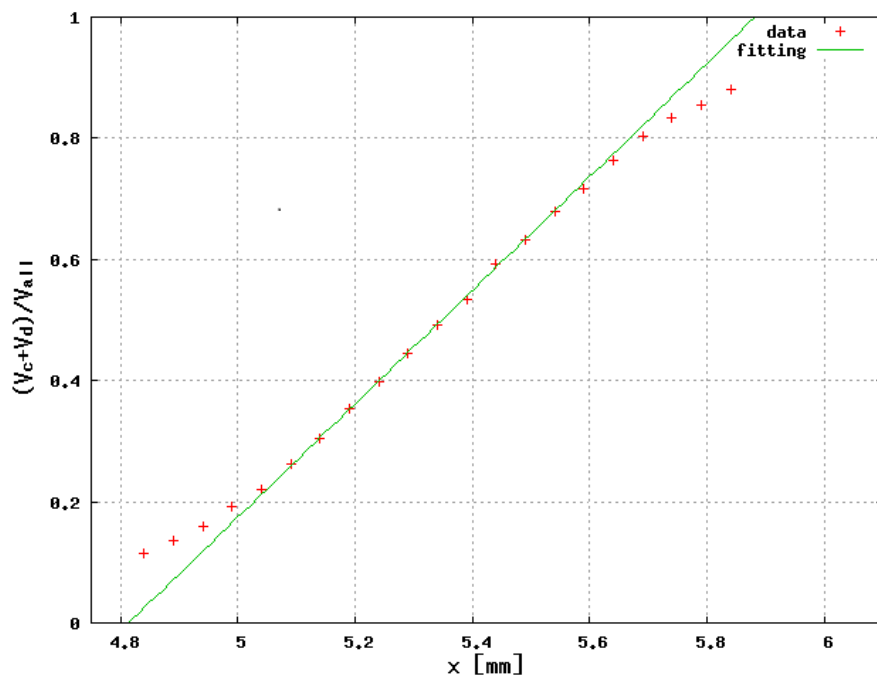


図 3.8 : x 軸方向にマイクロメーターを動かしたとき

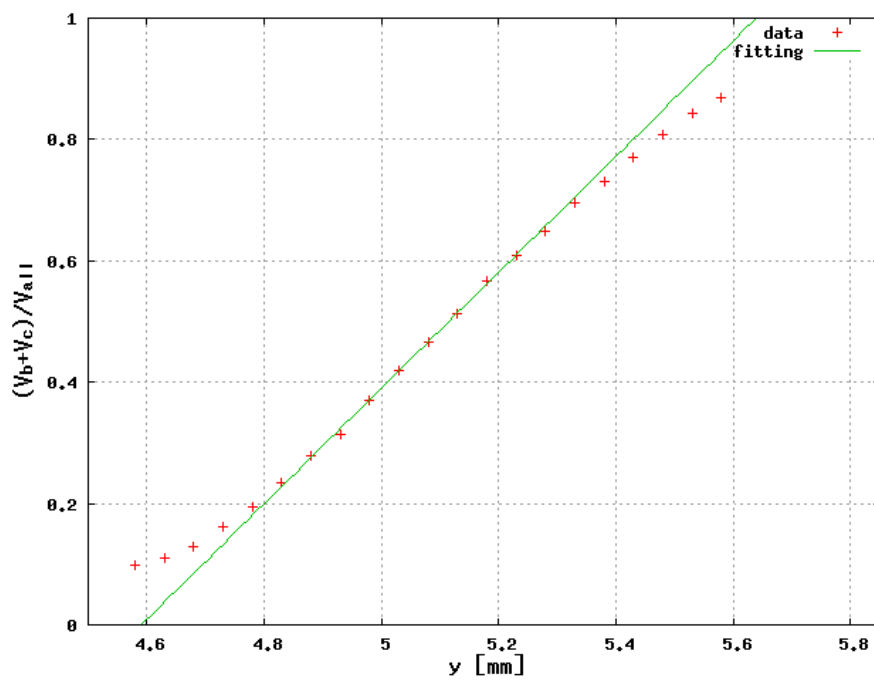


図 3.9 : y 軸方向にマイクロメーターを動かしたとき

3.2.2 ピエゾ

前節で求めたビームの QPD 中心からのずれと QPD 各領域の出力電圧との関係から、ピエゾに印加した電圧と PD 表面でのビームの動く範囲との関係を以下のようにして求めた。図 3.10 で示すように、QPD から 80.4mm の地点に、背面にピエゾ素子のついたミラーを置いた。ファンクションジェネレータから正弦波をピエゾ素子に送り込んでミラーを揺らし、ビームジッターを作り出した。このとき、ビームの揺れに応じて QPD の各領域の出力電圧は変化した。

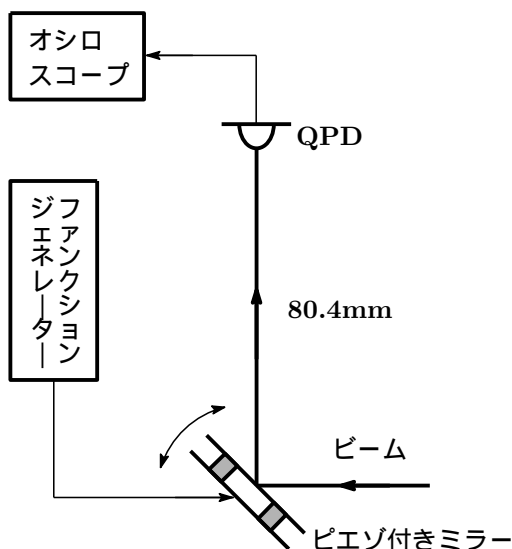


図 3.10 : 配置図

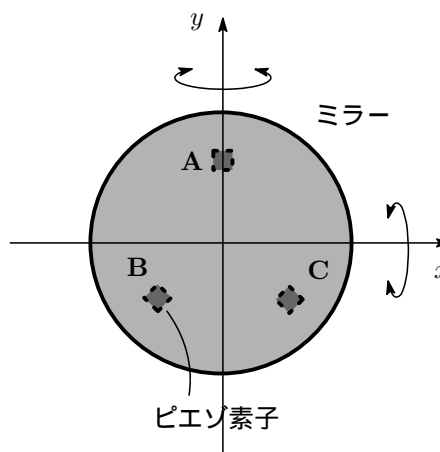


図 3.11 : ピエゾ付きミラーを振ったときの様子

まず、ピエゾ素子に電圧を印加しないとき、ビームが QPD の中心に当たるように QPD の位置をマイクロメーターで調節した。ピエゾ A のみに振幅 10V の正弦波を入れ、オシロスコープで QPD の四つの領域の電圧の変化を測定した。このとき、電圧の変化は図 3.8 と図 3.9 の示す線形領域内であったので、この図を利用して、測定された電圧からビームの動く範囲を算出した。結果、図 3.12 を得た。図 3.12 の横軸はピエゾにかけた電圧、縦軸はマイクロメーターの目盛りを表す。ただし、一つの図におさめるために適当にデータ点を縦軸方向に平行移動してある。

次に、反転増幅回路を用いてピエゾ B とピエゾ C に逆位相の振幅 10V の正弦波を入れ、測定を行い、図 3.13 を得た。直線をフィッティングすることで表 3.3 を得た。

	x 軸方向の傾き [mm/V]	y 軸方向の傾き [mm/V]
ピエゾ A	$(9 \pm 9) \times 10^{-5}$	$(2.1 \pm 0.1) \times 10^{-3}$
ピエゾ B,C	$(5.1 \pm 0.2) \times 10^{-3}$	$(1.6 \pm 0.6) \times 10^{-4}$

表 3.3 : ピエゾ素子の電圧に対する応答

表 3.3 から、ピエゾ A に電圧を印加したときにはビームは主に y 軸方向に変動し、ピエゾ B と C に電圧を印加したときにはビームは主に x 軸方向に変動するといえる。

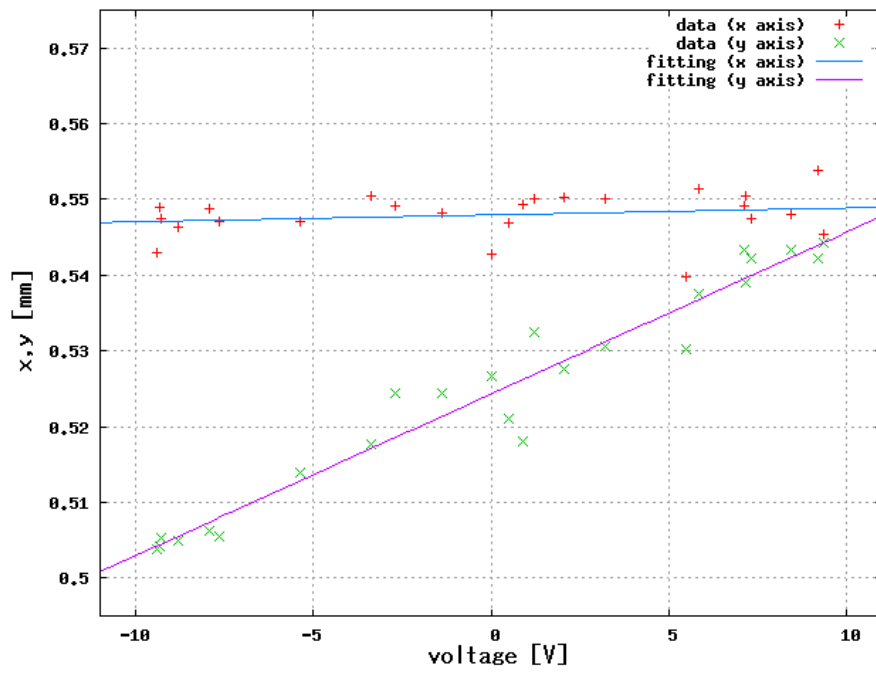


図 3.12 : ピエゾ A に対する変位

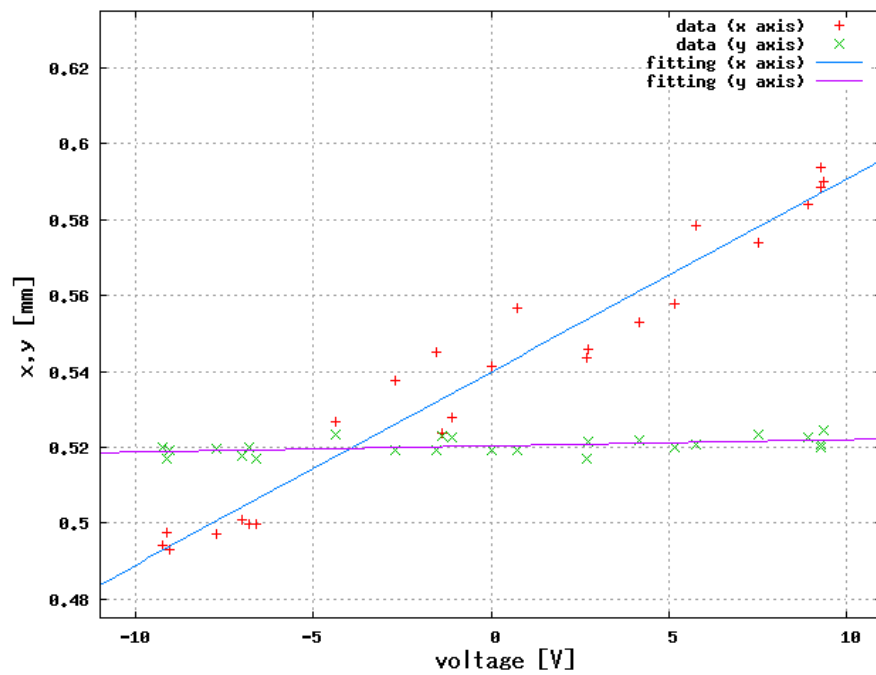


図 3.13 : ピエゾ B と C に対する変位

3.3 非一様性の測定

図 3.12 の通り実験装置を配置した。ピエゾ付きミラーに 1025Hz^3 の正弦波の電圧を印加してミラーを振動させることにより、ビームジッターを作り出した。このとき、ビームの x 軸方向の変位と y 軸方向の変位と同じになるように、3.2 節の実験の結果を考慮して、 x 軸方向を揺らすときはピエゾ B、C に振幅が 4.20V の逆位相の正弦波を、 y 軸方向に揺らすときはピエゾ A に振幅が 10V の正弦波を入れた。こうすることで、PD 表面においてビームは x 軸、 y 軸方向にともに 0.042mm 振れることになる。なお、補遺 B の計算結果から、PD 表面でのビーム半径は 0.1mm である。

PD の出力を二股に分け、一方をオシロスコープに、もう一方をロックインアンプに繋ぎ、それぞれで出力電圧の直流成分と交流成分を測定できるようにした。ただし、ロックインアンプにはファンクションジェネレータからピエゾ付きミラーに送り込んだのと同周期の 1025Hz の方形波を参照信号として入れてある。

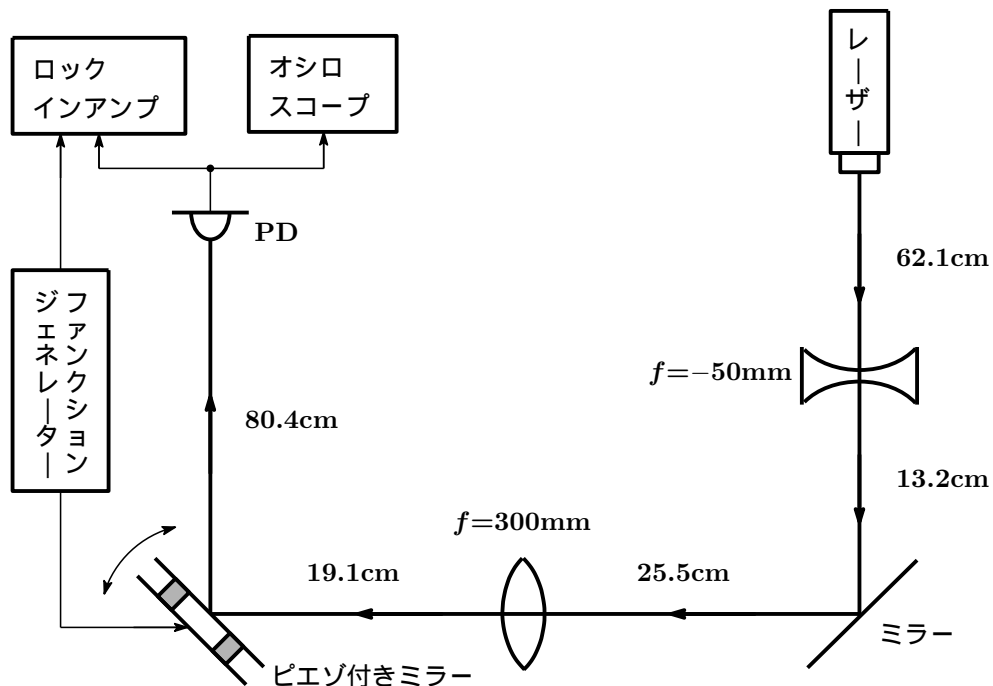


図 3.14 : 非一様性の測定

PD 受光面は直径 5mm の円状の形をしている。今回の実験では、PD 中心付近 $0.6 \times 0.6\text{mm}$ の正方形の領域を、 0.2mm 間隔で調べた。各点につき、直流電流 V_{DC} と x 軸、 y 軸方向にビームを振動させたときに生じる交流電圧の振幅⁴ $V_{\text{AC}x}$ 、 $V_{\text{AC}y}$ を測定した。 $V_{\text{AC}} = \sqrt{V_{\text{AC}x}^2 + V_{\text{AC}y}^2}$ として、領域全体を調べた結果を図 3.15、図 3.16 に示す。両図ともに xy 平面はマイクロメーターの目盛を表し、図 3.15 の z 軸は、直流電圧と交流電圧の比 $V_{\text{AC}}/V_{\text{DC}}$ を表す。

³ 図 E.1 より作成した回路の時定数が $\tau = 1.1 \times 10^{-4}$ ($R = 0.5\text{ k}\Omega$, $C = 0.22\text{ }\mu\text{F}$) であり、 $1/\tau = 9.1 \times 10^4\text{ Hz}$ であることから、それよりも小さな値である 1025Hz を選んだ。

⁴RMS 振幅

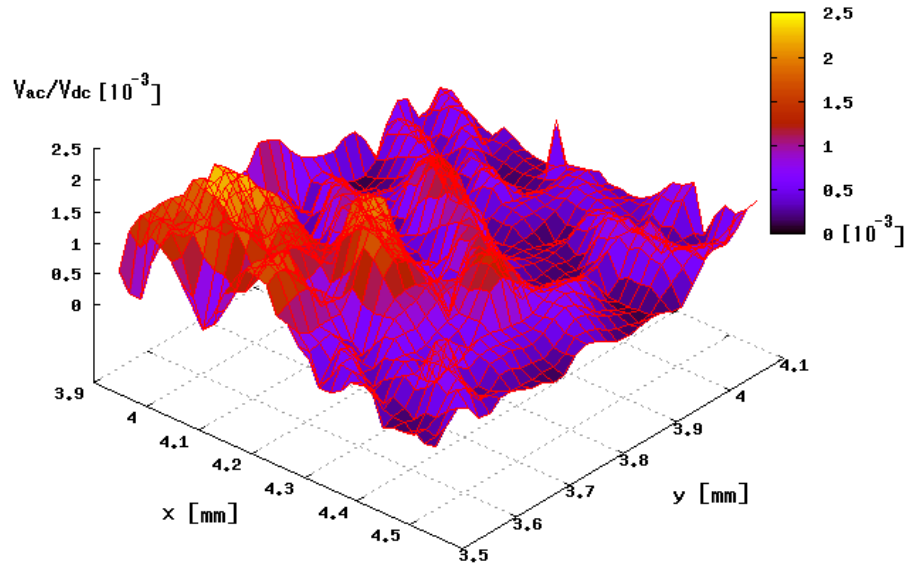


図 3.15 : 受光感度の非一様性 (3 次元)

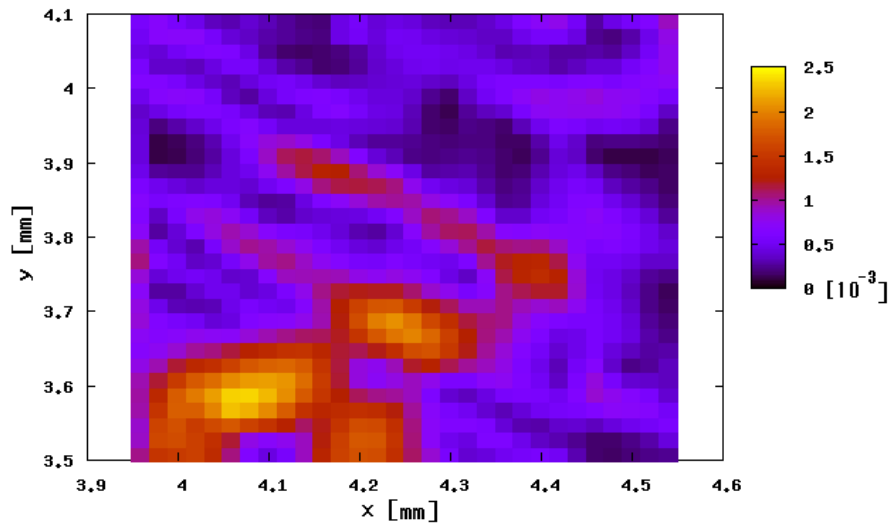


図 3.16 : 受光感度の非一様性 (2 次元)

第4章 考察とまとめ

4.1 考察

1. ビームジッターにより生じる交流電圧 V_{ACx} について考える。 V_{ACx} は、ある点 r の周りで x 軸方向に振幅 b のビームを振ったときに生じる。従って、 V_{ACx} は r と b の関数と見なせ¹、 $V_{ACx} = V_{ACx}(r, b)$ とおける。 b は微小であるので、 b についてテイラー展開すると

$$V_{ACx}(r, b) \simeq V_{ACx}(r, 0) + b \left. \frac{dV_{ACx}}{db} \right|_{b=0} = b \left. \frac{dV_{ACx}}{db} \right|_{b=0} \quad (4.1)$$

となる²。3.3 節の実験では、 $b_0 = 0.042$ mm として

$$V_{ACx}(r, b_0) = b_0 \left. \frac{dV_{ACx}}{db} \right|_{b=0} \quad (4.2)$$

の左辺の量を測定した。式 (4.1) と式 (4.2) から、任意のビームジッター振幅 b に対する交流電圧 V_{ACx} は

$$V_{ACx}(r, b) = \frac{b}{b_0} V_{ACx}(r, b_0) \quad (4.3)$$

だとわかる。ここから、 $V_{AC} = \sqrt{V_{ACx}^2 + V_{ACy}^2}$ についても

$$\begin{aligned} V_{AC}(r, b) = \frac{b}{b_0} V_{AC}(r, b_0) &\Leftrightarrow \frac{V_{AC}(r, b)}{V_{DC}(r)} = \frac{b}{b_0} \frac{V_{AC}(r, b_0)}{V_{DC}(r)} \\ &\Leftrightarrow P = \frac{b}{b_0} P_0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

という関係が近似的に成り立つ。 $P_0 = V_{AC}(r, b_0)/V_{DC}(r)$ の値は、図 3.15、図 3.16 から求めることができる。

$$C \equiv \frac{P}{b} = \frac{1}{b_0} \frac{V_{AC}}{V_{DC}} \quad (4.5)$$

はビームジッター振幅 b 、直流電圧 V_{DC} に依らない r のみに依存する定数であって、これがある位置 r での非一様性の度合いを与える物理量となる。

2. 図 3.16 において、 $P_0 = V_{AC}/V_{DC}$ の値は、最大で 2.4×10^{-3} ($x = 4.07, y = 3.58$ の点)、最低で、 5.9×10^{-5} ($x = 3.99, y = 3.92$ の点) であった。従って、考察 1 で定義される C は

$$\text{最大値} : C = 5.7 \times 10 \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

$$\text{最小値} : C = 1.4 \text{ [m}^{-1}\text{]}$$

である。よって、調べた領域においては、ビームの当てる位置を適切に選べば、ビームジッターに起因する雑音を最大で約 40 分の 1 に減らせることがわかった。強度安定化では $P = V_{AD}/V_{DC} = 10^{-8}$ が目標値であるので、調べた領域のうち一番様な部分にビームを当てた場合、ビームジッターの振幅は $b = P/C = 7$ nm 以下が要求される。この値が達成できるかは地面振動の大きさによる。

¹ビーム半径と直流電圧は一定であるとする。

² $b = 0$ はビームを振らないときに相当し、交流電圧は発生せず、 $V_{ACx}(r, b = 0) = 0$ である。

3. ピエゾ素子に電圧を印加しない場合、レーザー固有の強度揺らぎがロックインアンプで検出できる。その値は、1025 Hz の参照信号では、 2.5×10^{-6} 以下であった。ピエゾを振ったときの $P_0 = V_{AC}/V_{DC}$ の最低値が 5.9×10^{-5} であるので、ここから、確かに図 3.15 が PD の非一様性に起因するものであるといえる。
4. 今回はフォトダイオード受光面のガラスを外さずに実験を行った。従って、図 3.15 と図 3.16 は、フォトダイオードの受光感度の非一様性だけでなく、ガラスの非一様性の影響も受けた図であると考えられる。
5. 3.3 節では、 x 軸方向と y 軸方向にビームを振ったときの交流電圧の際に、ロックインアンプで測定される振幅と位相の 2 つの情報のうち、振幅しか考慮していないが、考察 1 で述べたように、 C に直流電圧とビームジッター振幅をかければ、非一様性により生じる交流電圧を求めることができるので、非一様性を知りたいだけならば振幅情報だけで十分であると考えられる。
6. 今後の課題として、装置の自動化が挙げられる。今回の実験では、 0.6×0.6 mm の正方形の領域を 0.2mm 間隔、合計 961 点を手動で調べ、約 10 時間を要した。PD 受光面が直径 5mm の円形であることを考えると、受光面全域を調べる場合には必ず自動化が必要になる。

4.2 まとめ

今回の実験では、ピエゾ付きミラーに正弦波を入れ振動させることで、ビームジッターを作り出し、それに対する PD の応答を測定した。その結果、非一様性の指標を与えるマップを作成することに成功した。しかしながら、当初の目標であった装置の自動化までは達成することはできなかった。

補遺 A ガウシアンビーム

近軸波動方程式

自由空間における電磁場は、一般的に、スカラー波動方程式

$$(\nabla^2 + k^2) E(x, y, z) = 0 \quad (\text{A.1})$$

に従う³。今、レーザー光が z 軸に沿って伝搬している状況を考えると、 $E(x, y, z)$ は

$$E(x, y, z) = u(x, y, z) e^{-ikz} \quad (\text{A.2})$$

とかけ、これを式 (A.1) に代入すれば、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, y, z) = 0 \quad (\text{A.3})$$

が得られる。レーザー光では、強度分布は伝搬軸近傍に集中しているため、 $u(x, y, z)$ の z に関する変化は一般に、因子 e^{ikz} 、 x, y 方向の u の変化と比べると非常に小さい。すなわち、

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial u}{\partial z} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|, \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \quad (\text{A.4})$$

である。そこで、式 (A.3) において、第 3 項を落とすと、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial}{\partial z} \right) u(x, y, z) = 0 \quad (\text{A.5})$$

となる。この近似を近軸近似と呼び、式 (A.5) を近軸波動方程式という。

近軸波動方程式の解

式 (A.1) を球座標で書き換えると、

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + k^2 \right) E(r, \theta, \phi) = 0 \quad (\text{A.6})$$

と表せる。自由空間では等方的であるので、電磁場は θ, ϕ に依らない。つまり、 $E = E(r)$ である。従って、 $\tilde{E}(r) = rE(r)$ とおけば、式 (A.6) は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + k^2 \right) \tilde{E}(r) = 0 \quad (\text{A.7})$$

とかける。この微分方程式を解くことで式 (A.1) の解

$$E(r) = E_0 \frac{e^{-ikr}}{r} \quad (\text{A.8})$$

を得る。今、点 $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ を源として広がる波を考えると、点 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ では

$$E(\mathbf{r}; \mathbf{r}_0) = \frac{\exp(-ik\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0))}{\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} \quad (\text{A.9})$$

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} \quad (\text{A.10})$$

³この章は [1] と [2] の 16 章を参考にした。

と表せる。レーザー光では、 z 軸に沿って遠くへ伝搬した場合、 z は z_0 と比べ十分大きく、かつ x と y は z 軸に近いので、 $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ は

$$\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = z - z_0 + \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} + \dots \quad (\text{A.11})$$

と展開できる。これより、 $E(x, y, z)$ は

$$E(x, y, z) \approx E_0 \frac{1}{z - z_0} \exp \left[-ik(z - z_0) - ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right] \quad (\text{A.12})$$

と近似できる。式 (A.12) は、式 (A.5) を満たし、近軸波動方程式の厳密解となっている。これより、先に定義した関数 $u(x, y, z)$ は、具体的に

$$u(x, y, z) = E_0 \frac{1}{z - z_0} \exp \left[-ik \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{2(z - z_0)} \right] \quad (\text{A.13})$$

と書き下せる。

ガウシアンビーム

(A.13) 式は、物理的には意味を持たない。というのは、源からの距離に従って波の振幅が減衰せず、無限に遠くまで光が伝わってしまうからである。減衰を取り入れるには z を複素数化すればいい。複素数化した z を $q(z)$ とおき、

$$\begin{cases} q(z) = z + iz_{\text{R}} \\ \frac{1}{q(z)} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

を定義すれば、

$$q = i(z_{\text{R}} - iz) = i\sqrt{z^2 + z_{\text{R}}^2} e^{-i\eta(z)} \quad (\text{A.15})$$

$$\frac{1}{q} = \frac{z}{z^2 + z_{\text{R}}^2} - i \frac{z_{\text{R}}}{z^2 + z_{\text{R}}^2} = \frac{1}{R(z)} - i \frac{\lambda}{\pi w(z)^2} \quad (\text{A.16})$$

であるから、

$$u(x, y, z) = \frac{E_0}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right] = \frac{E_0}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2R} - \frac{x^2 + y^2}{w^2} \right] \quad (\text{A.17})$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} E(x, y, z) &= E_0 \exp(-ikz) u(x, y, z) \\ &= E_0 \frac{e^{i\eta(z)}}{iz_{\text{R}} \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_{\text{R}}}\right)^2}} \exp(-ikz) \exp \left[-(x^2 + y^2) \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} \right) \right] \\ &= E_0' \frac{w_0}{w(z)} \exp \left[-i(kz - \eta(z)) - r^2 \left(\frac{1}{w^2} + \frac{ik}{2R} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

となる。ここで、

$$E_0 = iz_0 E_0' \quad (\text{A.19})$$

$$w^2(z) = w_0^2 \left[1 + \left(\frac{z}{z_{\text{R}}} \right)^2 \right] \quad (\text{A.20})$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_{\text{R}}}{z} \right)^2 \right] \quad (\text{A.21})$$

$$\eta(z) = \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_{\text{R}}} \right) \quad (\text{A.22})$$

$$z_{\text{R}} = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (\text{A.23})$$

を定義した。 $q(z)$ を複素曲率半径、 $R(z)$ を曲率半径、 $w(z)$ をビーム半径あるいはスポットサイズ、 z_R をレイリーレンジ、 $\eta(z)$ を Guoy 位相と呼ぶ。特にビーム半径 $w(z)$ が最小になる位置をビームウエストと呼ぶ⁴。

⁴用語の日本語訳については [4] の補遺 A を参考にした。

補遺 B ABCD 行列

ABCD 行列

レーザー光の伝搬の様子を記述する際には、ABCD 行列が用いられる⁵。今、 z 軸方向に進む光線を考え、それが z 軸から $r(z)$ 離れ、かつ傾きが $r'(z) = n(z) (dr(z)/dz)$ であるものとする。ただし、 $n(z)$ は位置 z における屈折率である。この様子を図 B.1 に示す。光線が、自由空間を伝搬したり、レンズやミラーなどの光学素子を通過したりする場合、 $r(z), r'(z)$ は、その幾何学的な性質に応じて変化する。その変化は行列を用いて

$$\mathbf{r}_2 = M\mathbf{r}_1 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} r_2 \\ r'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r'_1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

と記述される (図 B.2)。上で用いられた行列 M のことを ABCD 行列と呼ぶ。一般に ABCD 行列は $\det M = AD - BC = 1$ を満たす。

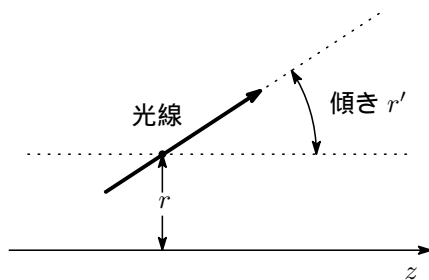


図 B.1 : 光線の定義

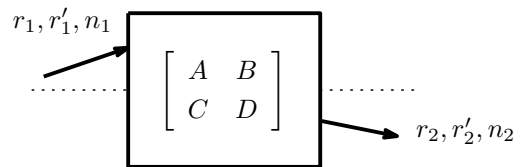


図 B.2 : ABCD 行列

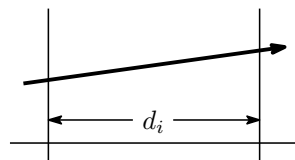
曲率 $R = r/(dr/dz) = nr/r'$ を用いると、式 (B.1) は

$$\frac{R_2}{n_2} = \frac{A(R_1/n_1) + B}{C(R_1/n_1) + D} \quad (\text{B.2})$$

と表せる。前章と同様にして、減衰を考慮して R を複素数化すると、式 (A.14) より式 (B.2) は

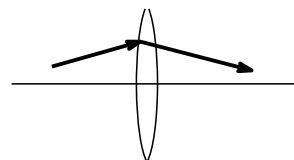
$$\frac{q_2}{n_2} = \frac{A(q_1/n_1) + B}{C(q_1/n_1) + D} \quad (\text{B.3})$$

となる。図 B.3、B.4 に自由空間とレンズの ABCD 行列を示す。



$$D_i = \begin{bmatrix} 1 & d_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

図 B.3 : 長さ d_i の自由空間



$$F_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/f_i & 1 \end{bmatrix}$$

図 B.4 : 焦点距離 f_i のレンズ

⁵この章は [2] の 15 章と [3] を参考にした。

具体的な計算

図 3.14 の配置での PD 表面でのビーム半径を求める。図 B.5 のように、 $z = z_1$ でビーム半径 w_{10} のウェストをもつビームが、焦点距離がそれぞれ f_1 、 f_2 の二つのレンズを通過し、 $z = z_2$ に達する状況を考える。

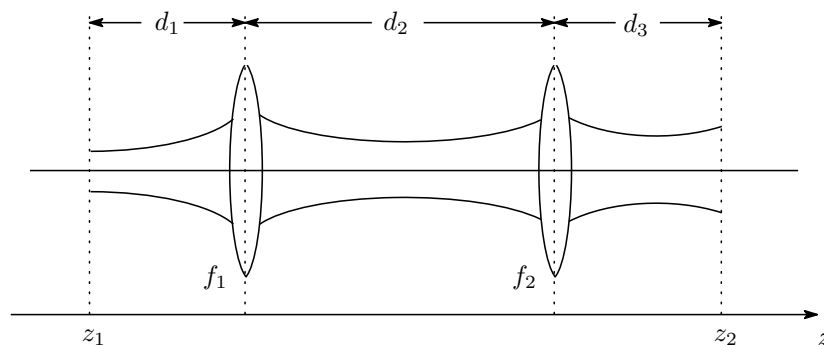


図 B.5 : 図 3.14 の模式図

$z = z_1$ 、 z_2 での複素曲率半径 q_1 と q_2 との関係は、式 (B.3)、図 B.3、B.4 より

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D} \quad (\text{B.4})$$

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = D_3 F_2 D_2 F_1 D_1 \quad (\text{B.5})$$

とかける⁶。 $z = z_1$ でビームウェストであるから、式 (A.14) より $q_1 = i\pi w_{10}^2/\lambda \equiv iz_R$ とおけるので、式 (B.4) は

$$\frac{1}{q_2} = \frac{iz_R C + D}{iz_R A + B} = \frac{1}{(z_R A)^2 + B^2} \left[(BD + ACz_R^2) - i(AD - BC)z_R \right] \quad (\text{B.6})$$

一方で、式 (A.14) より

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{R_2} - i\frac{\lambda}{\pi w_2^2} \quad (\text{B.7})$$

が成り立つ。 $\det M = 1$ に注意し、式 (B.6) と式 (B.7) を比べることで

$$w_2 = \frac{\lambda}{\pi w_{10}} \sqrt{(z_R A)^2 + B^2} \quad (\text{B.8})$$

を得る。表 3.1 より、図 3.14 の状況では各数値は、 $\lambda = 1064 \text{ nm}$ 、 $w_{10} = 0.290 \text{ mm}$ 、 $z_0 = 33.6 \text{ cm}$ 、 $d_1 = 28.5 \text{ cm}$ 、 $d_2 = 38.7 \text{ cm}$ 、 $d_3 = 99.5 \text{ cm}$ 、 $f_1 = -50 \text{ mm}$ 、 $f_2 = 300 \text{ mm}$ である⁷。式 (B.5) にこれらの数値を入れ、計算すると

$$M = \begin{bmatrix} -0.348 & -6.35 \times 10^{-4} \\ -9.13 & -2.89 \end{bmatrix}$$

以上より、PD 表面でのビーム半径は

$$w_2 = \frac{\lambda}{\pi w_{10}} \sqrt{(z_R A)^2 + B^2} = 0.10 \text{ mm} \quad (\text{B.9})$$

となる。

⁶空気中では屈折率はほぼ 1 であるので、 $n_1 = n_2 \simeq 1$ とした。

⁷ビーム半径とビームウェストの位置は x, y 方向の値を平均した値とした。

補遺 C ロックインアンプの検出原理

ロックインアンプは、入力信号に対してその中のある周波数のみを選択的に取り出して出力する装置であり、雑音に埋もれた既知の信号を拾い出す場合などに用いられる。図 C.1 にロックインアンプの構成図を示す。

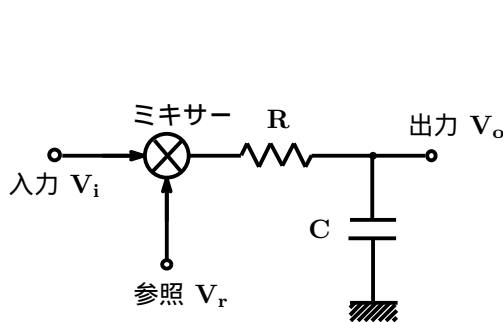


図 C.1 : ロックインアンプの基本構成

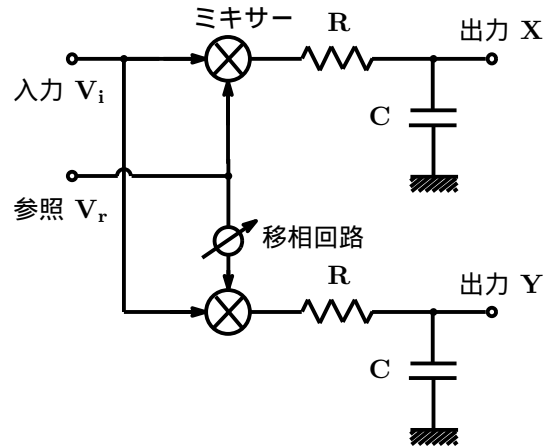


図 C.2 : 2位相ロックインアンプの構成

ロックインアンプの基本的な検出原理は次の通りである⁸。ロックインアンプに、入力信号 $V_i = A \sin(\omega_i t + \phi)$ と参照信号 $V_r = B \sin \omega_r t$ を入れたとき、ミキサーで二つの信号は掛け合わされ、

$$V_i \times V_r \propto \{\cos[(\omega_i - \omega_r)t + \phi] - \cos[(\omega_i + \omega_r)t + \phi]\} \quad (C.1)$$

となる。後続のローパスフィルターによって、式 (C.1) の第二項はカットされ、第一項の $\omega_i \simeq \omega_r$ の周波数成分のみが生き残り、大雑把には

$$V_o = A \cos \phi \quad (C.2)$$

が出力される。

図 C.1 の構成では位相 ϕ を知ることはできないが、図 C.2 のような 2 位相ロックインアンプでは次のようにして位相 ϕ を測定できる。参照信号を二股に分けると、一方では $\sin \omega_r t$ 、もう一方では移相回路を通すことで位相が 90° ずれた $\cos \omega_r t$ が流れる。この二つの参照信号がミキサーで入力信号と掛け合わされることにより、先と同じ議論で

$$X = A \cos \phi, \quad Y = A \sin \phi \quad (C.3)$$

が出力される。ここから、振幅 R と位相 ϕ は

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = A, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{Y}{X} \quad (C.4)$$

と表される。

⁸[5] を参考にした。

補遺D 収容ケース

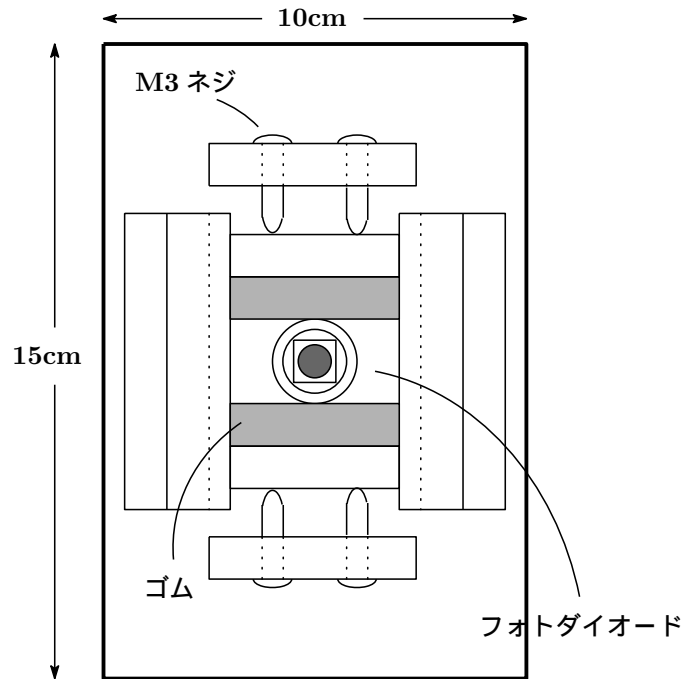


図 D.1 : 収容ケースを上から見た図

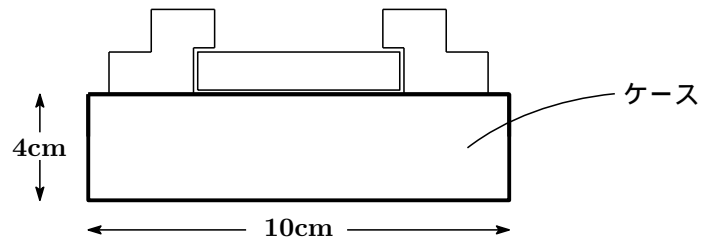


図 D.2 : 収容ケースを横から見た図

補遺 E 回路図

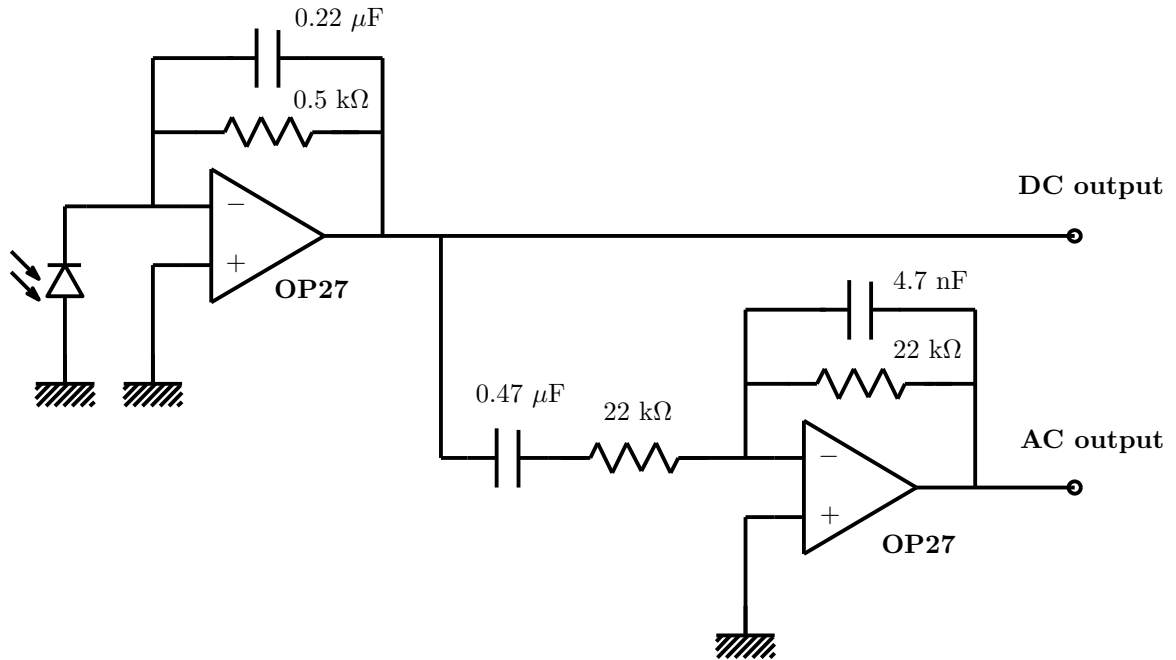


図 E.1 : 電気回路図

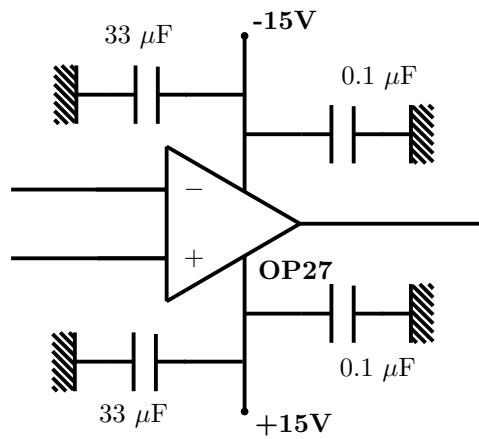


図 E.2 : バイパスコンデンサ

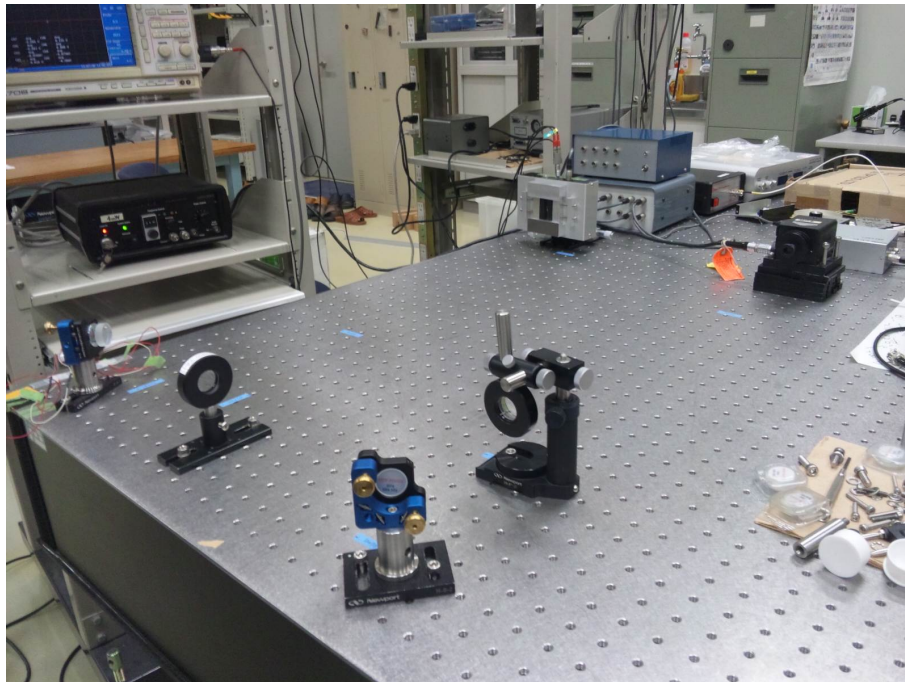
参考文献

- [1] H.Kogelnik , T.Li : Laser Beams and Resonators,*Proceedings of the IEEE* (1966)
- [2] A.E.Siegman : *Lasers* , Univ Science Books (1986)
- [3] 古澤 , 米澤 : http://www.ap.t.u-tokyo.ac.jp/ap_office/jikken1/09.furusawa09.pdf
- [4] 中村 , 三尾 , 大橋 編 : 重力波をとらえる , 京都大学学術出版会 (1998)
- [5] 坪野、麻生、岡田 : ブラウン運動、物理学実験 II テキスト (2009)

感想

今回行った特別実験は、指導書がありそれに沿って実験を進めればすべてうまくという三年次の実験とは大きく異なるものでした。最初から失敗続きで、ビームプロファイル測定には一ヶ月半もかかってしまいました。前代未聞のことだったと思います。他にもいろいろと無駄に時間を浪費してしまうことが多かった気がします。

実験不器用にも関わらず、なんとか実験を終わらせることができたのは周囲の支えがあったからです。実験全体の指導をしてくださった麻生助教、基礎的なことから丁寧に教えてくださった坪野研の皆様、ありがとうございました。特に大前さん、松本さん、道村さんにはお世話になりました。共同実験者である渡辺君には、電気回路のハンダ付けとケースの設計では面倒掛けっぱなしでした。本当にありがとうございました。



図：実験風景