特別実験レポート
COMSOLMultiphysics を用いた
光共振器の振動に対する応答の評価

理学部　物理学科　4 年
081537
橘　保貴

共同実験者　久保　肇

2010 年 2 月 5 日

1　目的

時間の単位を定義するにあたっては時間の逆数である何らかの周波数が標準として用いられる。次世代の時間の単位を定義する標準として光格子時計が注目されているが、光格子時計は現在まだその周波数測定の精度を上げる余地がある。光格子時計の精度を上げるためプローブレーザーの周波数を安定化させたい。
周波数を安定化させる一つの手段として地面振動による共振器の変形はなるべく小さくすることが考えられる。光を平行な 2 枚のミラーにはさまれた光共振器中を往復させることでレーザーが作られるが、その光共振器中の光路長が変形により変わってしまうとレーザーの周波数にずれが生じてしまう。変形がなるべく小さくなるような光共振器の形と素材、固定の仕方を見つけるため、光共振器のモデルをつくりその振動感度を調べたい。
共振器のモデルの振動感度の計算には汎用工学シミュレーションソフトウエア COMSOL Multiphysics が有用なため本実験ではその使い方を身に付けまたその使用例としてごく簡単な円柱型のキャビティモデルの振動感度を静解析で評価する。

2　有限要素法

有限要素法は数値計算により微分方程式の近似解を得る方法である。これを用いることで非線形な微分方程式など解析的に解くことのできないまたは難しい問題の近似的な解が得られる。以下ではその有限要素法を一次元の簡単な問題を例に説明する。

2.1　1 次元問題

以下のような問題を考える。

$$\begin{cases} \frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x), (0,1) \\ u(x=0) = u(x=1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

2.2　積分式

式 (1) を $u(x)$ がみたすならば $x = 0, 1$ で 0 となる滑らかな関数 $v(x)$ をもちいて

$$\int_0^1 dx f(x) v(x) = \int_0^1 dx \frac{d^2u(x)}{dx^2} v(x) \tag{2}$$

とできる。逆にすべての滑らかな $x = 0, 1$ で 0 となる関数 $v(x)$ に対して式 (2) をみたす $x = 0, 1$ で 0 となる滑らかな関数 $u(x)$ は式 (1) をみたす。($u(x)$ がユニークであることの証明は難しい数学的な議論なため今回は省略)

部分積分

$$\begin{aligned} \int_0^1 dx \frac{d^2u(x)}{dx^2} v(x) &= \Big[\frac{du(x)}{dx} v(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 dx \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} \\ &= -\int_0^1 dx \frac{du(x)}{dx}\frac{dv(x)}{dx} \\ &\equiv -\phi(u,v) \end{aligned}$$

により式 (2) は

$$\int_0^1 dx f(x) v(x) = -\phi(u, v) \tag{3}$$

となる。

2.3 離散化

(1) を解くことはすべての $x = 0, 1$ で 0 となる滑らかな関数 $v(x)$ に対して (3) を満たすような $x = 0, 1$ で 0 となる滑らかな関数 $u(x)$ をみつけることである。
このときに有限要素法ではこれらの関数を「$x = 0, 1$ で 0 となる滑らかな関数」ではなく「区分的に線形な関数」にして問題を近似的に解く。

2.4 基底となる関数

$v(x)$ にあたる区分的に線形な関数 $v_k(x)$ の例としては以下のような細い山型の関数を選ぶ。

$$0 < x_1 < ... < x_k < ... < x_n < 1 \tag{4}$$

のように領域を $n + 1$ 分割し (comsol でのメッシュ切り)、

$$\begin{cases} x \in [x_{k-1}, x_k] \text{ では } v_k(x) = \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} \\ x \in [x_k, x_{k+1}] \text{ では } v_k(x) = \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} \\ \text{それ以外 } v_k(x) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

$f(x)$ をこれらの関数を基底として展開した式に近似する。

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k v_k(x) \tag{6}$$

$u(x)$ もこの基底で展開する。

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k(x) \tag{7}$$

2.5 連立方程式

(7) より

$$\phi(u, v_j) = \sum_{i=1}^{n} u_i \int_0^1 dx \frac{dv_i(x)}{dx} \frac{dv_j(x)}{dx} = \sum_{i=1}^{n} u_i \phi(v_i, v_j) \tag{8}$$

(6)(8) と (3) より

$$\sum_{i=1}^{n} f_i \int_0^1 dx v_i(x) v_j(x) = -\sum_{i=1}^{n} u_i \phi(v_i, v_j) \tag{9}$$

以下のようにマトリクスを定義する。

$$M_{ij} \equiv \int_0^1 dx v_i(x) v_j(x) \tag{10}$$

$$L_{ij} \equiv \phi(v_i, v_j) = \int_0^1 dx \frac{dv_i(x)}{dx}\frac{dv_j(x)}{dx} \tag{11}$$

マトリクス M と L は式 (10)、(11) と関数 $v_k(x)$ の形 (5) より 以下のような形で、対角付近の成分しか持たない。（そのようになるように関数 $v_k(x)$ を定めたのであり、これにより計算を減らしている。）

$$\begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

(10)、(11) により (9) は以下のように書ける。

$$\begin{aligned} M\boldsymbol{f} &= -L\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u} &= -L^{-1}M\boldsymbol{f} \end{aligned} \tag{12}$$

式 (12) を計算すれば式 (7) より関数 $u_k(x)$ を近似的に求めることができる。

3 COMSOL Multiphysics

COMSOLMultiphysics は有限要素法を用いた解析ソフトで今回はそのベースとなっている Multiphysics モジュールの構造解析モードと分野別付け足しのモジュールのうちの構造力学モジュールを使用する。
解析対象のモデルはソフト内の CAD を用いて作成する。

3.1 Multiphysics モジュール 構造解析モード

Multiphysics モジュールは COMSOL Multiphysics のコアモジュールで、その構造力学モードでは線形静解析、固有値解析、過渡解析が行え、材料としては等方性弾性材料を扱える。

3.1.1 線形静解析

線形静解析では解析対象のモデルにかけた力の釣り合いからその変形や応力を見ることができる。ただし線形的な解析しか行っていないため、モデルが線形的な反応をやぶる大きな変形が起きるような大荷重をかける場合などは構造解析モジュールを用いて非線形の解析が必要である。

3.1.2 固有値解析

固有値解析ではモデルの共振振動数を調べることができる。今回の実験ではあまり使用していないため詳しいことは割愛。

3.1.3　過渡解析

モデルの過渡的な応答を見る。このモードでは時間をパラメータ t として扱うことが可能であり、荷重などを t の関数 ($A\sin(\omega t)$ など) として入力することができる。しかし全ての力が $t=0$ から働き始めるので、物体の自重など常に働いている力に関してはあらかじめその力だけをかけた状況での静解析を行い、その解を初期条件として時間変動する力を加えた過渡解析を行う必要がある。

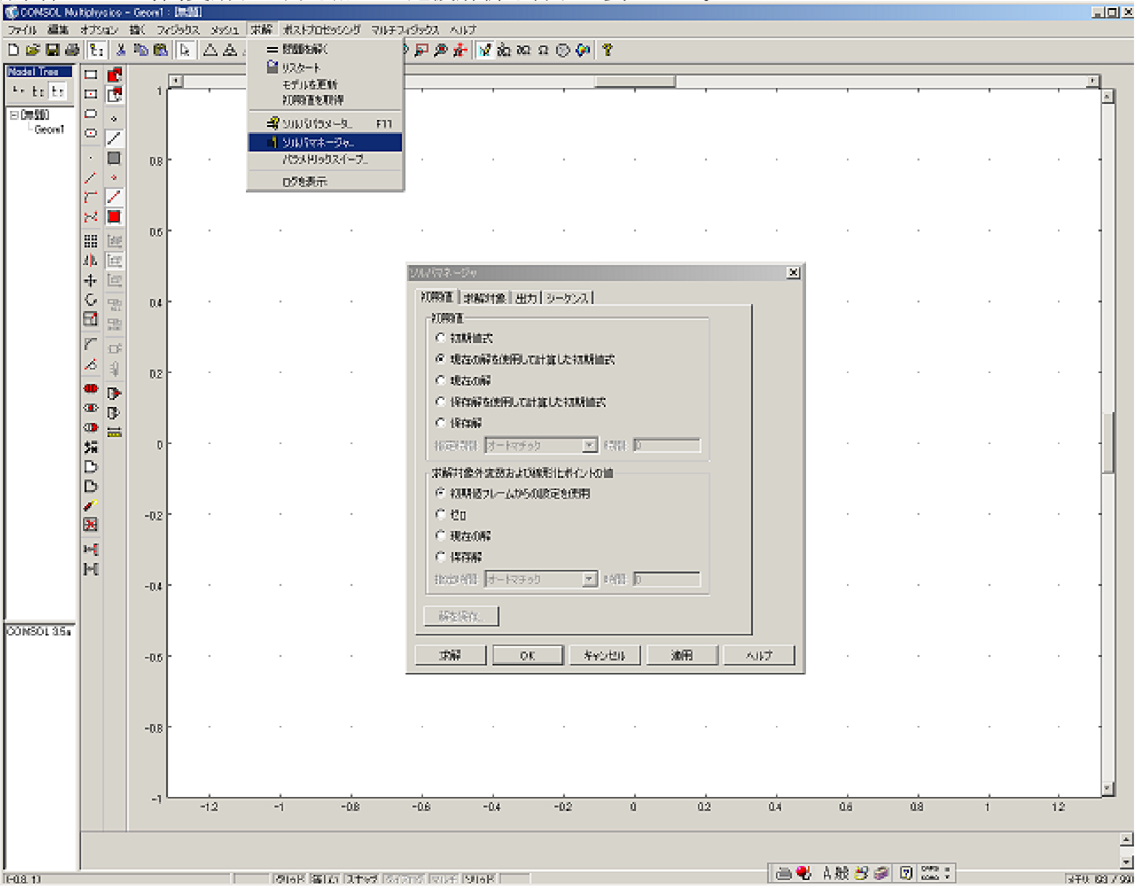

図 1　初期値の変更

3.2　構造力学モジュール

構造解析モジュールでは線形解析、非線形解析、準静的解析過渡解析、固有値解析、周波数応答解析が行え、材料としては等方性のもの以外にも直交異方性、異方性、弾性体、圧電体、弾塑性体、超弾性体、粘弾性体が扱える。

光格子時計に用いるキャビティには現段階ではサファイヤ（直交異性体）を用いる予定であるのでその解析には構造力学モジュールを用い、サファイヤの物性値の入力の必要がある。

4　キャビティの振動感度の評価

COMSOL Multiphysics を用いてごく簡単な円柱型のキャビティモデル（材料は当方性）の振動感度を静解析で評価する。

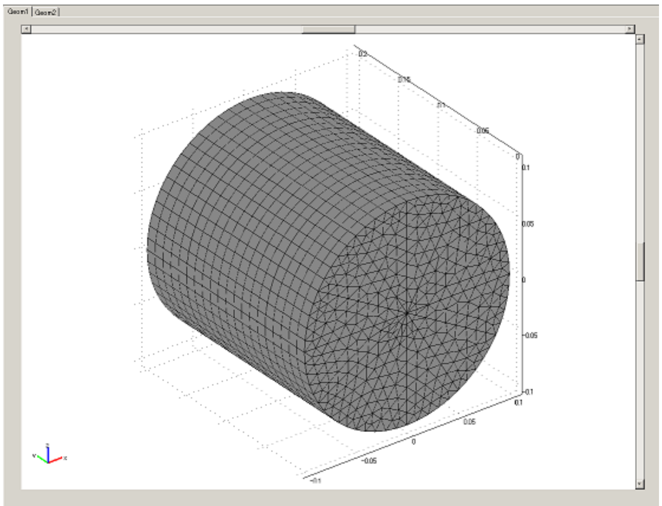

図 2　円柱型のキャビティモデル (comsol 上のモデルの図)

4.1　問題設定

円柱型のキャビティを 4 点で固定し、その固定点に加速度を加えたときの定常状態でのキャビティの変形を見たい。この状況を考える上でより問題として解きやすくするために固定点とともに動くような慣性系で考えることにする。
等加速度運動状態ではキャビティは全体が加速度 a で運動しているため、元の慣性系での単位体積要素の運動方程式は a を上述の加速度、f は単位体積あたりに働く力、ρ 質量密度とすると

$$\mathrm{f} = \rho a \tag{13}$$

で与えられる。この式を変形すると

$$\mathrm{f} - \rho a = 0 \tag{14}$$

として固定点とともに動くような慣性系での力の釣り合いの式が得られる。したがって固定点の変位を 0 に固定してキャビティ全体に単位あたりに慣性力 $-\rho a$ をかけたときの定常状態でのキャビティの変形を見ればよいことになる。

今回の例ではキャビティの中心軸と垂直、床に平行な方向に加速度をくわえた時のものを考える。

4.2　振動感度

キャビティの軸の長さを下の図のように L とおく

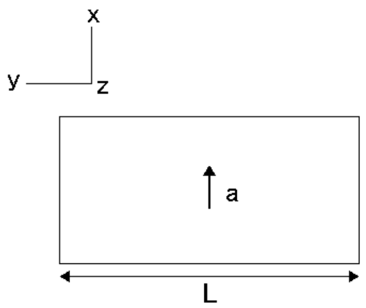

図 3　キャビティを $+z \Rightarrow -z$ に見下ろした図

力をかけていないときにとき片方の底面の中心から水平方向に少しずれた点から他方の底面に垂線を下ろしたときの足までの長さは最初 L であるが、慣性力をかけたときは変形し、その長さは変化する。その変化を δL とする。

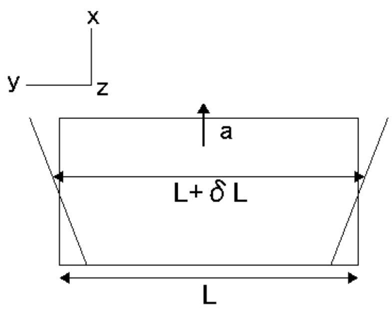

図 4　変形したキャビティと δL

加速度 a と $\frac{\delta L}{L}$ の間に線形な関係があるとき、その比例係数が振動感度 k であり、次の式 (15) のように書かれる。

$$\frac{\delta L}{L} = ka \tag{15}$$

この解析では COMSOL Multiphysics を用いて δL を求め式 (15) から振動感度 k を求める。

4.3 キャビティのモデル

キャビティは横型で、円柱の中心軸を水平にして設置する。

キャビティの底面の半径は 0.1[m], 高さは 0.2[m]

固定点は以下の図の色の付いた点

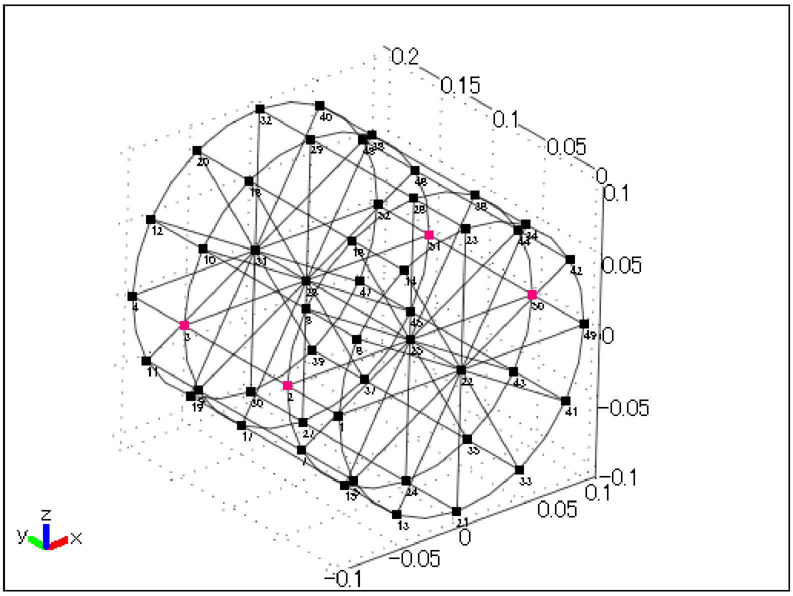

図 5　固定点

材料の物性値は

ヤング率	$2.0e^{11}$[Pa]
ポアソン比	0.33
熱膨張係数	$1.2e^{-5}$[1/K]
密度	7850[kg/m^3]

で等方的なものとした。

4.4 解析結果

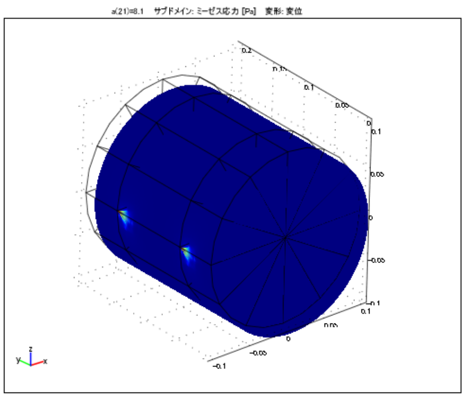

図 6　comsol での結果表示

次の図のように底面の中心から水平に 0.04[m] ずれたところの経路で δL[m] を計測した。

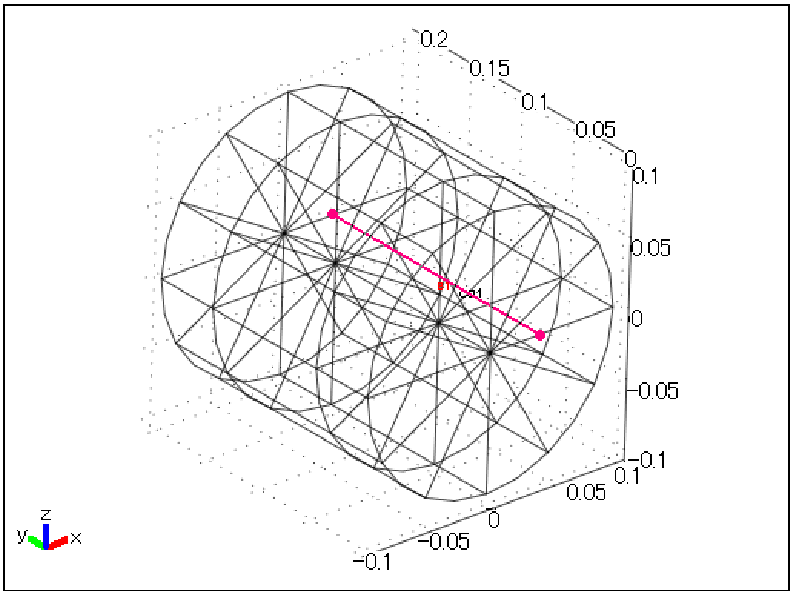

図 7　δL の計測をした経路

その結果は横軸 a[m/s^2]　縦軸 δL[m] として

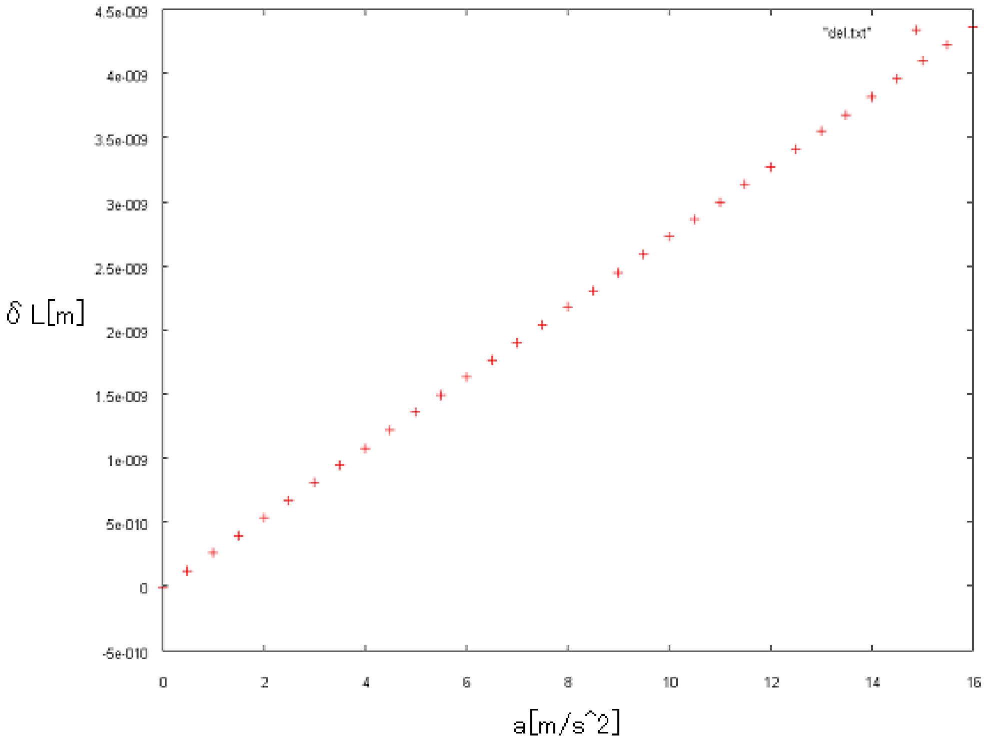

図 8　a に関しての δL の振る舞い

これを傾き K の原点を通る直線 $\delta L = Ka$ でフィッティングを行うと $K[\mathrm{sec}^2]$ の値は

$$K = 2.72669 \times 10^{-10} \pm 1.438 \times 10^{-13} [\mathrm{sec}^2] \tag{16}$$

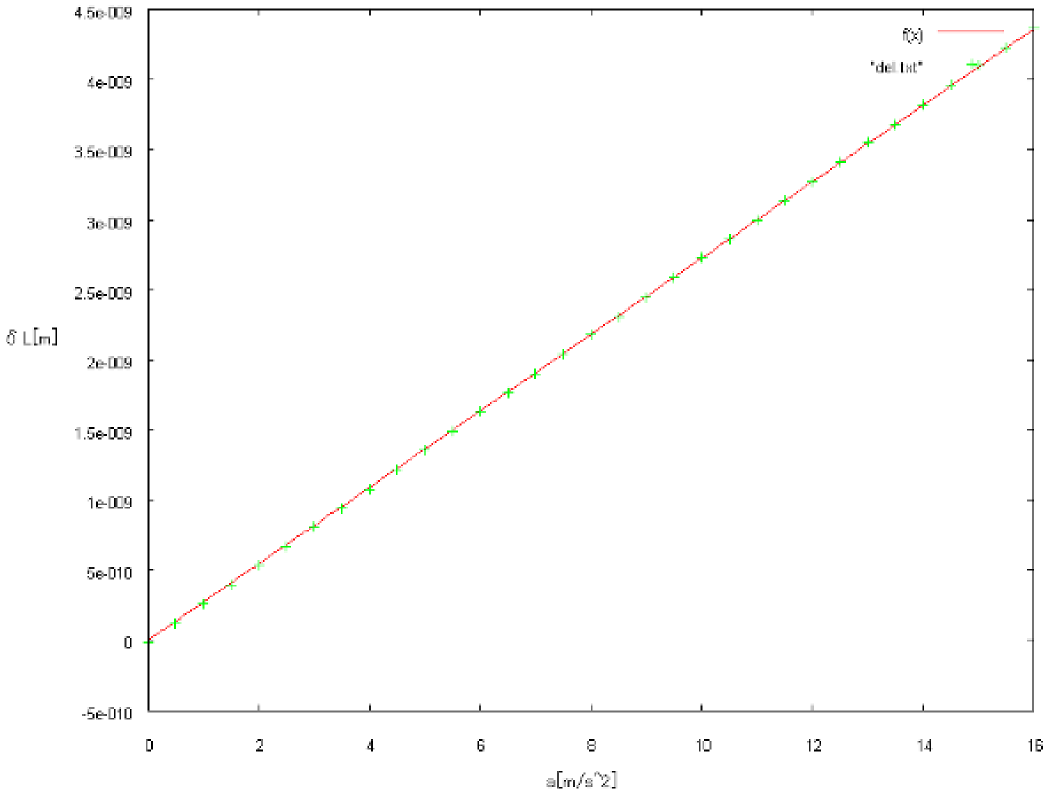

図 9　フィッティング

この結果よりこの経路での振動感度 $k[\mathrm{sec}^2/\mathrm{m}]$ は $L = 0.2[\mathrm{m}]$ なので式 (15) より

$$k(d = 0.04) = \frac{K}{L} = 1.36335 \times 10^{-9} \pm 7.190 \times 10^{-13}[\mathrm{sec}^2/\mathrm{m}] \tag{17}$$

さらに底面の中心からのずれに対して線形性が成り立っていると仮定すると一般の中心からのずれ $d[\mathrm{m}]$ の経路では

$$k(d) = (3.40836 \times 10^{-8} \pm 1.798 \times 10^{-11})d[\mathrm{sec}^2/\mathrm{m}] \tag{18}$$

5　まとめ

解析より今回用いた物質で 10[cm] のオーダーの大きさのキャビテイの場合振動感度は $10^{-8}[\mathrm{sec}^2/\mathrm{m}]$ のオーダーであることがわかった。
今回の特別実験ではソフトの使い方を身に着けることにかなり苦労したため少しの解析しかおこなっていないが、COMSOLMultiphysics を用れば他の経路の振動感度、他方向の振動に対する振動感度も評価することができる。これによりキャビティの応答をより詳細に評価できる。
さらに周波数応答、過渡解析などをもちれば他の観点からキャビティを調べることができる。
今回の実験でもっとも苦労した事はモデルのもつ対称性を壊さずに計算のメッシュを comsol 上のモデルに切

る方法であり、かなりの時間を費やした。小さい変形などに対する有限要素法の計算はメッシュの切り方にかなり依存しており、キャビティモデルのもつ対称性をうまくメッシュをきることで計算に反映させなければ有意な結果を得ることができない。キャビティの設計ではその形に対称性を持たせることでキャビティの振動感度を減らそうとしているため、メッシュの切り方は特に影響する。有限要素法を用いた計算ではどんな解析でもメッシュの切り方が影響するので常に注意する必要がある。

6 謝辞

今回の特別実験ではたくさんの方々にお世話になりました。本実験を担当してくださった坪野公夫教授には実験があまり進まず心配させてしまいましたが、温かく見守ってくださいました。助教の麻生洋一さんはたくさんの手助け、アドバイスをしてくださり、ソフトのセミナーに一緒に出席までしてくださり、本当に何から何までお世話になりました。また坪野研究室の方々にはさまざまなアドバイスをしていただいて、ご飯も一緒させていただき、とても充実した冬学期をおくることができました。また飲み会に誘ってください。さらには坪野研の方々だけではなく計測エンジニアリングシステム株式会社の方々には COMSOLMultiphysics についてのかなりの量の質問メールに答えていただきました。このサポートのおかげで COMSOL を有効に使えるようになりました。
皆様には重ね重ね感謝の意を申し上げます。