

特別実験レポート
COMSOL[®] による光共振器の変形解析

久保 肇
東京大学理学部物理学科4年
05081513

共同実験者 橘保貴

2010年2月5日

1 解析の背景と目的

単位系の定義は、人類が自然界をみる指標である。精度の低い単位系では精度の高い現象を評価する事ができないという単位系のもつ本来の性格のため、その定義には現在実験可能なもっとも精度の高い物理現象が用いられる。水素スペクトルの精密分光が微細構造、ラムシフト、超微細構造を明らかにし Dirac 理論や QED の発展・実験的検証を促した事からわかるように、「精密にはかる」という事は単に数値的な問題ではなく、質的に違ったものをもたらす。

現在の単位系の根幹は、周波数（時間）である。2001年東大工学部の香取秀俊准教授によって新しい周波数標準の手法、光格子時計が提案され、同グループによって実現、2006年には国際度量衡委員会によって Sr（ストロンチウム）をつかった光格子時計が秒の二次表現として採択されるまでに至った。現在の光格子時計は原理的な限界には達しておらず、その原因の一つにプローブのレーザーの周波数が不安定であることがある。レーザーの周波数を光共振器にロックすることができ、この場合にはレーザーの周波数の変化は光共振器の変形と等価になる。つまり、変形の少ない光共振器を設計すれば良い。レーザーの周波数安定化は重力波研究にとっても重要で現在坪野研では低温サファイア光共振器を使い、レーザー周波数安定化を目指している。本解析ではその前段階として、有限要素法プログラム COMSOL を使い簡単な光共振器の変形を解析した。

2 有限要素法

一次元の有限要素法による解法を紹介する。

2.1 問題設定

以下の微分方程式を考える。

$$\begin{cases} \frac{d^2 u(x)}{dx^2} = f(x) & x \in (0, 1) \\ u(x=0) = u(x=1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$x = 0, 1$ で $v(x) = 0$ であるなめらかな関数 $v(x)$ を式 (1) にかけて積分すると

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)v(x)dx &= \int_0^1 \frac{d^2 u(x)}{dx^2} v(x)dx = \left[\frac{du(x)}{dx} v(x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx \\ &= - \int_0^1 \frac{du(x)}{dx} \frac{dv(x)}{dx} dx \\ &\equiv -\phi(u, v) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。逆に任意な $x = 0, 1$ で $v(x) = 0$ であるなめらかな任意関数 $v(x)$ が式 (2) を満たすならば、 $u(x)$ は微分方程式 (1) を満たすことは証明できる。以下、式 (2) を数値計算することを考える。

2.2 離散化

$0 \leq x \leq 1$ で $n+1$ 分割して $x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n < 1 = x_{n+1}$ とし、 $v_k(x)$ を

$$\begin{aligned} v_k(x) &= \frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ v_k(x) &= \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ v_k(x) &= 0 & otherwise \end{aligned}$$

とする。 $f(x), u(x)$ を $v_k(x)$ を基底にして展開すると

$$f(x) = \sum_{k=1}^n f_k v_k(x) \quad (3)$$

$$u(x) = \sum_{k=1}^n u_k v_k(x) \quad (4)$$

となり、式 (2) に代入すると

$$\phi(u, v_j) = \sum_{i=1}^n u_i \int_0^1 \frac{dv_i(x)}{dx} \frac{dv_j(x)}{dx} dx = \sum_{i=1}^n u_i \phi(v_i, v_j) \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^n f_i \int_0^1 v_i(x) v_j(x) dx = - \sum_{i=1}^n u_i \phi(v_i, v_j) \quad (6)$$

となる。

$$M_{ij} \equiv \int_0^1 v_i(x) v_j(x) dx \quad (7)$$

$$L_{ij} \equiv \phi(v_i, v_j) = \int_0^1 \frac{dv_i(x)}{dx} \frac{dv_j(x)}{dx} dx \quad (8)$$

と定義すると式 (6) は

$$M \mathbf{f} = -L \mathbf{u} \quad (9)$$

$$\mathbf{u} = -L^{-1} M \mathbf{f} \quad (10)$$

となり、これを計算すれば $u(x)$ を求めることができる。 x を $n+1$ 分割したものがメッシュを切ることに対応する。

3 解析の概要

今回解析した共振器の形状は図 1 である。図上のピンク色の 4 点を共振器の支持点とモデル化し、これらに境界条件を課す事で地面振動を考慮する。材質は表 1 の通りである。なお以下の共振器の解析では全て自重がかかっている。

COMSOL で共振器の変形を解析するには大きく以下の 4 つの方法がある。自重はすべての場合でかかっている。

ヤング率	$2.0 \times 10^{11} [Pa]$
ポアソン比	0.33
熱膨張率	$1.2 \times 10^{-5} [K^{-1}]$
密度	$7850 [kg/m^3]$

表 1 材質の物性値

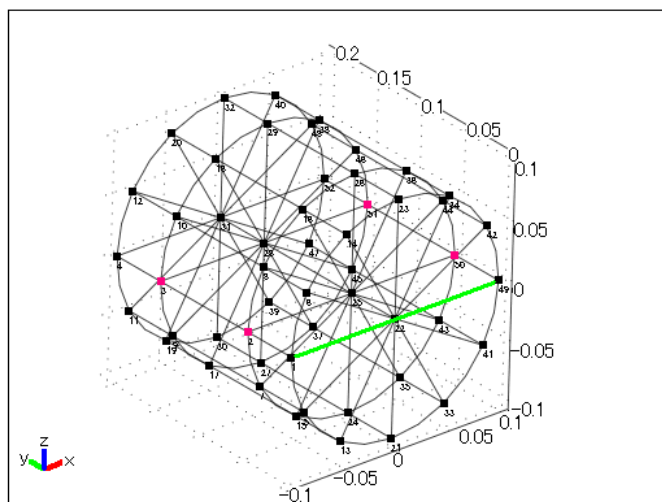


図 1 解析した光共振器の形状 (単位は m)

1. 支持点を加速度 a で動かす境界条件の下での過渡解析
2. 支持点を変位 0 で拘束し、共振器全体に一樣な体積力 ρa をかける下での静解析
3. 共振器全体に角振動数 ω の体積力をかけた過渡解析
4. 共振器全体に角振動数 ω の体積力をかけた周波数解析

$\omega t \ll 1$ (t は時間) のときは 1・2 と 3・4 は等価である。本解析ではまず、1 と 2 が COMSOL 上で等価である事を簡単な二次元モデルで示し、実際の共振器で 2、4 の方法で共振器の変形を調べた。3 と 4 の等価性は今回は行わなかった。

4 過渡解析と静解析の等価性

図 2 の 2D 長方形モデルを考える。寸法は図の通りで単位は m である。底面が x 方向の加速度 $a_x = 1 [m/s^2]$ で変位する境界条件の下での過渡解析と底面を変位 0[m] で固定して全体に x 方向の $-\rho a_x$ (ρ は質量密度) をかけた状態での静解析とを比較する。過渡解析の場合、全体が振動してしまうので早く収束するよう材質にダンピングを入れてある。図 3 は図 2 の赤い点の変位を過渡解析と静解析で比較したものである。過渡解析の値が静解析の値に収束している。しかし時間をどこまで延ばせば過渡解析と静解析がどの程度一致するかや COMSOL が有効数字を何桁までもっているかは分からない。

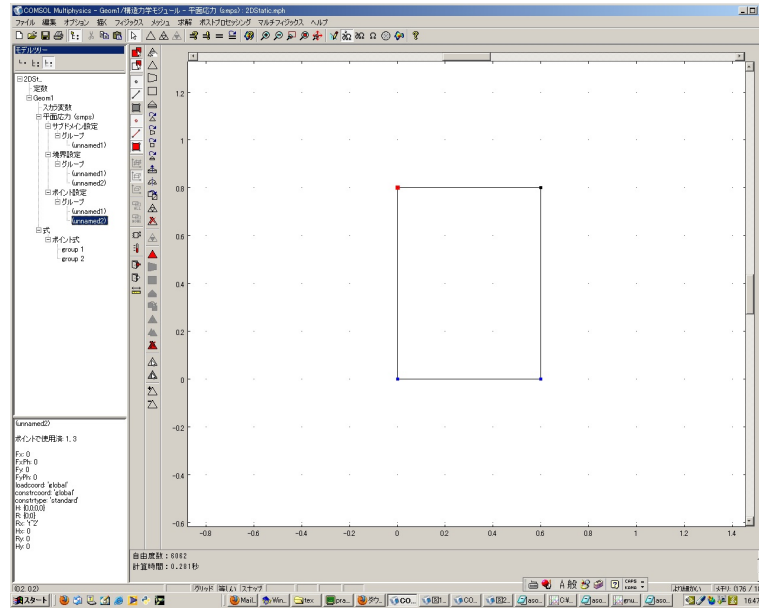


図2 簡単な2D長方形モデル

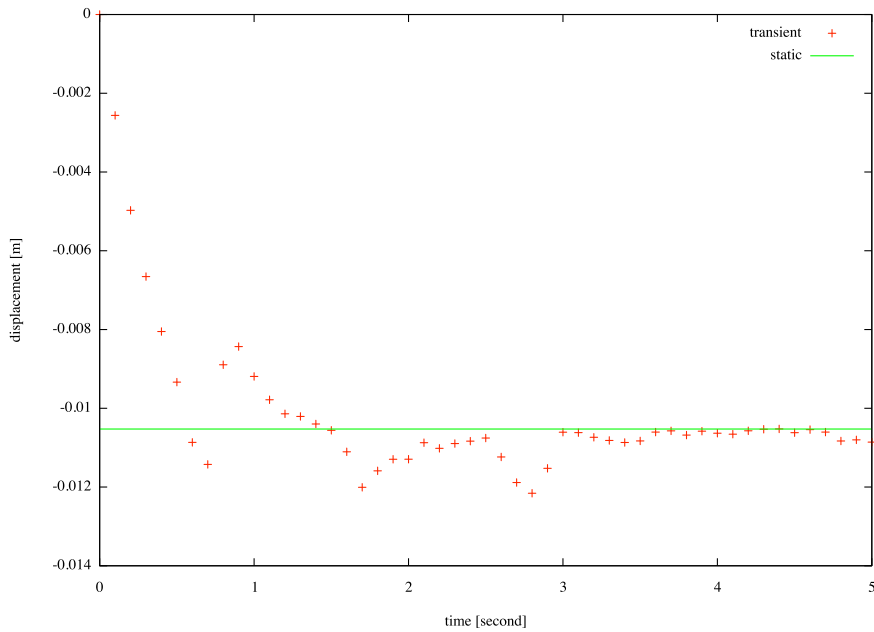


図3 過渡解析と静解析の比較

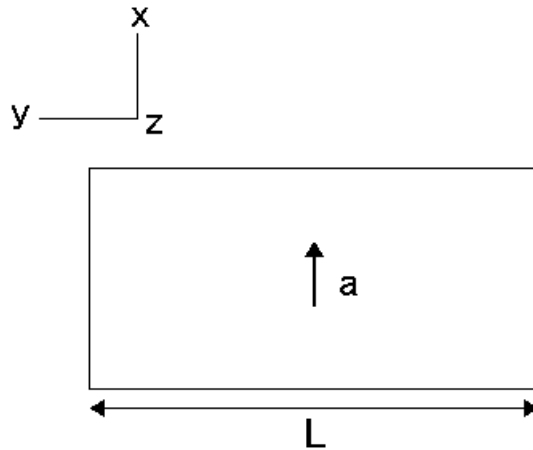


図4 加速度 a と共振器の長さ

5 共振器の加速度に対する応答

図1の共振器を自重と x 方向の体積力 ρa をかけて静解析する。円形の端面の変形を調べた。図4、5のように円柱の端面が直線に変形し、

$$\frac{\delta L}{L} = ka \quad (k = \text{const}) \quad (11)$$

の加速度 a と y 方向の変位 δL が線形な関係である状況を調べる。

図6は端面上の $(-0.1, 0, 0)$ から $(1, 0, 0)$ に沿った直線上(図1の緑の直線)の y 方向の変位を書いたものである。 a を0から $16[\text{m/s}^2]$ まで 0.5 刻みで変化させたものを同じ図に重ねている。一つ特定の a の値での変位はサイン曲線のような曲線に対応し、振幅の異なる曲線が重ね合わされたような図になっている。図より、 $-0.07 < x < 0.07$ 程度で線形な変形をしている事確かめる事ができる。

点 $(0.02, 0, 0)$ を線形に応答する点の代表として以下詳しく解析する。図7は加速度 a を前述の通り0から $16 [\text{m/s}^2]$ まで 0.5 刻みで変化させた時の y 方向の変位である。図のように、加速度 a と y 方向の変位は線形関係である。このプロットを

$$y = ca + b \quad (12)$$

でフィットする。ここで $y[\text{m}]$ は y 方向の変位、 $a[\text{m/s}^2]$ は加速度である。結果は

$$c = -6.57821 \times 10^{-11} [\text{s}^2] \quad b = 6.00527 \times 10^{-12} [\text{m}] \quad (13)$$

となり、完全に直線上にのっているので Comsol の有効数字を無視すれば誤差は0である。本来は加速度 a が $0[\text{m/s}^2]$ のとき y 方向への変位は0のはずであるが、 y 切片、 b が値をもつのは a の値が小さいときは丸め誤差など数値計算の誤差が大きくなってしまい、全体の直線が a が小さい領域の誤差に大きく影響されてしまっている為だと考えられる。そこで、 $a > 4[\text{m/s}^2]$ の範囲で $b = 0$ のもとでフィットすると、

$$c = -6.525 \times 10^{-11} \pm 3.9 \times 10^{-14} [\text{s}^2] \quad (14)$$

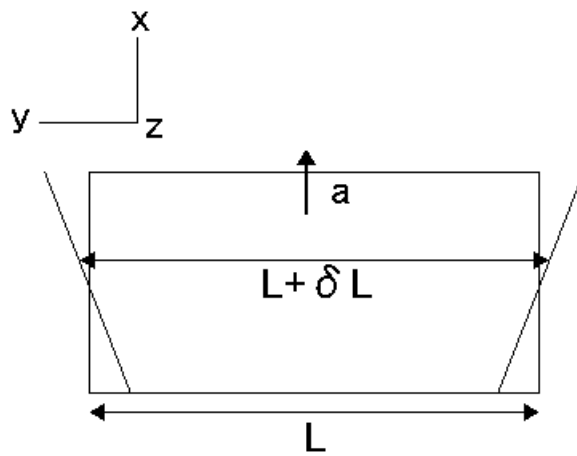


図5 加速度 a と y 方向の変位

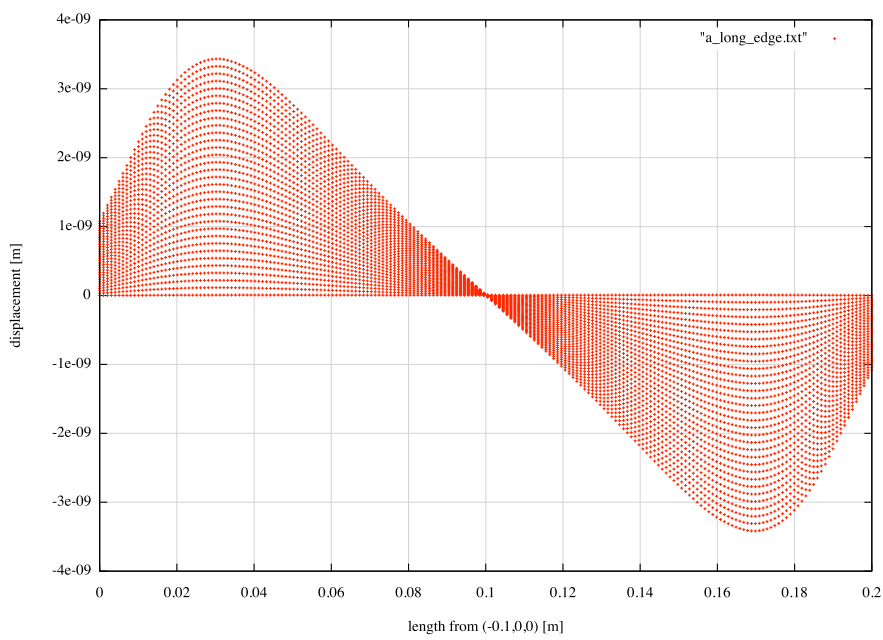


図6 円柱の端面の変位

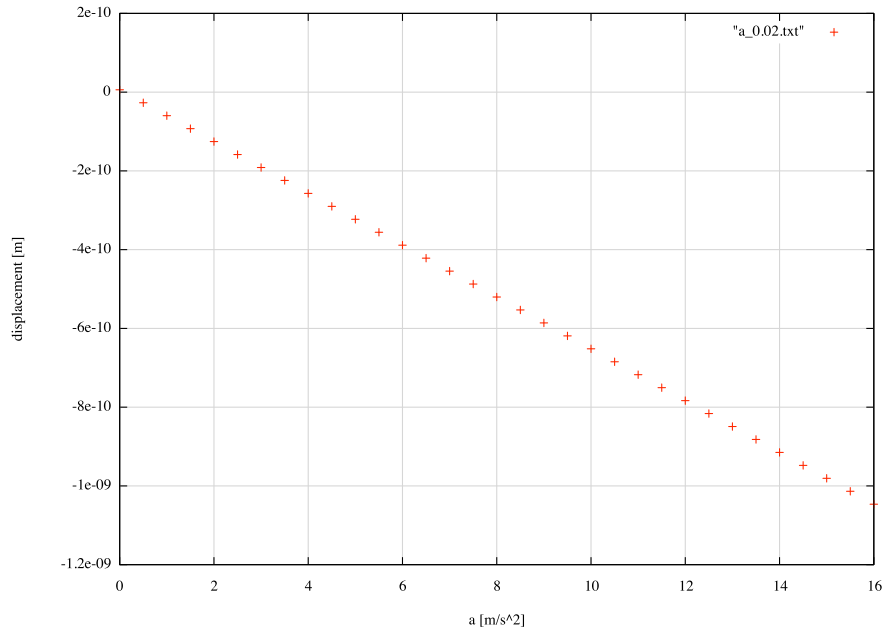


図7 加速度と変位の関係

端面の中心部分は線形に変形していると仮定し振動感度に直すと、

$$k = \frac{\delta L}{La} = -3.263 \times 10^{-11} \pm 2.0 \times 10^{-14} [\text{s}^2/\text{m}] \quad (15)$$

となる。中心から $d[\text{m}]$ 離れたとこの振動感度は

$$k_d = \frac{k}{0.02[\text{m}]} d \quad (d \text{ は } [\text{m}] \text{ 単位}) \quad (16)$$

6 共振器の角振動数 ω で振動する力に対する応答

共振器に x 方向の $\rho a \cos 2\pi ft$ の振動する体積力をかけ周波数解析で変形を調べる。周波数解析は始めから方程式を線形化しているので、 a をいくら大きくしても非線形な変形はない事に注意したい。

周波数解析では、すべての力が角振動数 ω で振動してしまい、自重などの振動しない一定の力がかかった状態で他の力を振動させる事が出来なくなってしまう。そこで、自重をかけた静解析で共振器の変形をいったん求め、その点のまわりで線形化した周波数解析をする。以下の解析では、 $a = 8[\text{m}/\text{s}^2]$ で f を 0 から 3[Hz] まで変化させたものである。

図8は、円柱の円形端面の $(-0.1, 0, 0)$ から $(0.1, 0, 0)$ に沿った y 方向の変位である。 f を 0 から 3[Hz] まで変化させているが、全て同じ曲線にのっており変位の振幅には f 依存性はない事が分かる。§5と同様、 $x = -0.07 \sim +0.07$ 程度で線形に変形している。

図9は点 $(0.02, 0, 0)$ [m] における角振動数 ω を変化させたときの y 方向の変位の振幅である。これは線形応答の伝搬関数 $\chi(\omega)$ の絶対値に対応する。確認にはなるが、それぞれの ω で変位と力の振幅 a は線形な応答関係にあるが ω を変化させたときの変位は線形応答ではなく伝搬関数 $\chi(\omega)$ を表しているに過ぎない。

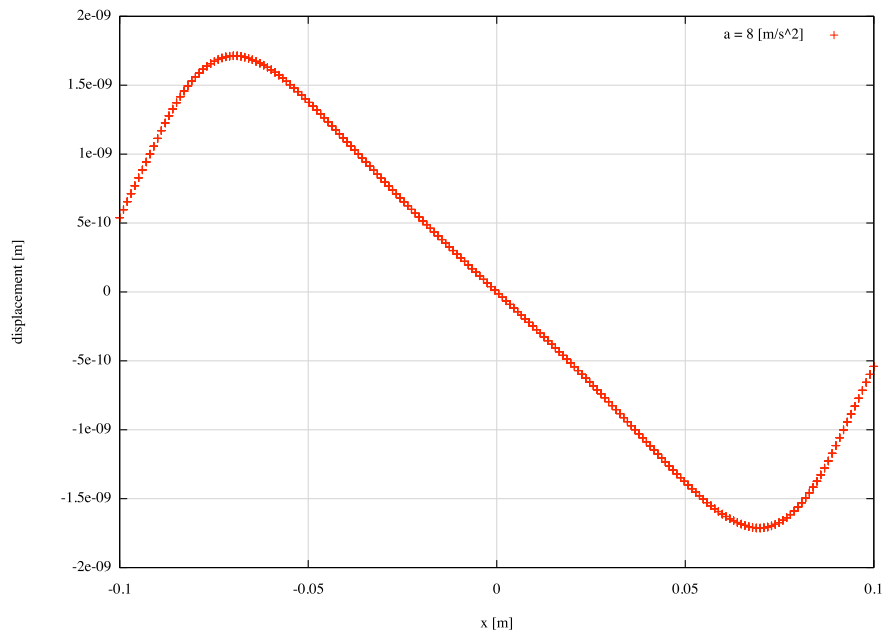


図 8 周波数解析での端面の変形

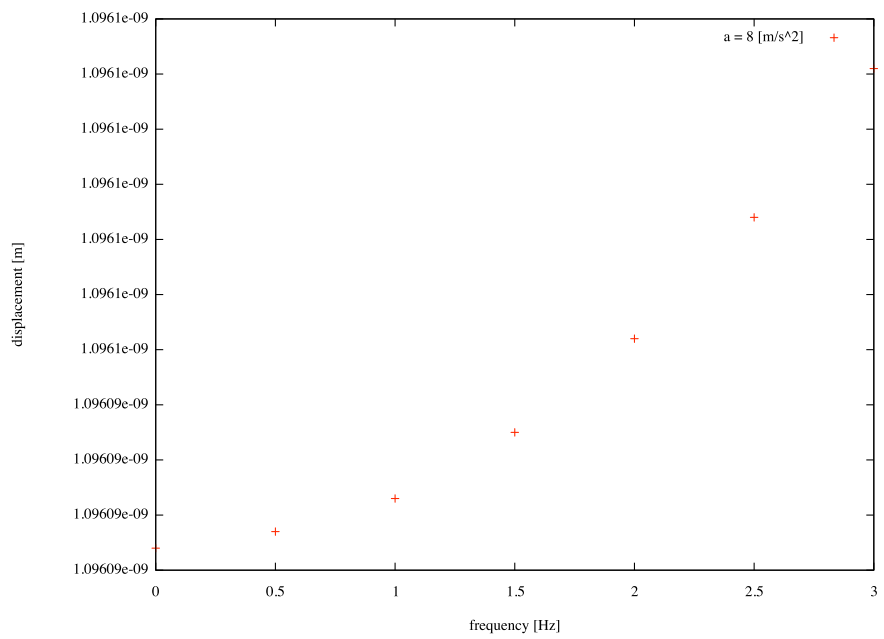


図 9 (0.02,0,0) における y 方向の変位の周波数依存性

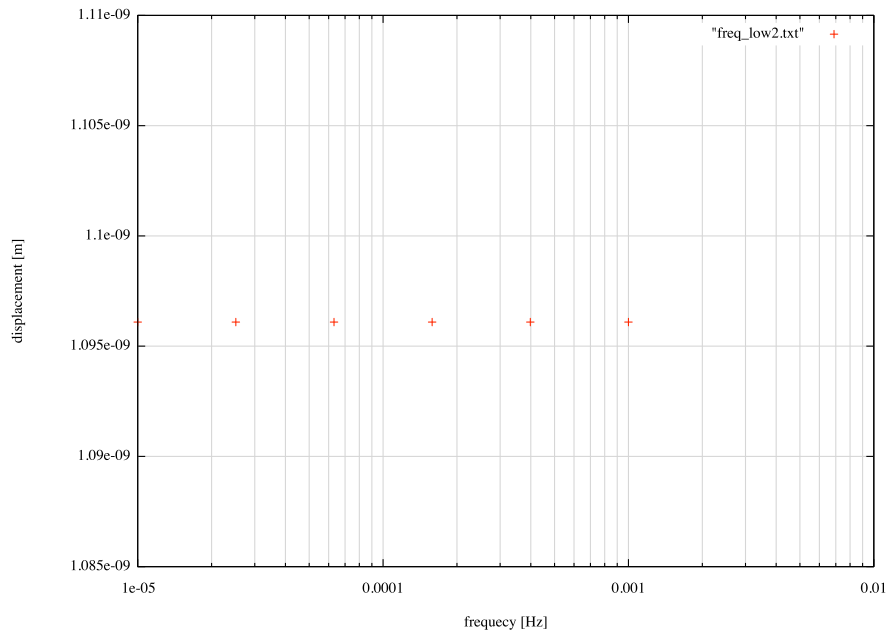


図 10 f が 10^{-4} [Hz] 付近の周波数依存性

前にも述べた通り、 $\omega t \ll 1$ では、慣性力をかけた静解析 (S 5) と周波数解析が一致するはずである。 f が小さい領域である 10^{-4} [Hz] 辺りの変位を表したものが図 10 である。値は全て同じで、 1.0960924×10^{-9} [m] であり収束している。周波数解析と静解析を比較したのが図 11 である。横軸は加速度 a で縦軸が y 方向の変位、赤い点が静解析で緑の点が周波数解析である。静解析と周波数解析の違いがかなり大きいものであることが分かる。

ここで、簡単なモデルに戻って周波数解析と静解析の等価性を調べてみる。図 12 の棒状のモデルを自重を入れて、 x 方向に加重をかける条件下で解析すると図 13 である。赤い点が周波数解析、緑の点が静解析である。 $f = 0$ で図上では一致しているように見えるし、実際数値でも一致している。したがって、共振器での違いは手法によるものではない。違いの原因をさがすのは今後の課題である。

7 まとめ

共振器の変形の解析には大きく分けて 4 つの方法がある。そこでまず、支持点を加速度 a で移動させる過渡解析と支持点を固定し全体に ρa の体積力を加えた静解析の等価性を調べるため、簡単な長方形モデルを考えたい。このモデルでは静解析での変位に過渡解析の値が収束しているが、一般にどの程度時間をとればどれくらい収束するかは分からない。次に共振器モデルで全体に体積力 ρa を加えたときの端面の変形を詳しく調べた。端面の変位の大きさと加速度は線形な関係にあり、 $y = ca$ (a は加速度 [m/s²]、 y は変位 [m]) とすると、 $c = -6.525 \times 10^{-11} \pm 3.9 \times 10^{-14}$ [s²] となった。最後に、角振動数 ω で振動する体積力 $\rho a \cos \omega t$ をかけた時の変形を調べた。 ωt が小さいときには体積力をかけた静解析と周波数解析は一致するはずだが、共振器モデルでは一致しなかった。簡単な棒モデルでは両者は一致し、これは手法が間違っている為ではない。この原因を調べるのは今後の課題である。

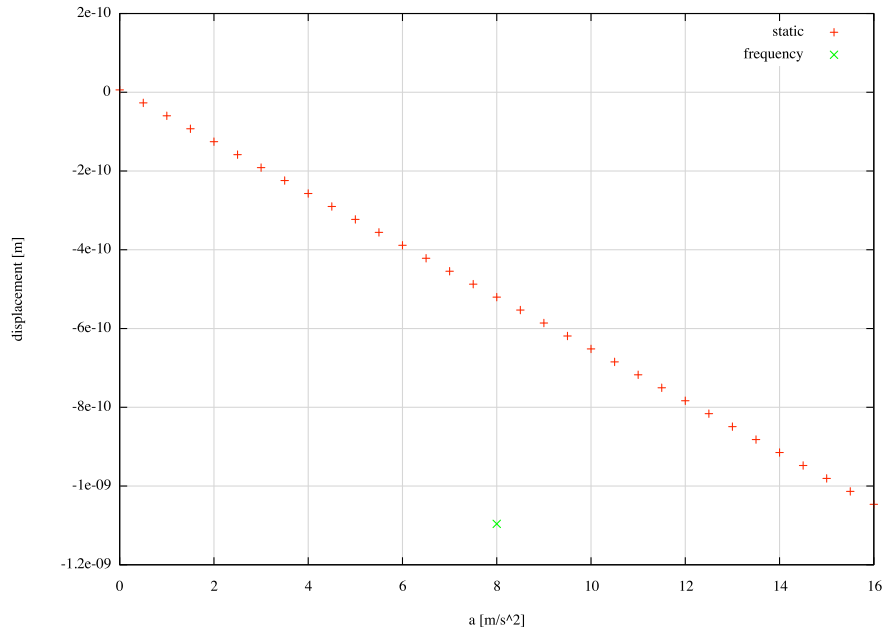


図 11 静解析と周波数解析の比較

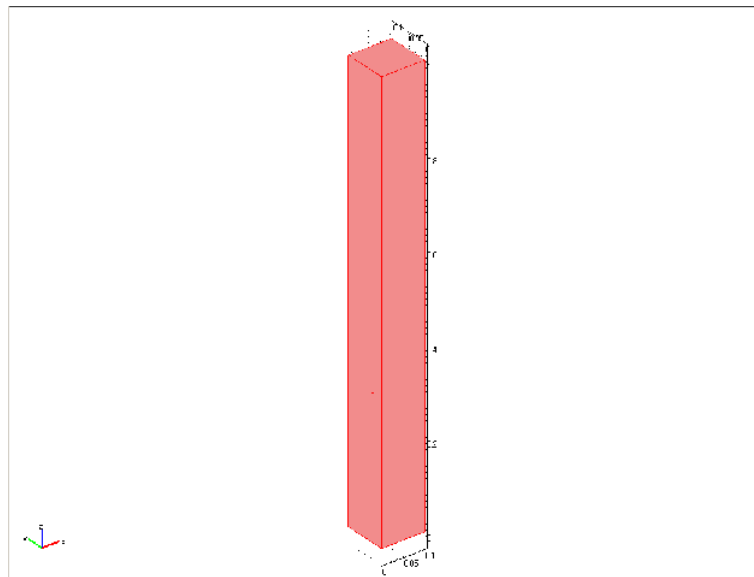


図 12 簡単な棒状モデル

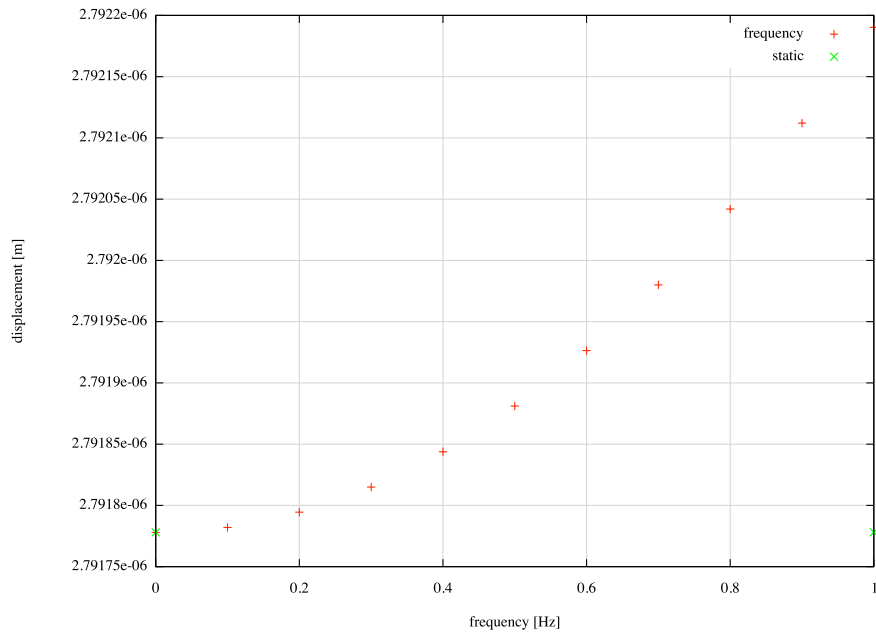


図 13 棒モデルでの静解析と周波数解析の比較

8 謝辞

今回の特別実験では坪野研の皆さんに非常にお世話になりました。坪野先生には励ましと差し入れを頂き、長時間パソコンの前で作業している身としては、とても嬉しかったです。助教の麻生さんには、一緒に Comsol のセミナーに行くなど何から何までお世話になりっぱなしでした。本当にありがとうございます。研究室の方々とは一緒に夕ご飯を食べ、励ましのお言葉をもらうなど暖かく研究室に迎えていただきました。ありがとうございました。最後に坪野研ではありませんが、Comsol の日本販売元 KESCO のサポートの方には本当にお世話になりました。再三にわたる質問を素早く明瞭に教えていただき、サポートなしには今解析は出来なかったと思います。最後に今特別実験ではいろいろな方に助けていただきました。本当にありがとうございました。