

2009年度夏学期 特別実験I  
DPF における試験マスモジュールの3自由度デジタル制御

道村唯太  
理学部物理学科4年 05-081560

研究室：坪野研  
共同実験者：正田亜八香

2009年9月15日(提出)

# 目次

<b>1</b>	<b>はじめに</b>	<b>3</b>
1.1	背景	3
1.2	目的	3
1.3	原理	3
1.3.1	1自由度の場合	3
1.3.2	3自由度の場合	4
<b>2</b>	<b>実験装置</b>	<b>5</b>
2.1	全体のシステム	5
2.2	懸架マス	6
2.3	フォトセンサ	7
2.3.1	位置検出特性	7
2.3.2	ノイズ特性	8
2.4	AD変換、DA変換	8
2.4.1	伝達関数	8
2.4.2	ノイズ特性	10
2.5	アンチエイリアシングフィルタ	10
2.5.1	伝達関数	10
2.5.2	ノイズ特性	11
2.6	デジタル信号処理系	12
2.6.1	フィルタ伝達関数	12
2.6.2	デジタル系の全ノイズ	13
2.7	オープンループ伝達関数	14
2.8	各種ノイズの影響	14
<b>3</b>	<b>制御性能の評価</b>	<b>15</b>
3.1	動作	15
3.2	各自由度のオープンループ伝達関数	17
3.3	各自由度の振動測定	20
<b>4</b>	<b>まとめ</b>	<b>23</b>
<b>A</b>	<b>補遺</b>	<b>24</b>
A.1	試験マスおよびタングステンワイヤの寸法、物性値	24
A.2	振り子の共振周波数	25
A.2.1	直方体の慣性モーメント	25
A.2.2	y軸、z軸まわりのマスの慣性モーメント	25
A.2.3	xの共振周波数	26
A.2.4	pitchの共振周波数	26
A.2.5	yawの共振周波数	27
A.3	各回路図	28
A.3.1	フォトセンサドライバ	28
A.3.2	アンチエイリアシングフィルタ	29
A.3.3	コイルドライバ	29

A.3.4 デジタル信号処理系 . . . . .	30
A.4 パワースペクトルおよび RMS 振幅 . . . . .	31
参考文献	<b>32</b>
感想	<b>32</b>

# 1 はじめに

## 1.1 背景

現在、日本の重力波グループでは宇宙空間重力波望遠鏡 DECIGO の打ち上げ計画が進められているが、その最初の技術試験衛星として提案されているのが DECIGO Pathfinder(DPF) である。DPF は 1 機の小型衛星内に、安定化レーザーと 2 つの試験マスと呼ばれる鏡で構成されたファブリ・ペロー干渉計を搭載しており、宇宙における実証実験を行うとともに、0.1-1Hz の周波数帯域における重力波の観測を行う。

また、DPF では重力波観測だけでなく、地球重力場観測を行うことも計画されている。何も制御をかけない状態では、衛星内部に非接触保持されたマスは地球の重力場に沿って運動するが、衛星本体は太陽輻射圧などの外乱も受けるため、マスと衛星の相対位置は変化してしまう。そこで、マスの位置をレーザーセンサで測定し、静電型アクチュエータにより衛星に対してマスが静止するように制御を行うと、制御信号から衛星が受けた外乱の大きさを見積もることができる。GPS により衛星の位置は高精度で測定することができるので、見積もった外乱の影響を差し引くことにより重力ポテンシャルを決定することができるのである。

## 1.2 目的

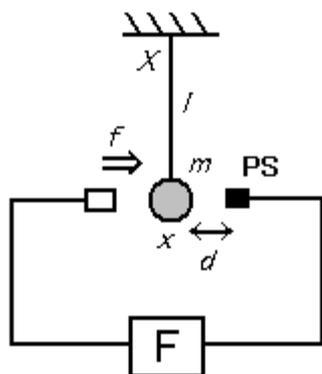
衛星を打ち上げる前には、様々な地上試験が必要である。そのうちのひとつがレーザーセンサによりマスをきちんと制御することができるかという動作試験である。地上では重力が大きいため懸架されたマスを使うのであるが、大きく揺れているマスを最初から線形レンジの狭いレーザーセンサのみで静止させるのは難しい。そのため、まずはフォトセンサによりマスをレーザーセンサの動作範囲まで静止させた上で、レーザーセンサへの切り替えを行うことが必要となる。

我々の実験の目的は懸架されたアルミ製立方体マスを 4 つのフォトセンサおよび 4 つのコイルマグネットアクチュエータを用いて  $x$  並進、pitch 回転、yaw 回転の 3 自由度に対して制御を行い、十分に静止させることである。我々が用いようとしているレーザーの波長は  $1.5\mu\text{m}$  であり、制御中の残留振幅をこの 10 分の 1 以下にすることを目標とした。

## 1.3 原理

### 1.3.1 1 自由度の場合

簡単のためにまず、並進の 1 自由度しかない単振り子について、そのフィードバック制御の原理を述べる<sup>1</sup>。



- $m$  : 質点の質量
- $l$  : ワイヤの長さ
- $x$  : 質点の変位
- $X$  : 地面の変位
- $f$  : フィードバックによる力
- $F$  : フィルタ
- $\gamma$  : 減衰力の係数
- $g$  : 重力加速度

図 1: 単振り子のフィードバック系

<sup>1</sup>この議論は [1] の 2.2 節を参考にした。

図1は吊るされた質点の変位をフォトセンサで検出し、それに応じた力を加えることでフォトセンサに対する質点の相対変位  $d$  を0にしようとするフィードバック系である。

減衰力も考えた時の質点の運動方程式は

$$\ddot{x} + \gamma(\dot{x} - \dot{X}) + \frac{g}{l}(x - X) = \frac{f}{m} \quad (1)$$

フォトセンサおよび天井は地面に完全に固定されているとすると  $d = x - X$  となるので、 $d$  に関する式に直すと

$$\ddot{d} + \gamma\dot{d} + \frac{g}{l}d = \frac{f}{m} - \ddot{X} \quad (2)$$

フーリエ変換して  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ 、 $Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$  とおくと

$$H_0(\omega) \left( -\omega^2 X - \frac{f}{m} \right) = d \quad (3)$$

ここで  $H_0(\omega)$  は振り子の伝達関数であり、

$$H_0(\omega) = \frac{-1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega\omega_0}{Q}} \quad (4)$$

となっていて、 $\omega_0$  は共振周波数、 $Q$  は  $Q$  値である。

このフィードバック系では力  $f$  はフォトセンサが感じた変位の大きさに応じて決まり、

$$\frac{f}{m} = F(\omega)d \quad (5)$$

となるので式 (3) に代入して整理すると

$$(1 + H_0(\omega)F(\omega))d = -H_0(\omega)\omega^2 X \quad (6)$$

この式の右辺は制御が無かった場合の、地面振動によって励起される質点の元々の揺れを表している。我々の目的は  $d$  を小さくすることであるから、オープンループゲイン  $|G(\omega)| = |H_0(\omega)F(\omega)|$  を十分大きくするようなフィードバック系を設計する必要がある。

なお、単に  $|G(\omega)|$  を大きくするだけでは安定な制御にはならない。ナイキストの安定条件によると、UGF で  $G(\omega)$  の位相余裕が 30deg 以上あることが必要である。ここで UGF とは  $|G(\omega)| = 1$  となる周波数であり、これより低周波の振動に対して制御がかかったということを表す目安となる周波数である。

### 1.3.2 3自由度の場合

我々が行う多自由度制御の場合は、フォトセンサの出力から自由度分離を行ったり、各自由度に力を加えるようにコイルへ出力させたりする必要があるため、若干複雑になるが基本は同じである。自由度分離に用いる行列を考えた場合のフィードバック系は図2で表される。

振り子の伝達関数  $H(\omega)$  はここでは 3 次正方行列であり、理想的に懸架されている場合各自由度への力、トルクに対する応答は対応する自由度の変位、回転にしかならず、対角行列となる。 $M'_{cf}$ 、 $M'_{fp}$  はコイルやフォトセンサの配置によって決まる行列で、それぞれコイルからの力を各自由度に振り分ける行列、各自由度の変位をフォトセンサがどう感じるかを表す行列になっている。

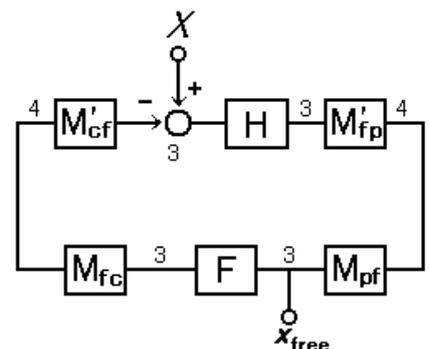


図 2: 3 自由度のフィードバック系

$M_{pf}$  はフォトセンサからの 4 つの入力を 3 自由度に分離する行列であり、分離したのち対角成分が各自由度のフィルタになっている 3 次対角行列  $F(\omega)$  がかけられ、各自由度へのフィードバック力が決まる。 $M_{fc}$  はこのフィードバック力を各コイルへが担う力にする行列である。なお、図 2 中の数字は成分の数を表す。

$x_{free}$  は x、pitch、yaw の 3 成分を持つ、各自由度の制御中の変位スペクトルであり、この位置で測定されたオープンループ伝達関数は

$$G(\omega) = M_{pf}M'_{fp}H(\omega)M'_{cf}M_{fc}F(\omega) \quad (7)$$

となるので、前節で考えたように

$$(1 + G(\omega))x_{free} \quad (8)$$

が制御が無かった場合の元々のマスの揺れということになる。

この時、フォトセンサやコイルが全て理想的な配置をしている場合、 $G(\omega)$  は 3 次の対角行列になることに注意されたい。なお、図 2 のうち  $M_{pf}$ 、 $F(\omega)$ 、 $M_{fc}$  は自分で設定できるものである。この部分は Simulink で作成し、xPC Target を用いたデジタル制御を行った。詳しくは以下で言及する。

## 2 実験装置

ここではまず、実験装置全体のシステムについて述べた上で、各構成要素について詳しく述べていく。そして、システム全体のオープンループ伝達関数の表式を示し、各自由度の振動測定をする際に各種ノイズがどの程度影響するかについての式を示す。

### 2.1 全体のシステム

実験装置の全体図を模式的に表すと図 3 のようになる。

タングステンワイヤにより懸架されたマスの変位が 4 つのフォトセンサにより測定され、その出力はアンチエイリアシングフィルタを通った後、AD 変換されてデジタル信号となる。デジタル信号はターゲット PC にダウンロードされた Simulink モデルに従って専用のリアルタイム OS により処理される。このモデルは 4 つのフォトセンサからの信号に行列をかけて 3 自由度に分離した後、各自由度に対してフィルタをかけ、それぞれの自由度に対応する力をコイルに加えるよう再び行列をかけて 4 つの出力を出すようになっている。このとき、ターゲット PC は LAN を通じてホスト PC によってコントロールすることができ、モデルの設計やターゲット PC へのビルド、制御の開始や停止、データの取得や解析などはホスト PC で行う。

ターゲット PC からの 4 つの出力は DA 変換され、コイルドライバを通して対応するコイルへ電流が流れる。マスには磁石がついており、コイルからの磁場との相互作用により力を受ける。これが全体のフィードバックシステムの概要である。

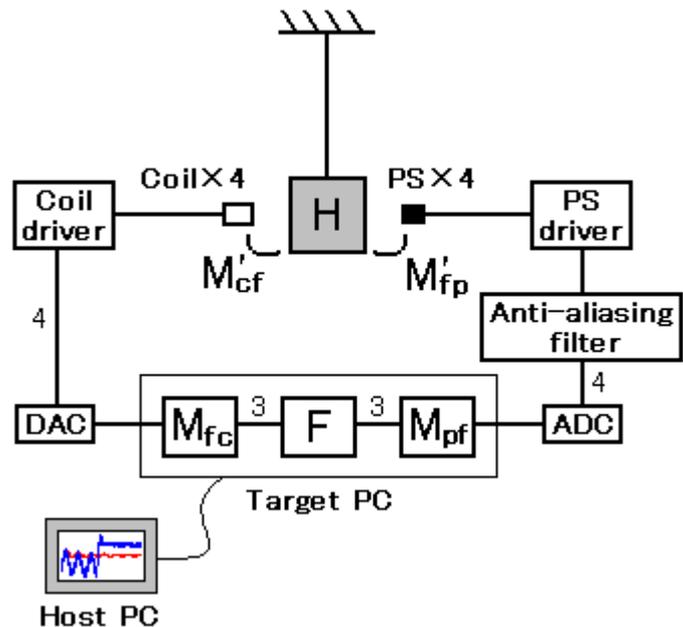


図 3: 全体のシステム

## 2.2 懸架マス

試験マスとしてはアルミ製の立方体を加工したのを用い、そこにクランプを取り付けてタングステンワイヤで懸架した。マスおよびタングステンワイヤの寸法や物性値は補遺 A.1 を参照されたい。

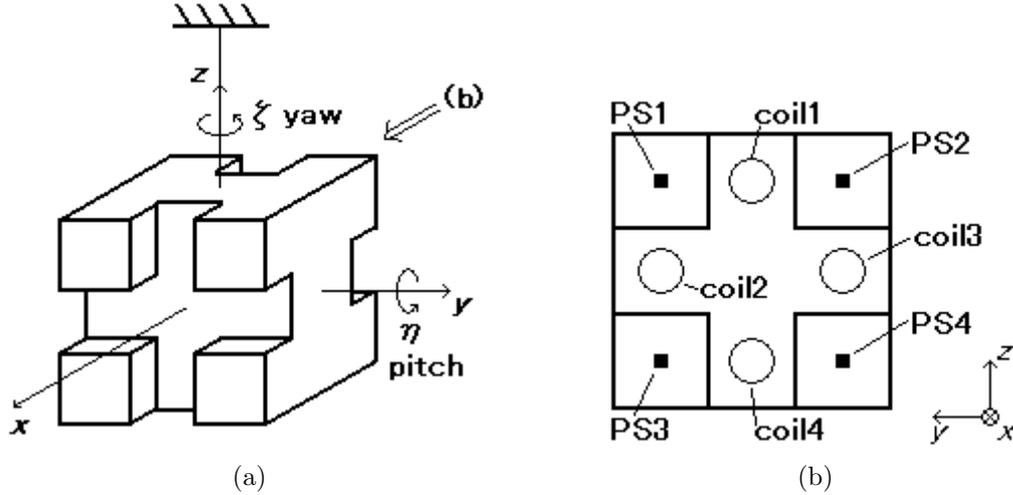


図 4: フォトセンサおよびコイルの配置

フォトセンサおよびコイルは図 4 のように配置した。これらが理想的に配置できたとすると、 $M_{pf}$  と  $M_{fc}$  を定めることができ、 $M'_{cf}$  と  $M'_{fp}$  を推定することができる。

図 4 の各フォトセンサ、各コイルにつけた番号が行列の成分の順番に対応するとすると各行列は

$$M_{pf} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad M'_{cf} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{fc} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M'_{fp} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

となる<sup>2</sup>。

また、自由度間のカップリングがないと仮定すると、懸架マスの伝達関数は対角成分が各自由度に対する式 (3) となるような 3 次の対角行列であり、

$$H_{ij}(f) = A'_{0i} H_{0i}(f) \delta_{ij} \quad (i = x, \eta, \zeta) \quad (9)$$

となる。ここで  $A'_{0i}$  はコイルと磁石の結合定数やフォトセンサの位置検出特性などによって決まる定数である。

$H_{0i}$  がもつパラメータは対応する自由度の共振周波数  $f_{0i}$  と Q 値であるが、このうち共振周波数は理論的に推定することができ、補遺 A.2 のように計算をすと

$$f_{0x} = 1.46\text{Hz}, \quad f_{0\eta} = 6.39\text{Hz}, \quad f_{0\zeta} = 0.58\text{Hz} \quad (10)$$

となる。

これらの値から、各自由度に対して UGF が 10Hz 程度となるようなフィードバック系の設計を目指した。なお、これらの値はワイヤによる懸架具合によっても変わってくると考えられる。

<sup>2</sup>もちろん、これらの定数倍でもよい。 $A'_{0i}$  が変化するだけである。

## 2.3 フォトセンサ

フォトセンサとしては反射型フォトインタラプタ SG-2BC を用いた。これは発光ダイオードとフォトトランジスタから構成されており、前者から出た赤外光の反射光量を後者が測定することで反射鏡との距離を測定する。

フォトセンサドライバの回路は補遺 A.3.1 に示した。フォトトランジスタからの生の出力は反射鏡との距離が 0 および無限大のとき 0 となるが、オフセット電圧との差分を取るによりある一定の距離でフォトセンサドライバの出力が 0 となり、この位置で制御がかかるようになっている。以下では特に断らない限り、フォトセンサドライバの出力をフォトセンサの出力と言う。

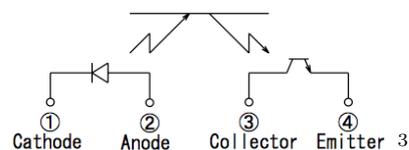


図 5: フォトセンサの仕組み

### 2.3.1 位置検出特性

台の上に固定したマスとフォトセンサの位置をマイクロメータによって変化させ、フォトセンサ出力の変化を測定した結果が図 6 である。距離の測定には出力が最大値となる距離より近い側が遠い側を用いることができるが、我々は傾きが緩やかな遠い側を使った。これは制御前に大きく揺れているマスを制御するために測定可能範囲の広さを優先したためである。

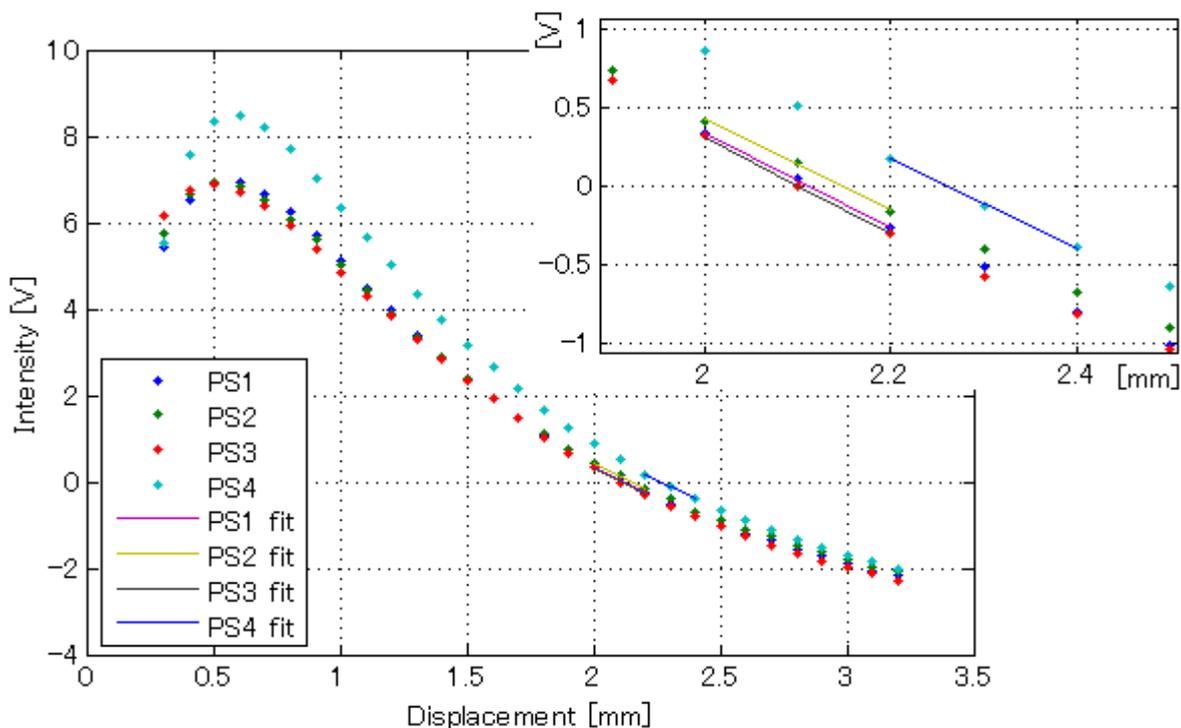


図 6: フォトセンサ出力の距離依存性 (右上は動作点付近の拡大図)

このグラフから動作点付近における傾きを求めると

$$p = 3.0 \pm 0.1 \text{ V/mm} \quad (11)$$

<sup>3</sup>SG-2BC のデータシートより引用。

となる。ここでの誤差は配置具合によるばらつきやフォトセンサ自体の個体差であると考えられる。

### 2.3.2 ノイズ特性

フォトセンサが台に完全に固定されている<sup>4</sup>とすると、台の上にマスを固定した状態でフォトセンサからの出力を見れば、フォトセンサ自体が出すノイズが測定できるはずである。

また、発光ダイオードを切り、周囲を暗くした状態でのフォトトランジスタからの出力を見ると、フォトセンサのダークノイズを測定することができる。

双方を測定した結果が、図7である。他の構成要素から生じるノイズはこれよりも低く抑えられることが望ましい。

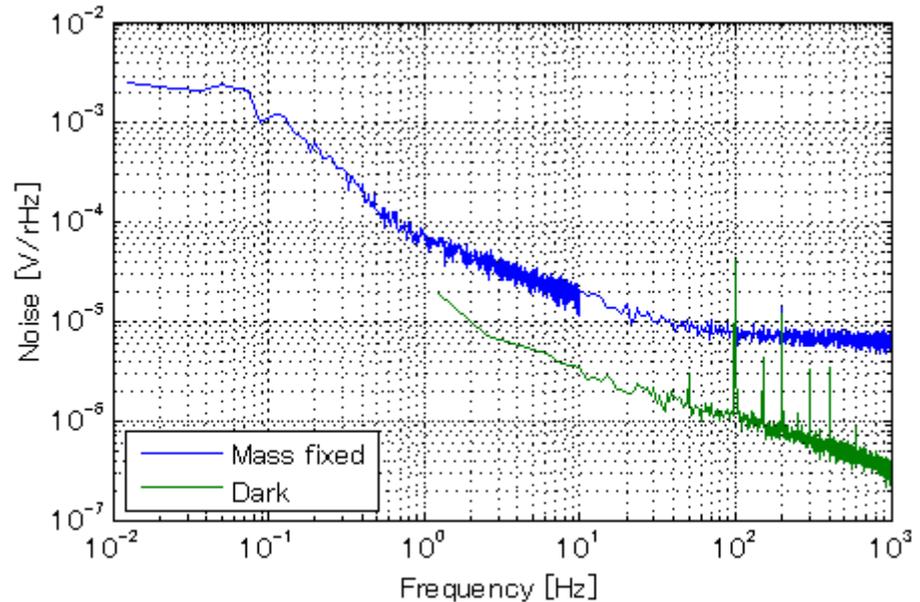


図7: フォトセンサ自体が出すノイズ

## 2.4 AD変換、DA変換

ADC、DACにはそれぞれNational Instruments社のPCI-6052E、Measurement Computing社のPCI-DDA08/16を用いた。各変換におけるサンプリング周波数や入力レンジはSimulinkブロック線図上で設定することができ、共に  $f_s = 10$  kHz、 $\pm 10$ V と設定した。16bitの変換器であるため、1LSBは  $\Delta = 305\mu\text{V}$  となる<sup>5</sup>。

### 2.4.1 伝達関数

DA変換にはゼロ次ホールド効果による伝達関数が存在し、サンプリング時間を  $T_s$  とするとその理論式は

$$D(f) = e^{-i\pi f T_s} \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s} \quad (12)$$

で与えられる。

AD変換に入力した信号をそのままDA変換して出力するブロック線図を作成し、伝達関数を測定したところ図8のようになった。ゲインに関してはよく一致しており、100Hz以下で理論値とのずれが  $-0.3\%$  の一定値をとっていた。このずれの原因はオフセットのずれなどによるものと考えられるが、制御に影響はないため、特に調整はしなかった。

一方、位相はサンプリングによる遅延が原因だと考えられるずれが生じている。  $11.7\mu\text{sec}$  の遅延を考慮に入れると理論線が実験データと一致するため、サンプリングによる遅延量は  $11.7\mu\text{sec}$  だと考えられる。入力として方形波を入れると、出力の立ち上がりの遅れから遅延量を測ることができるが、オシロスコープで実測したところ  $13 \pm 1\mu\text{sec}$  であった。

<sup>4</sup>台とフォトセンサとの間の伝達関数が考えている周波数領域で1であると考えることに対応する。

<sup>5</sup>この節における議論、理論式の導出等は [2] が詳しい。

この遅延量は AD 変換、DA 変換を行うチャンネル数が多くなるほど大きくなる。例えば 6 入力 6 出力では実測値で  $52 \pm 2 \mu\text{sec}$  であった。これは 10Hz で 0.0033deg の遅延に相当するが、制御には全く影響しないレベルである。

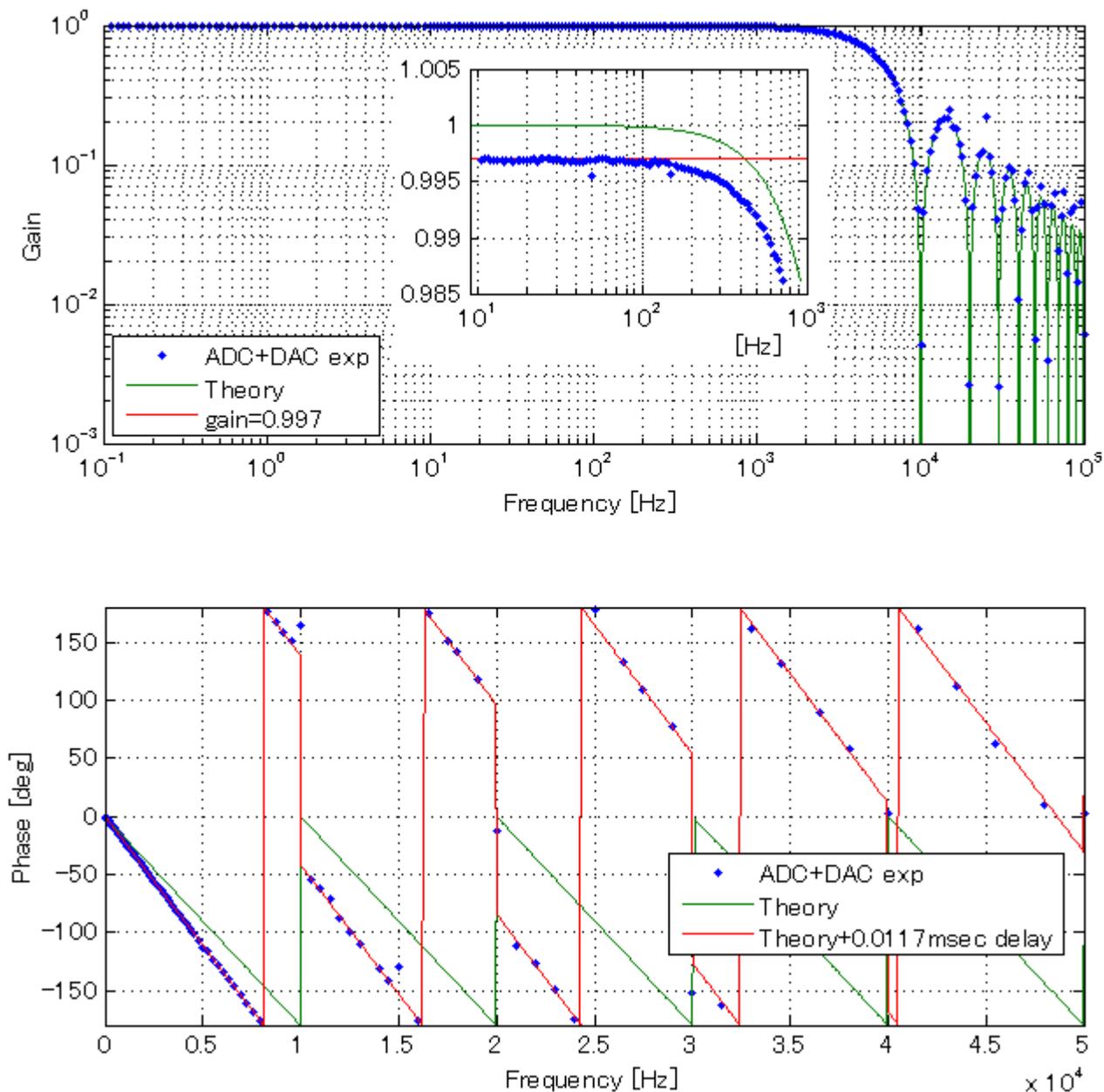


図 8: AD/DA 変換の伝達関数

## 2.4.2 ノイズ特性

AD 変換、DA 変換を通じて最も大きいノイズは AD 変換による量子化ノイズおよび ADC の内部雑音によるトランジションノイズである。この 2 つを併せてシステムノイズと呼ぶことにすると、その理論値は

$$P_{\text{sys}}(f) = 2\sigma_{\text{rms}}^{\text{sys}} 2T_s \left( \frac{\sin(\pi f T_s)}{\pi f T_s} \right)^2 \quad (13)$$

となる。

データシートには  $\sigma_{\text{rms}}^{\text{sys}} = 0.95\text{LSB}$  とあるので理論値が計算できる。ADC に GND 入力をしたときの DAC 出力からノイズを実測したものと比較すると、図 9 となる。

データシートからの理論値では低周波において

$$\sqrt{P_{\text{sys}}(f)} \rightarrow 4.1 \times 10^{-6} \text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$$

となるが、実測値は  $(3.5 \pm 0.4) \times 10^{-6} \text{V}/\sqrt{\text{Hz}}$  であった。

図 7 と比較すると、フォトセンサの出すノイズよりも小さく抑えられていることも確認できる。

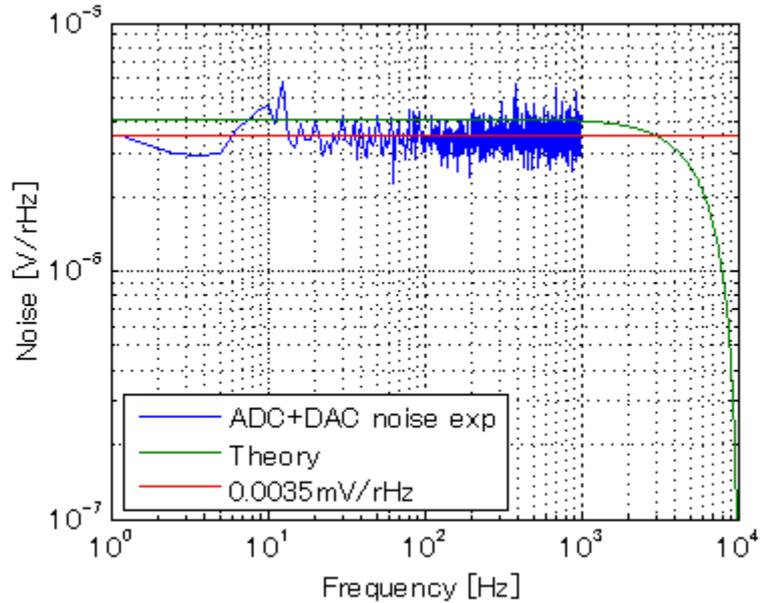


図 9: AD 変換、DA 変換の出すノイズ

## 2.5 アンチエイリアシングフィルタ

サンプリング定理から、ナイキスト周波数  $f_n = f_s/2 = 5\text{kHz}$  より高い周波数を持つ信号は AD 変換をする前に除去する必要がある。我々は補遺 A.3.2 に示すような、カットオフ周波数  $f_c = 1.06\text{kHz}$  のローパスフィルタを作成し、これを実現した。

### 2.5.1 伝達関数

このアンチエイリアシングフィルタは 2 次の Sallen-Key 型能動フィルタと 1 次の受動フィルタから成っており<sup>6</sup>、3 次 Butterworth 特性を持つ。  $s = i\omega/\omega_c$  とおくと、このアンチエイリアシングフィルタの伝達関数は

$$A(f) = \frac{1}{s+1} \frac{1}{s^2+s+1} \quad (14)$$

と 3 次正規化 Butterworth 多項式の逆数で表される。

図 10 は実測値と理論値の比較である。UGF を目指す 10Hz における位相遅れは 1.1deg であり、問題とはならない。また、 $f_n = 5\text{kHz}$  におけるゲインは  $10^{-2}$  となっており、十分高周波成分がカットされていると言える。

なお、100Hz 以下での実測値と理論値とのずれはゲインは  $-2\%$  で一定となっており、位相のずれは  $\pm 0.04\text{deg}$  以内に収まっていた。ゲインのずれは素子の系統誤差によるものだと考えられるが、制御に影響はない。

<sup>6</sup> 1 次受動フィルタを前段におくと受動フィルタに電流が流れてノイズが大きくなってしまふ。また、前段の受動素子のインピーダンスが後段の伝達関数に影響を与えてしまうため、1 次受動フィルタは後段におく。フィルタの設計に関しては [3] が参考になる。

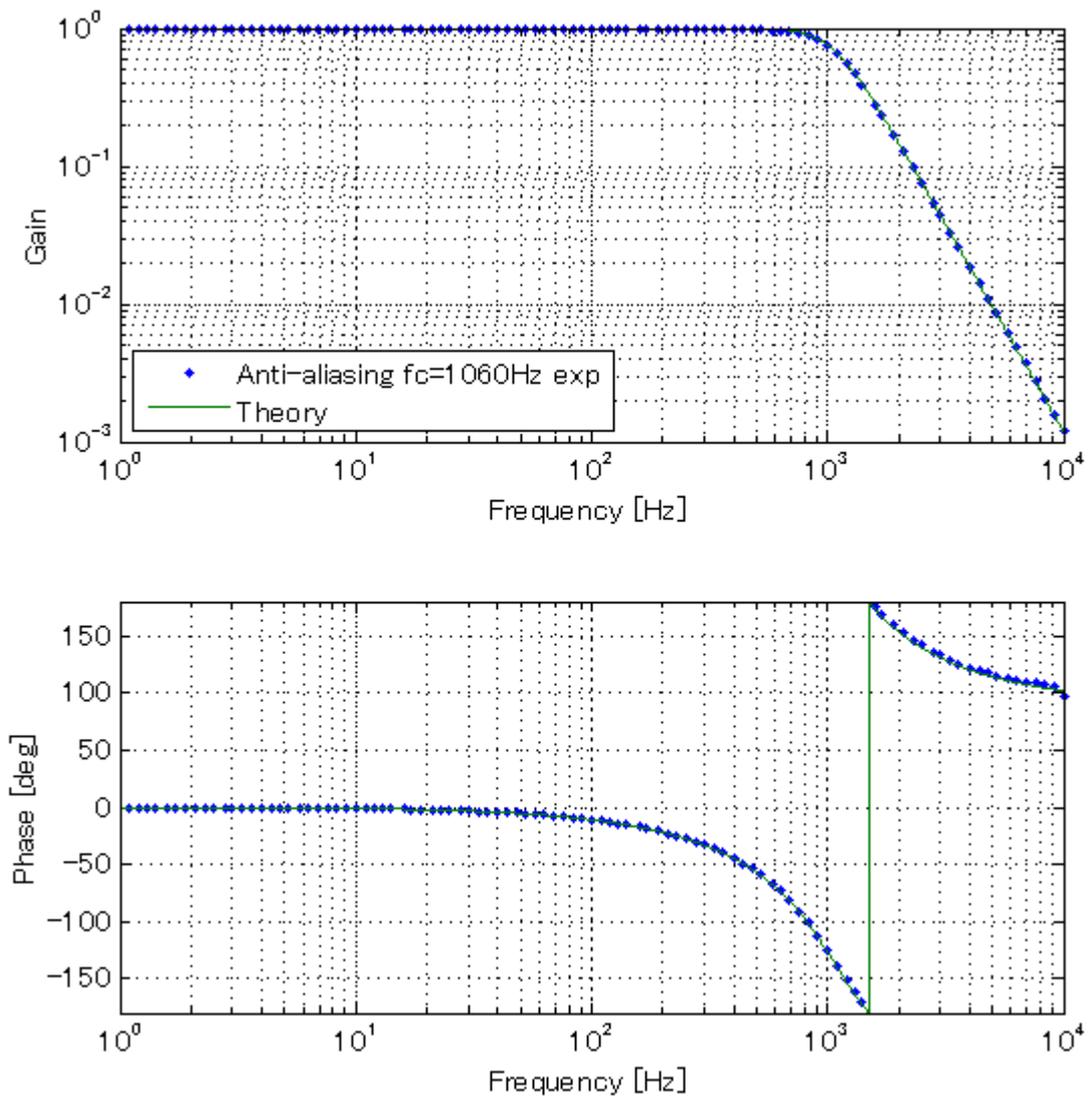


図 10: アンチエイリアシングフィルタの伝達関数

### 2.5.2 ノイズ特性

アンチエイリアシングフィルタが出す電気系ノイズは AD 変換により生じるシステムノイズよりも十分小さく抑えられていることが望ましい。GND 入力を入れて測定したところ図 11 のようになり、アンチエイリアシングフィルタの出すノイズは全体に影響を出さない程度に小さいことが確認された。

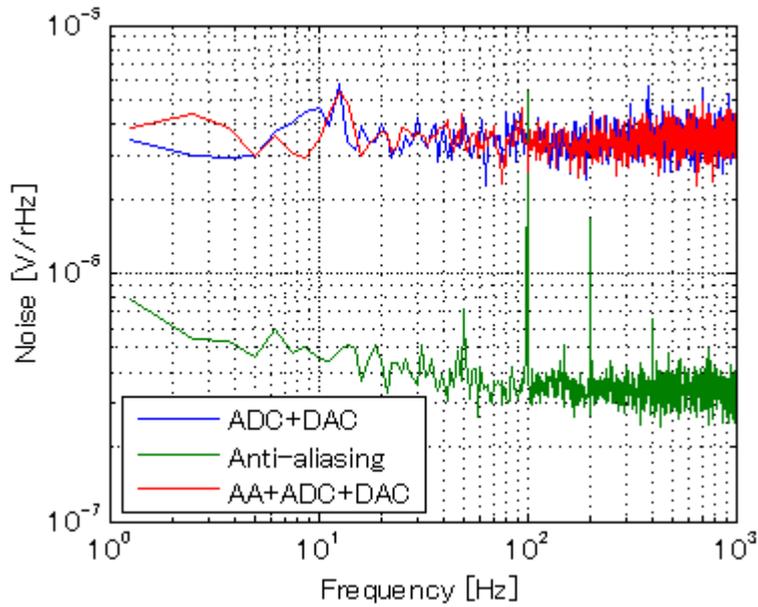


図 11: アンチエイリアシングフィルタのノイズおよび AD/DA 変換のノイズ

## 2.6 デジタル信号処理系

ターゲット PC がデジタル信号処理を行う際に従う Simulink モデルは補遺 A.3.4 のようになっている。

先にも説明したように、フォトセンサからの 4 つの入力に  $M_{pf}$  をかけて自由度分離し、それぞれの自由度に対してフィルタをかけ、その結果に  $M_{fc}$  をかけてコイルへの 4 出力するような回路モデルである。ただし、オープンループ伝達関数の測定用に ADC のチャンネルが 1 つ、行列が 1 つ、DAC のチャンネルが 2 つ追加されている。また、自由度分離された後の信号をホスト PC の MATLAB に送り、解析するための出力端子がついている。ここでいう解析とはパワースペクトルのや RMS 振幅の算出である。具体的な式に関しては補遺 A.4 を参照されたい。

### 2.6.1 フィルタ伝達関数

一般に振り子はその共振周波数よりも低周波の揺れに対しては同位相で揺れ、高周波の揺れには逆位相で揺れる。今回 UGF になることを目指している 10Hz は各自由度の共振周波数よりも高周波であるため、10Hz で位相余裕を確保できるようなフィルタをかけないと安定に制御することができない。

その要求を満たすフィルタとして、以下の式で表される伝達関数を設定した。ここで  $s = i\omega$  である。

$$F_i(f) = g_i \frac{s + 20}{0.1s + 20} \quad (i = x, \eta, \zeta) \quad (15)$$

$g_i$  は各自由度に対して設定できる定数ゲインであり、ここを調節することにより 10Hz でオープンループゲインが 1 となるようにした。実際に用いた値は以下の通りである。

$$g_x = 30, \quad g_\eta = 100, \quad g_\zeta = 100 \quad (16)$$

$g = 100$  とした場合について、フィルタの伝達関数を測定した結果が図 12 である。AD/DA 変換を通さず測定することはできないため、それらを含めた理論線と比較すると、ゲインの理論値とのずれは 100Hz 以下で -2% 以内に収まっていた。また 2.4.1 で考えたのと同様に、位相は  $13\mu\text{sec}$  の遅延で説明できるずれだった。

なお、自由度間のカップリングに関する制御はしていないため  $F(f)$  は  $3 \times 3$  の対角行列であり、対角成分が  $F_i(f)$  となっている。

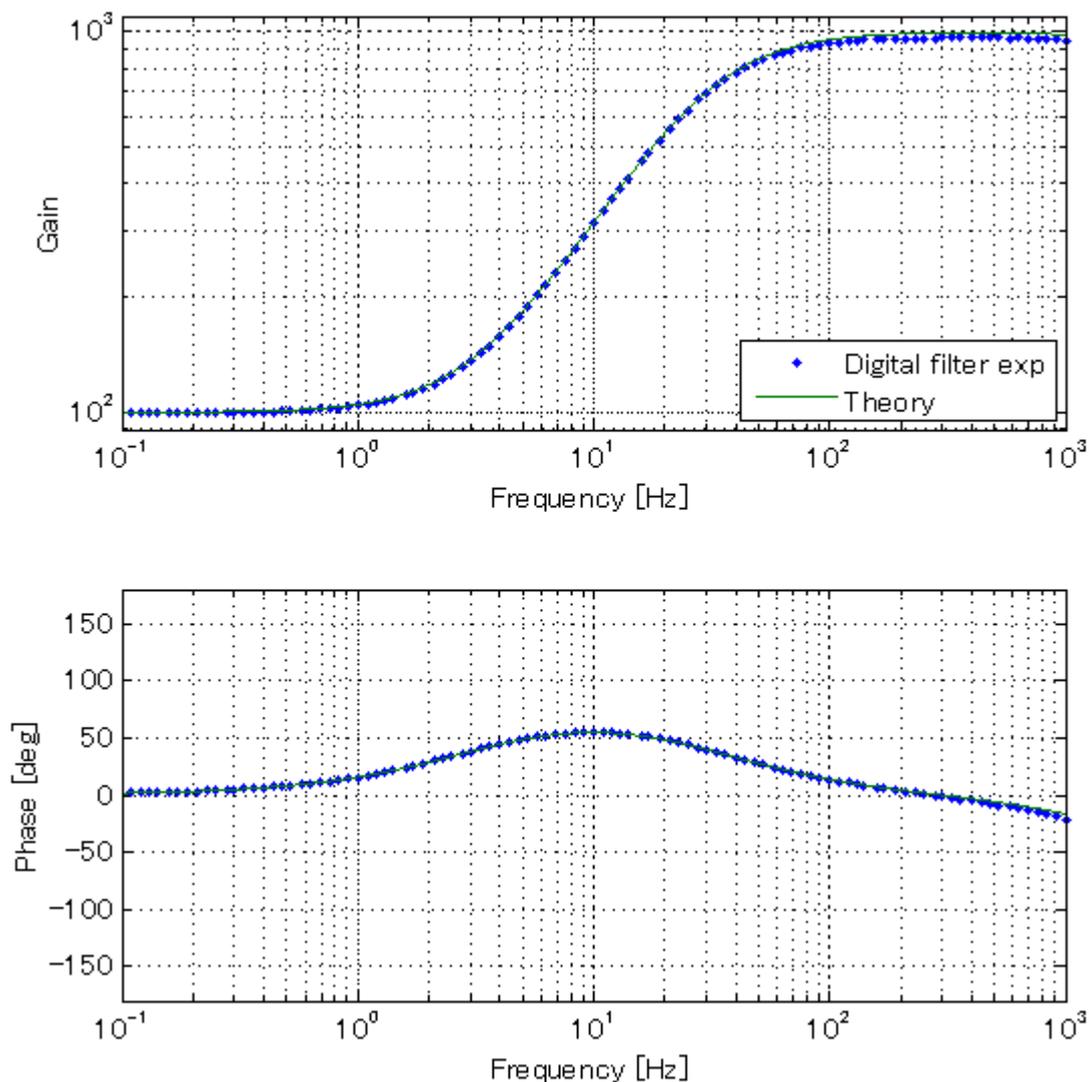


図 12: デジタルフィルタの伝達関数

### 2.6.2 デジタル系の全ノイズ

AD 変換に GND 入力し、フィルタを通した信号を DA 変換して出力したものからノイズを測定すると、デジタル系が出す全ノイズを測定することができる。その測定結果が図 13 である。

デジタルフィルタの影響でスペクトルの形が AD/DA 変換のノイズなどとは変わっているが、2.8 節に従って補正することで各自由度の振動測定への影響を算出することができる。

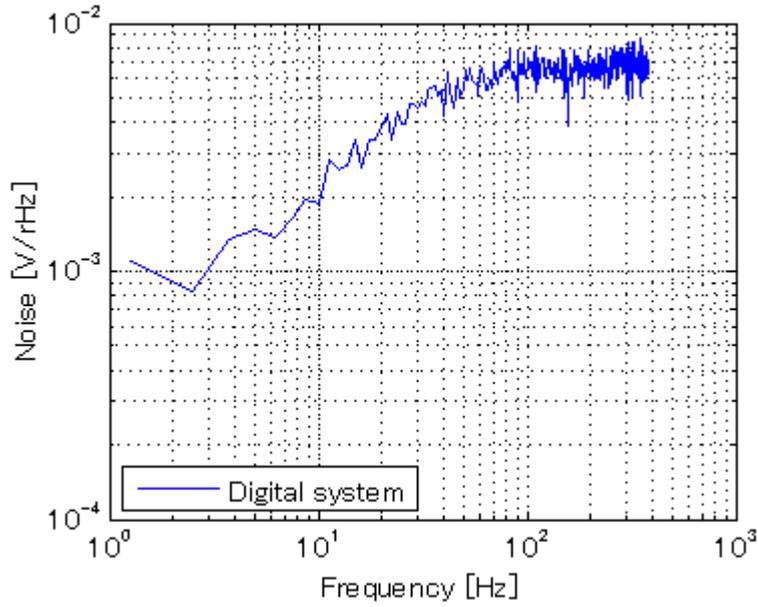


図 13: デジタル系を出すノイズ

## 2.7 オープンループ伝達関数

以上詳しく見てきた結果から、デジタル信号処理系でフォトセンサからの入力を3自由度に分離した直後の位置で測定されたオープンループ伝達関数は

$$G(f) = M_{pf}A(f)M'_{fp}H(f)M'_{cf}CD(f)M_{fc}F(f) \quad (17)$$

となる。ここで  $C$  はコイルドライバの伝達関数であるが、定数と考えてよい。各行列要素を代入すると  $G(f)$  は対角化されて

$$G(f) = CA(f)D(f)\text{diag}(16A'_{0x}H_{0x}(f)F_x(f), 8A'_{0\eta}H_{0\eta}(f)F_\eta(f), 8A'_{0\zeta}H_{0\zeta}(f)F_\zeta(f)) \quad (18)$$

と計算できる。

定数部分を  $A_{0i}$  と書き直すと結局、 $G(f)$  の各成分は

$$G_{ij}(f) = A(f)D(f)A_{0i}H_{0i}(f)F_i(f)\delta_{ij} \quad (19)$$

と表すことができる。 $A(f)$ 、 $D(f)$ 、 $F_i(f)$  はそれぞれ上で調べた通りなので結局、未知の部分は  $A_{0i}$  と  $H_{0i}(f)$  の2つのパラメータ  $f_{0i}$ 、 $Q_i$  だけとなる。各自由度のオープンループ伝達関数を測定したら、これら3つのパラメータを用いてフィッティングをすればよい。

## 2.8 各種ノイズの影響

各自由度の振動測定への各種ノイズの影響を考えるために、図14のようなモデルを考える。ここでは上で調べたノ

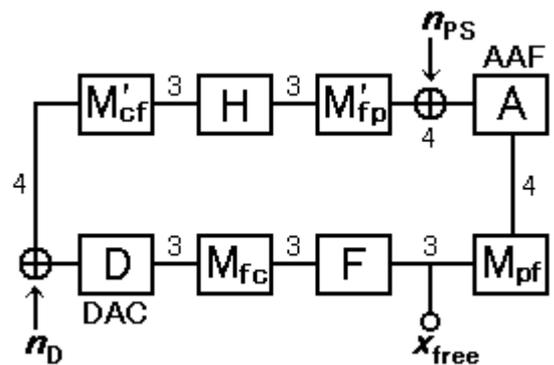


図 14: ノイズの混入モデル

イズのうち、寄与が大きいと考えられるフォトセンサの出すノイズ  $n_{PS}$  とデジタル系のノイズ  $n_D$  を考えた。これらのノイズはそれぞれを測定した場所に加わると考えてよい。

各自由度への寄与を  $x_{free}^{(n)}$  とおくと、このモデルでは

$$\mathbf{x}_{free}^{(n)} = M_{pf}A(f) \left( \mathbf{n}_{PS} + M'_{fp}H(f)M'_{cf} \left[ \mathbf{n}_D - D(f)M_{fc}F(f)\mathbf{x}_{free}^{(n)} \right] \right) \quad (20)$$

が成立し、 $\mathbf{x}_{free}^{(n)}$  について解くと

$$\mathbf{x}_{free}^{(n)} = (1 + G(f))^{-1} A(f)M_{pf}\mathbf{n}_{PS} + (1 + G(f))^{-1} A(f)M_{pf}M'_{fp}H(f)M'_{cf}\mathbf{n}_D \quad (21)$$

右辺第一項がフォトセンサノイズの寄与、第二項がデジタル系ノイズの寄与となる。

ただし、第一項と第二項の間の + は単純な和ではなく、ノイズの合成

$$n_{tot} = \sqrt{n_1^2 + n_2^2} \quad (22)$$

であり、また、行列  $M$  とノイズベクトル  $n$  の積の計算は以下のように行う。

$$(Mn)_i = \sqrt{\sum_{j=1}^4 (M_{ij}n_j)^2} \quad (23)$$

4つのフォトセンサや4つのデジタル系出力はそれぞれ同レベルのノイズを出していると考えられ、そのような場合は上の式は

$$(Mn)_i = \sqrt{\sum_{j=1}^4 (M_{ij})^2} n \quad (24)$$

としてよい。

### 3 制御性能の評価

前章により実験装置全体の特性がわかったので、ここでは実際に制御がかかる様子、制御の安定性やどこまで各自由度の振動を抑えることができたのかについて述べる。

#### 3.1 動作

図15は共振周波数の低い自由度から順に、すなわち yaw、x、pitch の順にフィードバック制御をかけた時の各自由度の変位の大きさの時間変化を示している。図16は pitch の制御をかけ始めた時間付近の拡大図である。それぞれ制御をかけると、対応する自由度の変位がきちんと0付近でロックされることがわかる。

また、x が大きく揺れている 8-10sec 付近では pitch も同じ周期で揺れてしまっていることなども確認できる。これはフォトセンサが理想的に配置されていないためにカップリングが起こって x 並進が pitch 回転として見えてしまっているためである。

なお、信号は V 単位であるが、式(11)の  $p$  を用いて変位に換算した。回転角の変位に換算する時は更にフォトセンサ間の距離  $d_{PS}$  を用いる。より具体的には V 単位の信号を  $4p = 12V/mm$  で割ると並進方向の変位の大きさに、さらに  $d_{PS}/2 = 22.5mm$  で割ると回転角の rad 単位での変位の大きさになる。

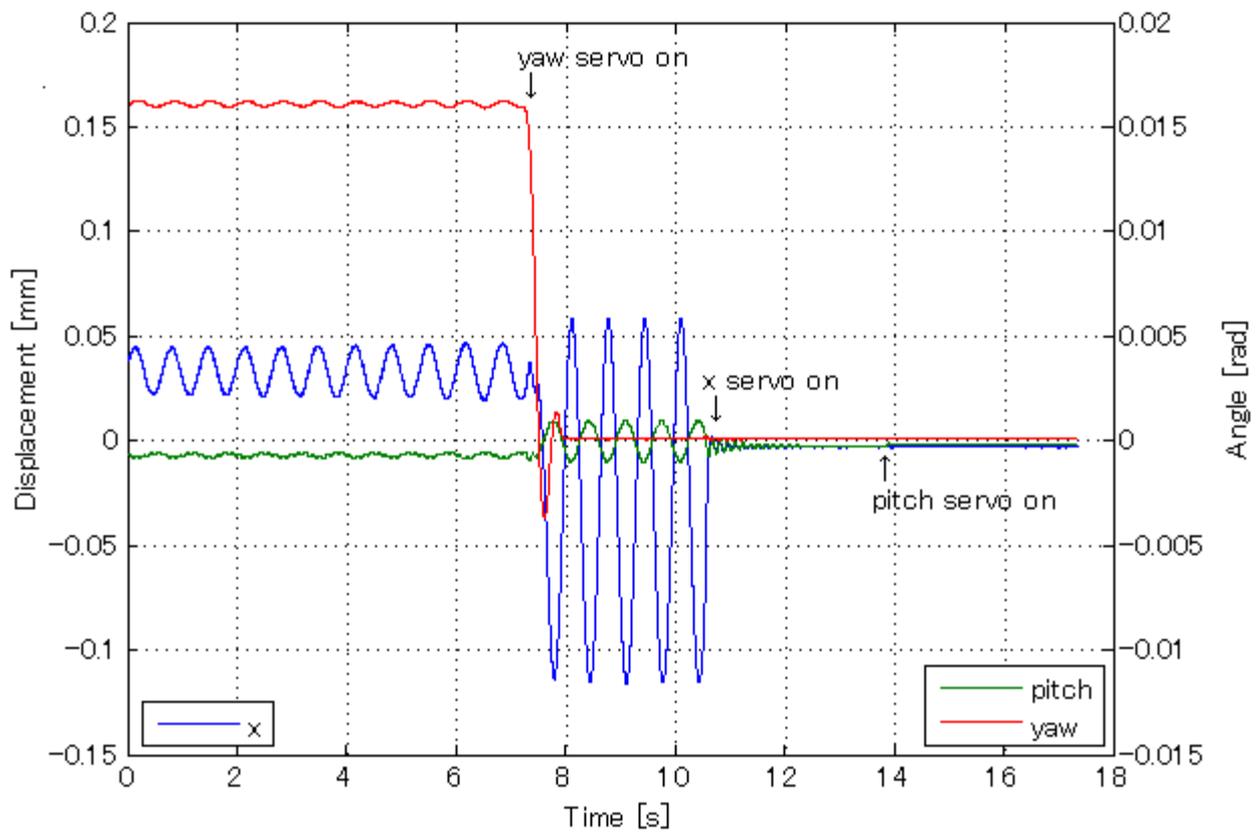


図 15: フィードバック制御前後の各自由度の変位の大きさ (x は左軸、pitch と yaw は右軸)

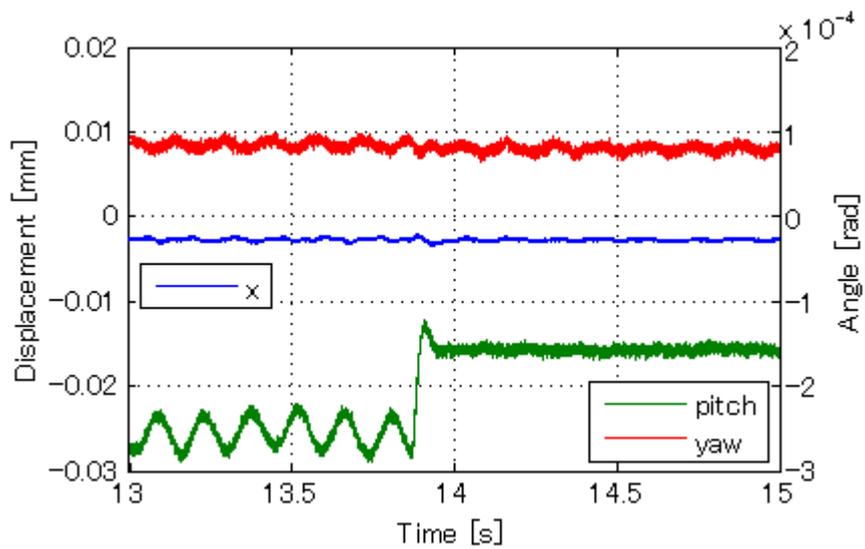


図 16: pitch servo on 付近の拡大図

### 3.2 各自由度のオープンループ伝達関数

2.7節で示したように各自由度のオープンループ伝達関数を測定し、実験値と  $f_{0i}$ 、 $Q_i$ 、 $A_{0i}$  の3つのパラメータを持つ理論曲線を最小二乗法によりフィッティングした<sup>7</sup>。その結果が図17、図18、図19である。

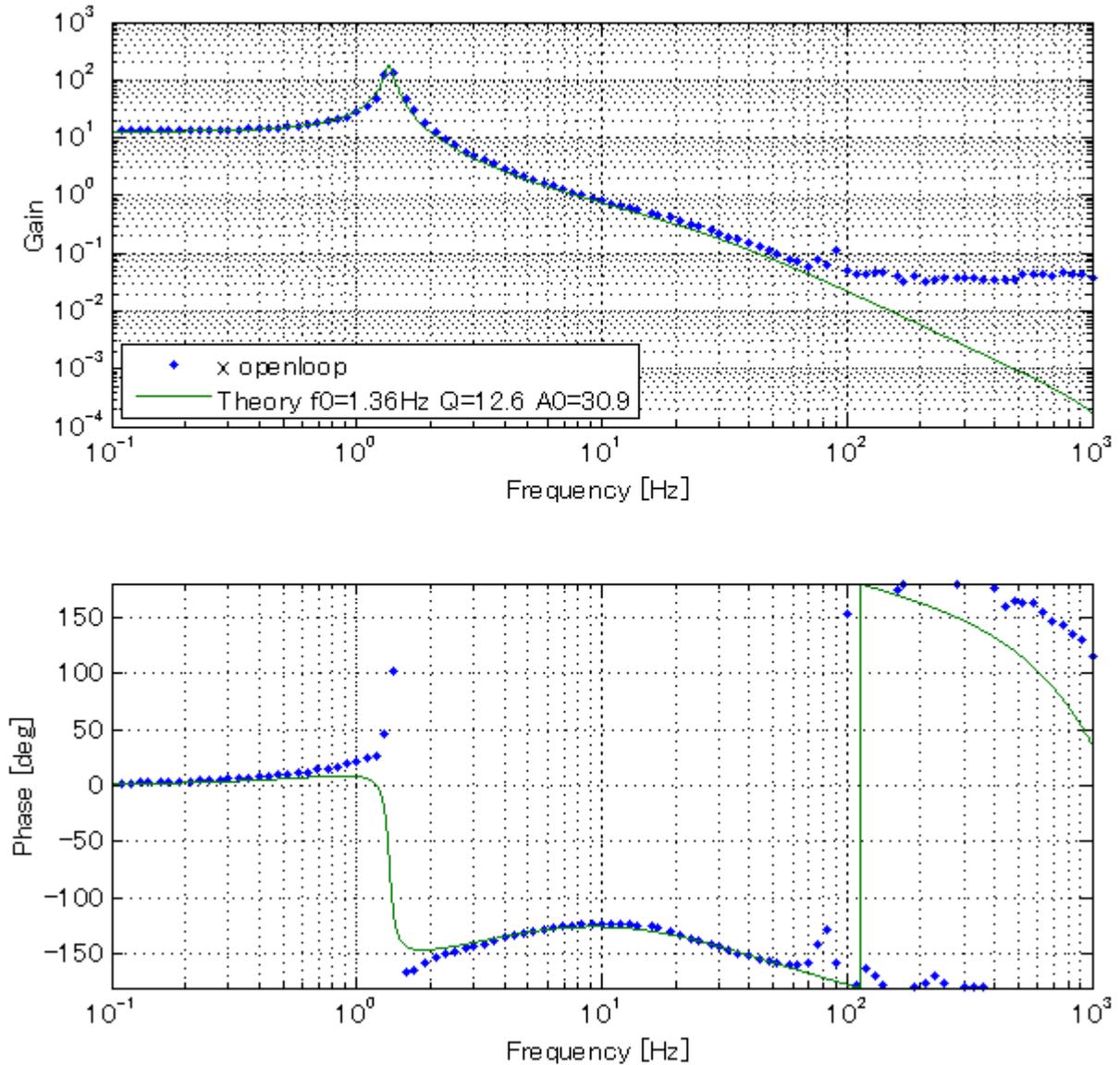


図 17: x 並進フィードバック系のオープンループ伝達関数

<sup>7</sup>10Hz 以下のゲインに関して最小二乗法を行った。

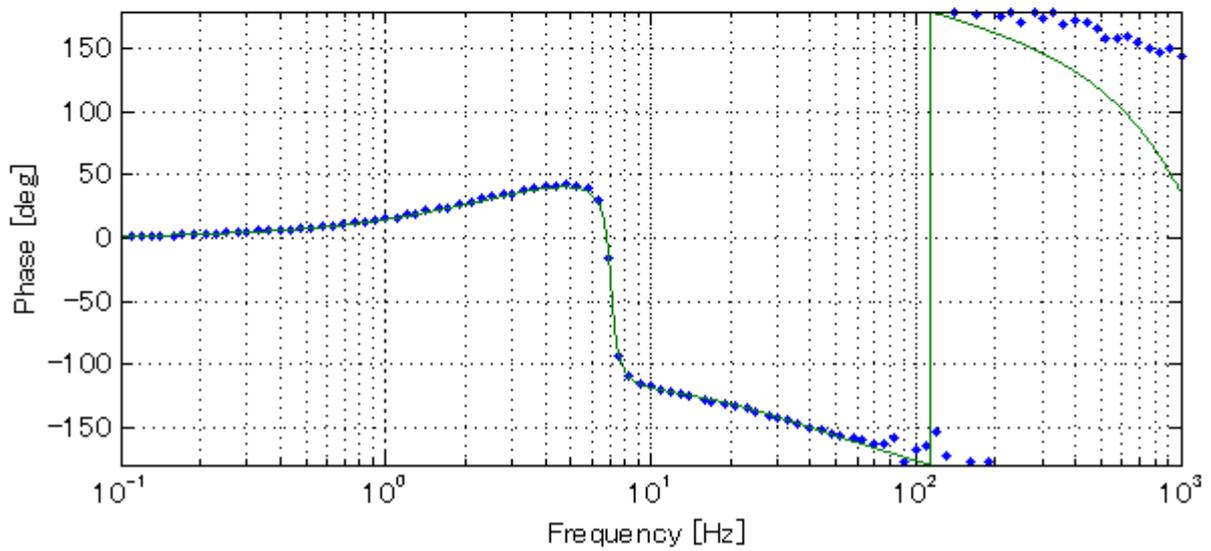
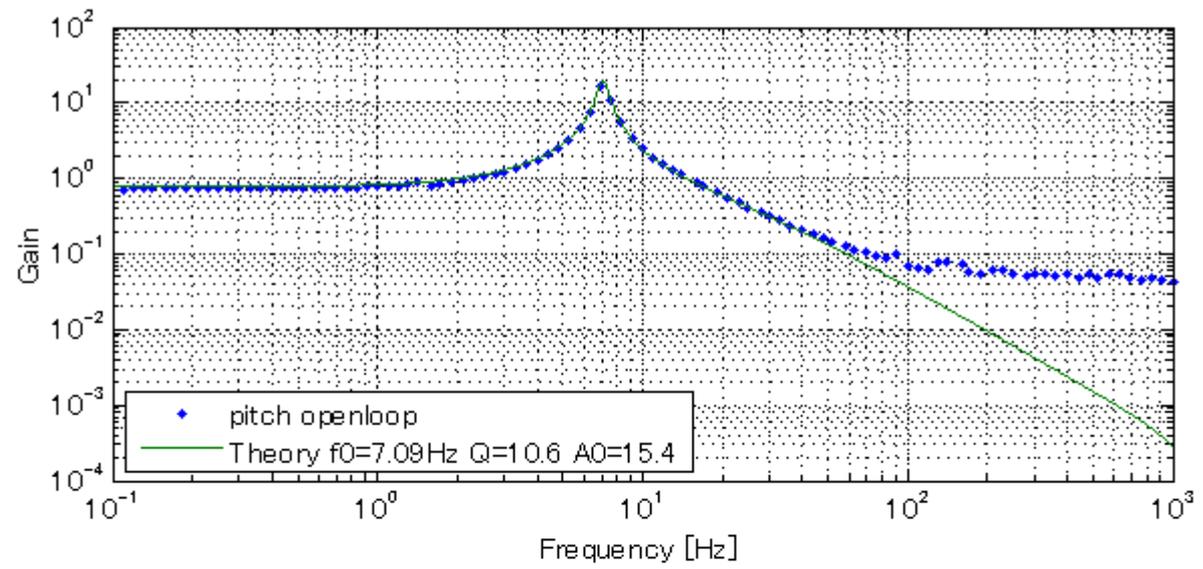


図 18: pitch 回転フィードバック系のオープンループ伝達関数

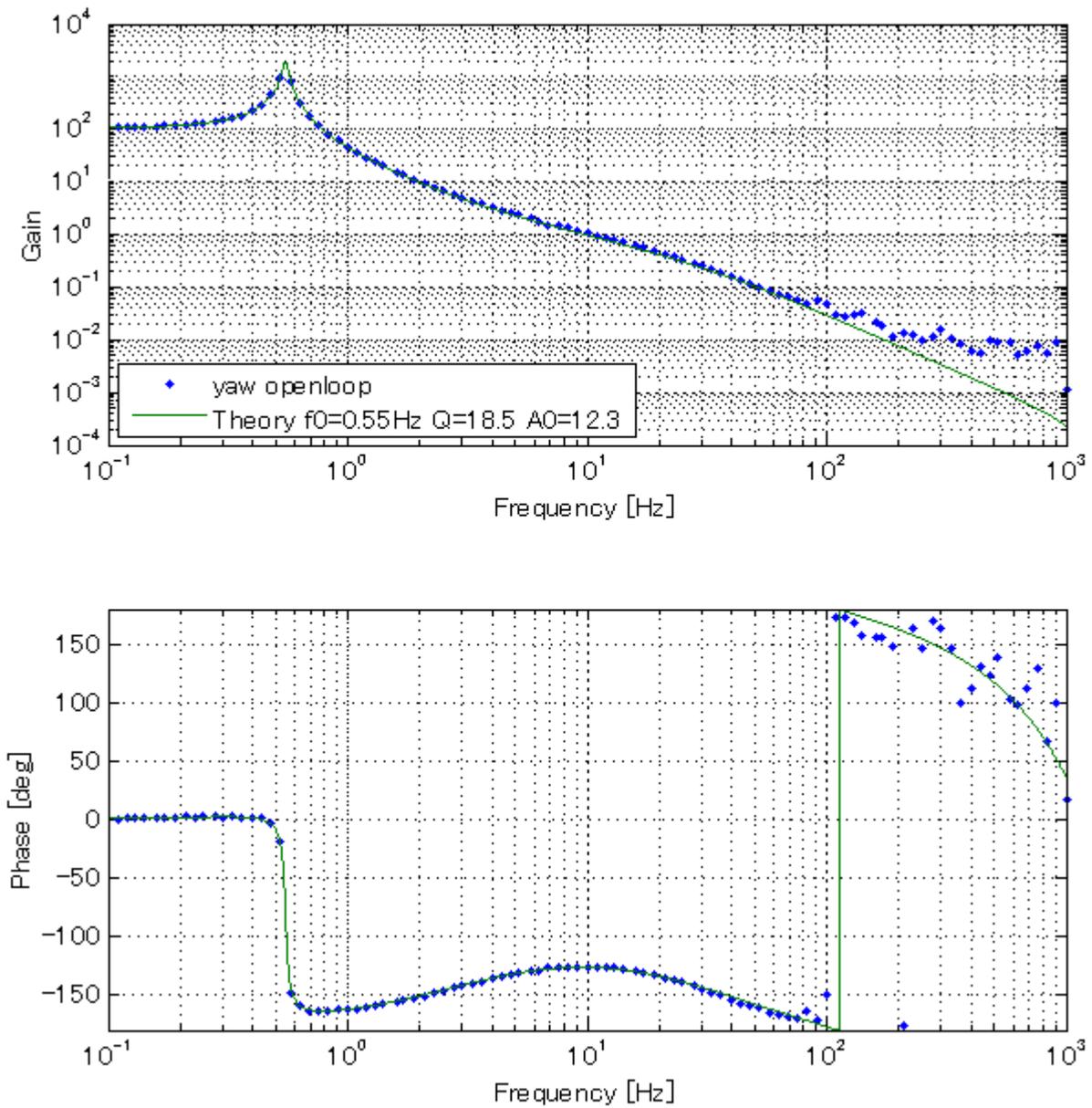


図 19: yaw 回転フィードバック系のオープンループ伝達関数

各自由度に対する 3 つのパラメータの値、UGF、位相余裕をまとめると次の表ようになる。

表 1: 各自由度のオープンループ伝達関数における各値

	$f_0$ [Hz]	$Q$	$A_0$	UGF [Hz]	位相余裕 [deg]
x	1.36	12.6	30.9	8	55
pitch	7.09	10.6	15.4	15	55
yaw	0.55	18.5	12.3	10	54

x、yaw に関しては安定な制御がかかっていると言えるが、pitch に関しては低周波数でのゲインが 1 を下回っ

ており、十分に制御できているとは言えない。これはマスが重心とは離れた位置で吊るされており、pitch 回転をさせるのに必要な力が大きく、コイルによって十分な力を加えることができないためである。しかし、共振周波数付近では制御がかかっており、共振を抑えることはできている。

また、x に関してはその共振周波数付近で位相が理論曲線と合っていない。コヒーレンスもこの位置で悪く、うまく測定できないことが推測される。スペクトラムアナライザの出す信号の大きさを変化させるなどをして何回か測定したが、 $f_{0x}$  も測定によって 0.2Hz 程度変動してしまうため、正確な値が出せていないと考えられる。

さらに、どの自由度に関しても 100Hz 以上で実験値と理論曲線が合っておらず、実験値が十分に小さくならならず一定値をとるように見える。スペクトラムアナライザからの信号を小さくするとこの一定値のレベルが上がること、細かくデータをとることで測定時間を長くするとレベルが下がることから S/N 比の問題だと推測されるが、コヒーレンスが悪くないのが不思議である。

### 3.3 各自由度の振動測定

補遺 A.4 のように各自由度の変位信号のパワースペクトルを算出し、距離に換算してプロットをすると図 20 のようになる。また、これを式 (8) に従って、3.2 節でフィッティングしたオープンループ伝達関数で補正し、制御が無かった場合のマスの元々の揺れの大きさに直したのが図 21 である。

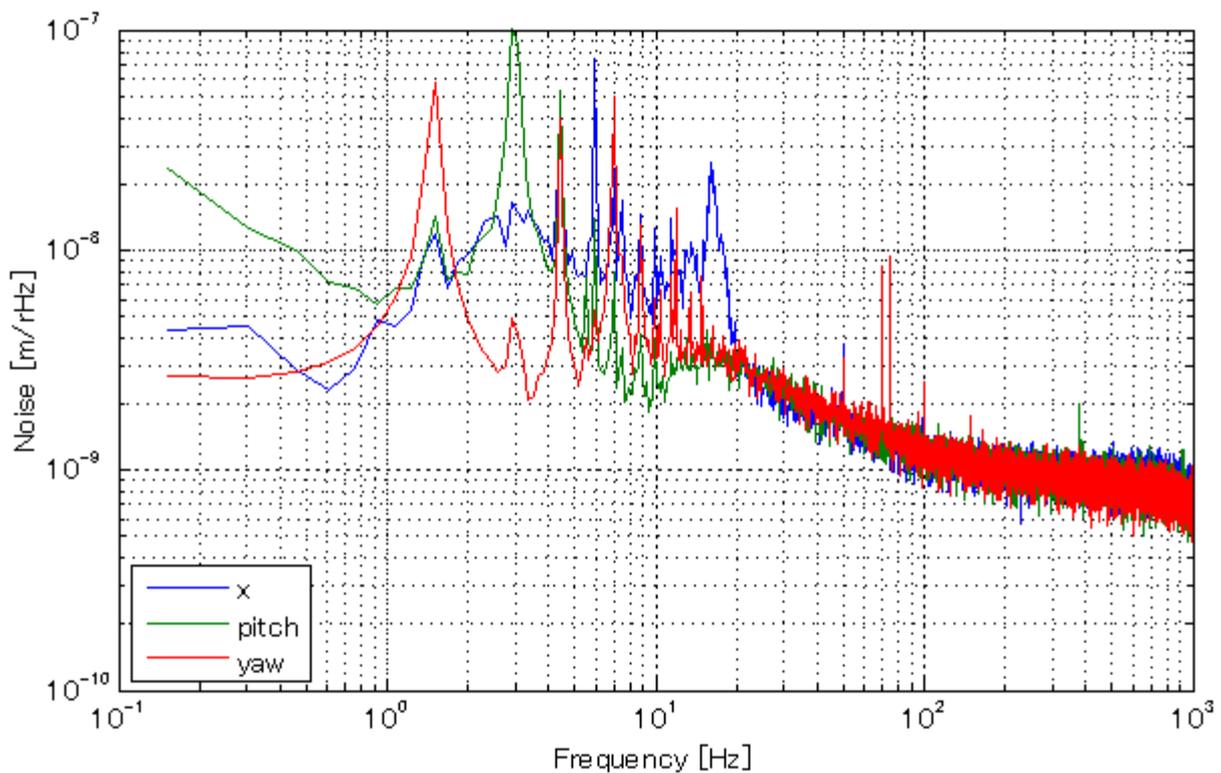


図 20: 各自由度の変位信号のパワースペクトル

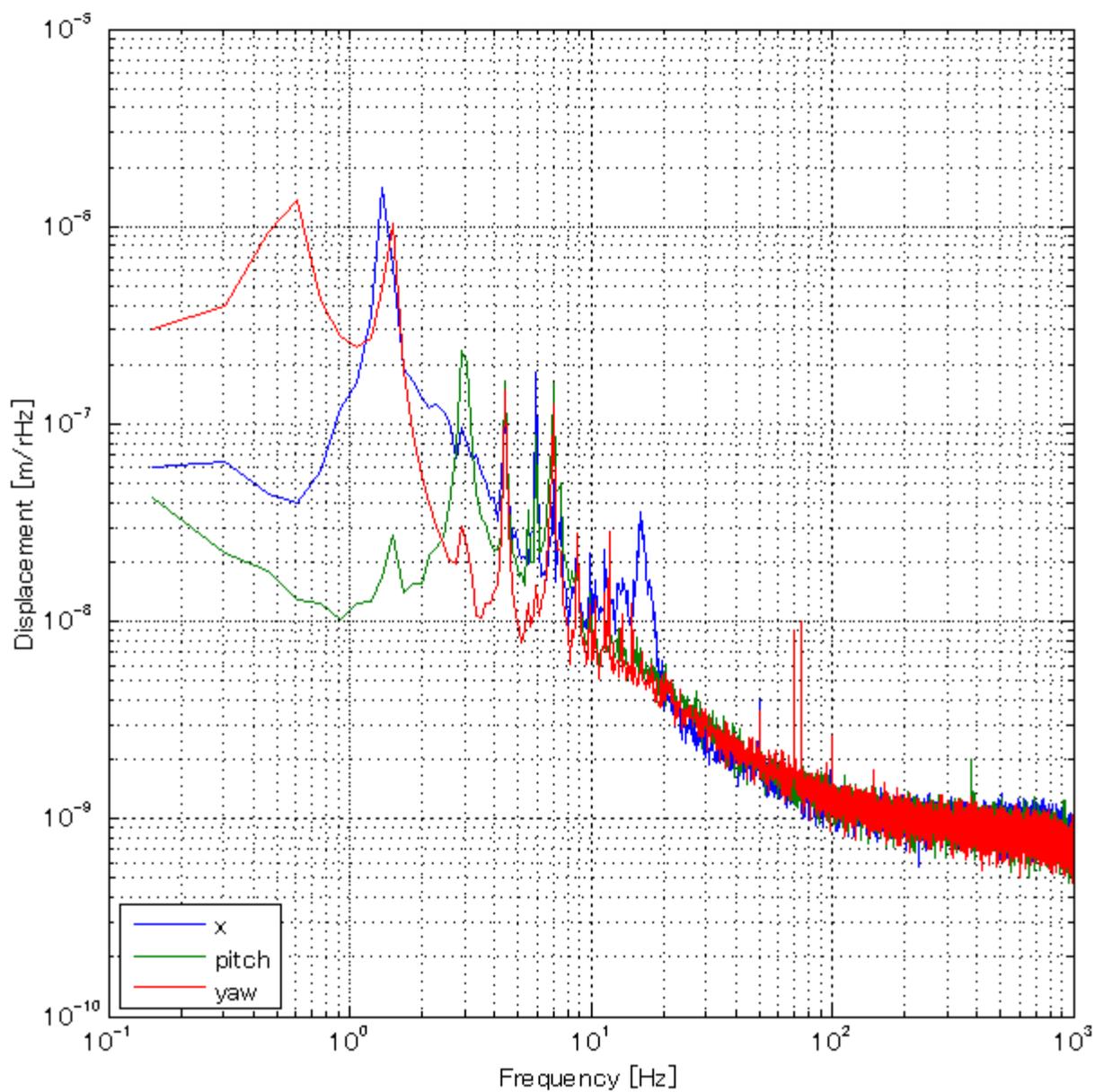


図 21: オープンループ補正によって得られた各自由度の元々の揺れ

表 2: 各自由度の RMS 振幅

	制御前	制御中
x	$7.1 \times 10^{-7} \text{m}$	$7.1 \times 10^{-8} \text{m}$
pitch	$1.8 \times 10^{-7} \text{m}$ ( $8.2 \times 10^{-6} \text{rad}$ )	$7.9 \times 10^{-8} \text{m}$ ( $3.5 \times 10^{-6} \text{rad}$ )
yaw	$8.6 \times 10^{-7} \text{m}$ ( $3.8 \times 10^{-5} \text{rad}$ )	$6.1 \times 10^{-8} \text{m}$ ( $2.7 \times 10^{-6} \text{rad}$ )

RMS 振幅を算出すると表 2 のようにまとめられる。

特に重要となる  $x$  に関して見てみると、制御前はレーザーの半波長程度あった揺れが、その 10 分の 1 に抑えられていることがわかる。どの自由度に対しても、制御によってレーザーセンサへ移行するのに十分小さい揺れに抑えられていることが確認できる。

次に制御中の RMS 振幅は何によって決まるのかを考えるために、各ノイズがどの程度影響しているのかを 2.8 節に従って、特に  $x$  の振動測定に関して計算し、まとめたのが図 22 である。考えている周波数範囲においてはデジタル系ノイズは測定の感度を決定しているとは言えないが、フォトセンサノイズは 40Hz 程度より周波数の高い領域で感度を制限してしまっていることがわかる。20Hz 程度以下では考えているどのノイズも感度をリミットしておらず、揺れの大きさが測定できている。特に他の自由度でも見られる 1.5Hz のピーク、7Hz のピークは制御していない  $y$  並進、roll 回転の揺れが見えているものだと考えられる。

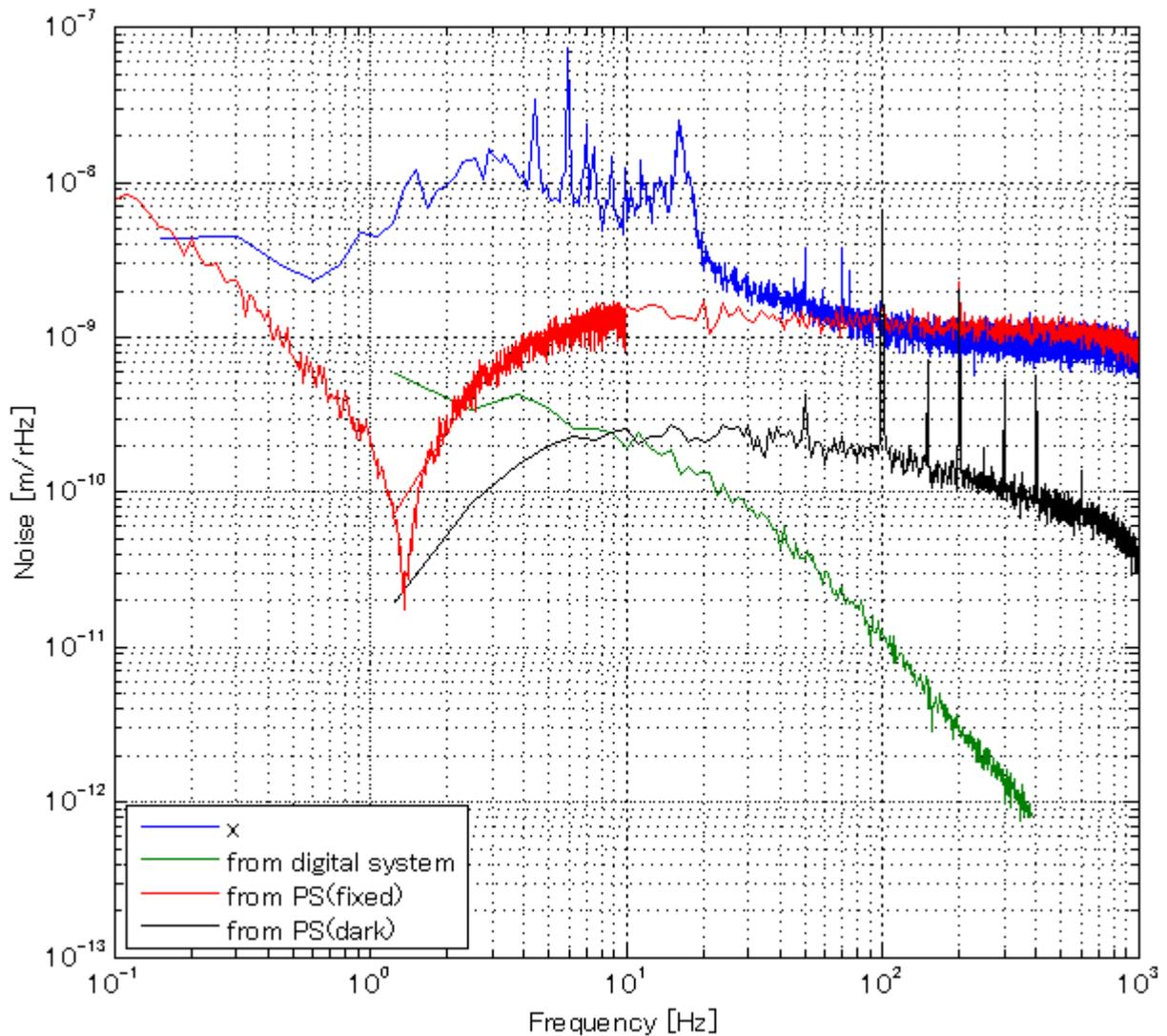


図 22:  $x$  の振動測定に対する各ノイズの影響

## 4 まとめ

我々は4つのフォトセンサと4つのコイルマグネットアクチュエータを用いて、懸架マスの安定的な3自由度デジタル制御に成功した。これにより pitch 回転の発振を起こさずに、x 並進、yaw 回転の振動を10分の1程度に抑えることができた。特に x 並進に関して、制御中の残留振幅が RMS で  $7.1 \times 10^{-8}\text{m}$  とレーザーの波長の約20分の1になっており、レーザーセンサへと移行させることができる程度まで静止させることができた。

この残留振幅の大きさは高周波成分に関してはフォトセンサノイズが決めてしまっているが、20Hz 程度以下の低周波ではノイズの限界に達していない。そのため、さらにオープンループゲインを高めることで残留振幅を小さくすることも可能である。

今回は3自由度のみの制御であり、フォトセンサやコイルの配置によっては制御していない y 並進や roll 回転に発振が起こってしまうこともあった。これを起こさないようにするためにはさらにフォトセンサとコイルを増やし、z を除く5自由度全てを制御できるようにすればよい。今回も見られたような、自由度間のカップリングを評価することも重要である。

この実験の最終的な目標はレーザーセンサによる制御を行うことであり、また DPF の 0.1Hz における目標感度である  $10^{-13}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$  が宇宙において実現できることを示すことである。そのためには真空槽への移行やレーザーセンサ単体のノイズ評価が必要となってくる。

## A 補遺

### A.1 試験マスおよびタングステンワイヤの寸法、物性値

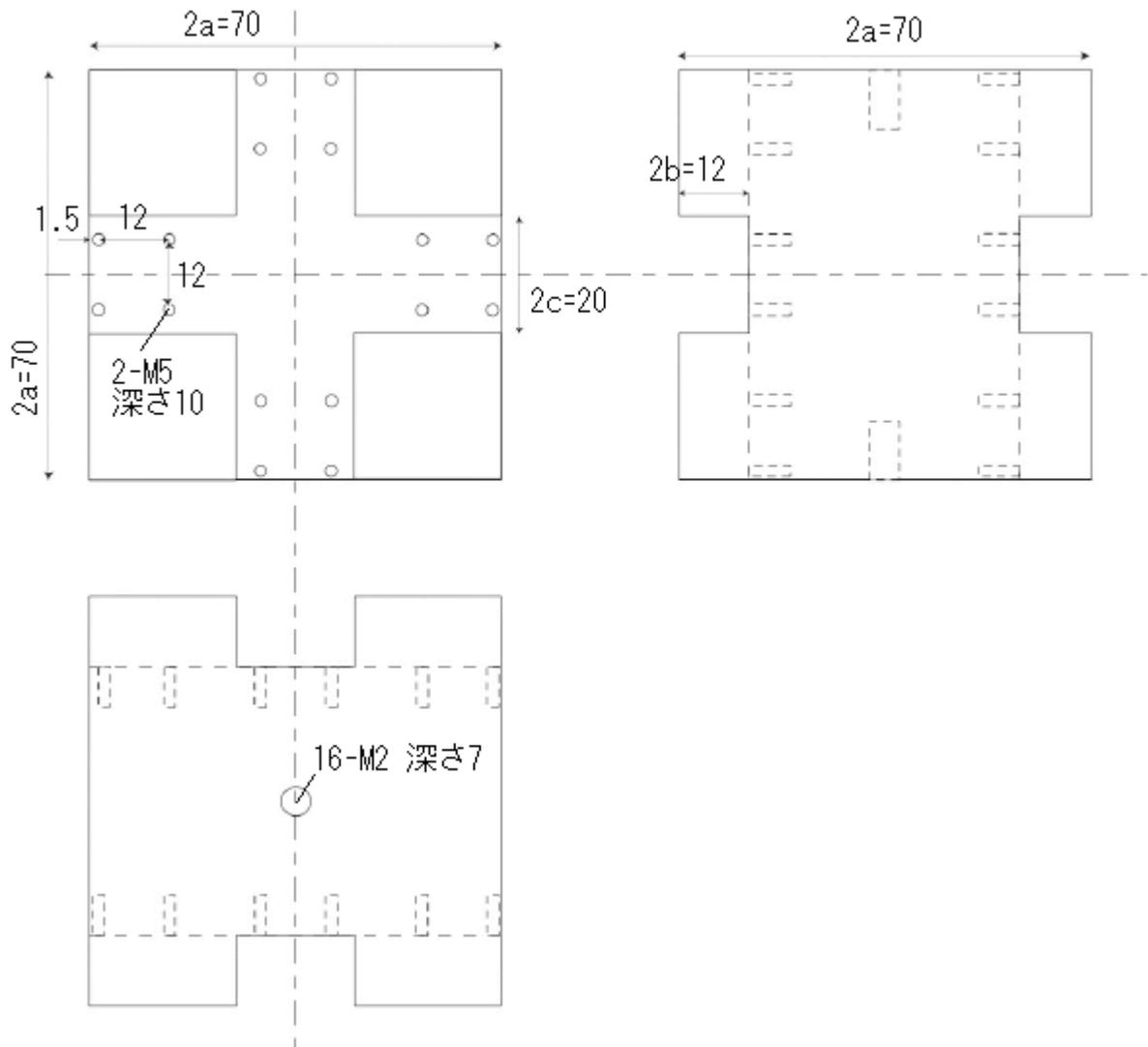


図 23: マスの設計図 (単位は全て mm)

マスの寸法は図 23 の通りである。穴の体積は無視してアルミニウムの密度  $\rho = 2.7\text{g/cm}^3$  から質量を計算すると

$$M \simeq 0.77\text{kg}$$

となる。

タングステンワイヤに関する各値は以下の通りである。

ワイヤの長さ	$l = 51\text{mm}$
ワイヤの半径	$r = 0.2\text{mm}$
タングステンの剛性率 <sup>8</sup>	$G = 156\text{GPa}$
ねじれ定数	$\kappa = \frac{\pi Gr^4}{2l} = 7.7 \times 10^{-3}\text{Nm}$
ワイヤを支持するクランプの長さ	$a' = 23.2\text{mm}$

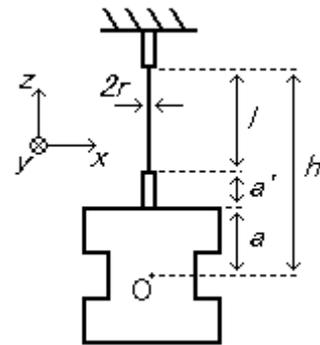


図 24: 記号と示す長さの対応関係

## A.2 振り子の共振周波数

ここでは各自由度の共振周波数を計算により求めてみる。

### A.2.1 直方体の慣性モーメント

まず一般に、図 25 のような直方体の、中心軸と平行で  $d$  だけ離れた  $z$  軸のまわりの慣性モーメントを考える。直方体の中心軸が  $(x, y) = (\alpha, \beta)$  にあるとすると、 $d = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  である。

直方体の密度を  $\rho$  とおくと、求める慣性モーメントは

$$I = \int \rho(x^2 + y^2) dV$$

$$= \rho \int_{\alpha-a}^{\alpha+a} x^2 dx \int_{\beta-b}^{\beta+b} dy \int_{-c}^c dz + \rho \int_{\alpha-a}^{\alpha+a} dx \int_{\beta-b}^{\beta+b} y^2 dy \int_{-c}^c dz$$

$x - \alpha = X$  とおくと第一項は

$$\rho \int_{-a}^a (X + \alpha)^2 dX \int_{\beta-b}^{\beta+b} dy \int_{-c}^c dz = \rho \frac{(a + \alpha)^3 - (-a + \alpha)^3}{3} \cdot 2b \cdot 2c$$

$$= 8\rho abc \left( \frac{a^2}{3} + \alpha^2 \right)$$

第二項も同様に計算できること、直方体の質量  $M = 8\rho abc$  を用いると結局、

$$I = M \left( \frac{a^2}{3} + \alpha^2 + \frac{b^2}{3} + \beta^2 \right) = M \left( \frac{a^2 + b^2}{3} + d^2 \right)$$

### A.2.2 $y$ 軸、 $z$ 軸まわりのマスの慣性モーメント

今回用いたマスはその対称性から  $y$  軸まわりの慣性モーメント  $I_y$  と  $z$  軸まわりの慣性モーメント  $I_z$  は等しい。マスは直方体の組み合わせで考えることができるので、A.1 で示した各値を用いて慣性モーメントを計算すると

$$I_y = I_z = \rho(2a - 4b)(2a)^2 \frac{(a - 2b)^2 + a^2}{3} + 8\rho(2b(a - c)^2) \left[ \frac{b^2 + \left(\frac{a-c}{2}\right)^2}{3} + (a - b)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \right]$$

$$= 5.84 \times 10^{-4} \text{kgm}^2$$

<sup>8</sup>MatWeb (<http://www.matweb.com/>) より。

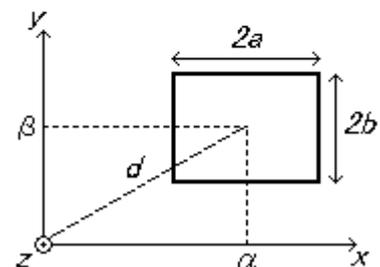
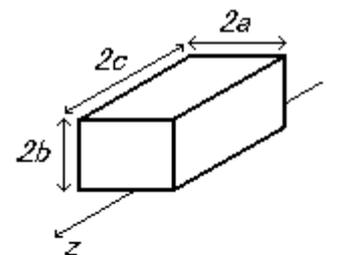


図 25: 直方体

### A.2.3 x の共振周波数

x の共振周波数はマスの剛体振り子モードの共振周波数と等しいと考える。 $h = l + a + a'$  とおくと、マスを吊るすワイヤの天井における支持点を通る軸  $(x, z) = (0, h)$  のまわりのマスの慣性モーメントは

$$I_{RB} = I_y + Mh^2$$

とかけ、共振周波数は

$$f_{0x} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mgh}{I_{RB}}} = 1.46\text{Hz}$$

### A.2.4 pitch の共振周波数

静止状態から y 軸の周りに  $\eta$  だけ微小回転させたときの復元力から運動方程式を求める<sup>9</sup>。静止時の重心からマス側のワイヤ支持点までの動径ベクトルと、ワイヤの張力ベクトルは

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a + a' \end{pmatrix}, \quad \mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Mg \end{pmatrix}$$

である。

$\eta$  だけ回転した時、動径ベクトルは

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \cos \eta & 0 & \sin \eta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \eta & 0 & \cos \eta \end{pmatrix} \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} (a + a')\eta \\ 0 \\ a + a' \end{pmatrix} + O(\eta^2)$$

となるが、ワイヤの長さは

$$l' = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} - \mathbf{r} \right| = \sqrt{(a + a')^2 \eta^2 + (h - (a + a'))^2} \simeq l + \frac{(a + a')^2 \eta^2}{2l}$$

で  $\eta$  の 1 次のオーダーで伸びないので張力は

$$\mathbf{T} = \frac{Mg}{l} \begin{pmatrix} -(a + a')\eta \\ 0 \\ l \end{pmatrix}$$

となる。

よって pitch 回転に関する運動方程式は

$$I_y \ddot{\eta} = (\mathbf{r} \times \mathbf{T})_2 = -\frac{Mgh(a + a')}{l} \eta$$

となるので共振周波数は

$$f_{0\eta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{Mgh(a + a')}{I_y l}} = 6.39\text{Hz}$$

<sup>9</sup>[4] の補遺 B を参考にした。

### A.2.5 yaw の共振周波数

ねじれ定数  $\kappa$  を用いて yaw 回転の運動方程式を立てると

$$I_z \ddot{\zeta} = -\kappa \zeta$$

となるので共振周波数は

$$f_{0\zeta} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{I_z}} = 0.58\text{Hz}$$

### A.3 各回路図

#### A.3.1 フォトセンサドライバ

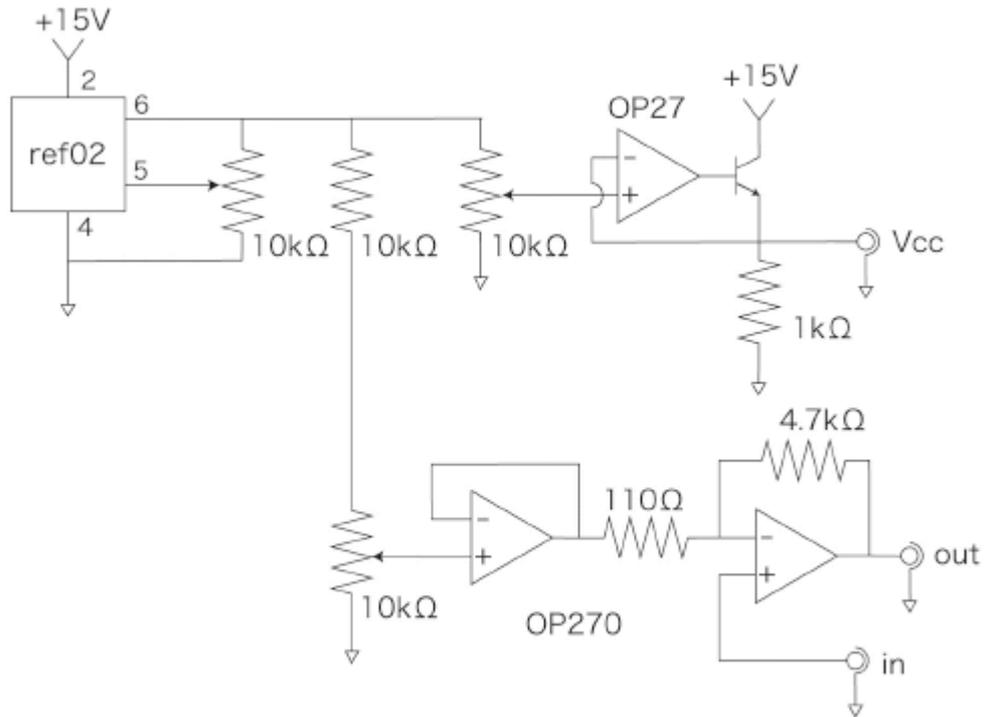


図 26: フォトセンサドライバの回路図 A

回路図 A の  $V_{cc}$  がフォトセンサの電源となり、回路図 B の  $V_{cc}$  in に繋がれている。回路図 B のフォトトランジスタの出力 PS out は回路図 A の in と接続しており、オフセットとの差分をとって out に出力され、アンチエイリアシングフィルタへと繋がれる。

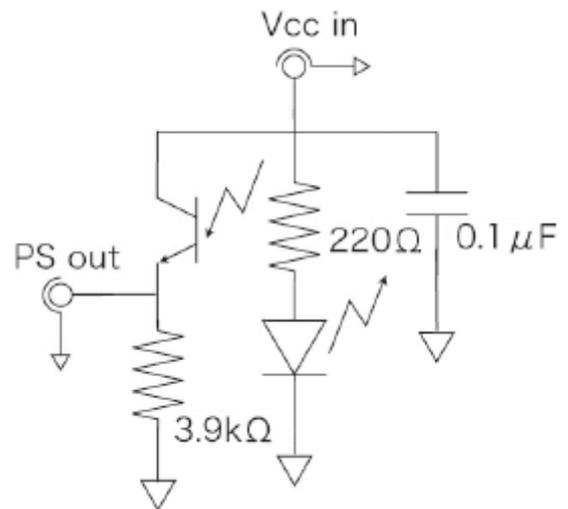


図 27: フォトセンサドライバの回路図 B

### A.3.2 アンチエイリアシングフィルタ

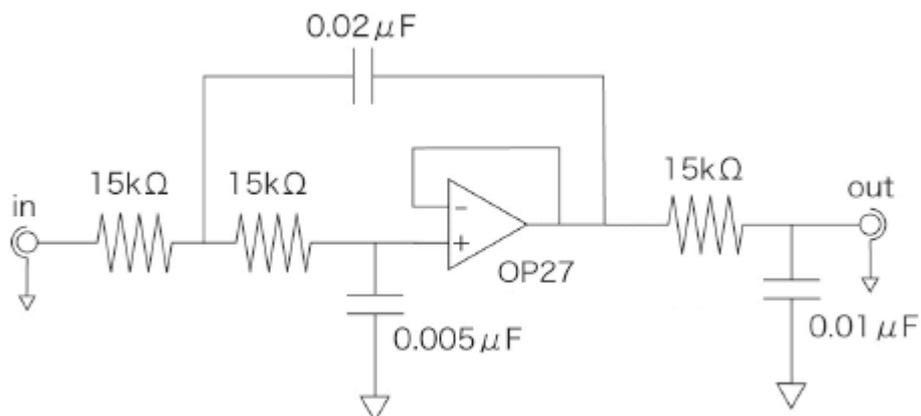


図 28: アンチエイリアシングフィルタの回路図

$R = 15\text{k}\Omega$ 、 $C = 0.01\mu\text{F}$  とすると、このローパスフィルタは  $R$ 、 $2C$ 、 $C$ 、 $C/2$  のみで構成されており、

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

がカットオフ周波数となる。

### A.3.3 コイルドライバ

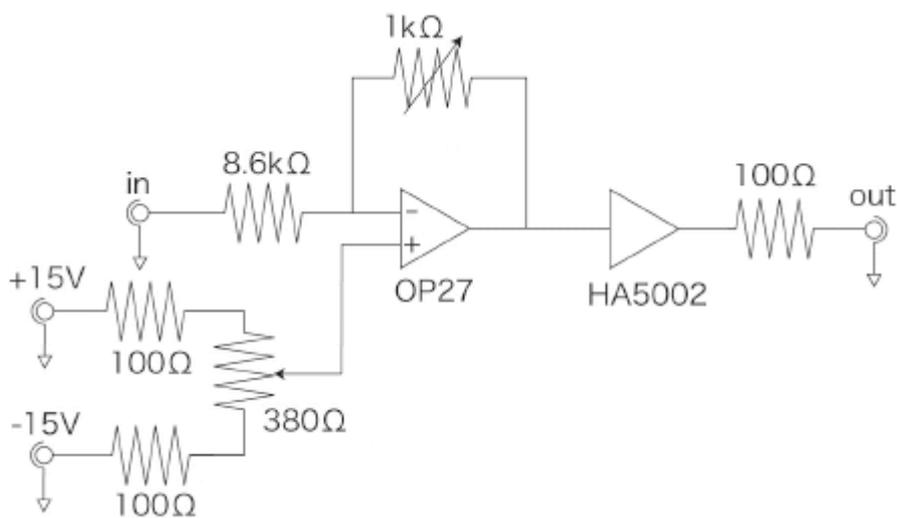


図 29: コイルドライバの回路図

オフセット電圧を入れることのできる回路になっているが、今回はオフセットは入れていない。

### A.3.4 デジタル信号処理系

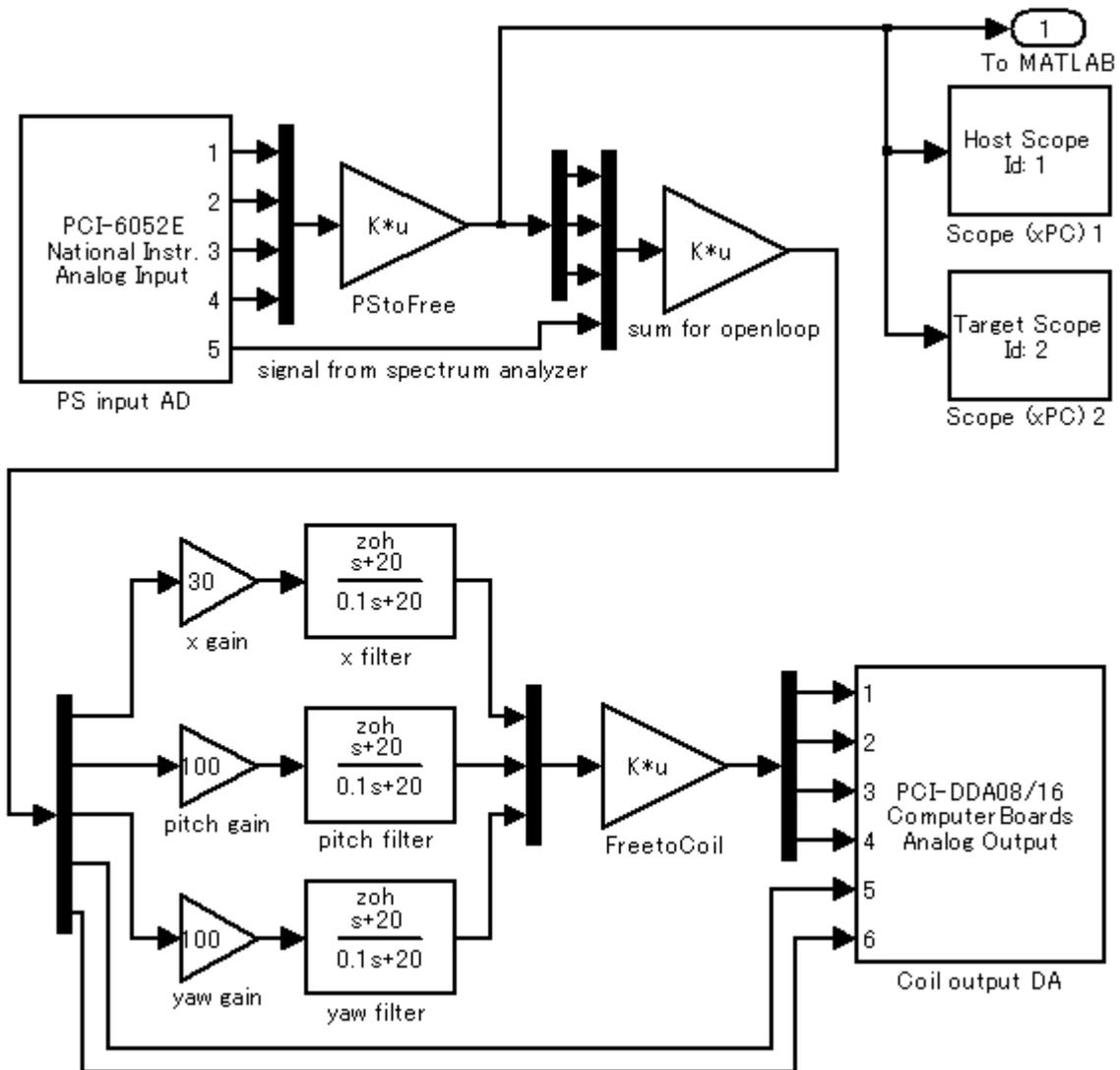


図 30: デジタル信号処理系の Simulink モデル

行列ゲイン  $PStoFree$  が  $M_{pf}$ 、 $FreetoCoil$  が  $M_{fc}$  に対応している。

“To MATLAB”は出力端子であり、自由度に分離した後の信号を保存する。保存されたデータはホスト PC へ送られ、解析に用いられる。Host Scope、Target Scope はそれぞれホスト PC、ターゲット PC 上でオシロスコープのように信号の変化を表示するブロックである。

また、Analog Input の入力 5 はオープンループ伝達関数を測る時の、スペクトラムアナライザからの信号を受ける端子である。行列ゲイン  $sum\ for\ openloop$  によって作られる Analog Output の出力 5、出力 6 をスペクトラムアナライザに入力することでオープンループ伝達関数が測定できる。例えば、 $x$  のオープンループ伝達関数

を測定する場合は sum for openloop を

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすればよい。

#### A.4 パワースペクトルおよびRMS 振幅

ここでは時系列データ  $x(j)$  からパワースペクトルおよび RMS 振幅を算出する方法について述べる<sup>10</sup>。  
 $x(j)$  の離散フーリエ変換を  $X(k)$  とすると

$$X(k) = \sum_{j=1}^N x(j) \exp\left(-\frac{2\pi i(j-1)(k-1)}{N}\right)$$

$$x(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N X(k) \exp\left(\frac{2\pi i(j-1)(k-1)}{N}\right)$$

であり、離散フーリエ変換における Parseval の定理は

$$\sum_{j=1}^N |x(j)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |X(k)|^2$$

である。

平均パワーは、サンプリング時間を  $T_s$  とすれば測定時間は  $NT_s$  となるから

$$\overline{x^2(j)} = \frac{1}{NT_s} \sum_{j=1}^N |x(j)|^2 T_s = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N |x(j)|^2$$

よって Parseval の定理を用いると

$$\overline{x^2(j)} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N |X(k)|^2$$

パワースペクトル密度とは「平均パワーへの各周波数成分からの寄与」なので、周波数分解能が  $\frac{f_s}{N}$  であることより

$$\overline{x^2(j)} = \sum_{k=1}^N P(k) \frac{f_s}{N}$$

と書けるから

$$P(k) = \frac{|X(k)|^2}{N f_s}$$

実際には  $x(j)$  をいくつか分割し、それぞれに対して得られたパワースペクトルを平均してプロットしている。プロットでは  $\sqrt{P(k)}$  を用いるため、その単位が  $V/\sqrt{\text{Hz}}$  のようになる。

また、パワースペクトル  $P(k)$  から RMS 振幅を求めるには

$$x_{\text{rms}} = \sqrt{\overline{x^2(j)}} = \sqrt{\sum_{k=1}^N P(k) \frac{f_s}{N}}$$

を計算すればよい。このとき  $k=1$  が  $f=0$ 、すなわち DC 成分に対応している場合は和を取る範囲を  $k=2$  からとすることに注意する。

<sup>10</sup>ここでの議論は [5] の第 2 章が参考になる。

## 参考文献

- [1] 新谷昌人：修士論文「レーザー干渉計を用いた高感度地震計の開発」、1992
- [2] 谷口信介：「アナログ信号光伝達システムの性能評価」、1998
- [3] 「トランジスタ技術 SPECIAL No.44 特集 フィルタの設計と使い方」、CQ 出版、1994
- [4] 新井宏二：修士論文「基線長 300m レーザー干渉計型重力波検出器のための懸架システムの開発」、1992
- [5] 坪野公夫、安東正樹、麻生洋一：物理学実験 II テキスト「ブラウン運動」、2002

## 感想

とにかく楽しい半年間でした。

我々がデジタルシステムに移行したのは6月に入ってからのことでしたが、それまでの間に磁気浮上の装置や地震研から譲り受けた装置で、フィードバック制御の基本を学びました。アナログ回路での制御をしっかりとった上で、デジタル制御に移行できたのは本当に良かったと思います。

レポートはこれから特別実験を行う人が参考にしやすいように書いたつもりです。特に、関連する参考文献への橋渡しができるように、本文のどこと参考文献のどの部分が関連するのかというところをなるべく脚注で書くようにしました。

まだまだ課題は残っていますが、実験をこのようにひとまずまとめることができたのは、研究室やその他多くの皆さんに支えていただいたおかげです。

鋭い指摘と的確なアドバイスで我々の実験を導いてくださった麻生洋一さん、何もわからなかった我々に制御の考え方や装置の使い方など基礎を教えてくださった穀山渉さん、ありがとうございました。学会参加という大変貴重な機会を与えてくださり、様々に支援をしてくださった坪野公夫先生、ありがとうございました。

実験を発案してくださった法政大学の佐藤修一さん、実験装置を快く提供してくださった地震研の新谷昌人さん、ありがとうございました。安東正樹さんを始めとする DECIGO ワーキンググループの皆様にはいろいろとお世話になりました。ありがとうございました。

マスの改造などに素早く対応してくださり、鏡面加工の指示をしてくださった工作室の大塚茂巳さん、ありがとうございました。仕事の速さと部品の出来上がりには驚嘆いたしました。

坪野研の院生の方々にも、もちろんお世話になりました。石徹白晃治さん、高橋走さん、岡田健志さん、松本伸之さん、ありがとうございました。

最後に、共同実験者の正田さん、ありがとうございました。

