

実験のレポート 「連続重力波のデータ解析」

91537H 斎藤 理

2000年度冬学期

1 Introduction

地球から遠く離れているパルサーが放出している重力波を、重力波干渉計を使って検出する。以下に重力波干渉計で得られたデータの解析の流れを概説する。

1.1 Calibration

重力波が来ると干渉計の腕の長さが変動する。これを、ある期間にわたって測定する。その期間内の各時刻ごとに腕の長さが測定されて、時系列のデータが得られる。しかし、腕の長さの変動が直接、重力波の振幅に比例するわけではない。腕の長さの変動を重力波の振幅の大きさに読み替えることが必要である。これを行う方法が calibration である。

1.2 データ圧縮

calibration 後の時系列データはデータの量が多すぎて、Fourier 変換ができない。そのためにデータを圧縮する必要がある。

データ圧縮の方法のひとつに CHT 法がある。時系列データに $e^{-i\omega T}$ を掛けると、そのデータを fourier 変換して得られるグラフは、もとのデータのグラフを $-\omega$ だけ平行移動したものとなる。このことを利用して、まず、興味のある周波数領域を原点付近に平行移動させて、ローパスフィルターをかけることによってデータを圧縮する。

1.3 Amplitude correction と Doppler correction

地球の自転、公転によって、干渉計とパルサーの相対位置が時間変化する。そのため、2つの問題が生じる。

- 重力波干渉計は重力波の来る方向によって感度が異なるので、感度が時間変化してしまう。これは重力波の振幅に影響する。
- 干渉計とパルサーとの相対速度の変化により、ドップラーシフトが起こる。これは重力波の周波数に影響する。

これら2つを補正する必要がある。なお、これらの補正は、圧縮されたデータに対して行えば良い。

1.4 統計的解析

上の処理をされた時系列データに FFT を施し、パワースペクトルを求めて、統計的解析を行う。解析は短期間の解析と長時間の解析が行われる。長時間の解析については Amplitude correction と Doppler correction は考慮しなくても差し支えない。

以下に Amplitude correction と Doppler correction , フィルターについて述べる。

2 Amplitude correction と Doppler correction

重力波干渉計は重力波の入射方向により感度が異なる。感度の良い時のデータと悪い時のデータとは価値が異なる。そこで、得られたデータに重みをつけることによって、感度の変化を考慮する。

2.1 数学的準備

z 軸回りに角度 θ_z 回転させる行列は

$$R_z(\theta_z) = \begin{pmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{である。} \quad (1)$$

y 軸回りに角度 θ_y 回転させる行列は

$$R_y(\theta_y) = \begin{pmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{pmatrix} \quad (2)$$

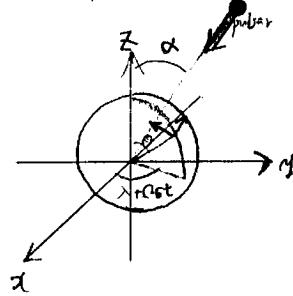
である。

ベクトル \vec{a} が行列 R によって $\vec{a} \rightarrow R \vec{a}$ と変換される際、行列 A は $A \rightarrow RAR^{-1}$ と変換される。

ある点の方向を表すとき、原点とその点を結ぶ直線と z 軸とのなす角 θ 、その直線と z 軸を含む平面と x 軸とのなす角 ψ との組 (θ, ψ) によって、表す。南極に干渉計があるとき、 $(\pi, 0)$ である。

2.2 問題の設定

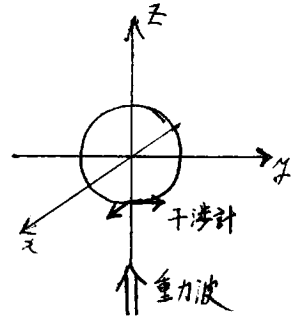
pulsar が (α, β) の方向にあり、重力波干渉計が $(\theta, \lambda + \Omega_E t)$ の方向にあり (Ω_E は自転の角速度)、片方の腕と北極とのなす角が ψ のとき、感度を求める。



2.3 初期状態

南極に干渉計があり、2本の腕が x 軸、y 軸を向いていて、重力波が z 軸方向に伝播しているとする。干渉計から見れば、真上から重力波が来ていることになる。この時、重力波の行列は

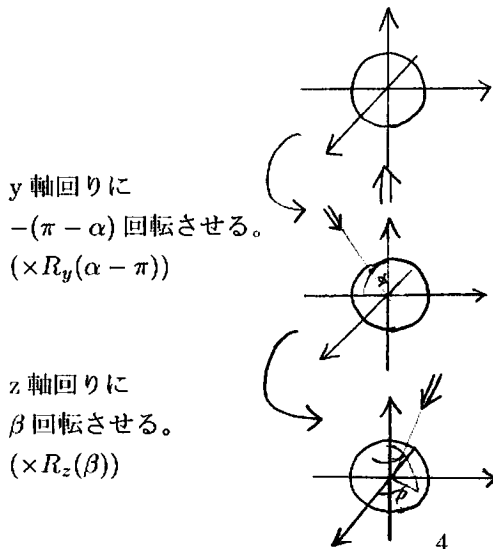
$$h = \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$



で表される。以後、この行列を変換して行って、感度を求めるが、重力波の行列は常に南極にある干渉計で測定したものであることに注意する。

2.4 重力波の方向

まず、重力波の来る方向を合わせる。



以上により、重力波の来る方向は (α, β) に定まった。このとき、重力波のベクトルは

$$R_z(\beta)R_y(\alpha - \pi) \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_y^{-1}(\alpha - \pi)R_z^{-1}(\beta) \quad (4)$$

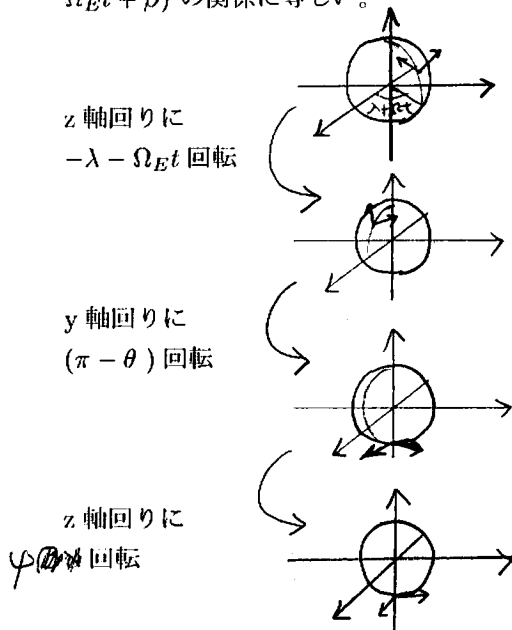
である。

2.5 干渉計の位置

次に干渉計の位置を合わせる。前節の操作によって、得られた行列は、南極の位置にある干渉計に対しての行列である。

$(\theta, \lambda + \Omega_E t)$ の位置にある干渉計で、測定をすることを考える。

感度は干渉計と pulsar の相対位置にのみよるわけだから、干渉計 $(\theta, \lambda + \Omega_E t)$ に対する重力波 (α, β) の関係は、干渉計 $(\pi, 0)$ に対する重力波 $(\pi - \theta + \alpha, -\lambda - \Omega_E t + \beta)$ の関係に等しい。



2.6 感度

上の操作により、重力波の行列は、

$$h = R_z(\beta)R_y(\pi - \theta)R_z(-\lambda - \Omega_E t)R_z(\beta)R_y(\alpha - \pi) \times \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} R_y(\pi - \alpha)R_z(-\beta)R_z(\lambda + \Omega_E t)R_y(\theta - \pi)R_z(\alpha) \quad \text{となる。}$$

$R_z(-\lambda - \Omega_E t)R_z(\beta) = R_z(-\lambda + \beta - \Omega_E t)$ であるので、 $\lambda - \beta + \Omega_E t = \eta(t)$ とおくことにする。

$$R_z(\psi)R_y(\pi - \theta) = \begin{pmatrix} -\cos\theta \cos\psi & -\sin\psi & \sin\theta \cos\psi \\ -\cos\theta \sin\psi & \cos\psi & \sin\theta \sin\psi \\ -\sin\theta & 0 & -\cos\theta \end{pmatrix} = R(\psi, \theta) \quad (5)$$

とおくと、 $h = R(\psi, \theta) \times$

$$\left\{ \begin{pmatrix} h_+(\cos^2\alpha - (1 + \cos^2\alpha)\sin^2\eta) & -h_+ \frac{(1 + \cos^2\alpha)}{2} \sin 2\eta & -\frac{h_+}{2} \sin 2\alpha \cos\eta \\ -h_+ \frac{(1 + \cos^2\alpha)}{2} \sin 2\eta & h_+(\cos^2\alpha - (1 + \cos^2\alpha)\cos^2\eta) & \frac{h_+}{2} \sin 2\alpha \sin\eta \\ -\frac{h_+}{2} \sin 2\alpha \cos\eta & \frac{h_+}{2} \sin 2\alpha \sin\eta & h_+ \sin^2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h_x \cos\alpha \sin 2\eta & -h_x \cos\alpha \cos 2\eta & h_x \sin\alpha \sin\eta \\ -h_x \cos\alpha \cos 2\eta & h_x \cos\alpha \sin 2\eta & h_x \sin\alpha \cos\eta \\ h_x \sin\alpha \sin\eta & h_x \sin\alpha \cos\eta & h_x \sin^2\alpha \end{pmatrix} \right\} \times^t R(\psi, \theta)$$

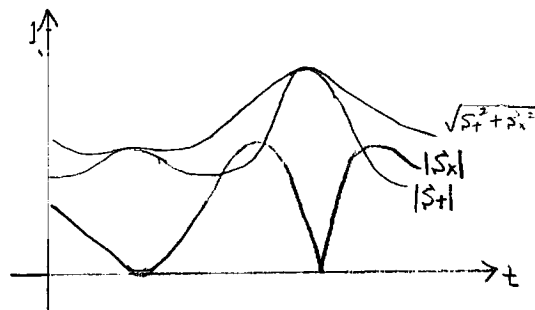
感度は $\frac{h \text{ の (1,1) 成分} - h \text{ の (2,2) 成分}}{2}$ で与えられるので、大変な計算の後に、

$$\begin{aligned} \text{感度} &= \frac{h_+}{4} [3 \sin^2\theta \cos 2\psi + \sin 2\alpha \sin 2\theta \cos 2\psi \cos\eta - 2 \sin 2\alpha \sin\theta \sin 2\psi \sin\eta + \\ & (1 + \cos^2\alpha)(1 + \cos^2\theta) \cos 2\psi \cos 2\eta - 2(1 + \cos^2\alpha) \cos\theta \sin 2\psi \sin 2\eta] \\ & + \frac{h_x}{4} [4 \sin\alpha \sin\theta \sin 2\psi \cos\eta + 2 \sin\alpha \sin 2\theta \cos 2\psi \sin\eta + 4 \cos\alpha \cos\theta \sin 2\psi \cos 2\eta + \\ & 2 \cos\alpha(1 + \cos^2\theta) \cos 2\psi \sin 2\eta] \end{aligned}$$

を得る。

$\sqrt{(S_+(t))^2 + (S_x(t))^2}$ をデータに掛けることによって、Amplitude の補正をする。

パルサーを 1987A とし、干渉計を TAMA としたときの感度の変化を下図に示す。 S_+ と S_x は座標系の取り方に依存することに注意する。



2.7 Doppler correction

Doppler correction はある静止系、例えば、太陽を中心とする座標系を介して行われる。シグナルが干渉計に到達する時刻と、シグナルが太陽の中心に到達する時刻との時間差を δt とすると、

$$\delta t = a_1 \cos(\Omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\Omega_2 t + \phi_2) \quad (6)$$

で近似される。ここで、 Ω_1 は公転の角周波数、 Ω_2 は自転の角周波数であり、 a_1, a_2, ϕ_1, ϕ_2 は干渉計の位置によって決定されるパラメータである。太陽での信号を $s_{\text{太陽}}(t)$ とし、干渉計における信号を $s_{\text{干渉計}}(t)$ とすると、

$$s_{\text{干渉計}}(t) = s_{\text{太陽}}(t + \delta t) \quad (7)$$

となる。この式の意味は時刻 t での干渉計における信号は、 δt 秒後の太陽における信号であるということである。この事実を使って、補正をするのである。

3 フィルターについて

目標は、データ解析に必要な IIR フィルターの設計であるが、そのためには、 z 変換を理解しなければならないので、はじめに z 変換を述べる。次に、簡単に FIR フィルターに触れた後、IIR フィルターを設計し、それに関して考察する。

3.1 z 変換

3.1.1 定義

離散的な時系列データ $x(n)$ (ただし、 $x(-1) = x(-2) = \dots = 0$ とする) に対し、 z 変換を次の式で定義する。

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \quad (8)$$

3.1.2 性質

z 変換は次の性質を持つ。

(線型性) $x_1(n)$ の z 変換を $X_1(z)$, $x_2(n)$ の z 変換を $X_2(z)$ とすると、 $a_1x_1(n) + a_2x_2(n)$ の z 変換は $a_1X_1(z) + a_2X_2(z)$ となる。

(推移定理) $x(n-1)$ の z 変換は $z^{-1}X(z)$ である。

上の定理を繰り返し使って、

$$x(n-2) z^{-2} X(z)$$

$$x(n-3) z^{-3} X(z)$$

が分かる。

3.1.3 Fourier 変換との関係

$x(n)$ の Fourier 変換は

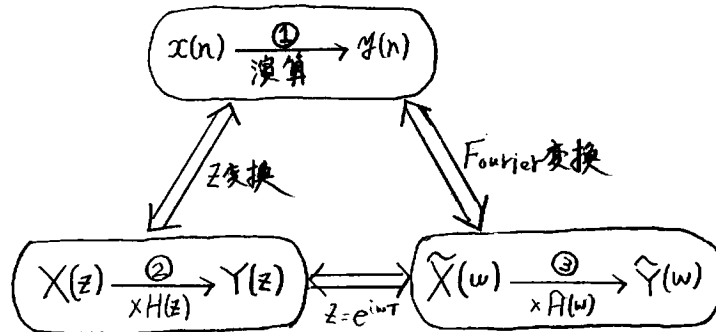
$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} x(n)e^{-i\omega Tn} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)e^{-i\omega Tn} \quad (9)$$

(T はサンプリング間隔) であるから、(1) と比較すれば、 z 変換と Fourier 変換の間には、

$z \leftrightarrow e^{i\omega T}$ という関係があることが分かる。つまり、 z 変換の z に $e^{i\omega T}$ を代入することにより、Fourier 変換が得られ、逆に、Fourier 変換の $e^{i\omega T}$ を z と置くことにより、 z 変換が得られる。

3.1.4 概念図

時系列データと z 変換、Fourier 変換の関係を図示すると次のようになる。



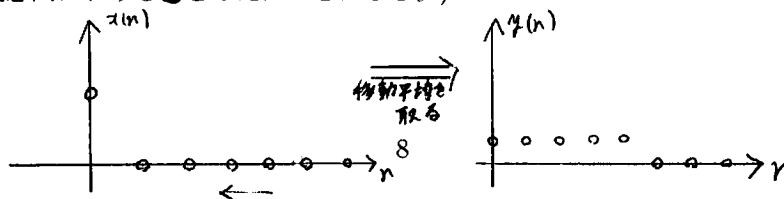
「 $x(n)$ にある演算を行った結果が $y(n)$ である」とする。
 この関係を z 変換すると、「 $X(z)$ に $H(z)$ を掛けた結果が $Y(z)$ になる」という関係に読み替えられる。時系列データになされる演算は、 $H(z)$ を掛けることに相当するのである。
 Fourier 変換についても同様。

3.1.5 具体例

上の内容を良く理解するための具体例として、5 要素の移動平均を取る操作を考える。 $x(n)$ を入力データとし、 $y(n)$ を出力データとすると、

$$y(k) = \frac{1}{5}(x(k) + x(k-1) + x(k-2) + x(k-3) + x(k-4)) \quad (10)$$

(概念図における①を与えたことになる。)



(10) の両辺を z 変換すると、

$$\begin{aligned} Y(z) &= \frac{1}{5}(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})X(z) \quad (\text{ここで、3.1.2の性質を使った。}) \\ &= \frac{1}{5} \frac{1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}}{z^4} X(z) \\ &= \frac{1}{5} \frac{1}{z^4} \frac{1-z^5}{1-z} X(z) \end{aligned}$$

z 領域の伝達関数

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (11)$$

は、

$$H(z) = \frac{1}{5} \frac{1}{z^4} \frac{1-z^5}{1-z} \quad (12)$$

であることが分かる。(概念図における②が求まった。) ここで、 z を $e^{i\omega T} = e^{2\pi i f T}$ で置き換えることによって、Fourier 変換の伝達関数が得られるから (3.1.3),

$$\widehat{H}(f) = \frac{1}{5} \frac{1}{e^{2\pi i f T \times 4}} \frac{1 - e^{2\pi i f T \times 5}}{1 - e^{2\pi i f T}} \quad (13)$$

を得る。(概念図における③が求まった。)

3.2 FIR フィルター

一般に、 z 領域の伝達関数が、

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \quad (14)$$

で与えられるとき、FIR フィルターという。(前節の移動平均も FIR フィルターのひとつである。) この式から分かるように、 $H(z)$ は原点にのみ極をもつ。「 z 平面単位円外に極が存在する場合、フィルターは発散、不安定になる。」という事実が知られている。この事実から、FIR フィルターは安定だと結論される。

3.3 IIR フィルター

一般に、 z 領域の伝達関数が、

$$H(z) = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} b_j z^{-j}}{1 + \sum_{i=1}^{M-1} a_i z^{-i}} \quad (15)$$

で与えられるとき、IIR フィルターという。IIR フィルターは z 平面の単位円外に極が存在するので、FIR フィルターと違って安定とは限らない。

3.3.1 IIR フィルター的设计

今、重力波のデータを解析するのに、Butterworth フィルター

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_c})^{2n}}} \quad (16)$$

(f_c は cut off 周波数) を使いたいとする。これに対応する z 領域での伝達関数を求めたい。(つまり、概念図において、③から②を求めたい。)しかし、上述のように $z = e^{2\pi i f T}$ を使って、 f を消去して z の関数にしても、この式は有理式にはならないのである。それでは、どうすればよいのだろうか。実は、このことに関して、次に述べる一般的なやり方がある。

IIR デジタルフィルターは次の手順で求められる。

- (i) 周波数領域において、作りたいアナログフィルターを設計する。
- (ii) (i) で作られたフィルターの零点と極を prewarp する。
- (iii) 双一次 s - z 変換を施して整理する。

上の手順に従って、2 次の Butterworth フィルター

$$|\tilde{H}(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_c})^4}} \quad (17)$$

を設計する。

- (i) まず、極の位置は $f_c e^{\frac{\pi}{4}i}$, $f_c e^{\frac{3}{4}\pi i}$, $f_c e^{\frac{5}{4}\pi i}$, $f_c e^{\frac{7}{4}\pi i}$ である。(図参照。) 上半平面の極を使って、有理式

$$\tilde{H}(f) = \frac{-1}{(\frac{f}{f_c} - e^{\frac{\pi}{4}i})(\frac{f}{f_c} - e^{\frac{3}{4}\pi i})} \quad (18)$$

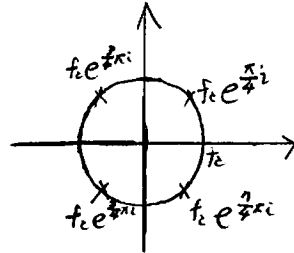
を作る。(実は、上半平面の極を使えば、フィルターの係数が実数になる。)すると、

$$\begin{aligned} |\tilde{H}(f)| &= \frac{1}{\sqrt{((\frac{f}{f_c} - e^{\frac{\pi}{4}i})(\frac{f}{f_c} - e^{-\frac{\pi}{4}i}))((\frac{f}{f_c} - e^{\frac{3}{4}\pi i})(\frac{f}{f_c} - e^{-\frac{3}{4}\pi i}))}} \quad (19) \\ &= \frac{1}{\sqrt{(\frac{f}{f_c})^2 - \sqrt{2}(\frac{f}{f_c}) + 1)((\frac{f}{f_c})^2 + \sqrt{2}(\frac{f}{f_c}) + 1)}} = \frac{1}{\sqrt{((\frac{f}{f_c})^2 + 1)^2 - 2(\frac{f}{f_c})^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{f}{f_c})^4}} \quad (20) \end{aligned}$$

となる。(18) は Butterworth フィルターを実現する有理式であることが分かる。

- (ii) $s = 2\pi i f$ とおくと

$$H(s) = \frac{(2\pi f_c)^2}{(s - 2\pi i e^{\frac{\pi}{4}i} f_c)(s - 2\pi i e^{\frac{3}{4}\pi i} f_c)} \quad (21)$$



となる。

極の位置 $2\pi i f_c e^{\frac{\pi}{4}i}, 2\pi f_c e^{\frac{3}{4}\pi i}$ を prewarp すると、それぞれ、 $\frac{2}{T} \tan(\pi i f_c T e^{\frac{\pi}{4}i}), \frac{2}{T} \tan(\pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i})$ となる。

新しい極の位置に従って、有理式を組むと、

$$H_{dig}(s) = \frac{(2\pi f_c)^2}{(s - \frac{2}{T} \tan(\pi i f_c T e^{\frac{\pi}{4}i}))(s - \frac{2}{T} \tan(\pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i}))} \quad (22)$$

(ii) 双一次 s-z 変換 $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ をする。

$$\begin{aligned} H_{dig}(z) &= \frac{(2\pi f_c)^2}{(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - \frac{2}{T} \tan(\pi i f_c T e^{\frac{\pi}{4}i}))(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - \frac{2}{T} \tan(\pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i}))} \\ &= \frac{(2\pi f_c)^2}{(\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2 - \frac{2}{T} (\tan(\pi i f_c T e^{\frac{\pi}{4}i}) + \tan(\pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i})) \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + (\frac{2}{T})^2 \tan(\pi i f_c T e^{\frac{\pi}{4}i}) \tan(\pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i})} \end{aligned} \quad (23)$$

$$(24)$$

ここで、 $A = \tan(\pi i f_c T e^{\frac{\pi}{4}i})$ とおくと、

$$H_{dig}(z) = \frac{(\pi f_c T)^2}{(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})^2 - (A + \bar{A}) \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + |A|^2} \quad (25)$$

となる。

整理すると、

$$= \frac{(\pi f_c T)^2 + 2(\pi f_c T)^2 z^{-1} + (\pi f_c T)^2 z^{-2}}{(1 - (A + \bar{A}) + |A|^2) + (2|A|^2 - 2)z^{-1} + (1 + (A + \bar{A}) + |A|^2)z^{-2}} \quad (26)$$

こうして、フィルターの係数が求まった。この係数はすべて実数であることも分かる。

4 次のフィルターに関しては結果だけを述べる。

$$c_n = \tan(\pi i f_c T e^{\frac{n\pi}{8}i}) \quad (27)$$

とし、

$$Cs1 = c_1 + c_3 + c_5 + c_7$$

$$Cs2 = c_1 c_3 + c_1 c_5 + c_1 c_7 + c_3 c_5 + c_3 c_7 + c_5 c_7$$

$$Cs3 = c_1 c_3 c_5 + c_1 c_3 c_7 + c_1 c_5 c_7 + c_3 c_5 c_7$$

$$Cs4 = c_1 c_3 c_5 c_7$$

$$X = 1 - Cs1 + Cs2 - Cs3 + Cs4$$

とおく。(これらが、実数であることは $\bar{c}_1 = c_7, \bar{c}_3 = c_5$ から分かる。) 係数は

$$a_1 = \frac{-4 + 2Cs1 - 2Cs3 + 4Cs4}{X}$$

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{6-2Cs2+6Cs4}{X} \\
a_3 &= \frac{-4-2Cs1+Cs3+Cs4}{X} \\
a_4 &= \frac{1+Cs1+Cs2+Cs3+Cs4}{X} \\
b_0 &= \frac{(\pi f_c T)^4}{X} \\
b_1 &= 4b_0 \\
b_2 &= 6b_0 \\
b_3 &= 4b_0 \\
b_4 &= b_0 \\
&\text{となる。}
\end{aligned}$$

3.3.2 考察

(23) にふり返って、考察してみる。z を $e^{2\pi i f T}$ で置き換えれば、Fourier 変換における伝達関数が求まるのだったから、(24) の z に $e^{2\pi i f T}$ を代入してみる。 $\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} = \frac{1-e^{2\pi i f T}}{1+e^{2\pi i f T}} = \frac{2}{T} i \tan(\pi f T)$ に注意すると、

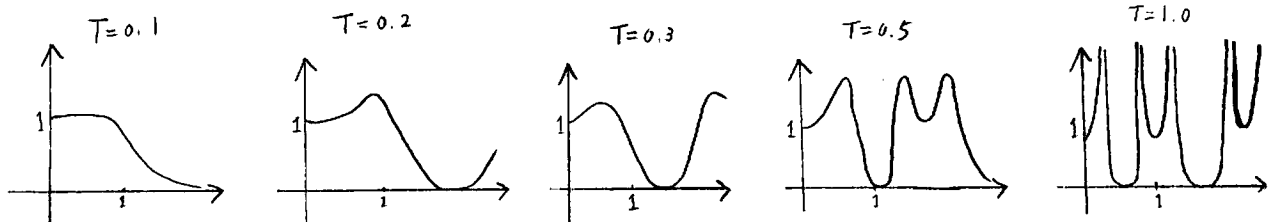
$$H_{\text{dig}}(e^{2\pi i f T}) = \frac{(2\pi f_c)^2}{\left(\frac{2}{T} i \tan(\pi f T) - \frac{2}{T} \tan(\pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i})\right) \left(\frac{2}{T} i \tan(\pi f T) - \frac{2}{T} \tan(\pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i})\right)} \quad (28)$$

となる。ここで、T が十分小さいなら、 $\tan(\pi f T)$ を $\pi f T$ と近似できるので、

$$= \frac{(2\pi f_c)^2}{\left(\frac{2}{T} i \pi f T - \frac{2}{T} \pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i}\right) \left(\frac{2}{T} i \pi f T - \frac{2}{T} \pi i f_c T e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)} = \frac{-1}{\left(\left(\frac{f}{f_c} - e^{\frac{3}{4}\pi i}\right) \left(\frac{f}{f_c} - e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)\right)} \quad (29)$$

これは (8) に完全に一致する。つまり、T が十分小さいとき、(28) はまさに Butterworth フィルターの役目を果たすのである。こうして、近似的に概念図から (8) が求まった。

裏を返せば、(28) の式は近似的にしか成り立っていない。T が大きくなると、近似が悪くなってしまふ。実際に mathematica で T の値をいろいろと変えた結果を下図に示す。($f_c = 1$ として)



(近似を高める方法について)

(25) の式において、係数 A と A については近似を高めることができる。

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \dots \text{より、} x = \tan x - \frac{x^3}{3} - \frac{2}{15}x^5 + \dots \text{となり、} x \text{ を } \tan x$$

で近似した時の誤差は

$$\left| -\frac{x^3}{3} - \frac{2}{15}x^5 + \dots \right| \quad (30)$$

となる。

Lを1より小さい正の数とすると、

$$\frac{1}{L} \tan(Lx) = x + \frac{L^2 x^3}{3} + \frac{2}{15} L^4 x^5 + \dots$$

$x = \frac{1}{L} = \frac{1}{L} \tan(Lx) - \frac{L^2 x^3}{3} - \frac{2}{15} L^4 x^5$ となるから、 x を $\frac{1}{L} \tan(Lx)$ で近似したときの誤差は、

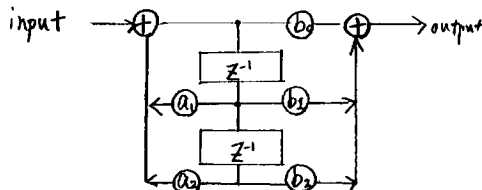
$$\left| -\frac{L^2}{3} - \frac{2}{15} L^4 x^5 - \dots \right| \quad (31)$$

であり、(30)よりも小さくなる。つまり、 x を $\frac{1}{L} \tan(Lx)$ と近似することによって近似が良くなるのである。

3.3.3 時系列データに施すべき処理

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (32)$$

は下図の演算に対応している。



これが時系列データに施すべき演算 (概念図①) である。

3.3.4 フィルターの時定数

実際にフィルターの振る舞いを見たところ、フィルターの動作が安定するまでに時間がかかることが分かった。次の経験則が見つかった。

(経験則) cut off 周波数が小さいほど、安定するまでに時間がかかる。

4 まとめ

感度を求める式を導出し、それを用いて Amplitude correction のプログラムを作った。また、デジタルフィルターの設計をし、そのふるまいについて研究した。

しかし、Doppler correction については、補正の仕方を理解しただけで、実際に補正を行うには至らなかった。