

特別実験 1 レポート

— 磁気浮上の基礎的実験 —

河野 能知 s71523
共同実験者 古徳 純一

1998 年 10 月 5 日

目次

1	概要	3
2	原理	4
2.1	簡単な計算	4
2.2	磁石の配置	6
3	実験	9
3.1	ガウスメーターの製作と磁場の測定	9
3.1.1	回路の製作と校正	9
3.1.2	ガウスメーターによる磁場の測定	10
3.2	装置の設計	10
3.3	制御系について	14
3.3.1	ピンホールを用いたセンサー	17
3.3.2	反射式のセンサー	20
3.4	結果と観察	20
3.5	システムの性質の測定	23
3.5.1	システムの振動特性の測定	23
3.5.2	システムのオープンループ伝達関数の測定	23
4	考察	27
4.1	結果に関して	27
4.2	今後の課題	27
5	補遺	28
5.1	Earnshaw の定理	28
5.2	回路図	30

1 概要

レーザー干渉計を用いた重力波検出器では、非常に小さな空間の伸縮を検出しなければならない。そのため、装置の開発において干渉計の防振は非常に重要である。現状では干渉計をなす鏡は振り子のようにワイヤーで吊されているが、これではワイヤーが鏡に影響を与えてしまう。そこで、将来的には磁力によって鏡全体を浮かせてワイヤーのような外部との接触をなくすことが考えられる。以上のことを背景として、今回の特別実験では、磁力によってものを浮かせるという実験をした。具体的には、永久磁石の作る磁場の中で別の永久磁石を浮かせた。そのための磁場の分布、浮かせるものの重さ、形、磁石の位置などについて簡単な考察をした後、必要な装置を作った。永久磁石だけでは浮かないので、適当な制御をかけたところ完全に外部との接触を断つことはできなかったが、本質的には浮かせることに成功した。

2 原理

2.1 簡単な計算

磁石を浮かせるために、まず簡単な計算を行いどのような配置で磁石を置けば良いか考えた。ここでは、磁石を大きさのない理想的な磁気双極子と近似してその間に働く力の大きさを議論する。



図 1:

まず、点 \vec{r}_0 にある大きさのない磁気双極子 \vec{M} が点 \vec{r} に作る磁場 $\vec{B}(\vec{r})$ は

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{R})\vec{R} - R^2\vec{M}}{R^5}$$

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

となる。原点 O に磁気双極子 $\vec{M} = (0, 0, M)$ の磁石が固定されている場合 $\vec{r}_0 = 0$ となるので、この磁石が作る磁場は次のようになる。

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{M} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{M}}{r^5}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} \begin{pmatrix} 3Mzx \\ 3Mzy \\ 3Mx^2 - r^2M \end{pmatrix}$$

空間内の点 \vec{r} にもう一つの自由な磁気双極子 \vec{m} を置いたときのポテンシャルエネルギー $U(\vec{r})$ は

$$U(\vec{r}) = -\vec{m} \cdot \vec{B}(\vec{r})$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^5} \left\{ -3Mz(m_x x + m_y y + m_z z) + r^2 M m_z \right\} + \mu g z$$

ここで、自由な磁気双極子は $m_x = 0, m_y = 0$ を満たしているとする、

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(15Mm_z \frac{z^2 y}{r^7} - 3Mm_z \frac{x}{r^5} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(15Mm_z \frac{z^2 x}{r^7} - 3Mm_z \frac{y}{r^5} \right) \\ \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(-3Mm_z \frac{2zr^2 - 5z^3}{r^7} - Mm_z \frac{3z}{r^5} \right) + \mu g \end{cases}$$

$U(\vec{r})$ が停留値をとるとすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \frac{\partial U}{\partial y} = 0 &\implies 5z^2 - r^2 = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial z} = 0 &\implies \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 3Mm_z z (3r^2 - 5z^2) = \mu g r^7 \end{aligned}$$

z 方向につり合うのは z 軸上にあるときであり、このとき $\vec{r} = (0, 0, z)$ であり $r \simeq z$ となるから

$$-\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 3Mm_z z \cdot 2z^2 = \mu g |z|^7 > 0$$

よって、

$$\begin{cases} m_z > 0 \implies z < 0 \\ m_z < 0 \implies z > 0 \end{cases}$$

$$z = \begin{cases} -\left(\frac{3\mu_0 M m_z}{2\pi \mu g}\right)^{1/4}, & m_z > 0 \\ \left(\frac{-3\mu_0 M m_z}{2\pi \mu g}\right)^{1/4}, & m_z < 0 \end{cases}$$

m_z の正負に分けて考える。

(1) $m_z > 0$ の場合 ($z < 0$)

z 軸方向に働く力は上向きを正とすると $r \simeq |z| = -z$ として

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{\partial U}{\partial z} \\ &= \frac{3\mu_0}{4\pi} M m_z \frac{3zr^2 - 5z^3}{r^7} - \mu g \\ &= \frac{3\mu_0}{4\pi} M m_z \frac{2}{z^4} - \mu g \end{aligned}$$

となり、 $|z|$ が増加すると F_z も大きくなるので z 軸方向には不安定である。

水平方向に働く力を調べるために $y = 0$ として x 方向の力を調べる。

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} 3Mm_z x \left(\frac{5z^2 - r^2}{r^7} \right) \\ &\simeq -\frac{3\mu_0 M}{\pi r^5} m_z x \end{aligned}$$

により、 $m_z > 0$ の場合は x 方向には振動する。すなわち復元力が働く。

(2) $m_z < 0$ の場合 ($z > 0$)

同様にして、

$$F_z \simeq \frac{3\mu_0}{4\pi} M |m_z| \frac{2}{z^4} - \mu g$$

$$F_x \simeq -\frac{3\mu_0 M}{\pi r^5} m_z x$$

となり、この場合には z 方向には安定で、水平方向には不安定である。

まとめると、浮かせる磁石を上から引っ張ると鉛直方向には不安定だが、水平方向には安定であり磁石がひっくり返ることはない。また、浮かせる磁石を下から押し上げると鉛直方向には安定だが、水平方向には不安定であり磁石はひっくり返ってしまう。よって、上から引っ張った方がより安定である。

以上、磁石を双極子で近似し鉛直面内での回転を無視して考えたが、双極子で近似する限り軸が傾く効果を摂動として取り入れても同じ結果が得られる。実際の磁石は有限の大きさを持ち、このような簡単な解析からは定量的な議論はできない。しかし、定性的にはこれで良いので、このような解析から磁石を浮かせるための磁石の配置を考えた。

2.2 磁石の配置

以上の考察をもとに磁力による浮上システムを作るための磁石の配置を幾つか考えたが、それらを図 2 に示す。

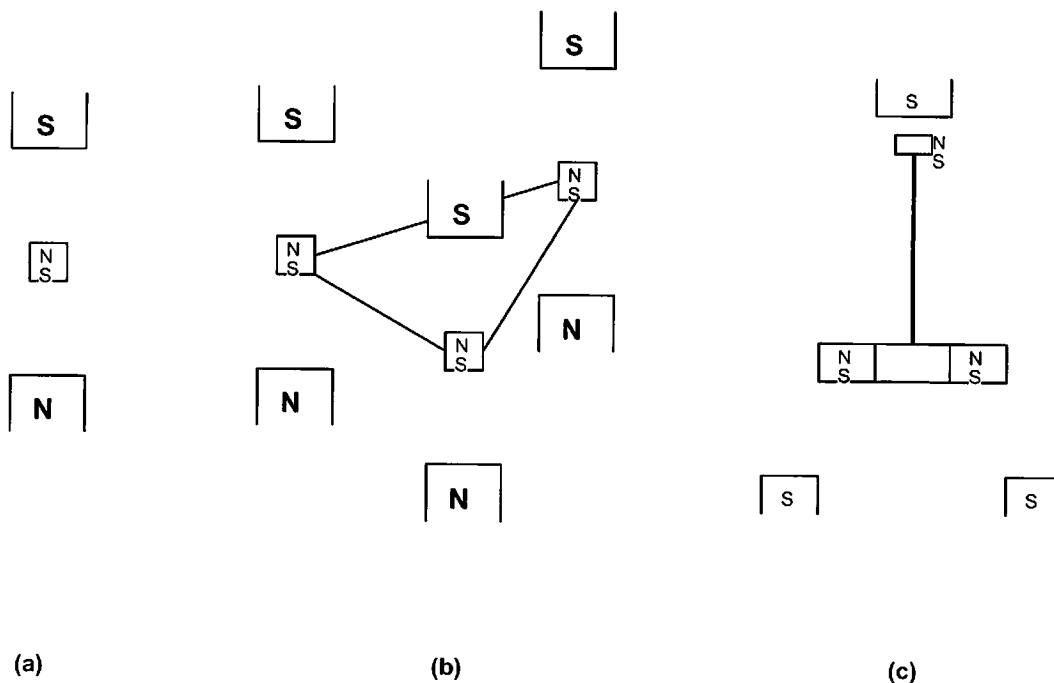


図 2: 考えた磁石の配置

(a) は最も簡単な配置であるが、上下の磁石を同じ磁石として鉛直方向の安定性を要求すると浮かせる磁石は中心よりも下になければならない。ところが、そうすると水平方向に不安定

となり回転が起きてしまう。逆に、中心よりも上に浮かせようとする、回転は防げるが力のつり合う位置から少しでもずれるとずれた方の磁石に吸い込まれてしまう。このように、(a)のような単純な配置では安定にはできない。回転を押さえるために、重心を下げるという手がある。最初はこの配置で、浮かせる磁石を”やじろべい”のようにして重心を下げて浮かせようという方針で試した。

そこで回転を押さえるために、(b)のように(a)の配置を3つ組み合わせたらどうか。このような配置で、中心より下で浮かせようすると、回転は押さえられるが全体が水平方向にずれてしまうと考えられる。また、中心より上で浮かせようすると水平方向には安定で、鉛直方向には不安定であるが(a)の場合よりは不安定さが減ると思われる。(b)の方が(a)よりも重いものを浮かせられるので、固定磁石に引き込まれても動きにくくなるからである。しかし、重いものの方が制御がかかりにくくなってしまう。結局、(b)も(a)を組み合わせたものにすぎないので(a)と大差がないように思われる。ただ、このように3点で支えるというのは良いアイデアである。

(c)は基本的にU-CASと同じである。U-CASとは、磁力によって浮くコマのことである。U-CASではコマが回転していたために軸が安定であったが、コマの回転がなくても軸を安定に保とうという発想から、上にもう一つ磁石を置いた。上の磁石は鉛直方向の安定性を欠くものなので、この配置で安定に浮かせるためには、浮力を下の磁石で稼ぐ必要がある。実際に、(c)にさらに制御をかけたような状態で浮かせることに成功した。

これ以外に、1つの大きな円盤状の磁石で浮かせることも考えた。円盤状の磁石の厚みを無視するとこの磁石が作る磁場を半径 a の一様な円環電流の作る磁場で近似することができる。半径 a の一様な円環電流 I が軸上に作る磁場は

$$\begin{aligned} B_z(z) &= \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} IS \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2M}{(a^2 + z^2)^{3/2}} IS \end{aligned}$$

但し、 S は円環が囲む面積、 $M = IS$ はこの電流が作る磁気モーメントである。この磁場の中にある磁気双極子 \vec{m} が受ける力は z 方向に

$$\begin{aligned} F_z &= -\frac{\partial}{\partial z} (-m_z B_z) \\ &= m_z \frac{\partial B_z}{\partial z}, m_z < 0 \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot 6M(-m_z) \frac{z}{(a^2 + z^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

F_z をプロットすると図3のようになる。これは $z = a/2$ で最大となる。この結果をみると、このような磁石を上にもう一つの磁石を上から引っ張りあげれば上向きの力は2つの磁石の間の距離が $-a/2$ のときに最大になる。よって、 $-a/2 < z < 0$ の範囲で重力とつり合わせればこの磁石は上に上がれば下向きの力の方が大きくなり、下にいけば上向きの力の方が大きくなり、安定だろうと期待される。ところが、3.1.2節で述べるようにガウスメーターによる測定では、薄い円盤状の磁石では磁石の端にいくほど磁力線のが外側を向き、かつ端の方が中心

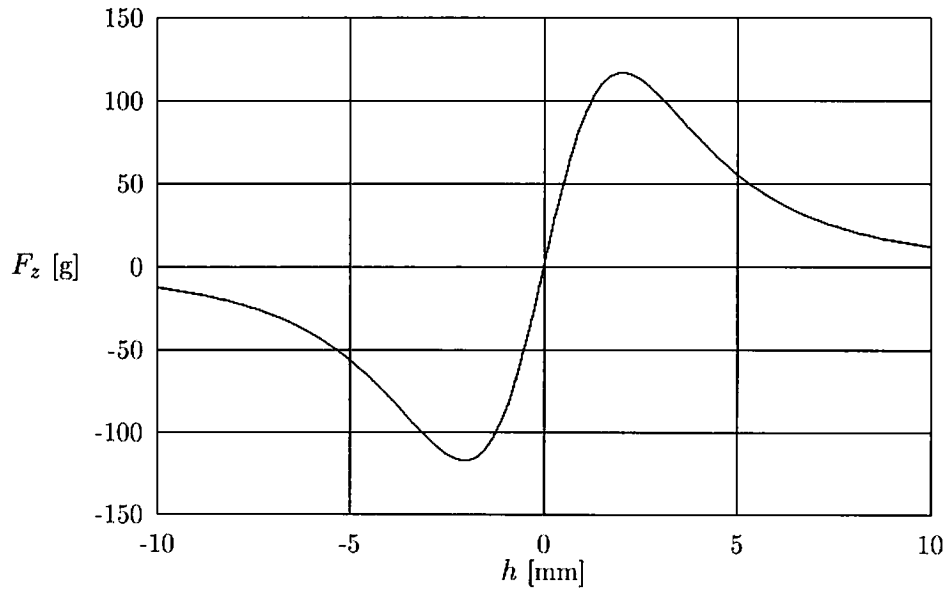


図 3: 磁石のある位置 ($z = 0$) からの磁気双極子の高さ h [mm] と力 F_z [g 重] の関係。但し、ここでは $m_z = 10, M = 25.8, a = 3.5$ とした。これは”殺人磁石” (3.1.2節参照) に対する値である。

より磁場の強さが大きいという結果を得た。この結果をもとに考えると、この方法では磁石が端に寄ってしまうのではないかと考えられる。実際、この配置では磁石の端の効果が大きく磁石が端に引き寄せられてうまくいかなかった。

3 実験

3.1 ガウスメートルの製作と磁場の測定

3.1.1 回路の製作と校正

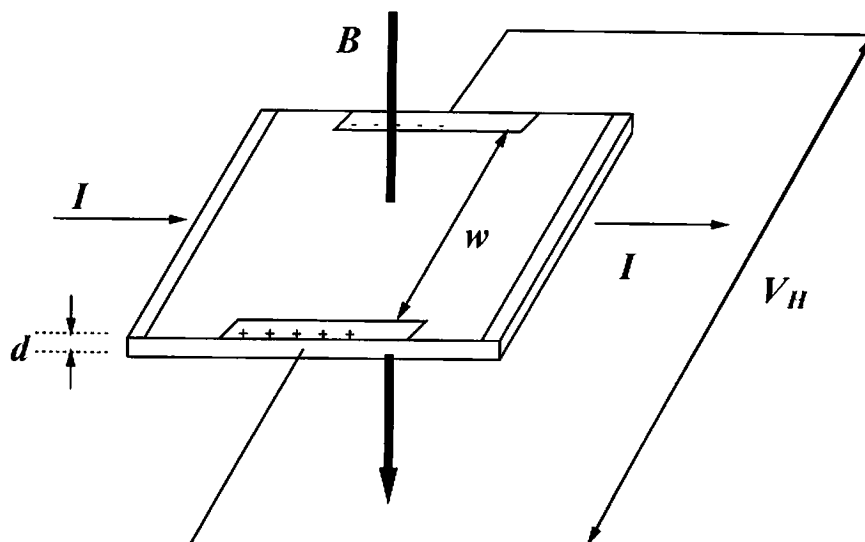


図 4: ホール素子の原理

実験を行う前に磁場を測るためのガウスメートルを作った。回路図は 30 ページ図 29 に示す。ここで作ったガウスメートルはホール素子を用いたものである。ホール素子を用いて磁場を測る原理は次のようである。磁場 B に垂直な方向に電流 I を流すと、キャリアは磁場に垂直な方向に力を受ける。その結果、ホール素子の中で電流の流れている方向と垂直な方向の両端にそれぞれ電荷がたまる (図 4 参照)。簡単な計算によりこのとき生じる電位差 V_H は流す電流 I と磁場 B を用いて、

$$V_H = -\frac{1}{ne} \frac{IB}{d}$$

となることがわかる。但し、 n はキャリア密度、 d はホール素子の厚さである。こうしてホール素子に一定の電流を流すと、 V_H を測定することによってホール素子に垂直な磁場の成分を知ることができる。

回路を作った後で、ガウスメートルの校正を行った。そこで、直径 82.25mm のステンレスのピーカーに導線を 100 回巻いてコイルを作った。コイルが中心に作る磁場は計算できるので、それをもとに校正した。なるべく強い磁場を得るためコイルには 1.21A の大電流を流した。このときコイルの中心での磁場の強さは、

$$\begin{aligned} B &= N \frac{\mu_0 I}{2a} \\ &= 100 \times \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 1.21}{2 \times 8.23/2 \times 10^{-2}} \\ &= 1.85 \times 10^{-3} [\text{T}] \end{aligned}$$

$$= 18.5[\text{gauss}]$$

となる。但し、 N は導線の巻き数、 a はコイルの半径である。

作った磁束計はゲインを5段階で調整できるように作ったが、最も良く使用するであろうゲイン $\times 0.1$ で較正した。その結果、出力電圧 V と実際の磁場 B との関係は

$$B[\text{gauss}] = -24.5 + 15.6 \times V[\text{mV}]$$

であることがわかった。

3.1.2 ガウスメーターによる磁場の測定

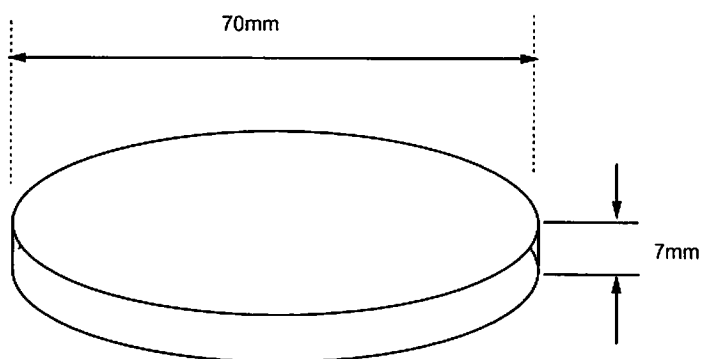


図 5: ”殺人磁石” の大きさ

作ったガウスメーターを用いて、実際に磁石の作る磁場を測定した。ここで測定したのは、”殺人磁石”（図 5 参照）についてである。”殺人磁石”とは、直径 70mm、高さ 7mm の薄い円盤状の強力な Nd 磁石のことである。測定は磁石の表面から 1cm のところでの磁場の鉛直方向の成分と水平方向の成分について行った。磁場の向きを図 6 に、磁場の強さを図 7 にそれぞれ示す。

3.2 装置の設計

最初は、図 2 の (a) のような配置で浮かせようと考えていたが、手持ちの磁石の種類および重心を下げるための簡単な方法が思い付かなかったため、図 2 の (c) の方法で行うことになった。

そこでまず、図 8 のような配置でおもりの重さを様々に変えて、どうなるかを定性的に調べた。すると、全体の重さが、約 28g のとき、一瞬浮いたような感じになり、それからしばらくすると水平方向に逃げていくような振る舞いをした。実験を繰り返すとこの配置では浮力が働く高さと同様に復元力が働く高さにも重なる場所がないらしいということがわかった。つまり、水平方向の復元力が働く領域では下向きに力を受けているのである。また、このままでは軸が傾くのを防げそうにないこともわかった。そこで、一番上にもう一つ磁石を置きその磁石で軸の傾きを押さえることにした。そして、センサーのためのピンホール (3.3.1 節参照) を

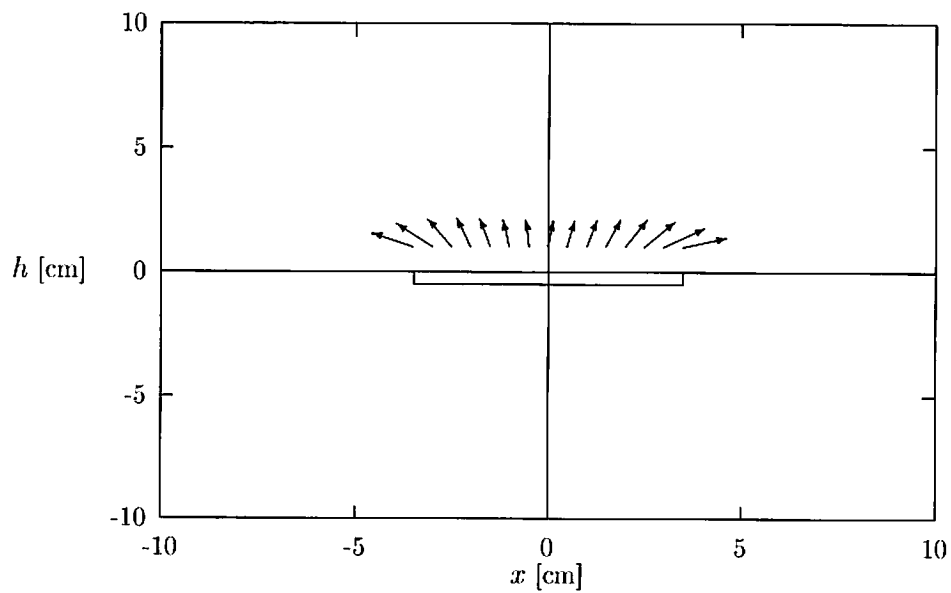


図 6: 高さ 1cm での” 殺人磁石” が作る磁場の向き

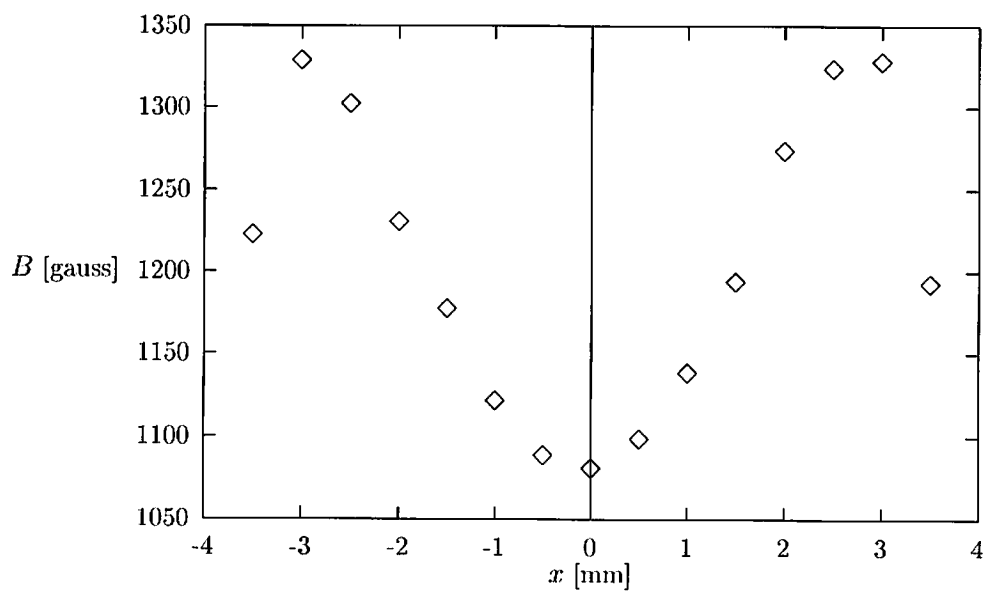


図 7: 高さ 1cm での” 殺人磁石” が作る磁場の大きさ

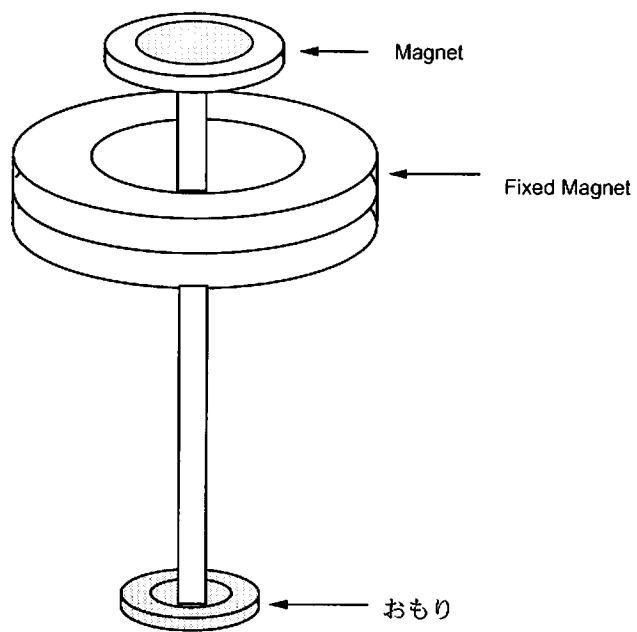


図 8:

アルミパイプの中間に置き、一番下に制御のときコイルから力を加えるための磁石を置いた。浮かせるもの様子を図9に示す。今後、この浮かせるもののことを'コマ'と呼ぶ。また、このコマを浮かせるための磁石を固定する支持台を22ページ図22に示す。ここで、コマの一番上の磁石にはNd磁石、コマの中心のドーナツ型の磁石にはフェライト磁石、コマの一番下の制御をかけるための磁石にはフェライト磁石をそれぞれ使用した。支持台の磁石はすべてフェライト磁石である。

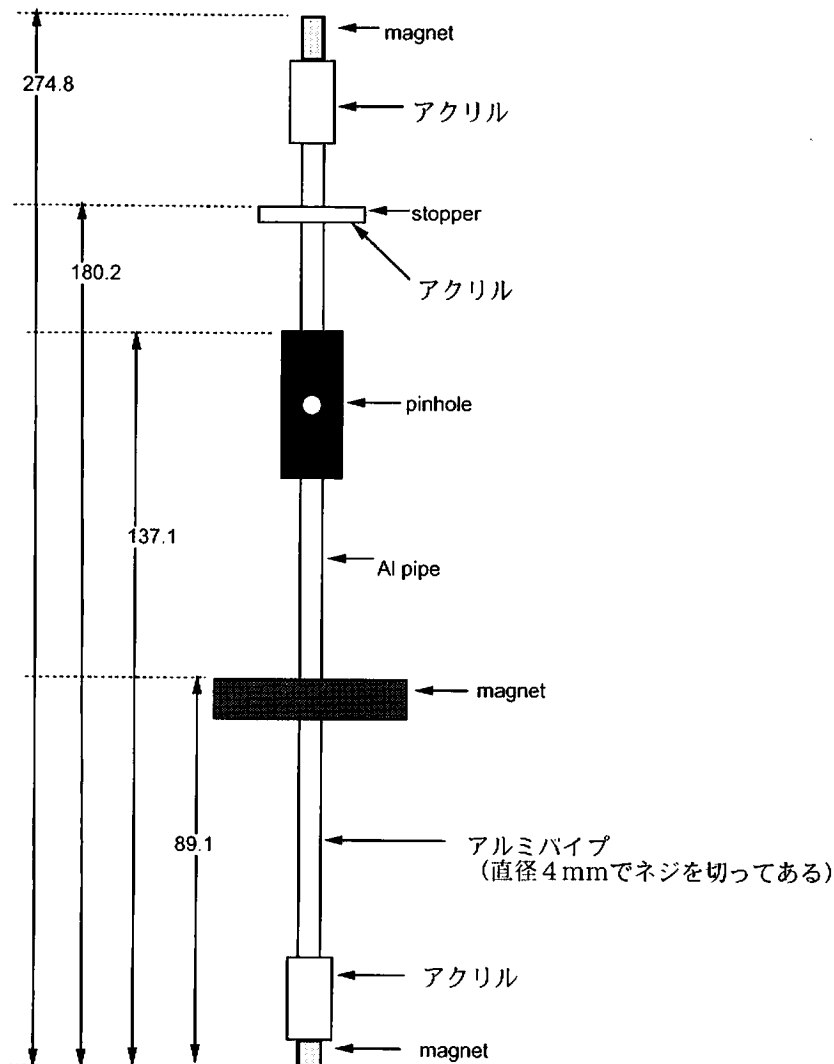


図9: 浮かせるもの。

配置を決めたあと、それぞれの磁石が上向きに受ける力の大きさをコマの高さに対して測定した。測定は図10に示すように、一つの磁石をマイクロメーターに固定して、もう一つの磁石をはかりの上に置き、マイクロメーターで高さを変えながら、はかりの読みから力を測定した。磁石とコイルのカップリングも同様にして測定した。ただし、コイルには50mAの電流を流して測定した。この状態で高さが約5.5mmのときに力が最大になり、そのときの力の大きさが2gくらいあったので、十分制御がかけられると判断した。結果を図11,12,13に示す。また、高

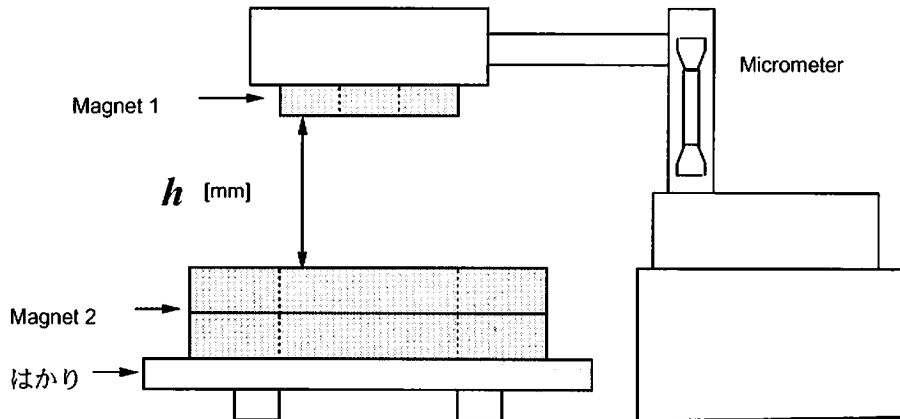


図 10: 磁石のカップリングの測定。

さを約 5.5mm に固定して電流の大きさを変えたときに力の大きさがどのように変化するかも測定した。その結果を図 14 に示す。

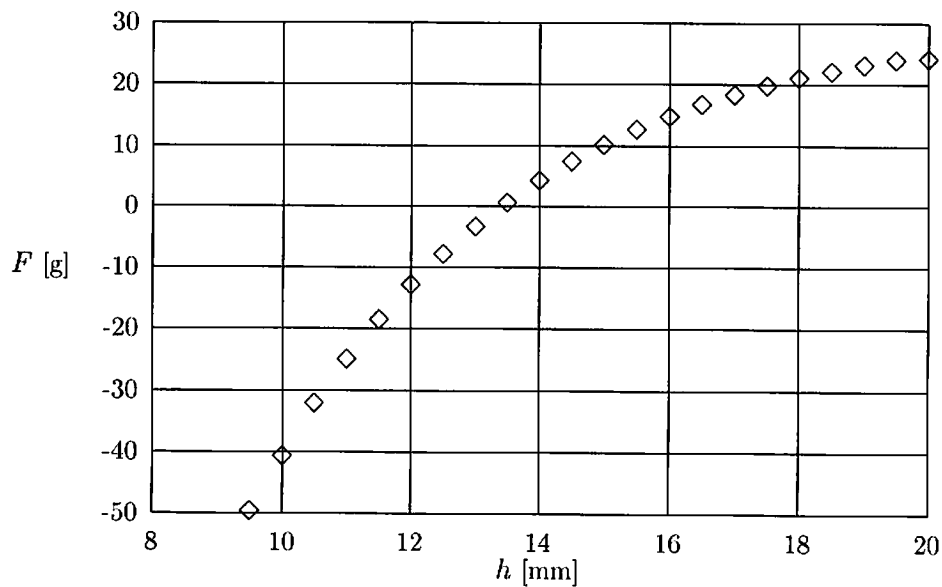


図 11: 中心のドーナツ型の磁石のカップリング。

3.3 制御系について

前節のような状況では鉛直面内での回転はないと考えられる。よって、鉛直方向のみ制御をかけてやれば良い。そのためには、コマの高さを測定し、コマが平衡点より上であればコイルに適切な電流を流し下向きの力が働くようにすれば良い。逆にコマが平衡点より下であれば逆向きに電流を流し上向きの力を与えれば良い。また平衡点からのずれが大きいほど与える力を

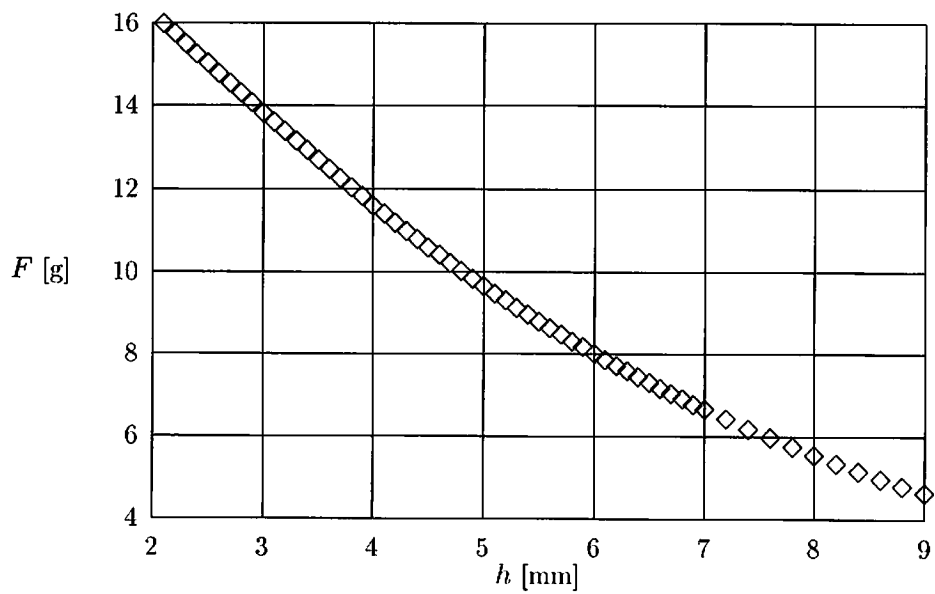


図 12: 一番上の磁石のカップリング。

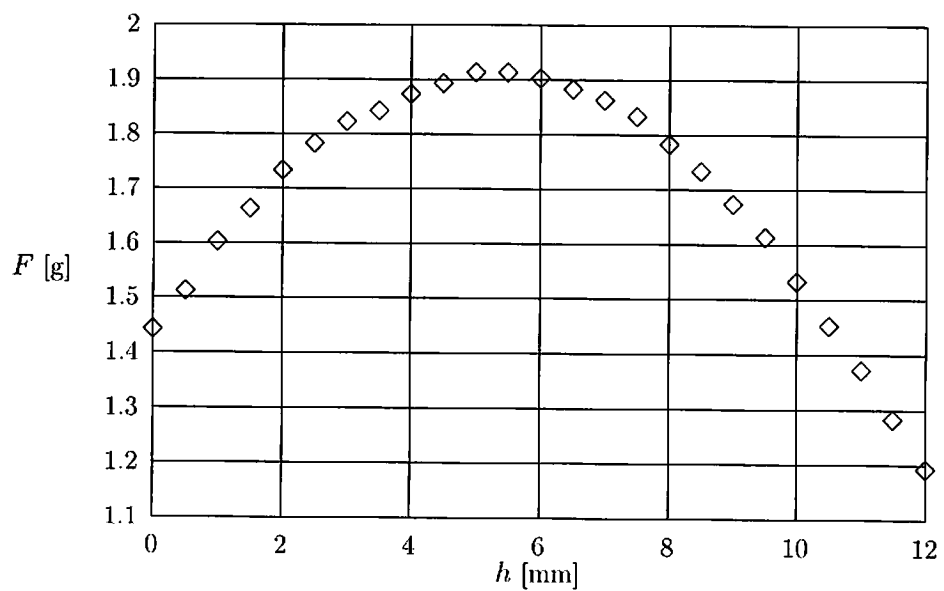


図 13: 磁石とコイルのカップリング。

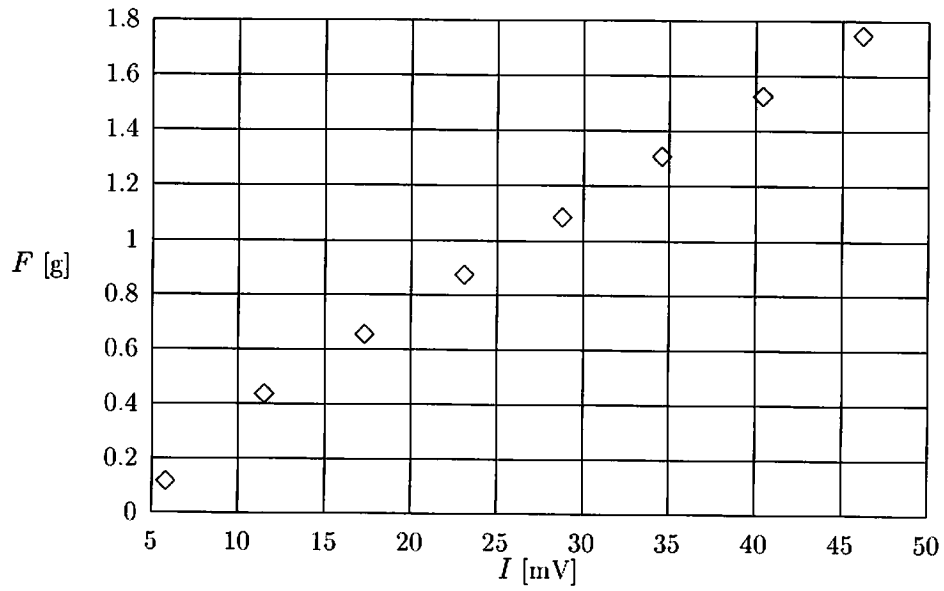


図 14: コイルに流れる電流 I [A] と力の関係。 $z = 5.5$ [mm]

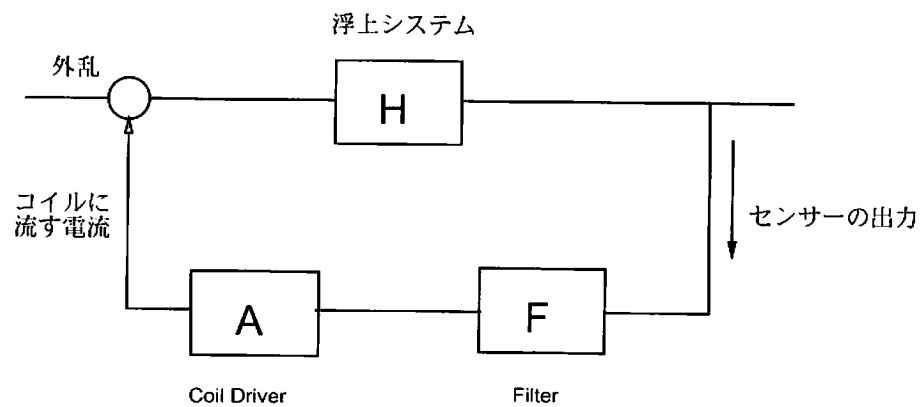


図 15: 制御系の概念図

大きくしなければならない。このようなことから単純に線形の制御をかけてやればよい。ここでは光を使ったセンサーを使って、高さの読みを電圧として出力し、それをアンプ、フィルターにより増幅しコイルドライバーによって電流に変換してコイルに入力した。制御系の概念図を図 15 に示す。

コマの高さを測定するためのフォトセンサーは以下の 2 つのタイプのものを作って実験した。

- ピンホールを用いたフォトセンサー
- 反射式のフォトセンサー

3.3.1 ピンホールを用いたセンサー

ピンホールを用いたセンサーとは、図 17 に示すようなもので、コマに小さな穴の開いた黒い板をとりつけ、板を挟んで両側に LED と受光素子を配置しピンホールを通過してきた光を検出することによってコマの高さを測定するものである。LED は” 浜松フォトニクス L2656 ”、受光素子は 4 分割フォトセンサーで” 浜松フォトニクス S4349 ”を使用した。受光素子の受光面は図 17 (b) のように 4 分割になっている。図のように受光面に 1,2,3,4 と名前をつけると出力を $(1 + 2) - (3 + 4)$ と処理すると受光素子を上側に当たった光と下側に当たった光の強度の差をとることができる。これによりピンホールの上下の動きを検出できる。ピンホールを上下に動かしたときの高さと $(1 + 2) - (3 + 4)$ とした電圧の関係を図 16 のようにして測定したものを図 18 に示す。また、今回は必要ないが $(1 + 4) - (2 + 3)$ を調べれば横方向のぶれを検出することができる。

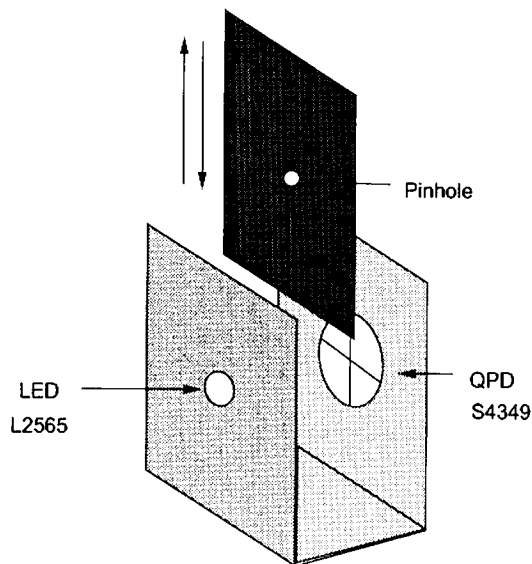


図 16: ピンホールの位置と出力の関係の測定の様子

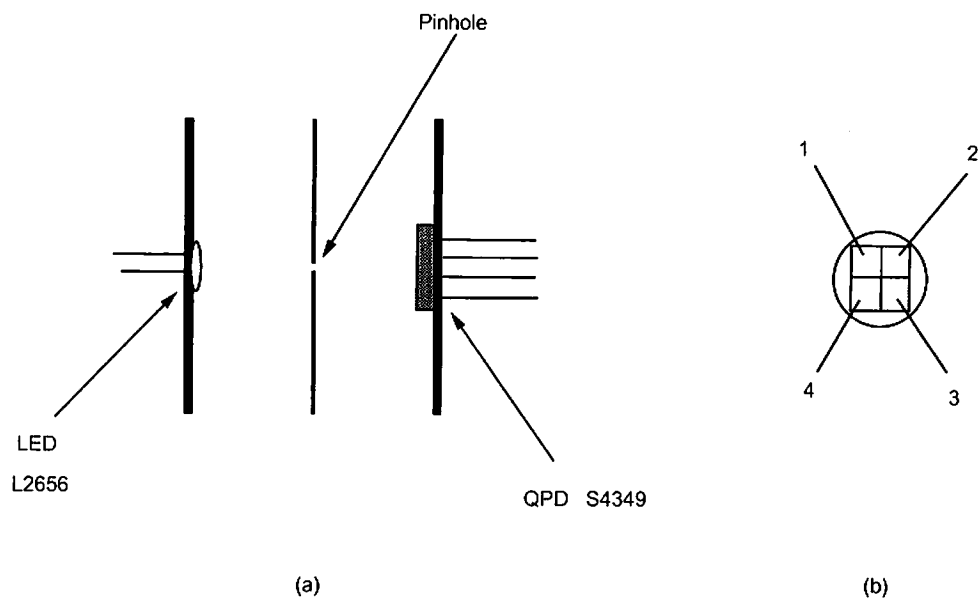


図 17: ピンホールを用いたセンサー。(a) は使用時のセンサーとピンホールの位置関係。(b) は4分割フォトセンサーを正面から見たもの。

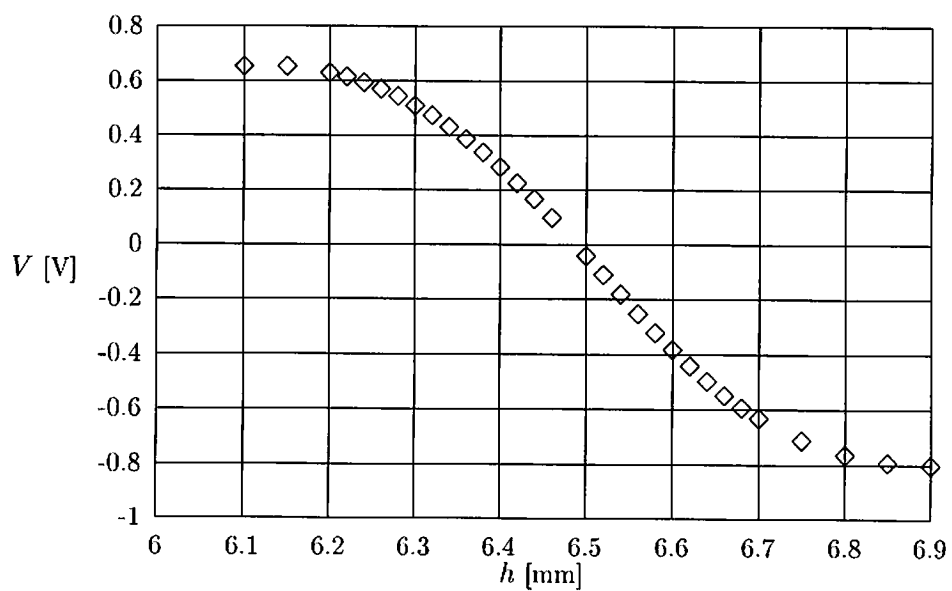


図 18: ピンホールを用いたセンサーでのピンホールの高さ h [mm] と出力 V [V] の関係。

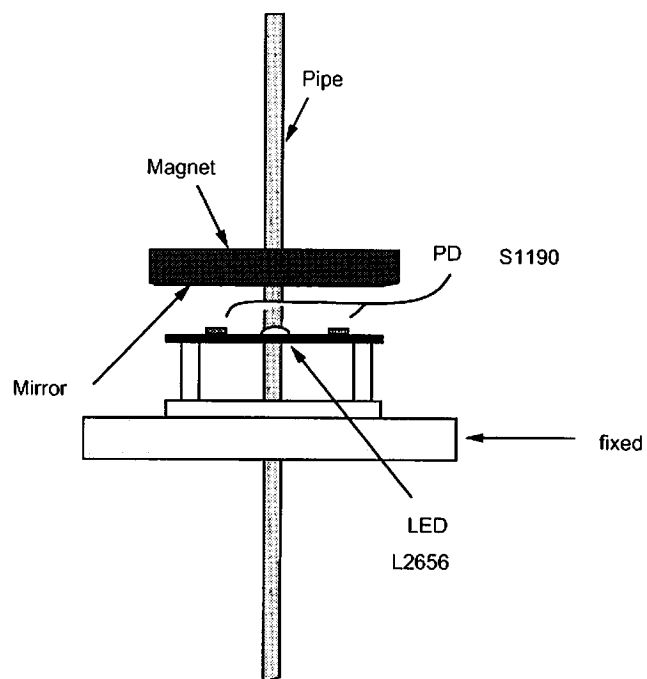


図 19: 反射式のセンサー

3.3.2 反射式のセンサー

反射式のセンサーでは、図 19に示すように、コマの下面にアルミ箔を貼っておきこれを反射面とする。反射面に向かって光を当て LED の両側についた検出器で反射してくる光の強度を測定するものである。検出器を 2 つ付けたのは反射面の傾きによって影響を受けないようにするためである。そのためには検出器を 2 つだけでなく、コマの軸に関して対称に 3 つ以上の検出器を付けるべきであった。実際に、このことが原因で反射面の傾きを上下の振動と誤りうまうまくなかった。この検出器の特性を測定した結果を図 20に示す。

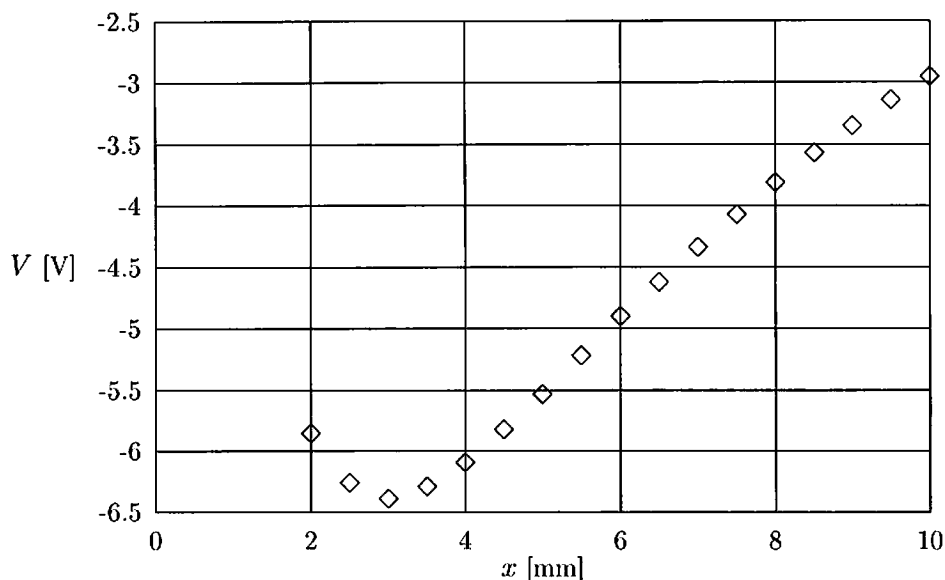


図 20: 反射式のセンサーでの反射面の高さ h [mm] と出力 V [V] の関係

3.4 結果と観察

このような設定で実際に制御をかけて実験を行った。ピンホールを用いたセンサーを使ったときには、実際に制御がかかりコマを安定に浮かせることができた。ただ、この状況ではまだコマ全体が軸の周りに回転する自由度が残されており、実際に軸の周りに回転してしまった。そのために、ピンホールを取りつけた板が回転しセンサーが高さを測定できず制御がかからなくなった。そこで直径 0.1mm のタングステンワイヤーを板に当て (図 21参照) 回転が起きないようにした。このときコマに手で少し触れてもコマが落ちることはなかったので、コマが浮くことに関して、このワイヤーの影響はほとんどないと考えて良い。うまく制御がかかりコマが浮いたときの支持台の設定を図 22に示す。

一方、反射式のセンサーを使ったときには、先に述べたように、コマの傾きを誤って高さの変化と認識してしまい制御がうまくかからなかった。これが本当にコマの傾きによるものかどうかは、検出器をコマの軸に関して対称に 3 つ以上付けて確認するべきであったが、時間の都合でそこまではできなかった。

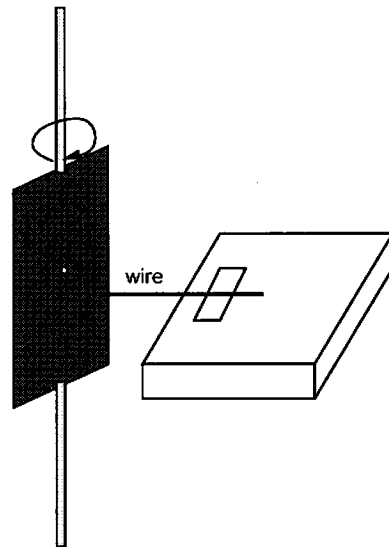


図 21: ワイヤーによる補助

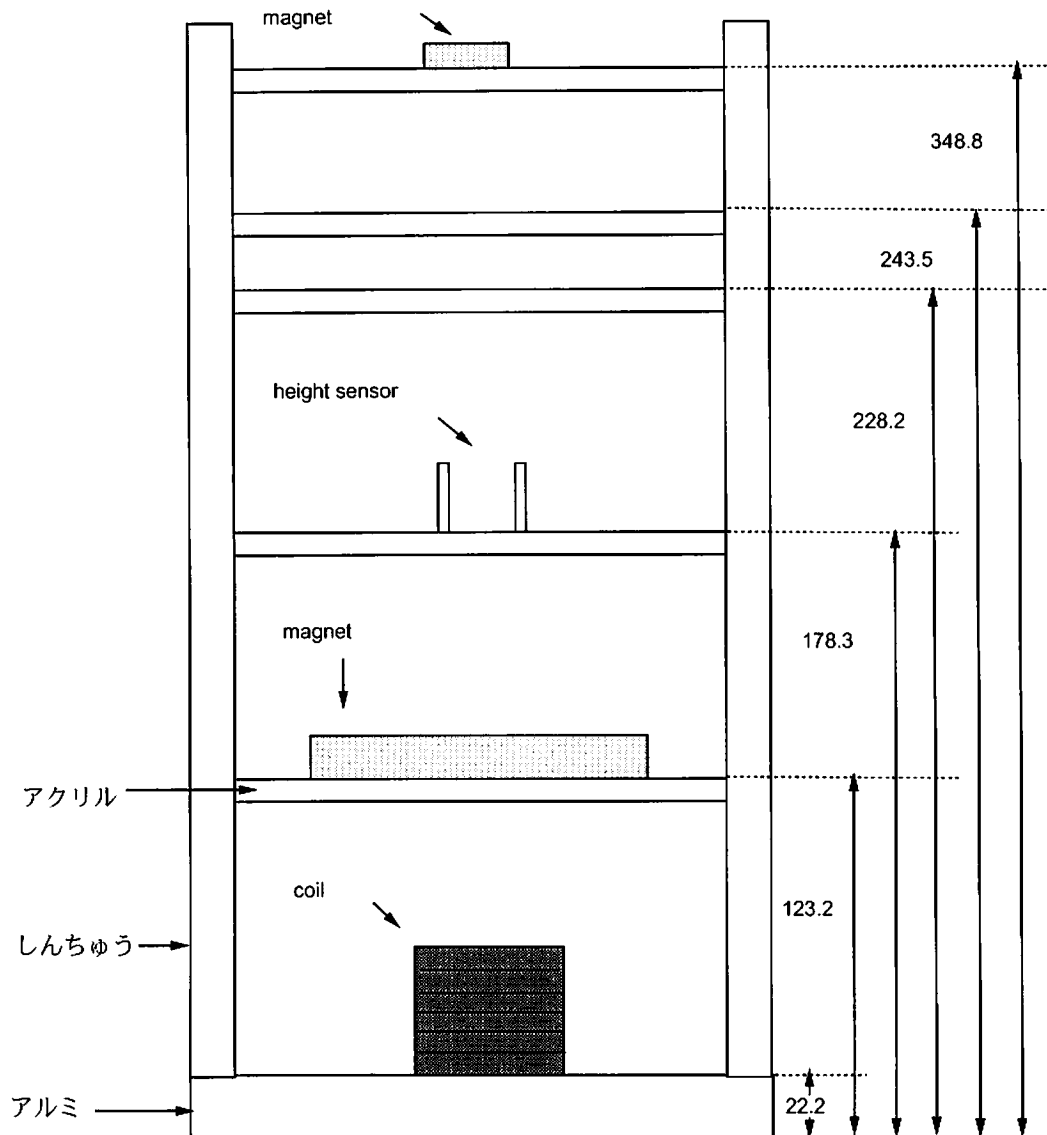


図 22: 支持台

3.5 システムの性質の測定

3.5.1 システムの振動特性の測定

コマが浮いたので、まず地面の振動とコマの振動の関係について測定してみた。コマが浮いた状態でセンサーからの出力のスペクトルを測定すれば、コマがどの程度振動しているかを調べられる。また、地震計 (RION) を使ってシステムをのせてある台の縦振動を測定して、両者を比較した。測定には Spectrum Analyser を使い、センサーの出力と地震計の出力をそれぞれフーリエ変換した。ピンホールを用いたセンサーの特性の測定結果 (図 18) から平衡点の近くでは、このセンサーの出力は高さに比例し比例定数は 3.38V/mm となる。また、地震計は地面振動の加速度を測るものであるが、測定時には加速度を 20V/Gal で電圧に変換して測定した。このことを考慮して Spectrum Analyser の出力を適当に変換すると図 23 のようになる。

これをみると、周波数が 70Hz 以下では地面振動に対してコマの振動の方が遥かに小さい。周波数が 70Hz くらいになると、地面振動とコマの振動が同じように振る舞い始める。周波数が 500Hz 以上では地面振動はさらに小さくなっていくが、この地震計は 100Hz 以下の感度しか保証されていないので、この領域に関してはこの結果だけでは何も言えない。一方、センサーの出力は約 $5 \times 10^{-10}\text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ 程度でほぼ一定になるが、これはコマの振動を測定しているのではなく、センサーの感度限界のためと思われる。

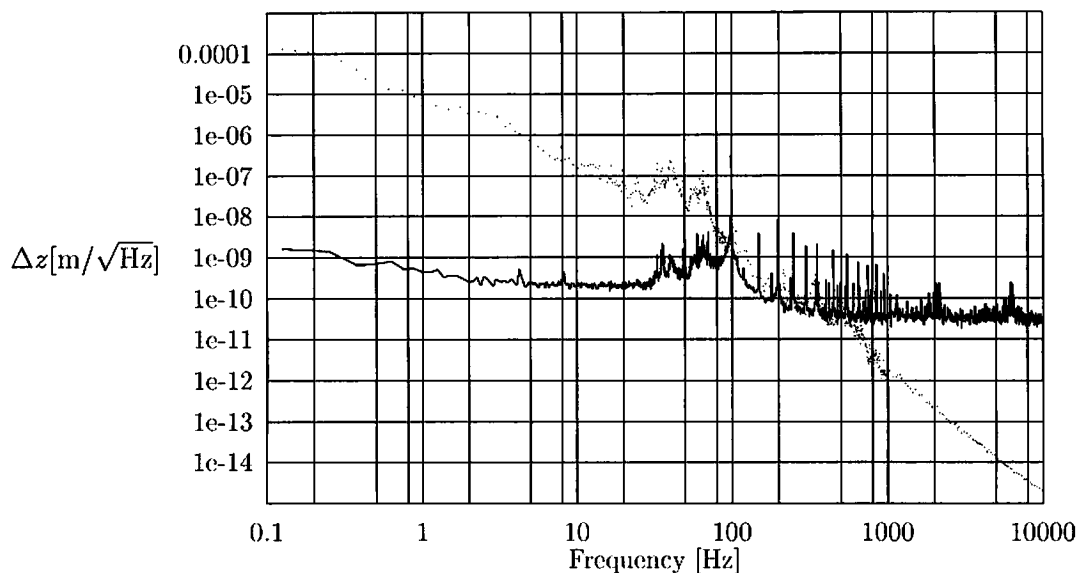


図 23: 地面振動とコマの振動の関係。地面振動を点線、コマの振動を実線で示す。

3.5.2 システムのオープンループ伝達関数の測定

コマに制御をかけた状態で FFT Servo Analyser を使って、システムに信号を入力し、その応答を測定してシステムのオープンループ伝達関数を測定した。具体的には、図 24 のようにフィルターとコイルドライバの間に FFT Servo Analyser を入れて、フィルターからの信号を Ch.B

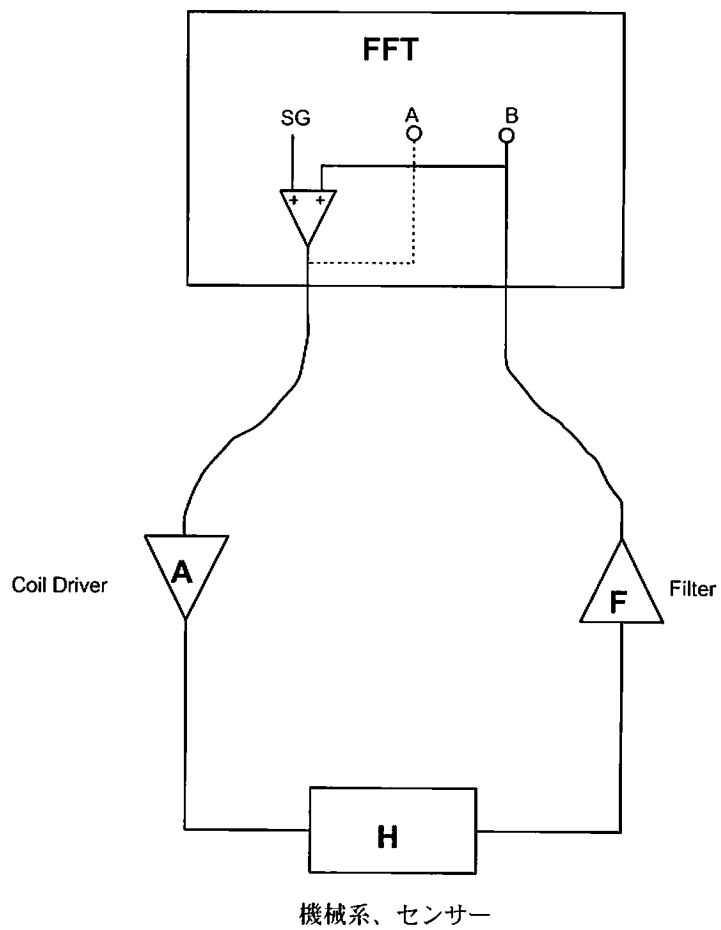


図 24: オープンループ伝達関数の測定のためのセットアップ

に入れ、コイルドライバーに外部からの信号 SG と Ch.B の信号の和を入力する。Ch.A には SG と Ch.B の和を入力する。すると、

$$\begin{aligned} \frac{Ch.B}{Ch.A} &= \frac{(SG + Ch.B) \times (HFA)}{(SG + Ch.B)} \\ &= HFA \end{aligned}$$

となりシステムのオープンループ伝達関数 HFA が求まる。実際はこれらの処理はすべて FFT Servo Analyser の内部で行われている。このようにして測定したオープンループ伝達関数の絶対値、位相およびコヒーレンスをそれぞれ図 25,26,27 に示す。

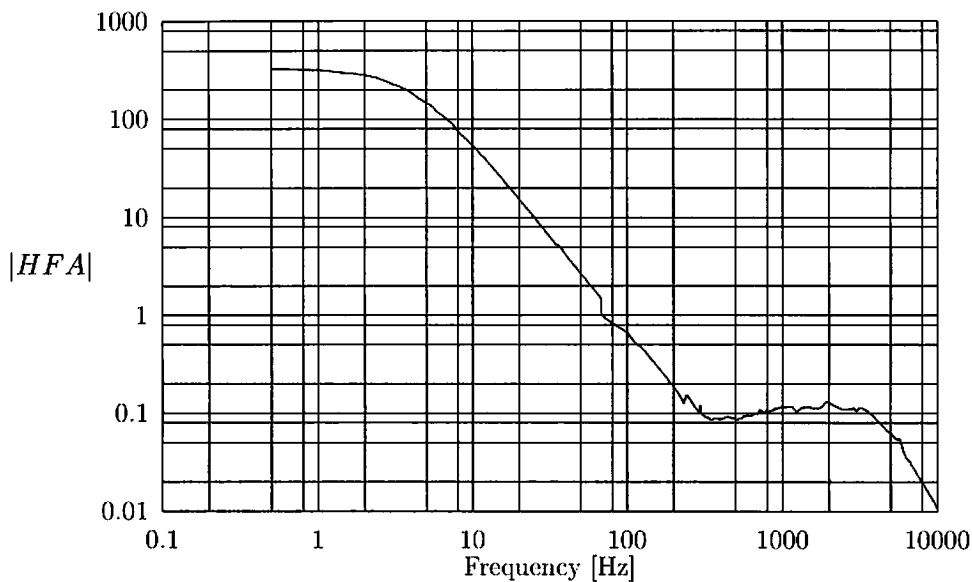


図 25: オープンループ伝達関数の絶対値の周波数特性

結果からオープンループ伝達関数の絶対値が 1 になるときの周波数は約 70Hz であり、そのときの位相は約 -165° である。よって、位相余裕は約 15° である。安定に制御をかけるには位相余裕が 20° 以上あることが望ましいが、一応安定条件を満たしている。本来フィルターを最適化すべきであるが、時間の都合でフィルターを作ることができなかった。そのため干渉計用に使っていたフィルターで代用した。したがって、フィルターはこのシステムに最適化されていない。

また、図 27 の縦軸は 0.99 ~ 1.00 になっているので、測定時のコヒーレンスは非常に良い。これは測定の再現性が高いことを示している。

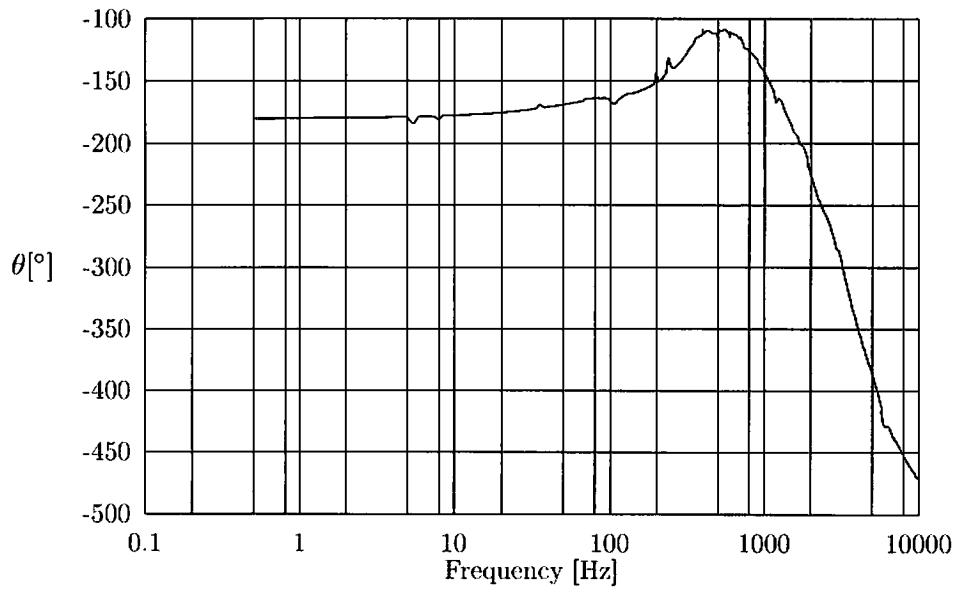


図 26: オープンループ伝達関数の位相の周波数特性

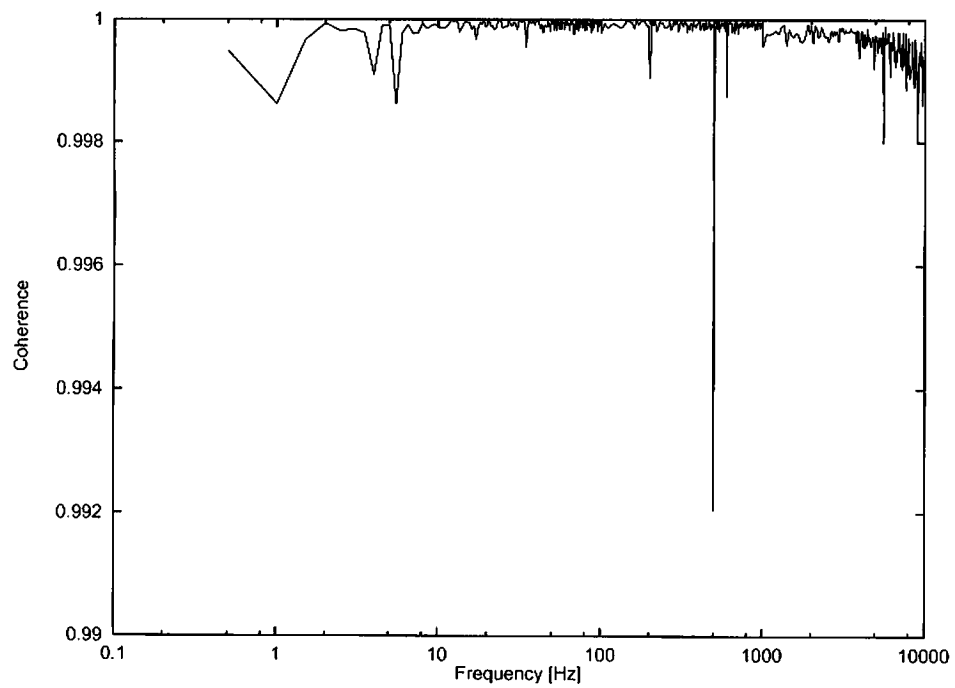


図 27: 測定のコヒーレンスの周波数特性

4 考察

4.1 結果に関して

システムのオープンループ伝達関数の測定からユニティーゲインになる周波数は約 70Hz であるからこの辺りまでは制御がかかっているはずである。システムの振動特性の結果を見ると 70Hz 以下の周波数領域では地面振動はかなりあるのに対して、コマの振動は約 $5 \times 10^{-10} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ でほぼ一定の値をとる。70Hz をすぎる頃からコマの振動が地面振動と同じようになることからこの辺りから制御が弱くなっているのだらうと思われる。100Hz から 500Hz まではコマは地面と同じように振動するが、500Hz を超えてからは地面振動は振幅がどんどん落ちているのに対して、コマの振動は約 $5 \times 10^{-11} \text{m}/\sqrt{\text{Hz}}$ の値をとり続ける。直感的には、このような高い周波数では振動が減衰していると思われる。このように高い周波数でセンサーの出力がなくなるのは実際にコマの振動を測定しているわけではなく、フォトセンサーの感度限界によるものと思われる。

4.2 今後の課題

今回の実験では、ピンホールを用いたセンサーを使って、一応制御がかかりコマを浮かせることができた。しかし、コマが回転してセンサーが働かなくなるのを防ぐためにワイヤーで回転を押さえてやった。そのために、コマの一部が外部と接触していた。このことが浮くことに本質的でないということは先に指摘した。完全に外部との接触を断ち、コマを浮かせるための方法として次のことが考えられる。まず一つはコマが回転しても、正常に作動し続けるセンサーを使用すること。この方針で反射式のセンサーに変えて試してみたが、今度は反射面の傾きに対してセンサーが反応してしまいうまく機能しなかった。もう一つの方法は今回作ったシステムを 3 つ作り、3 つのコマを剛体で固定することである。こうすればそれぞれのコマが回転することはなくなるので、うまくいくと思われる。

5 補遺

5.1 Earnshaw の定理

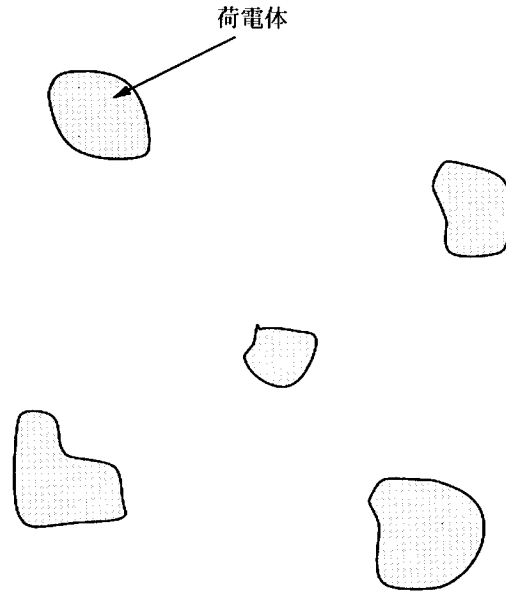


図 28: 静電場の中にいくつかの荷電体があるとき安定なつり合いはない。

静電場に関する Earnshaw の定理とは、次のものである。

- 「静電場になんらかの荷電体があるとき、それらは静電力だけによって安定なつり合いを保つことはできない。」

(証明) まず、静電場に対する Maxwell 方程式は

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \quad (2)$$

と書ける。但し、 ρ は電荷密度、 ϵ_0 は真空の誘電率である。任意のスカラー関数 ϕ に対して、

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \phi) = 0 \quad (3)$$

が成り立つので、式 (2) により

$$\vec{E} = -\operatorname{grad} \phi \quad (4)$$

これと式 (1) により ϕ は次の Laplace 方程式を満たす。

$$\Delta \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (5)$$

荷電体が安定なつり合いを保つためには、つり合いの状態ではその状態からの荷電体のあらゆる運動に対して、ポテンシャルエネルギーが極小でなければならない。

そこで、可能な運動の一つとして、荷電体の一つを方向を変えずに平行移動することを考える。この荷電体の上に点電荷 $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$ がそれぞれ点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ に存在していたとする。そのときのエネルギーは

$$U = U_{00} + U_{01} + U_{11} \quad (6)$$

となる。但し、 U_{00} はこの荷電体以外の電荷だけによるエネルギー、 U_{11} はこの荷電体の上の電荷だけによるエネルギー、 U_{01} はこの荷電体以外の電荷とこの荷電体の上の電荷との相互作用によるエネルギーである。ここで、この荷電体を平行移動することによって、変化するのは U_{01} だけである。そこで、

$$U_{01} = \sum_{i=1}^n q_i \phi_0(x_i, y_i, z_i) \quad (7)$$

と書く。但し、 $\phi_0(x_i, y_i, z_i)$ は、この荷電体以外の電荷が作るポテンシャルの点 (x_i, y_i, z_i) の値である。

この荷電体の位置をその上の一点（例えば重心）の座標 (x, y, z) によって指定するとして、 x, y, z の変化による U の変化を調べると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 U_{01}}{\partial x^2} = \sum q_i \frac{\partial^2 \phi_0(x_i, y_i, z_i)}{\partial x_i^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 U_{01}}{\partial y^2} = \sum q_i \frac{\partial^2 \phi_0(x_i, y_i, z_i)}{\partial y_i^2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 U_{01}}{\partial z^2} = \sum q_i \frac{\partial^2 \phi_0(x_i, y_i, z_i)}{\partial z_i^2} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

が成り立つ。ところが、点 (x_i, y_i, z_i) には荷電体外の電荷は存在せず、 $\phi_0(x_i, y_i, z_i)$ はこの荷電体以外の電荷が作るポテンシャルなので、ガウスの法則により $\phi_0(x_i, y_i, z_i)$ は式 (5) で $\rho = 0$ とおいた式

$$\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y_i^2} + \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial z_i^2} = 0 \quad (9)$$

を満たす。よって、式 (8) から

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (10)$$

が成り立つ。また、最初系はつり合いの状態にあったので

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (11)$$

である。

式 (10) は

$$\text{div}(\text{grad}U) = 0 \quad (12)$$

とも書ける。点 (x, y, z) を囲む微小な空間 V でこの式を積分してガウスの定理を適用すると、

$$\int_V \text{div}(\text{grad}U) d^3 \vec{x} = \int \int_{\partial V} \text{grad}U d\vec{S} = 0 \quad (13)$$

となる。最初のつり合いの状態ではエネルギーが極小であったとすると、点 (x, y, z) ではあらゆる方向に $\text{grad}U > 0$ であるので、

$$\int \int_{\partial V} \text{grad}U d\vec{S} > 0 \quad (14)$$

となる。これは、式 (13) と矛盾する。よって、最初のつり合いの状態ではポテンシャルエネルギーは極小では有り得ない。以上により定理は証明された。

この定理は次のように静磁場にも応用できる。すなわち、

- 「静磁場にいくつかの磁気双極子があるとき、それらは静磁力だけによって安定なつり合いを保つことはできない。」

(証明) 静磁場に対する Maxwell 方程式は次のようになる。

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (15)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = 0 \quad (16)$$

これは、静電場のときの式 (1), (2) と同じ形をしている。また、磁気の場合には単一の磁荷というものは存在せず、必ず双極子の形で存在する。しかし、仮想的に磁荷というものを導入して磁気双極子を互いに逆符号の磁荷が限りなく近づいたものと考え、上の証明の”荷電体の上の電荷”というところを”磁気双極子の中の磁荷”とすれば、静電場のときと同様に静磁場に対する Earnshaw の定理を証明することができる。

5.2 回路図

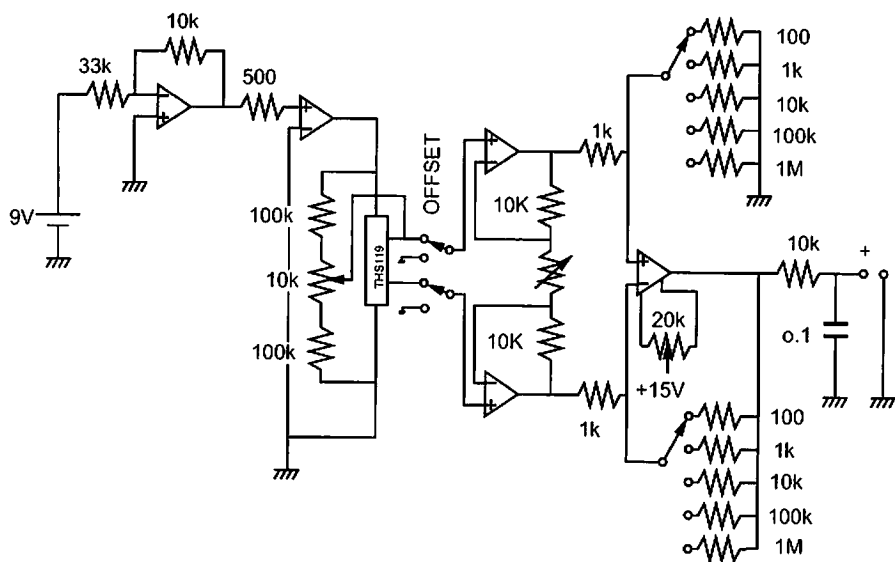


図 29: ガウスメートルの回路図。オペアンプはすべて OP27、ホール素子は TOSHIBA TSH119 を使用した。