

ワイヤのQ値の測定

理学部物理学科4年 51557 堀越 一雄
共同実験者 清水 守

1997年 2月 17日

1 目的

振り子のエネルギーのワイヤにおける損失を見積もるために、ワイヤのみによるQ値を測定しそれから振り子全体のQ値を予想する。

2 原理

2.1 Q値とは？

減衰振動の方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = 0 \quad (1)$$

$\gamma^2 < \omega_0^2$ の場合の解は

$$x = Ae^{-\gamma t} \exp\left(i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \cdot t\right) \quad (2)$$

となる。ここでQ値とは一周あたり平均エネルギーの損失に対する全エネルギーの割合の 2π 倍である。減衰が弱い ($\gamma \ll \omega_0$) 場合、振幅 $Ae^{-\gamma t}$ 、角振動数 ω_0 と考えてよく、エネルギー E は振幅の二乗に比例するので

$$\begin{aligned} Q &\simeq 2\pi \frac{E}{-\frac{dE}{dt} \frac{2\pi}{\omega_0}} \\ &= \frac{\omega_0}{2\gamma} \end{aligned} \quad (3)$$

2.2 ワイヤのQ値

ワイヤのQ値とは空気の抵抗等ではなく、そのワイヤの素材そのものによるエネルギー損失から来るものである。これを計算するにあたって2つのモデルが考えられている。

1. Saulson's model

式 (1) をフーリエ変換して $Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$ を代入すると、

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega_0\omega}{Q}\right) \tilde{x} = 0 \quad (4)$$

ここで、この式の第1項と第3項を取り出して

$$\omega_0^2 \left(1 + i\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right) = \omega_0^2 \left(1 + i\phi(\omega)\right) \quad (5)$$

とおいてやると、

$$Q = \frac{1}{\phi(\omega_0)} \quad (6)$$

となる。ここで $\phi(\omega)$ が ω によらずほぼ一定であると考えるのが Saulson's model である。このモデルによるとQ値は共鳴周波数の値によらずほぼ一定になる。

2. Velocity model

式 (1) において γ を一定と考えるモデル。これによると式 (3) から共鳴周波数の値が大きくなる程Q値は大きくなることになる。

2.3 Q値の計算方法

1. 振幅の減衰から求める方法

振動の減衰が直接測定できる場合はその減衰係数から式 (3) を用いてQ値を求める。

2. 共鳴の幅から求める方法

強制振動の方程式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + 2m\gamma \frac{dx}{dt} + m\omega_0^2 x = F e^{i\omega t} \quad (7)$$

の解はこの方程式の特殊解と線形方程式 (1) の解 (2) を足したもので表されるが、線形方程式の解の部分はしばらくすると減衰してしまうので、結局特殊解のみを考えればよい。特殊解として $x = x_0 e^{i(\omega t + \alpha)}$ を考え式 (7) に代入すると、

$$[-m(\omega^2 - \omega_0^2) + 2im\gamma\omega] x_0 e^{i\alpha} = F \quad (8)$$

x_0 は実数なので

$$x_0 = \frac{F}{m} \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}} \quad (9)$$

$$\alpha = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (10)$$

エネルギー E は振幅の二乗に比例するので

$$E \propto x_0^2 \propto \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \quad (11)$$

エネルギーが $\omega = \omega_0$ の時の値の $\frac{1}{2}$ になる ω を求める。

$$\frac{4\gamma^2 \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} = \frac{1}{2} \quad (12)$$

これから

$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\gamma^2(\omega^2 - \omega_0^2) - 4\gamma^2 \omega_0^2 = 0 \quad (13)$$

が得られ、これを解くと

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 \left(1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2} \right) \pm 2\gamma^2 \sqrt{1 + \frac{\omega_0^2}{\gamma^2}} \\ &= \omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) \pm \frac{\omega_0^2}{2Q^2} \sqrt{1 + 4Q^2} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで $Q \gg 1$ の場合、

$$\omega^2 \simeq \omega_0^2 \left(1 \pm \frac{1}{Q} \right) \quad (15)$$

よって

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 \sqrt{1 \pm \frac{1}{Q}} \\ &\simeq \omega_0 \left(1 \pm \frac{1}{2Q} \right) \end{aligned} \quad (16)$$

したがって、エネルギーの共鳴の半値幅を Δ とすると

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta} \quad (17)$$

となり、この幅を測定することによってQ値を求めることができる。なお、振幅の場合はピークの $\frac{1}{\sqrt{2}}$ になる幅を測ればよい。

2.4 ワイヤのQ値から振り子のQ値を計算

Saulson による式¹

$$\frac{1}{Q_{\text{pend}}} \simeq \frac{1}{Q_{\text{wire}}} \frac{N\sqrt{TYI}}{2mgl} \quad (18)$$

を用いて、ワイヤのQ値から振り子のQ値を計算する。ここで N は振り子を釣っているワイヤの本数、 T はワイヤの張力、 Y はワイヤのヤング率、 I はワイヤの慣性モーメント（半径 r のワイヤの場合 $I = \frac{1}{2}\pi r^4$ ）、 m は振り子の質量、 l はワイヤの長さである。

3 実験の手法

図1のような装置を作る。なお、ワイヤは4～8 cm のものを用い、手でまっすぐに整形して図2のように固定する。ピエゾ素子を図3のような回路につないで振動させ、ワイヤを励起し、LED から出た光をディテクターで測定する。LED は図4の回路により発光させる。ディテクターとしては、光の当たる位置によって左右に違う電位がかかるフォトダイオードを用いる。図5の回路により左右の信号の差を出力信号として観測する。こうすることによってワイヤの影の位置がわかり、ワイヤの振動を測定できる。このようにして得られた信号と励起信号と同じ周波数の参照信号をロックインアンプ（NF ELECTRONIC INSTRUMENT 社製 5610B）に入力し、band path 30,time constant 0.3[s] で測定する。すると例えば図6のような sin 成分と cos 成分の信号が得られるので、これを ADC に通してコンピュータに入力する。励起信号を切ったときの減衰が遅い場合は sin 成分と cos 成分の二乗和のルートをとって振幅を求め、その減衰係数から直接Q値を求める（新谷氏作の Qfit プログラム）。減衰が速すぎて減衰係数が測れない場合（数秒で減衰してしまう場合）はマルチファンクションシンセサイザで周波数を一定の速さで変えた励起信号を入力し、振幅をチャートに記録して共鳴の幅からQ値を求める（図7）。いままで述べた信号処理をまとめたのが図8である。サンプルとしてはタングステン（直径 0.2,0.1,0.06mm）、ステンレス#304（直径 0.1mm）、ステンレス#316（直径 0.1mm）、鉄（直径 0.1mm）、ピアノ線（直径 0.1mm）、チタン（直径 0.1mm）を用い、それぞれについてQ値の周波数依存性と圧力依存性を測定し、ワイヤ自体の損失によるQ値を決定する。

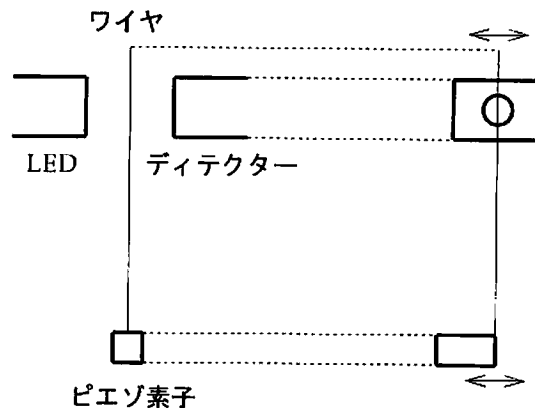


図1: 実験装置

¹P.R. Saulson, Phys. Rev. D42(1990)2437.

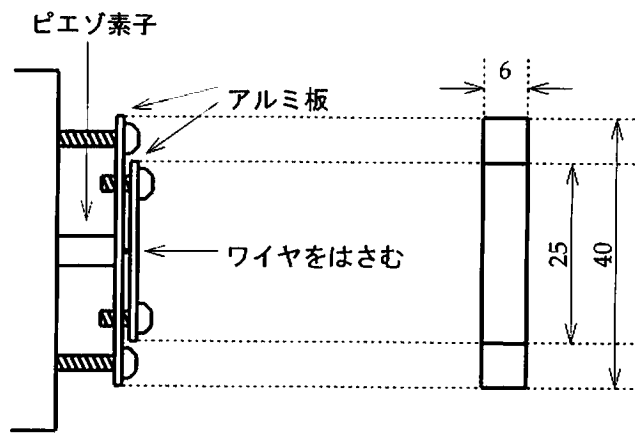


図 2: ワイヤの固定

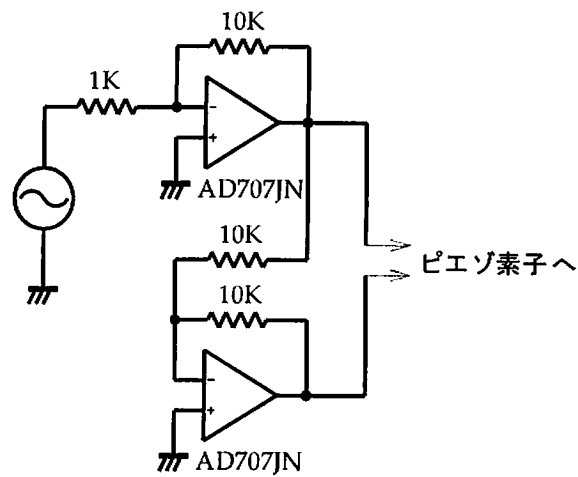


図 3: ピエゾ素子の回路

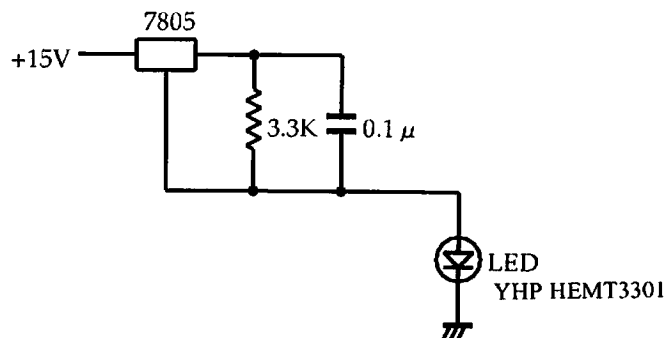


図 4: LED の回路

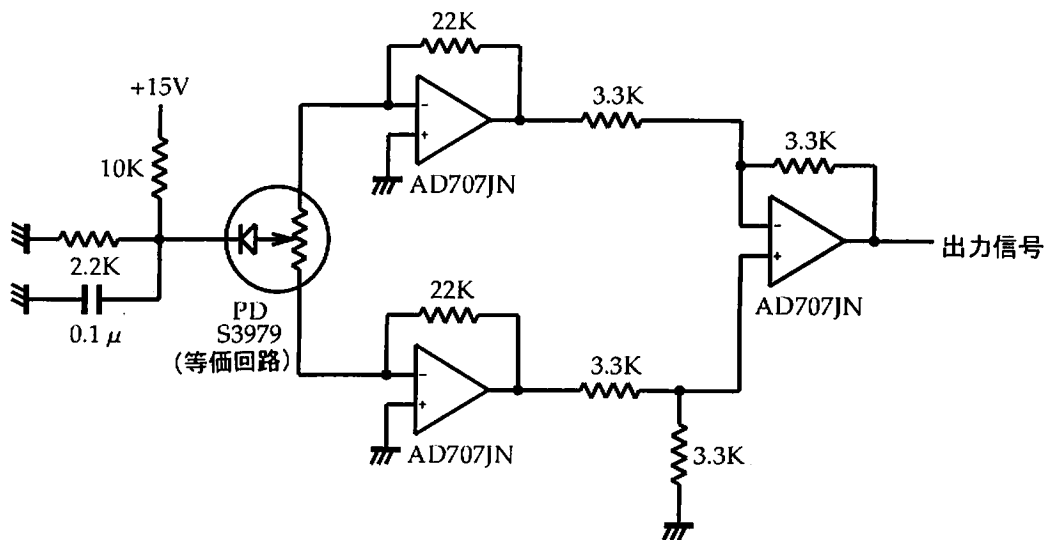


図 5: フォトダイオード → 出力信号

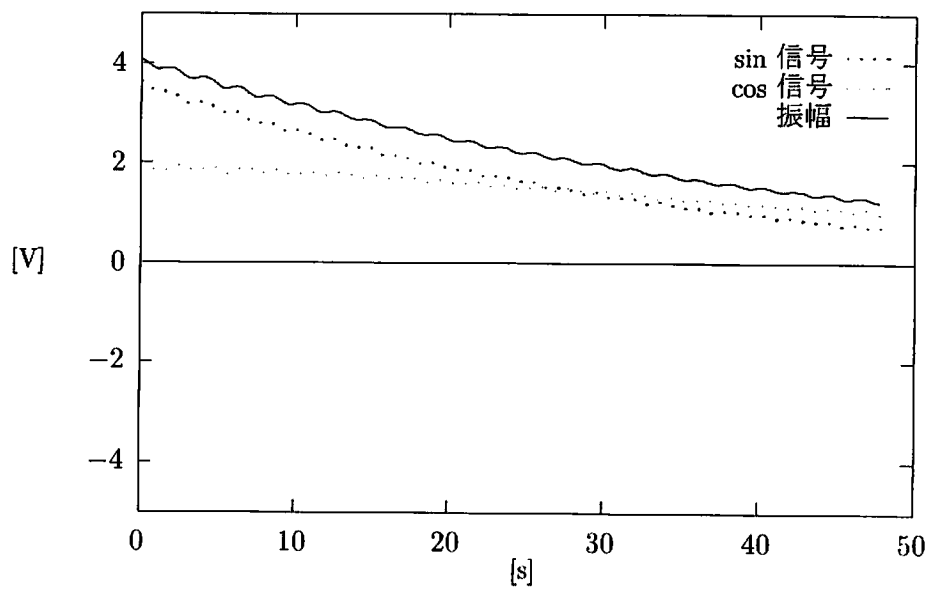


図 6: ロックインアンプの出力例 (タングステン 0.1mm の依存性の測定 (図 9) の 29.19[Hz] でのデータ。Qfit で求めたQ値は $Q = 3.71 \times 10^3$)

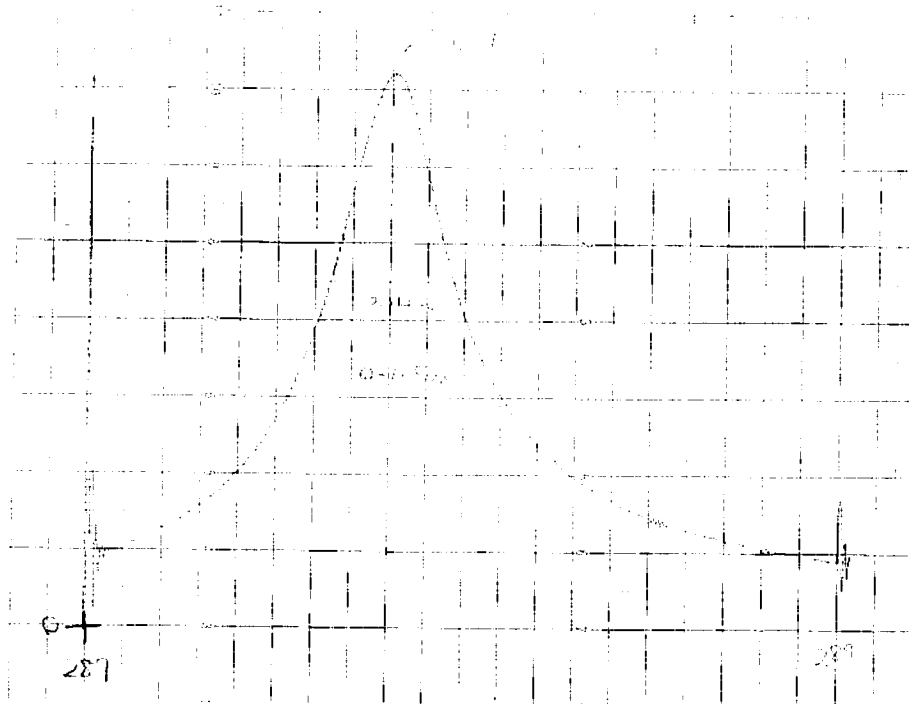


図 7: 共振の例。タングステン 0.2mm の周波数依存性の実験 (図 15) の 287.8Hz の共振で、この幅から求めたQ値は $Q = 1.09 \times 10^3$ 。

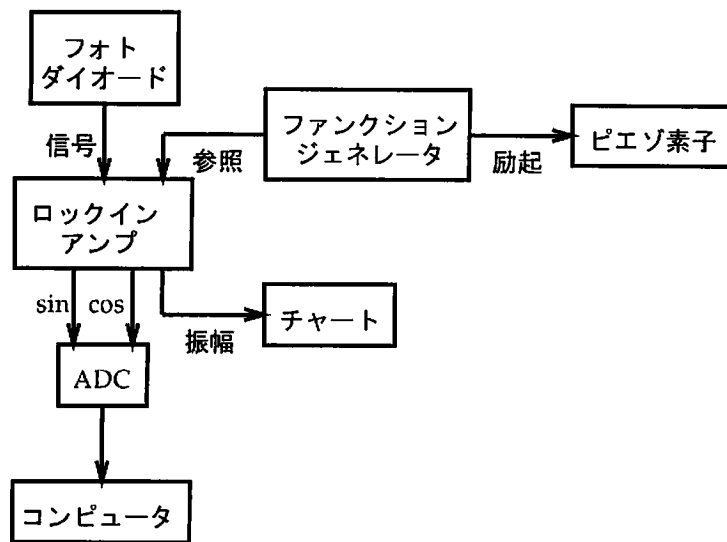


図 8: 信号処理の概念図

4 結果および考察

4.1 圧力依存性

それぞれのサンプルについて、最低次の固有モードにおけるQ値を圧力を変えて測定した(図9~14)。これを見ると、鉄を除いて0.01torr付近で一定値に近づいていることがわかる。特により小さい真空度まで測定したタングステン0.1mmの場合(図9)は0.01torr以下ではほぼ一定になっていることがわかる。したがって一番小さい真空度で測定したQ値をそのままそのサンプルのQ値と考えるのもよいといえる。材料毎のQ値については表1を参照。鉄についてはもっと圧力を上げればよりよいQ値が得られるような気がするが、2回目の測定でQ値が全く安定しないことから考えると、ワイヤに変な癖がついてまっすぐにならなかったのもその影響が出ていることも考えられる。また、図10を見ると0.2mmの方が0.06mmのものよりも圧力による変化が小さいが、これは質量は直径の二乗で増加するのに対し、表面積に比例する抵抗力は直径の一乗で増加するので、太いものほど圧力による影響が小さいためと考えられる。なお、材料が同じであっても観測によって周波数が異なるのはワイヤの長さの違いによるものであり、2次以上の固有モードについて測定しているわけではない。

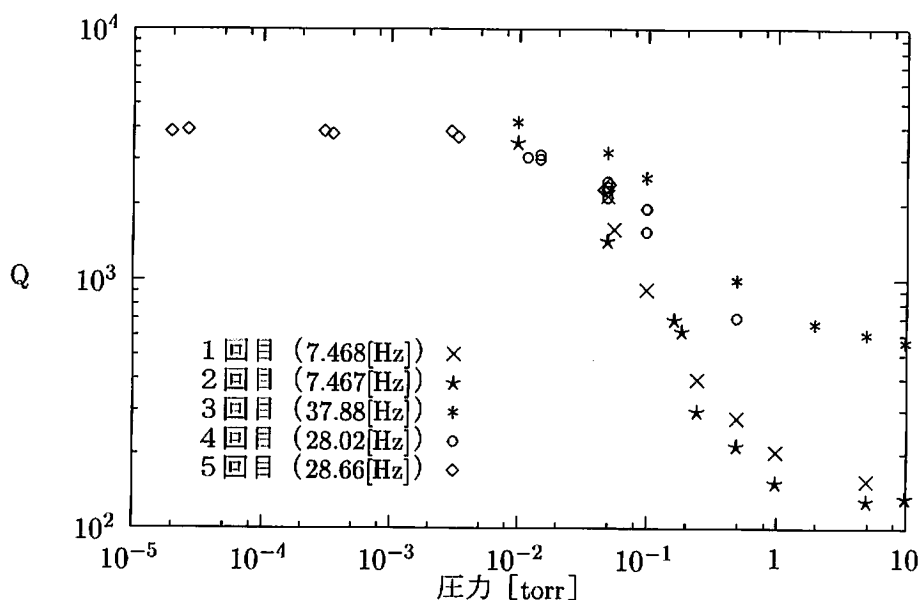


図9: タングステン (0.1mm) のQ値の圧力依存性

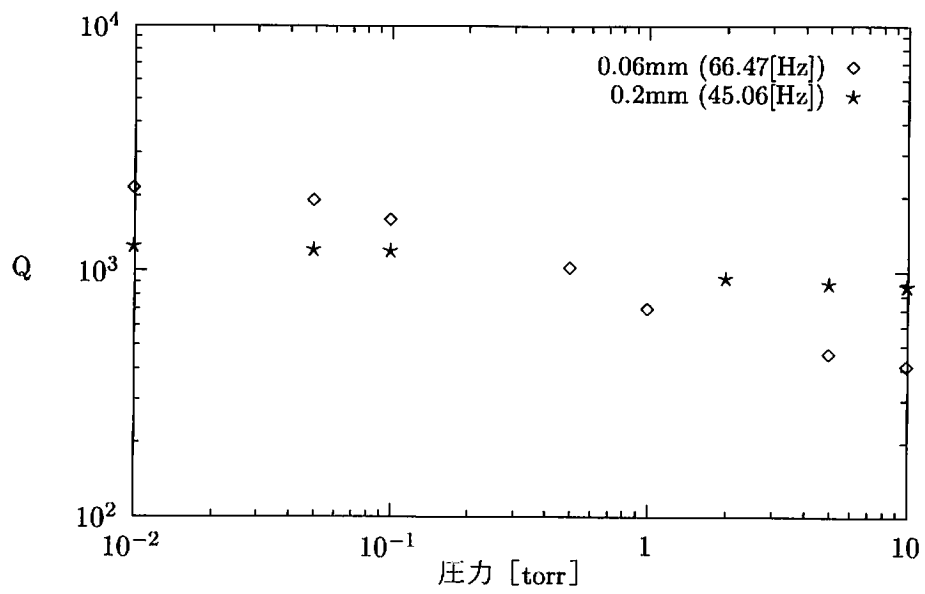


図 10: タングステン (0.06,0.2mm) のQ値の圧力依存性

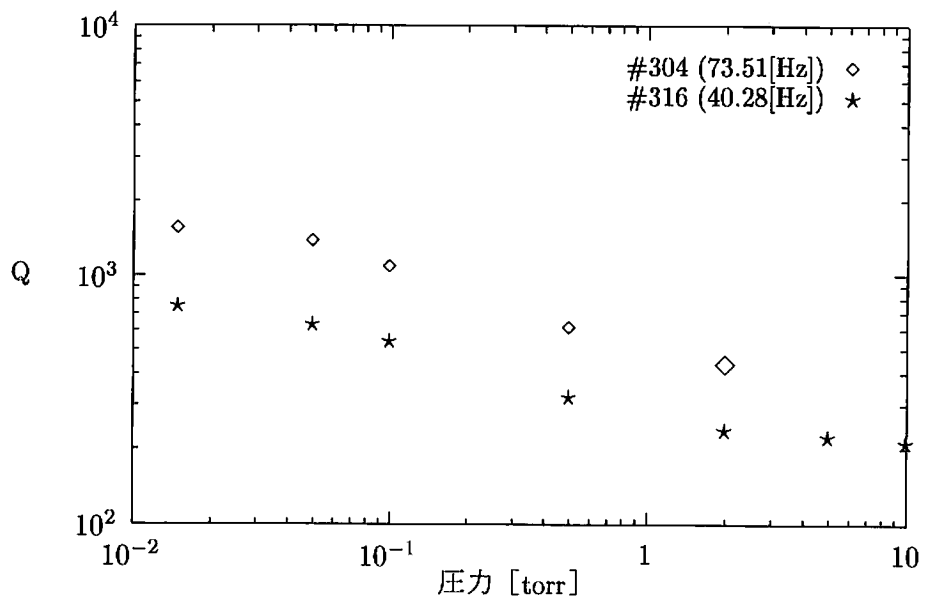


図 11: ステンレスのQ値の圧力依存性

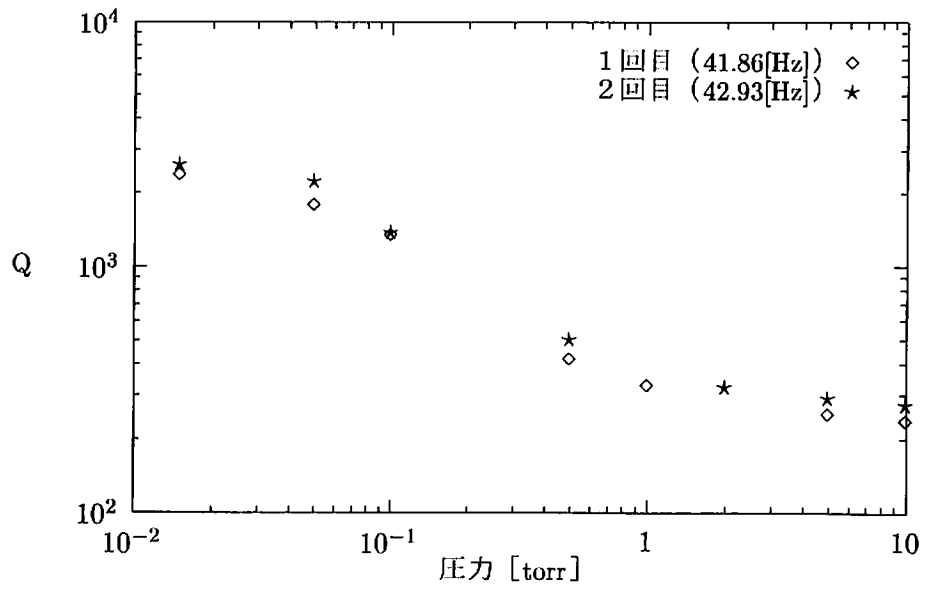


図 12: ピアノ線のQ値の圧力依存性

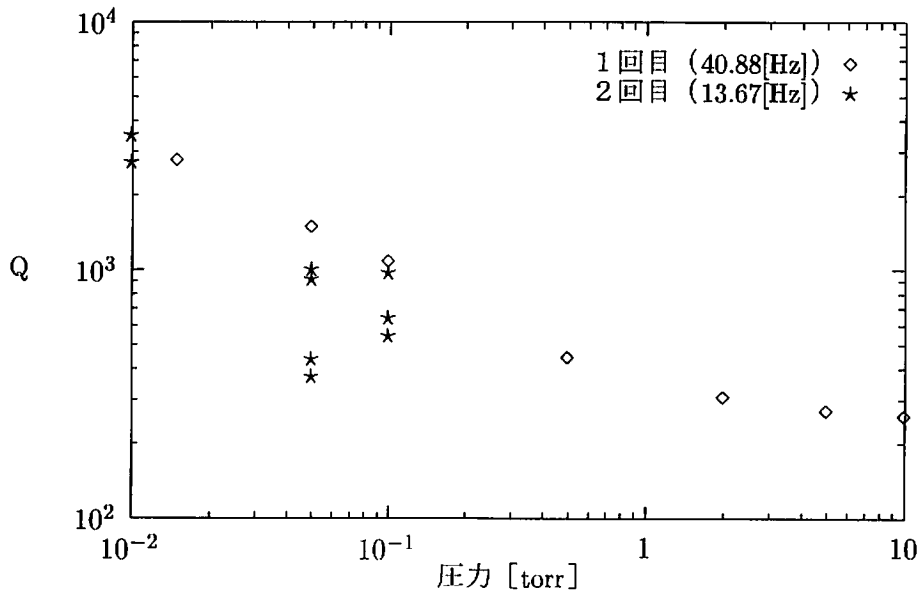


図 13: 鉄のQ値の圧力依存性

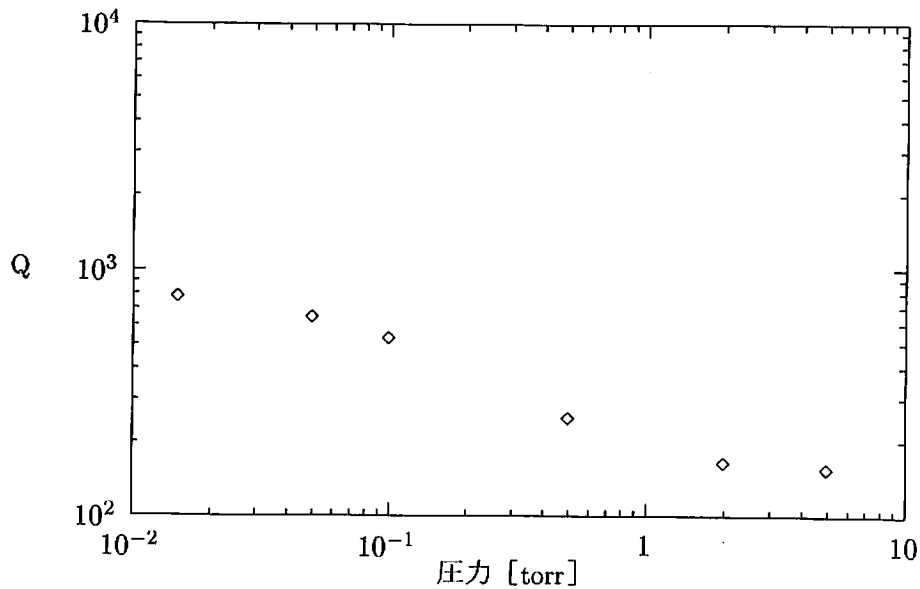


図 14: チタンのQ値の圧力依存性 (43.77[Hz])

4.2 周波数依存性

マルチファンクションシンセサイザで励起信号の周波数を一定の速さでゆっくり変えてゆき、出力をコンピュータでモニターすると固有振動数のところだけ信号が現れる。このようにしてそれぞれのサンプルについて1kHz程度までの固有振動モードを探し、それぞれの固有振動モードについてQ値を測定した(図15~17)。これを見ると、全般的に周波数があがるとややQ値が下がる傾向がみられるが、圧力による変化に比べるとその変化は小さいのでQ値の周波数依存性は小さいと考えられる。Saulson's modelとVelocity modelを比較してみると、Velocity modelの場合は周波数が大きくなる程Q値は大きくなってはならないので、むしろQ一定のSaulson's modelに近いといえる。

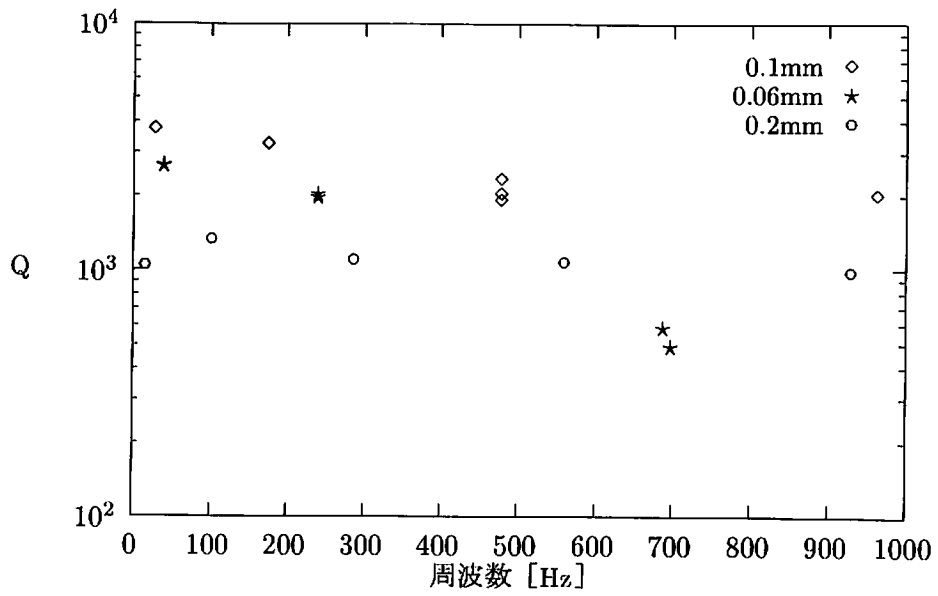


図 15: タングステンのQ値の周波数依存性 (圧力 ~ 0.01 torr)

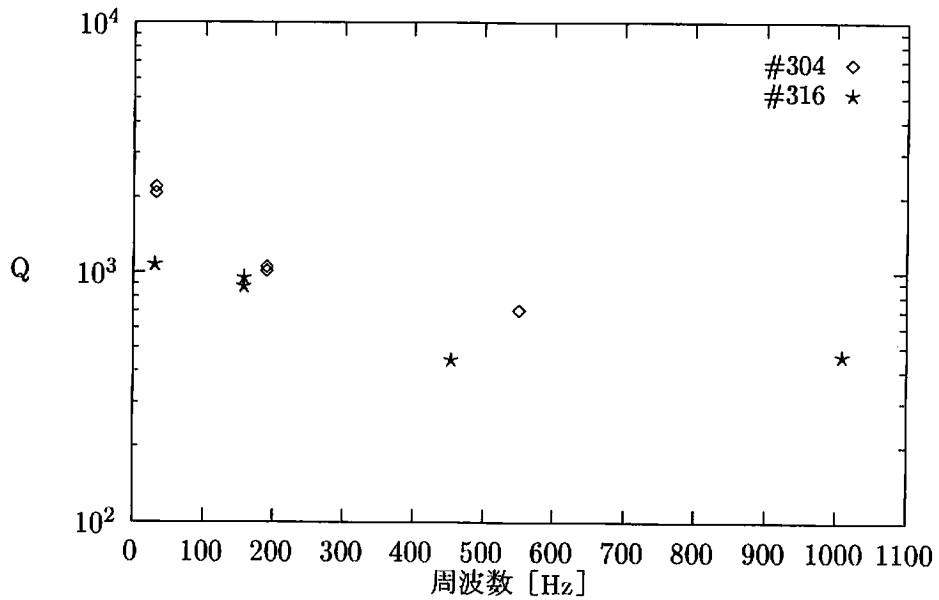


図 16: ステンレスのQ値の周波数依存性 (圧力 ~ 0.01 torr)

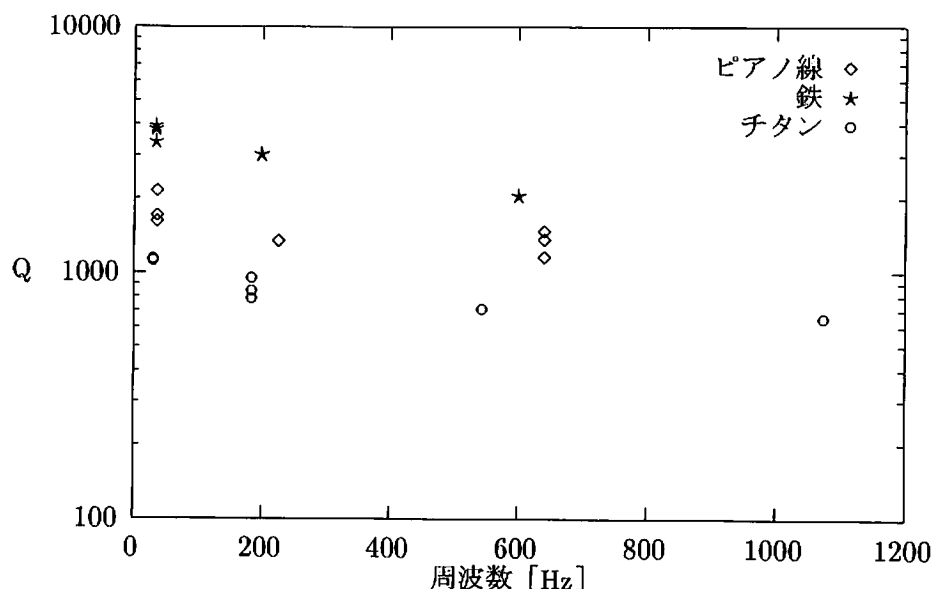


図 17: ピアノ線、鉄、チタンのQ値の周波数依存性 (圧力~ 0.01torr)

4.3 振り子のQ値の予想

今までの考察により決定されたワイヤのQ値から、そのワイヤを用いた振り子のQ値を式(18)を用いて計算する。計算は質量764g, ワイヤの長さ5cm, ワイヤの本数2本のもの(振り子1)、質量574g, ワイヤの長さ8cm, ワイヤの本数2本のもの(振り子2)、質量1Kg, ワイヤの長さ24cm, ワイヤの本数4本のもの(振り子3)について行う。このうち振り子1および2は清水レポートの実験で実際に使われたもので、実際の実験結果については清水レポートを参照。振り子3はTAMA300で使われる予定のものである。計算結果は表1でヤング率は理科年表のものを用いた。これによるとタングステン(0.06mm)がもっともQ値が大きかった。

ワイヤ	ヤング率	ワイヤのQ値	振り子1	振り子2	振り子3
タングステン 0.1mm	53.44×10^{10}	3.84×10^3	3.24×10^5	4.50×10^5	3.56×10^6
タングステン 0.06mm	53.44×10^{10}	2.14×10^3	5.02×10^5	6.96×10^5	5.51×10^6
タングステン 0.2mm	53.44×10^{10}	1.25×10^3	2.69×10^4	3.66×10^4	2.90×10^5
ステンレス#304	$\sim 21(?) \times 10^{10}$	1.56×10^3	2.10×10^5	2.92×10^5	2.31×10^6
ステンレス#316	$\sim 21(?) \times 10^{10}$	7.54×10^2	1.02×10^5	1.41×10^5	1.16×10^6
ピアノ線	$\sim 21(?) \times 10^{10}$	2.4×10^3	3.23×10^5	4.48×10^5	3.55×10^6
鉄	$\sim 21(?) \times 10^{10}$	$\sim 3(?) \times 10^3$	4.04×10^5	5.61×10^5	4.44×10^6
チタン	11.57×10^{10}	7.73×10^2	1.40×10^5	1.94×10^5	1.54×10^6

表 1: 予想される振り子のQ値

参考 ガラスおよび石英（熔融）

今までのサンプル以外にもガラスおよび石英（熔融）についてQ値を圧力を変えて測定した。これらについてはファイバーの直径等の十分なデータがないので詳しく議論はできないが、一応参考までにQ値の観測結果を載せておく。用いたサンプルはガラスおよび石英（熔融）のファイバー（図 18）、石英（熔融）のファイバーの頭を大きくして振り子のようにしたもの（図 19）である。なお、ファイバーの直径を仮に0.1mmとして4.3と同じ振り子についてQ値を計算したものが表2である。

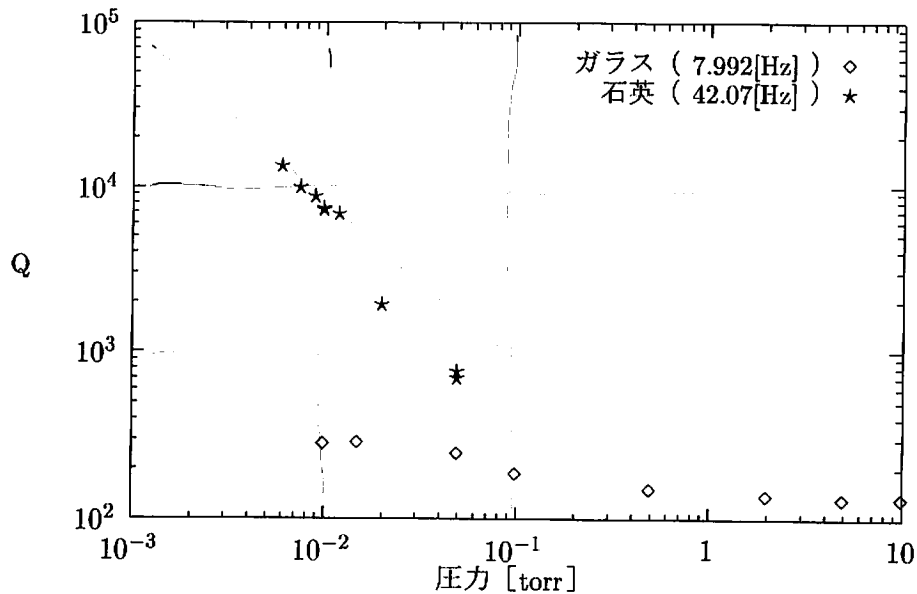


図 18: ガラスおよび石英（熔融）のファイバー

ファイバー	ヤング率	ファイバーのQ値	振り子1	振り子2	振り子3
ガラス	$\sim 7.5(?) \times 10^{10}$	2.80×10^2	6.31×10^4	8.75×10^4	6.93×10^5
石英（熔融）	7.31×10^{10}	1.31×10^4	3.00×10^6	4.16×10^5	3.28×10^7

表 2: 予想される振り子のQ値（ガラスおよび石英）

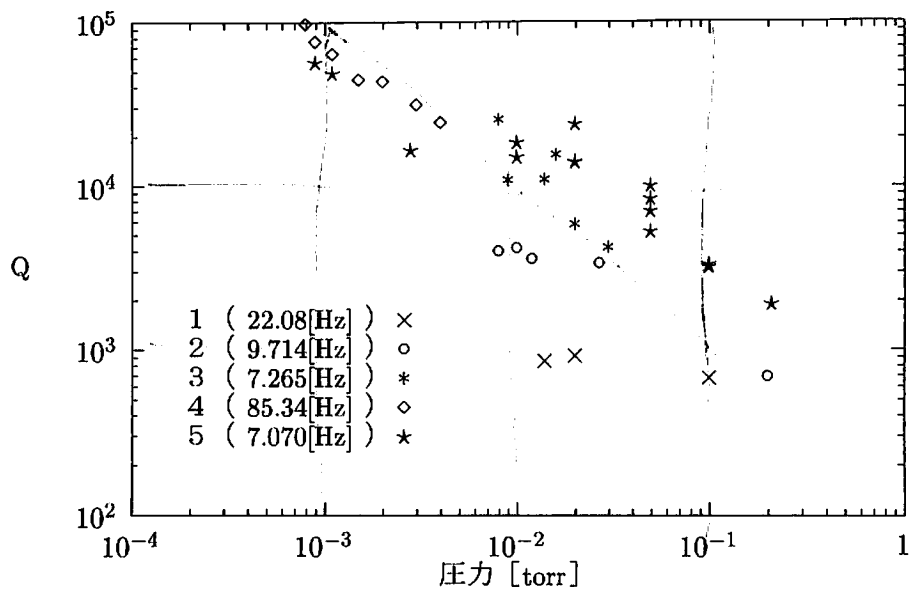


図 19: 石英（熔融）を振り子のようにしたもの

5 今後の課題

圧力をより下げるとQ値が大きくなる可能性のある鉄および石英（熔融）について、より低い真空度でQ値の測定を行う。ガラスおよび石英（熔融）についてファイバーの太さ等の情報を詳しく調べた上でQ値の測定を行う。ワイヤを熱処理して表面に吸着した分子の影響を取り除いた上でQ値の測定を行う。

6 感想

実験終了からレポート提出までほとんど時間がないのは厳しい。せめてレポート提出まで1～2週間は欲しい。