

物理実験レポート

1995.10.1

s41518H

尾田欣也

理学部物理学科4年

共同実験者 成田哲博

1 実験の目的

坪野研究室は Fabry-Perot 型 Michelson 干渉計による重力波の検出をめざしている。重力波を検出するのに障害になる雑音はおもに以下の雑音である。

- 1 熱雑音
- 2 ショットノイズ
- 3 地面振動

このうち、反射鏡の固有振動の Q 値を上げることが 1 の熱雑音の低減につながる（「原理」の章を参照）。この準備のために、円柱形のアルミと熔融石英の鏡について、それぞれの固有振動の Q 値をはかり、山元氏が 94 年の学生実験で作ったプログラムで新たに求めた理論値と比較すること、そして Q 値をどの程度まで上げる事ができるのかを調べるのがこの実験の目的である。

2 原理

2.1 Q 値と熱雑音の関係

熱雑音を励起された共振モードの重ね合わせと考える。一つの共振を考えたとき、共振の Q 値が大きいほど共振周波数以外の周波数では熱雑音が小さくなることを以下に示す。

i 番目の共振の運動方程式を次式で近似する。但し、 m_i をそのモードの換算質量、 ω_i を共振周波数、 x_i を平衡からの変位、 Q_i を Q 値、 $F(t)$ を外力とする。

$$m_i \ddot{x}_i + m_i \frac{\omega_i}{Q_i} \dot{x}_i + m_i \omega_i^2 x_i = F(t)$$

この式を Fourier 変換して、

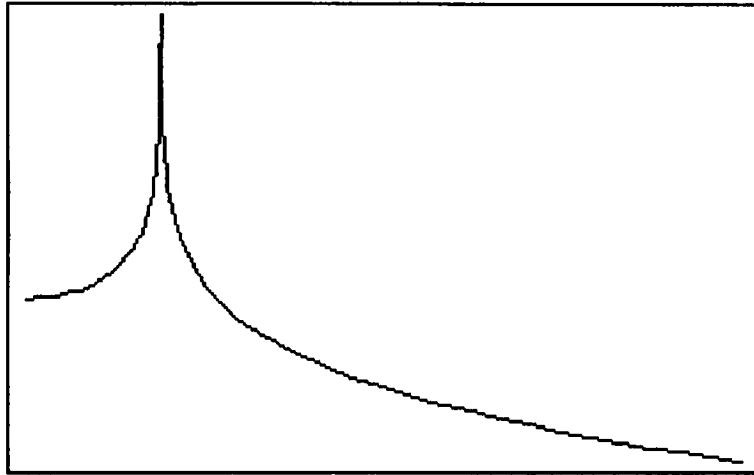
$$\left(-\omega^2 + \frac{i\omega_i\omega}{Q_i} + \omega_i^2\right) m_i x_i(\omega) = F(\omega)$$

となる。従って伝達関数 $H_i(\omega)$ は

$$H_i(\omega) = \frac{x_i(\omega)}{F(\omega)} = \frac{1}{m_i \left[(\omega_i^2 - \omega^2) + \frac{i\omega_i\omega}{Q_i} \right]}$$
$$|H_i(\omega)|^2 = \frac{1}{m_i^2 \left[(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \frac{\omega_i^2 \omega^2}{Q_i^2} \right]}$$

である。

これを横軸に周波数、縦軸に $|H_i(\omega)|^2$ の対数を取ってグラフに書くと、



のようになる。

$x(t)$ のパワースペクトル密度 $S(\omega)$ を

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} dt x(t) e^{-i\omega t}$$

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle |X_T(\omega)|^2 \rangle}{T}$$

で定義する。

入力のパワースペクトル $S_i(\omega)$ と出力のパワースペクトル $S_o(\omega)$ には、

$$S_o(\omega) = |H(\omega)|^2 S_i(\omega)$$

の関係がある。

熱雑音はホワイトノイズで、周波数によらないと考えられるので、

$$S_i(\omega) = D (= \text{const.})$$

とする。

エネルギーの等分配則から、

$$\frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \overline{x_i^2(t)} = \frac{1}{2} kT$$

である。

一方、

$$\begin{aligned}\overline{x_i^2(t)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega S_o(\omega) \\ &= \frac{D}{m_i^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \frac{\omega_i^2 \omega^2}{Q_i^2}} \\ &\approx \frac{D}{m_i^2} \frac{\pi}{\frac{\omega_i}{Q_i} \left(\omega_i^2 + \left(\frac{\omega_i}{2Q_i} \right)^2 \right)} \\ &\approx \frac{\pi D Q_i}{m_i^2 \omega_i^3}\end{aligned}$$

である ($Q_i \gg 1$ の近似の下で留数計算を行った)。

このふたつから、

$$S_i(\omega) = D = \frac{m_i \omega_i kT}{\pi Q_i}$$

が分かる。

したがって、

$$\begin{aligned}S_o(\omega) &= \frac{\omega_i kT}{m_i \pi Q_i} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \frac{\omega_i^2 \omega^2}{Q_i^2}} \\ \frac{\partial S_o}{\partial Q} &= \frac{\omega_i kT}{m_i \pi} \frac{\omega_i^2 \omega^2 - (\omega^2 - \omega_i^2)^2 Q_i^2}{(\omega_i^2 \omega^2 + (\omega^2 - \omega_i^2)^2 Q_i^2)^2}\end{aligned}$$

である。 $Q_i \gg 1$ であるから、 $\omega \approx \omega_i$ 以外では、 $\frac{\partial S_o}{\partial Q} < 0$ となり、 Q 値が大きければ大きいほど、共振周波数から離れた周波数では雑音が小さくなる。(共振周波数近くの周波数での測定はあきらめる。)

この書き方は見づらいという指摘があったので以下でもう少しわかりやすく書く。

坪野研が 300m のマイケルソン干渉計でねらっているのは数百~1 kHz の重力波である。実際に用いるのは今回測った融解石英と同じ大きさの誘電体多層膜ミラーであり、共鳴周波数のオーダーはほぼ同じであると推定できる。融解石英の共鳴周波数は、実験の結果もっとも低い共鳴周波数でも~30kHzであった。したがって $\omega^2 \ll \omega_i^2$ としてよい。このとき、 $Q_i \gg 1$ も用いて

$$\begin{aligned}S_o(\omega) &= \frac{\omega_i kT}{m_i \pi Q_i} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \frac{\omega_i^2 \omega^2}{Q_i^2}} \\ &\approx \frac{kT}{m_i \pi Q_i \omega_i^3}\end{aligned}$$

であるので、 Q 値が高い方がよい。

また、このように低い周波数ではパワースペクトルが周波数¹に依存しないことに注意。

¹「共鳴周波数」ではない。式をみればわかるだろうが。

2.2 鏡面の変位

鏡の振動の伝達関数が、次のようにそれぞれの共振の伝達関数の積で書けると仮定する。

$$H(\omega) = \prod_i H_i(\omega)$$

このとき、鏡面の変位の2乗平均は

$$\begin{aligned} \overline{x^2(t)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega S_o(\omega) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \prod_i \frac{D_i}{m_i^2 \left((\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \frac{\omega_i^2 \omega^2}{Q_i^2} \right)} \\ &\approx \sum_i \frac{D_i Q_i \pi}{m_i^2 \omega_i \left(\omega_i^2 + \left(\frac{\omega_i}{2Q_i} \right)^2 \right)} \\ &\approx \sum_i \frac{\pi D_i Q_i}{m_i^2 \omega_i^3} \end{aligned}$$

である。先ほどと同様に留数計算を用いた。

鏡面の変位を $x(t) = \sum_i x_i(t)$ と各モードで分解する。各モードは独立だから、

$$\overline{x^2(t)} = \sum_i \overline{x_i^2(t)}$$

である。

エネルギー等分配則から、

$$\frac{1}{2} m_i \omega_i^2 \overline{x_i^2(t)} = \frac{1}{2} kT$$

である。

以上から、

$$\begin{aligned} \sum_i \overline{x_i^2(t)} &= \sum_i \frac{kT}{m_i \omega_i^2} \left(= \sum_i \frac{\pi D_i Q_i}{m_i^2 \omega_i^3} \right) \\ D_i &= \frac{m_i \omega_i kT}{\pi Q_i} \\ S_o(\omega) &= \sum_i \frac{\omega_i kT}{m_i \pi Q_i} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_i^2)^2 + \frac{\omega_i^2 \omega^2}{Q_i^2}} \\ &\approx \sum_i \frac{kT}{m_i \pi Q_i \omega_i^3} \end{aligned}$$

である。共振周波数の低い共振が重要であることがわかる。また、全パワースペクトルは各共振のパワースペクトルの和の形になっている。

2.3 必要なQ値の見積もり

一番共振周波数が低いモードについて鏡面の変位のパワースペクトルは十分低い周波数に対して

$$S_o(\omega) \approx \frac{kT}{m_1 \pi Q_1 \omega_1^3}$$

である¹。以下のような測定条件のもとで300mのマイケルソン干渉計で測定をするときに、鏡にどのくらいQ値がなければならないかを見積もる。

$$\begin{cases} \omega_1 \approx 2\pi \times 30\text{kHz} \\ m_1 \approx 1\text{kg} \div 2 \\ T \approx 300\text{K} \end{cases}$$

の条件の元で、バンド幅 $2\Delta f = 300\text{Hz}$ で中心周波数 $f_0 = 300\text{Hz}$ で測定を行うとする。このとき、

$$\begin{aligned} \langle x^2 \rangle &= \int_{2\pi(f_0 - \Delta f)}^{2\pi(f_0 + \Delta f)} S_o(\omega) d\omega + \int_{-2\pi(f_0 + \Delta f)}^{-2\pi(f_0 - \Delta f)} S_o(\omega) d\omega \\ &= 2 \int_{2\pi(f_0 - \Delta f)}^{2\pi(f_0 + \Delta f)} S_o(\omega) d\omega \\ &= 8\pi \Delta f S_o \end{aligned}$$

である。ただし低い周波数ではパワースペクトルが周波数に依存しないことを用いた。

また、測定精度 10^{-21} を要求すると、

$$\frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle}}{300\text{m}} = 10^{-21}$$

である。この二つから、

$$\begin{aligned} S_o &= \frac{(10^{-21} \times 300\text{m})^2}{8\pi \Delta f} \\ &= \frac{(10^{-21} \times 300\text{m})^2}{4\pi \times 300\text{Hz}} \\ &= \frac{(10^{-21} \times 300\text{m})^2}{4\pi \times 300\text{Hz}} \\ &= 2.387 \times 10^{-41} \text{m}^2/\text{Hz} \end{aligned}$$

以上すべてを

$$S_o \approx \frac{kT}{m_1 \pi Q_1 \omega_1^3}$$

¹周波数には依らないことに注意。

にぶち込むと

$$Q_1 = \frac{kT}{m_1 \pi \omega_1^3 S_o} \\ = 1.6 \times 10^4$$

が lower limit といえる。実際には

$$S_o = \sum_i \frac{kT}{m_i \pi Q_i \omega_i^3} \\ > \frac{kT}{m_1 \pi Q_1 \omega_1^3}$$

なので、必要なQ値はこれよりも大きい。数倍～十数倍くらいか？

2.4 減衰係数とQ値の関係

インパルス応答 ($F(t) = f_0 \delta(t)$ 、 $t=0$ で $x = \dot{x} = 0$ の時の時間変化) は、

$$\left(-\omega^2 - \frac{i\omega\omega}{Q_i} + \omega_i^2\right) m_i x_i(\omega) = \frac{f_0}{2\pi} \\ x_i(\omega) = \frac{f_0}{2\pi m_i (\omega_i^2 - \omega^2 - \frac{i\omega\omega}{Q_i})}$$

として Fourier 逆変換すると、

$$\begin{cases} x_i(t) \approx \frac{f_0}{m_i \omega_i} \exp\left(-\frac{\omega_i t}{2Q_i}\right) \sin \omega_i t & (t > 0) \\ x_i(t) = 0 & (t < 0) \end{cases}$$

となる。ただし、 $Q_i \gg 1$ を用いた。

$t = -\infty$ から $t = 0$ まである共振周波数で $F = F_0 \exp(i\omega_j t')$ と振って $t = 0$ でとめる。
 $\sin \omega_j t$ を $\exp(i\omega_j t)$ と複素表示するとき¹、

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \sum_i x_i(t) \\
 &= \sum_i \frac{1}{m_i \omega_i} \int_{-\infty}^0 dt' \exp\left(-\frac{\omega_i(t-t')}{2Q_i}\right) \exp(i\omega_i(t-t')) F_0 \exp(i\omega_j t') \\
 &= \sum_i \frac{F_0 \exp\left(-\frac{\omega_i t}{2Q_i}\right) \exp(i\omega_i t)}{m_i \omega_i} \frac{1}{\frac{\omega_i}{2Q_i} - i(\omega_i - \omega_j)} \\
 &= \sum_i \frac{F_0}{m_i \omega_i} \frac{\exp\left(-\frac{\omega_i t}{2Q_i}\right)}{\left(\frac{\omega_i}{2Q_i}\right)^2 + (\omega_j - \omega_i)^2} \left[\frac{\omega_i}{2Q_i} \sin \omega_i t + (\omega_j - \omega_i) \cos \omega_i t \right] \\
 &\approx \frac{2Q_j F_0}{m_j \omega_j^2} \exp\left(-\frac{\omega_j t}{2Q_j}\right) \sin \omega_j t
 \end{aligned}$$

となる²。(撃力 $F = F_0 \exp(i\omega_j t')$ の重ね合わせを計算した。)

この結果より、共鳴周波数と同じ周波数で鏡に力を加えて、それを止めたときの減衰の時定数を測ればその共鳴周波数での鏡のQ値が測定できることがわかる。減衰を実際に測るのにはマイケルソン干渉計を用いる。マイケルソン干渉計については後述。

2.5 伝達関数によるQ値の測定

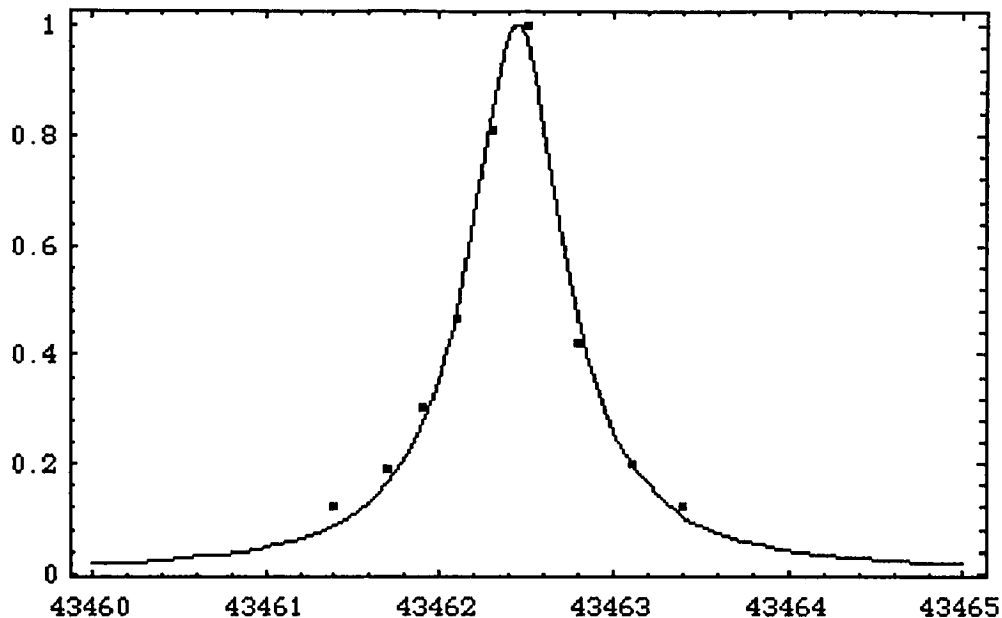
共鳴周波数の付近で伝達関数を直接測り、

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{m^2 \left[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega_0^2 \omega^2}{Q^2} \right]}$$

でフィッティングする方法でもQ値がわかる。

¹実際の値としては虚部をとる。

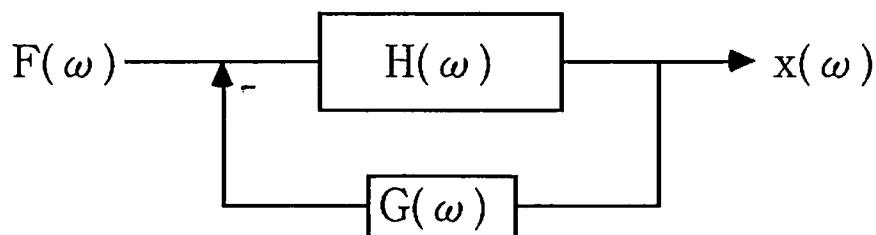
²但し最後は $Q_j \gg 1$ のため、 $\omega_i = \omega_j$ のみが残る。また、下から二つ目のイコールは虚部の計算。



こんな感じ。(これはアルミの2本吊り)。

私たちの実験の場合、予備実験として1年前の実験者と同じ鏡を使って同じ共鳴を測ったときにQ値が6倍も違っていることがわかって¹、本当にQ値が変わってしまったのかどうかを調べる必要があったので、この方法を用いて、減衰の時定数を用いる方法と比較した。

2.6 フィードバック



上図のように系に負のフィードバックをかける。ただし、

$$H(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{i\omega_0\omega}{Q})}$$

とした(運動方程式より)。このとき伝達関数は以下のようなになる。

$$(-\omega^2 + \frac{i\omega_0\omega}{Q} + \omega_0^2)mx(\omega) = F(\omega) - G(\omega)x(\omega)$$

$$x(\omega) = H(\omega)F(\omega) - H(\omega)G(\omega)x(\omega)$$

$$\frac{x(\omega)}{F(\omega)} = \frac{H(\omega)}{1 + H(\omega)G(\omega)}$$

¹単に計算の過程で 2π を忘れていただけであったが……

また、 $G(\omega)H(\omega)$ を open-loop 伝達関数という。

インパルス応答はフィードバックがない場合と同様に上式を逆フーリエ変換すれば求められる。

$H(\omega)$ が $\omega \approx \omega_0$ 付近でのみ大きな値を持つことを考えて、 $G(\omega) \approx G(\omega_0)$ で近似すると、

$$x(t) \approx -\frac{2\pi i}{2\pi m} \left(\frac{\exp(i\omega_+ t)}{\omega'_+ - \omega'_-} - \frac{\exp(i\omega_- t)}{\omega'_- - \omega'_+} \right) \quad \left(\omega'_\pm \equiv i\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{1 + \frac{G(\omega_0)}{m\omega_0^2} - \frac{1}{4Q^2}} \right)$$

$$= \frac{-i}{2m\omega_0 \sqrt{1 + \frac{G(\omega_0)}{m\omega_0^2} - \frac{1}{4Q^2}}} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) \left[\exp\left(i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2} + \frac{G(\omega_0)}{m\omega_0^2}}\right) - \exp\left(-i\omega_0 t \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2} + \frac{G(\omega_0)}{m\omega_0^2}}\right) \right]$$

がえられる。従ってもし共振での open-loop 伝達関数が

$$|H(\omega_0)G(\omega_0)| = \frac{Q}{m\omega_0^2} |G(\omega_0)| \ll 1$$

$$\frac{|G(\omega_0)|}{m\omega_0^2} \ll \frac{1}{Q}$$

をみたすなら、 $Q \gg 1$ と併せて、フィードバックのない場合の式

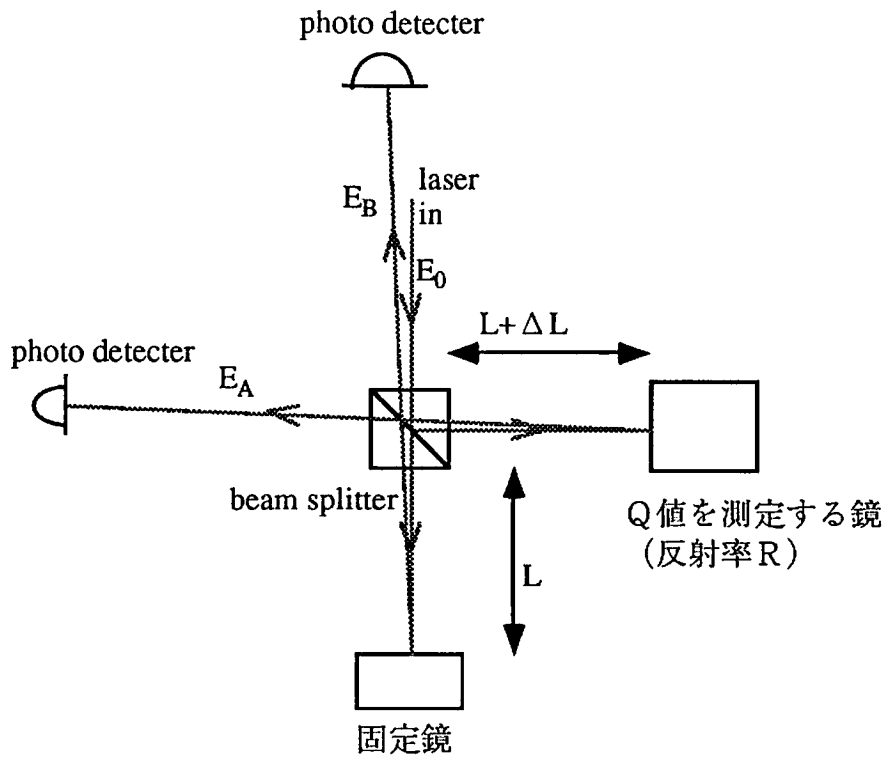
$$x(t) = \frac{1}{m\omega_0} e^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \sin \omega_0 t$$

に帰着する。

2.7 Michelson 干渉計

既知としてもよいだろうが一応復習しておく。

マイケルソン干渉計では下図のようにレーザー光をビームスプリッタで分けて干渉させ、その位相差を用いて距離をはかる。位相差を見るには二つのフォトディテクタの出力を差動アンプにいれ、その出力を見ればよい。それはすぐ後に書く。また、より詳しい図が「実験の方法」の章にある。

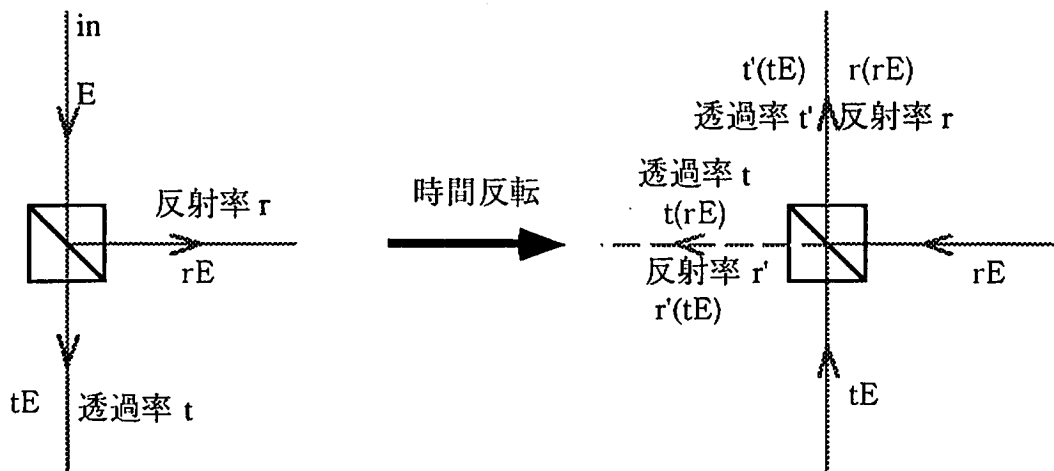


下図のように考えるとビームスプリッタでの反射率と透過率には

$$r + r' = 0$$

$$r^2 + t t' = 1$$

の関係がなりたつ事がわかる。光の減衰は無視した。



このとき

$$E_A = \exp(2ikL)r'(tE_0) + \exp[2ik(L + \Delta L)]Rt(rE_0)$$

$$= \exp(2ikL)rt(Re^{i\delta} - 1)E_0$$

(where : $\delta \equiv 2k\Delta L$)

$$I_A = |E_A|^2 = |t|^2|r|^2(R^2 - 2R\cos\delta + 1)I_0 = (1 - |r|^2)|r|^2(R^2 - 2R\cos\delta + 1)I_0$$

$$E_B = \exp(2ikL)t'(tE_0) + \exp[2ik(L + \Delta L)]r^2E_0$$

$$= \exp(2ikL)(1 - r^2 + r^2Re^{i\delta})E_0$$

$$I_B = |E_B|^2 = \{1 + 2|r|^2(R\cos(2\theta_r + \delta) - \cos 2\theta_r) + |r|^4(R^2 - 2R\cos\delta + 1)\}I_0$$

(where $r \equiv |r|e^{i\theta_r}$)

である。

$$\frac{\partial I_A + I_B}{\partial \delta} \frac{I_0}{I_0} = 0 \quad \text{より、} \quad \frac{\partial I_A + I_B}{\partial \delta} \frac{I_0}{I_0} = 2|r|^2R(\sin\delta - \sin(2\theta_r + \delta)) = 0 \quad \text{すなわち}$$

$\theta_r = 0$ or π である。このとき、

$$I_A = \{|r|^2(R^2 - 2R\cos\delta + 1) - |r|^4(R^2 - 2R\cos\delta + 1)\}I_0$$

$$I_B = \{1 + 2|r|^2(R\cos\delta - 1) + |r|^4(R^2 - 2R\cos\delta + 1)\}I_0$$

$$\frac{I_A - I_B}{I_0} = |r|^2R^2 + 3|r|^2 - 2|r|^4 - 1 - 4|r|^2R\cos\delta - 2|r|^4R^2 + |r|^44R\cos\delta$$

$$= -R\cos\delta$$

だ。さいごから2つ目のイコールで、 $|r| \approx |r'| \approx |t| \approx |t'| \approx \frac{1}{\sqrt{2}}$ をもちいた。

よって、差動アンプの出力 V は、

$$V \propto -\cos\delta = -\cos 2k\Delta L$$

である。この実験ではフィードバックによって $\Delta L = \frac{\pi}{4k}$ がポテンシャルの中心になる。このとき、変位と差動アンプの出力電圧が比例するので、出力電圧を測れば変位がわかる。

3 実験の方法

3.1 測定方法の概要

「減衰係数と Q 値の関係」の章で述べたように、鏡に磁石を貼って、それを覆うようにコイルを置き¹、そこに流す電流のつくる磁場との相互作用によって共鳴周波数と同じ周波数で駆動する。鏡面の微少な変位を Michelson 干渉計ではかる。

鏡は地面振動から切り放すため 0.2mm のタングステンのワイヤーで吊る。しかしワイヤーで吊ることにより鏡は周期が ~ 1 秒で、振幅が ~ 1 mmの振り子振動をしてしまう。Michelson 干渉計で測定する事ができるのは用いるレーザーの波長の半分の長さの変位までなので、磁石による渦電流を用いてダンピングをかける。しかしそれでも揺れは十分小さくならないので²、電氣的なフィードバックをかける。

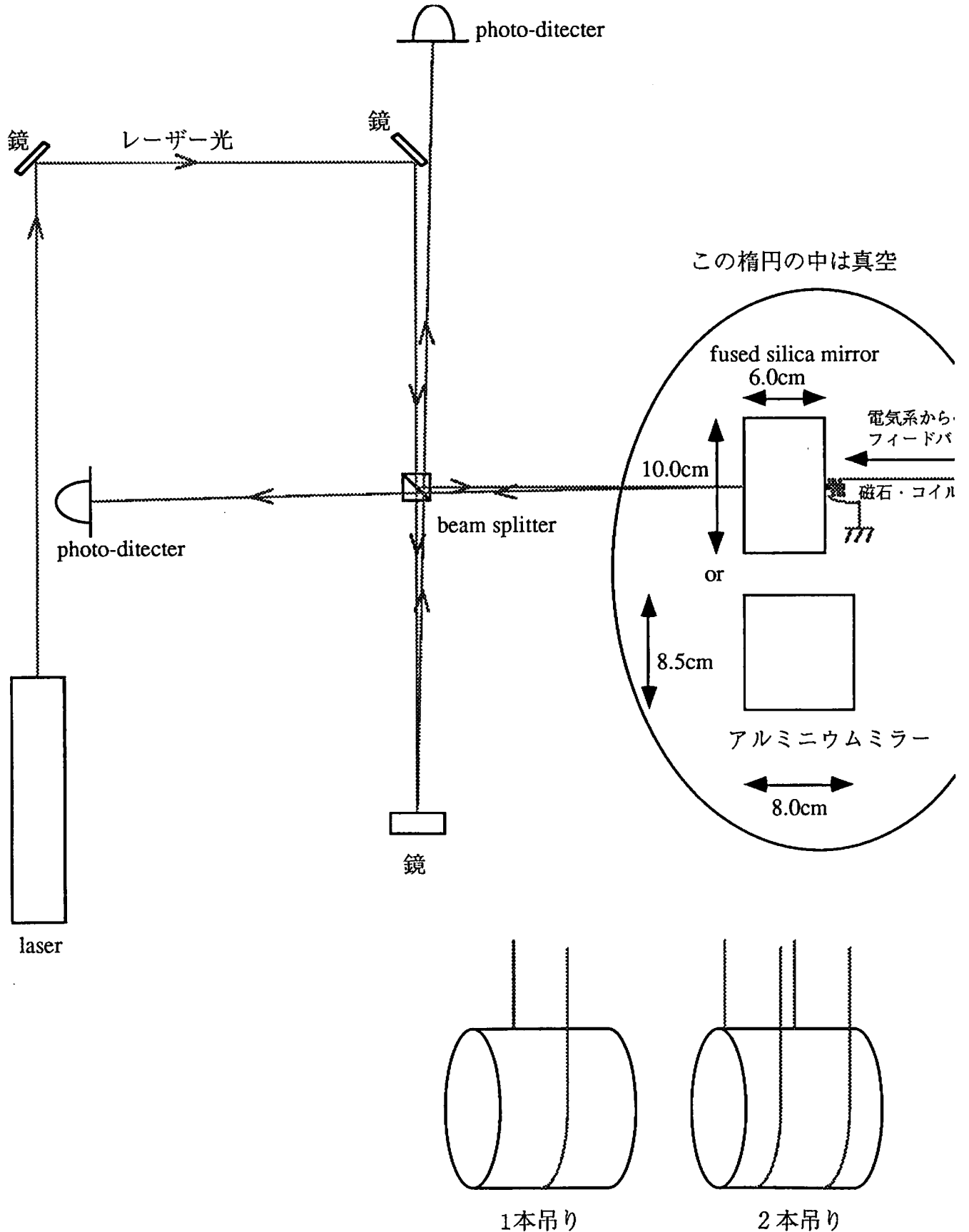
¹これはフィードバックをかけるために用いているものを流用する。フィードバックにシンセサイザーからの正弦波を上乗せする。

² ~ 10 波長程度。

3.2 光学系

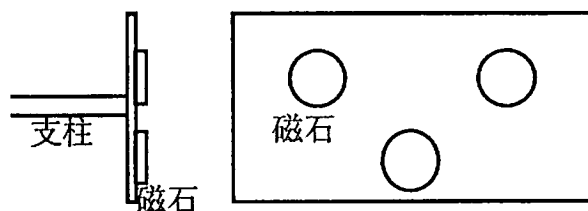
各装置については後述。回路図は補遺を参照。

測定した鏡は直径8.5cm、長さ 8cm の円筒形のアルミミラーと、直径10cm、長さ 6cm の円筒形の融解石英。

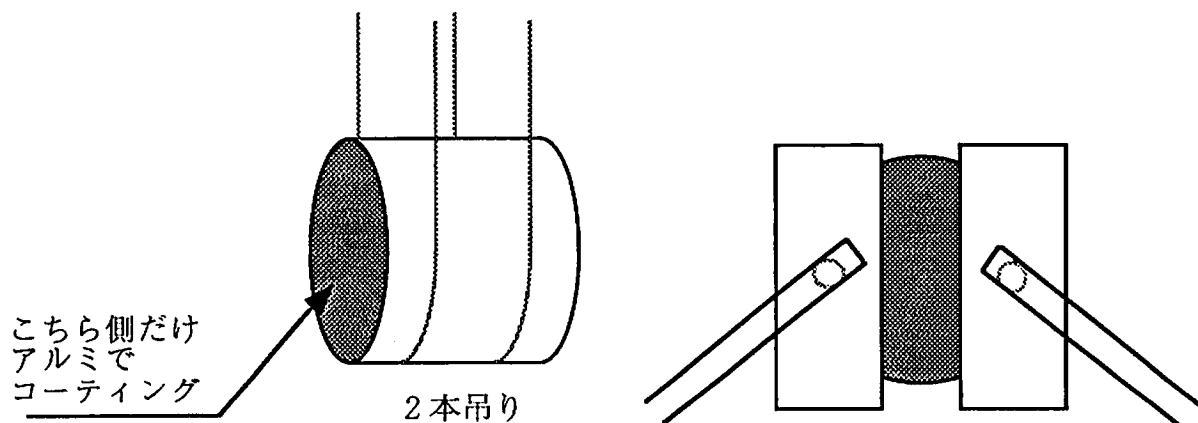


鏡は $\leq 10^{-4}$ Torr の真空中においた。ガラスの真空槽のおかげでレーザー光線が乱反射されたり広がったりして visibility がだいぶ悪くなって、空気中で測定したときには ~ 0.8 だったのが ~ 0.5 位になった。2つのフォトディテクタの visibility が一致しないとフィードバックがうまくかからない（0を中心としないと一方に余分にふれてしまう）ので、オフセットをかませた¹。

3.3 磁石によるダンピング



上図の様に、鉄の板に支柱をつけて磁石を貼ったものを、鏡に触れないように 0.5 mm くらいのすきまを開けて鏡のとなりに置き、ダンピングをかけた。この際磁石の極性をそろえることが非常に重要であった。アルミニウムは鏡の両横に磁石を置くことによって時定数 ~ 1 秒位で ~ 10 波長程度の揺れに収まる。融解石英は金属ではないので、下図のように、鏡として使うためにコーティングしてあったアルミに、磁石を近づけて無理矢理ダンピングをかけた。しかしコーティングしてあるアルミだけでは薄すぎて十分な電流が流れないため ~ 10 波長程度の揺れに収まるのに時定数 ~ 1 時間程度の時間がかかってしまった。次に学生実験で鏡を業者に発注するときに両面をコーティングするように注文することを強く勧める。鏡の裏面ならばレーザーがきちんとあたるかどうかなどアラインメントについて煩わされずにすむし、磁石のあたっている面積も増えるし、おそらく倍以上のはやさでダンピングがかかると思われる。もしくは普通に2段振り子の1段目の mass を金属で作ってダンピングをかけるのも良いが、この場合2段振り子を作るところから始めると学生実験の期間では終わらないのではないだろうか²。



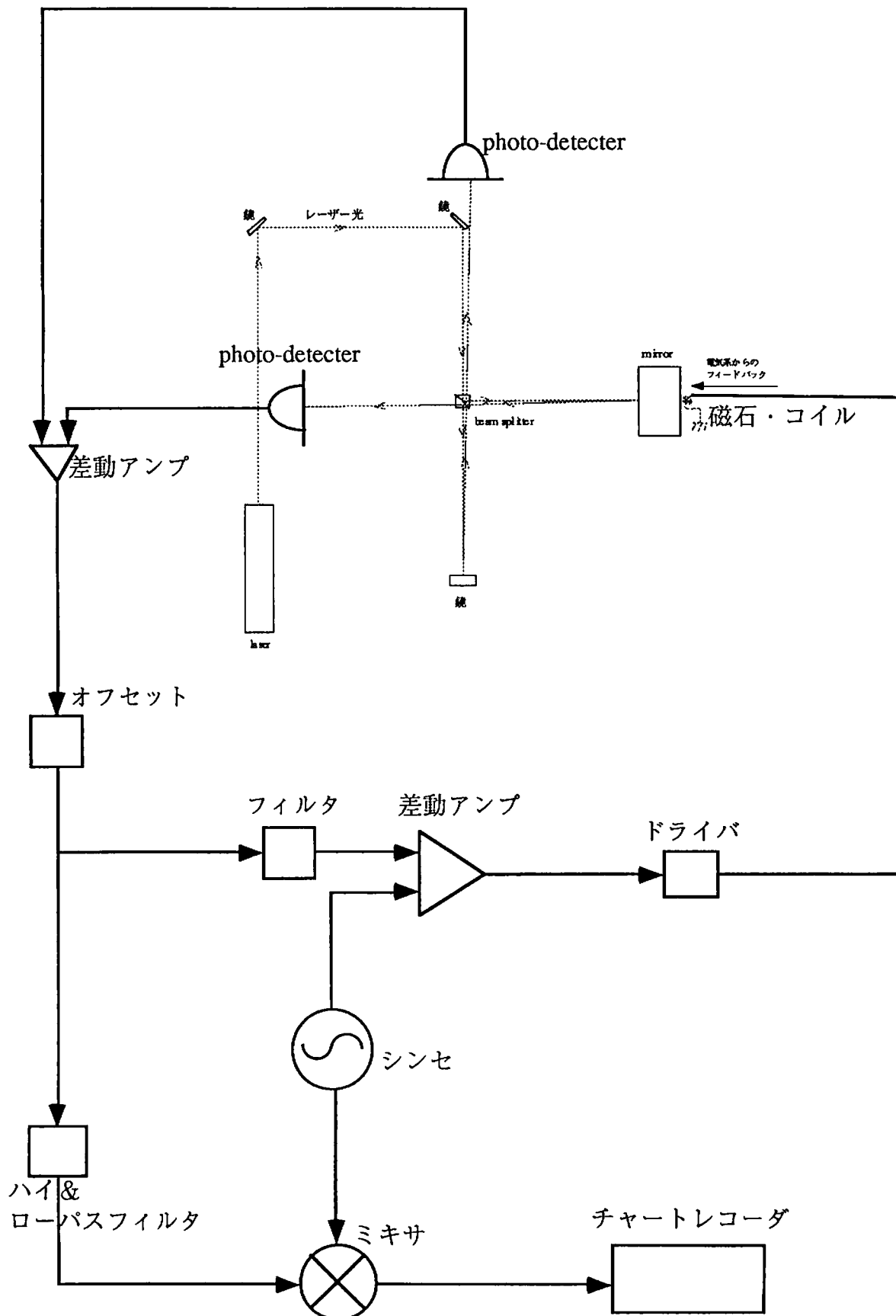
¹「電気系」の項参照。

²余計なお世話ですが。

3.4 電気系

3.4.1 共鳴のピークを探すときの回路

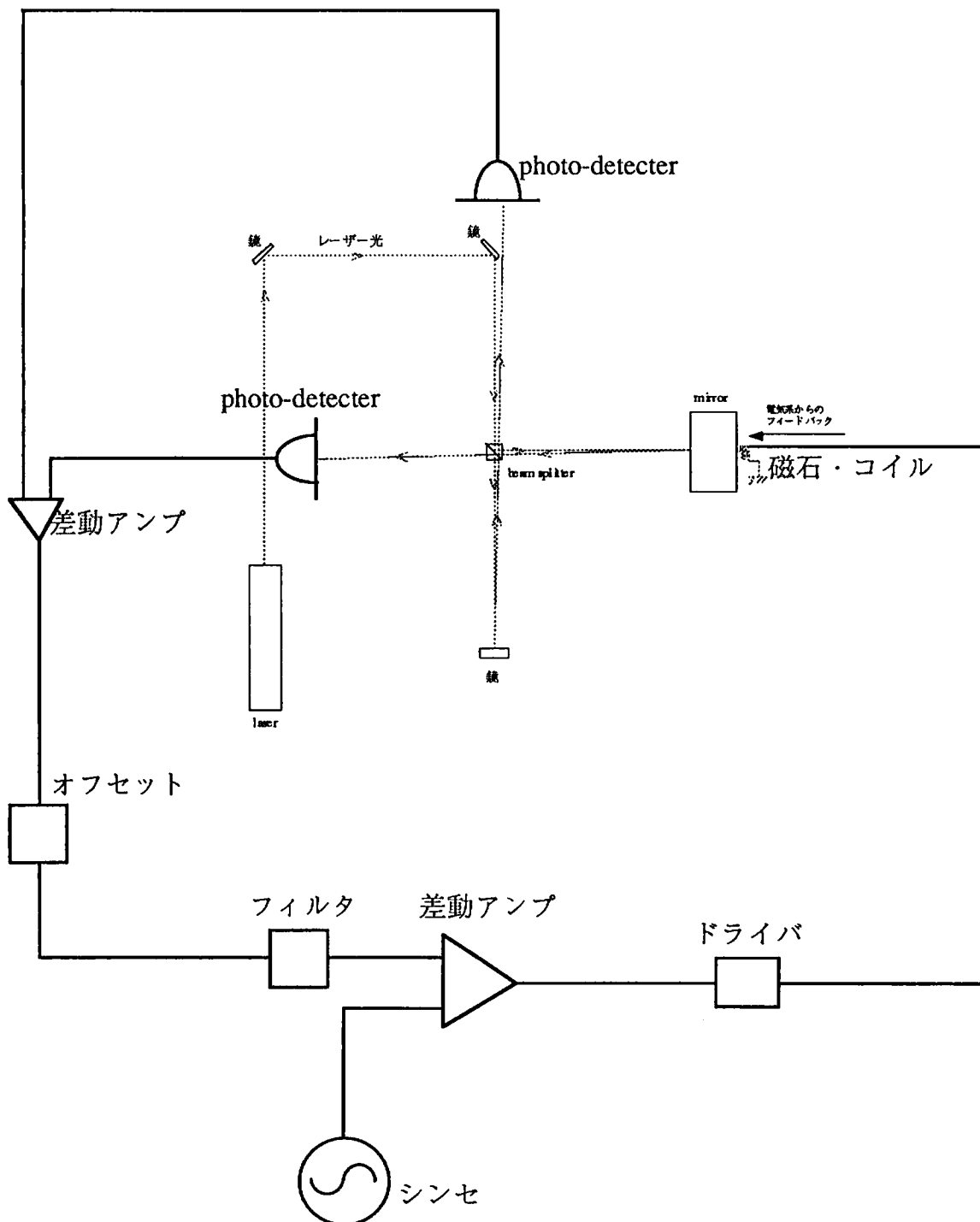
共鳴探し



オフセットについては「光学系」の項参照。シンセは自動的にスイープする機能を持つものを用いて測った。ミキサはシンセと同じ周波数のものだけを選び出す働きをする（サイン・コサイン関数の直交性）。

3.4.2 Q値を測定するときの回路

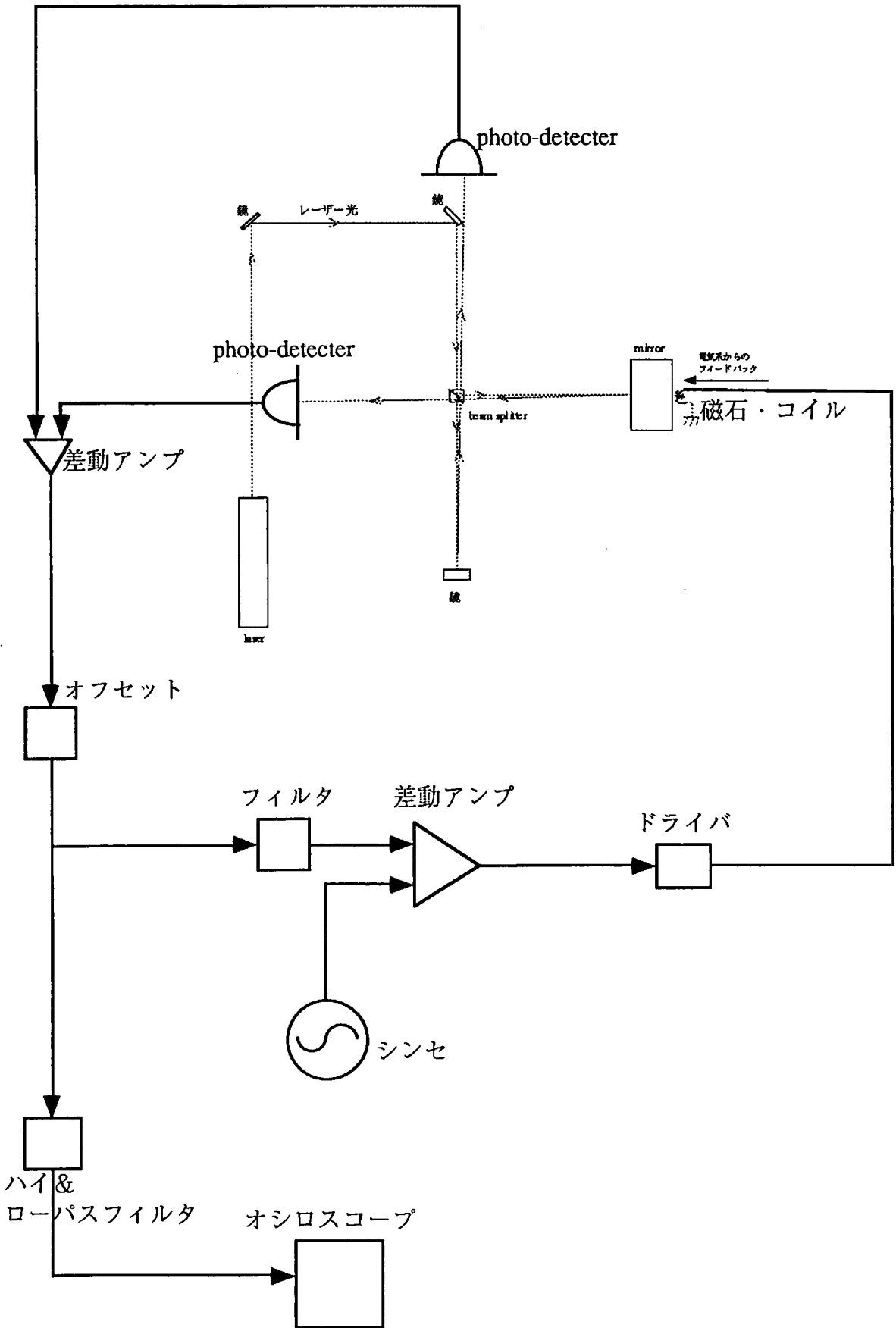
Q値の測定



オフセットの出力をスペクトラムアナライザでみる¹。それを NGRAPH を用いてフィッティングした。

¹生データの例は「補遺」を参照のこと。

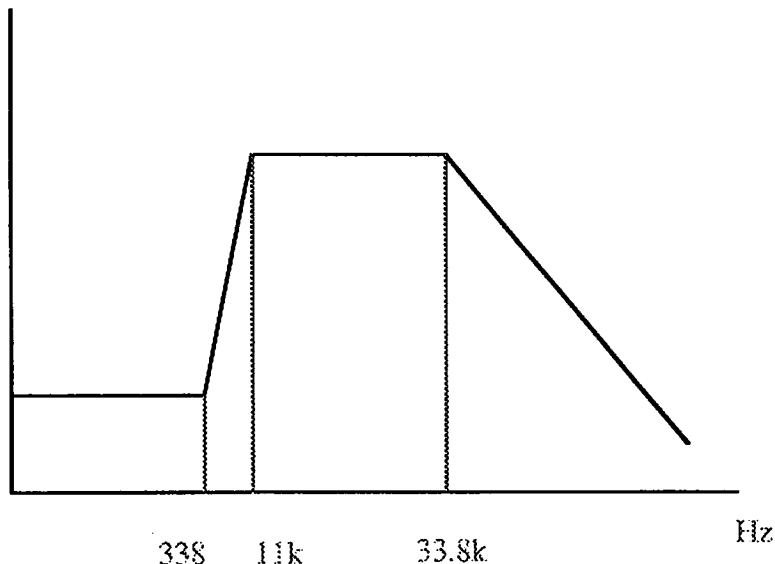
3.4.3 開ループ伝達関数を測定するときの回路



3.4.4 フィルタ

このフィルターの第2段目はローパスフィルタに、可変ゲインアンプを組み合わせている。ローパスフィルタの周波数は 710Hz である。これで 20kHz では伝達関数の大きさがほぼ 1/30 になる。これより大きな周波数の制御は放棄することになるが、振り子振動を押さえるには十分である。また、可変抵抗の大きさにゲインは反比例する。

フィルタの一段目がフィードバックをかけたい周波数領域の位相を進める役目を持つ。一段目の伝達関数を以下に示す。これを見ると 33kHz 以上では一段目もローパスフィルタになっていることがわかる。



3.4.5 ドライバ

ドライバはきちんと電圧に比例した電流を供給する役割を果たす。

3.5 コンデンサを用いる方法

コイルの代わりにアルミ板を用いてコンデンサとしての相互作用で鏡を揺らす方法も試してみた。これは磁石を貼った事による影響を調べるためである。フィードバックはもう一つの鏡でかけた。測定はアルミミラーの1本吊りで行った。

4 実験結果

アルミミラーの共鳴周波数			
モード・理論値(kHz)		2本吊り(kHz)	1本吊り(kHz)
even	28.7	28.8	28.75
	38.3	38.1	38.0
	51.1	50.8	50.8
	59.9	(60.1?)	(60.9?)
	63.8	63.0	63.0
	69.6	68.6	68.6
	80.0	80.0	79.9
	84.6	同定困難	同定困難
	86.2	同定困難	同定困難
93.4	90.8	90.8	
odd	35.0	34.5	34.5
	40.0	41.7	41.7
	43.5	43.4	43.4
	58.2	58.0	58.0
	68.3	68.2	68.0
	76.6	75.7	75.1
	85.6	同定困難	同定困難
	86.4	同定困難	同定困難
88.6	同定困難	同定困難	

アルミミラーのQ値

共鳴周波数のモード・理論値 (kHz)	2本吊りの共鳴周波数の測定値 (kHz)	2本吊りのQ値 (x10 ⁴)	2本吊りの標本分散 (x10 ⁴)	1本吊りの共鳴周波数の測定値 (kHz)	1本吊りのQ値 (x10 ⁴)	1本吊りの標本分散 (x10 ⁴)	
even	28.7	28.79	5.41	0.01	28.78	18	-
	38.3	38.07	1.77	0.01	38.04	8.90	0.09
	51.1	50.79	1.219	0.003	50.78	9.7	-
	59.9	(60.1?)	-	-	-	-	-
	63.8	63.06	4.89	0.01	63.01	1.26	0.02
	69.6	68.16	1.98	0.04	68.62	1.386	0.004
	80.0	79.95	5.30	0.08	-	-	-
	84.6	-	-	-	-	-	-
	86.2	-	-	-	-	-	-
	93.4	90.85	6.45	0.04	-	-	-
odd	35.0	34.54	4.53	0.02	34.54	11	-
	40.0	41.74	8.0	0.1	41.74	10.6	0.6
	43.5	43.44	3.93	0.02	43.43	7.253	0.03
	58.2	58.03	4.31	0.01	58.02	4.9	-
	68.3	68.66	2.84	0.07	68.06	0.37	0.003
	76.6	75.74	1.24	0.01	75.39	0.080	0.007
	85.6	-	-	-	-	-	-
	86.4	-	-	-	-	-	-
	88.6	-	-	-	-	-	-
同定困難		25.39	1.45	0.01	75.95	4.8	-
		26.17	4.80	0.06	84.46	0.331	0.006
		82.94	1.04	0.01	06.03	0.767	0.001
		84.95	3.17	0.02	86.44	10.8	0.5
		86.13	1.76	0.01	88.38	0.94	0.02
		87.64	0.16	0.02	-	-	-
		89.32	9.17	0.2	-	-	-

融解石英ミラーの共鳴周波数

モード / 理論値(kHz)		実測値(kHz)
odd	27.36	27.7
	48.55	同定困難
	50.08	同定困難
	67.30	同定困難
	82.76	84.7
	86.06	89.5
even	34.54	35.2
	42.92	43.3
	49.36	同定困難
	64.80	同定困難
	71.06	同定困難
	75.87	77.5
	81.85	84.3
	97.09	97.0

2本吊り融解石英のQ値		
周波数の測定値(kHz)	Q値(x10 ⁴)	標本分散(x10 ⁴)
27.79	25.75	0.77
35.27	36.77	0.31
43.39	0.6877	0.0042
50.25	9.278	0.155
50.49	1.234	-
51.24	0.2880	0.0129
52.74	0.8231	0.0325
60.43	13.58	0.51
60.43	22.84	6.39
66.73	0.7917	0.0123
66.84	0.5264	0.0197
69.68	3.829	0.178
70.14	5.866	0.174
70.94	14.63	0.28
77.51	4.550	0.068
84.29	3.269	0.190
84.73	5.211	0.081
86.52	20.04	0.27
89.53	1.258	0.029
96.93	6.130	0.112
99.41	9.107	0.098

27.79 kHz と 35.27 kHz でのQ値はスペクトラムアナライザーの上で目測で測った時定数から出したものである。また、50.49 kHz は1回、43.39 kHz は2回、そのほかは3回ずつ測った。標本分散はそれに対しての値。オープンループ伝達関数はいずれも～1%以下である。

コイルの代わりにコンデンサを用いた場合の 1本吊りアルミのQ値		
周波数の測定値(kHz)	磁石なし Q値 ($\times 10^4$)	対応する 磁石付き Q値 ($\times 10^4$)
28.81	13~15	18
34.56	約18	11
38.06	約12	8.90
43.49	17~20	7.253
63.17	8.6~9.9	1.26

5 考察

5.1 アルミミラーの共鳴周波数

84.6 kHz から 86.6 kHz までは、ピークが集中していて、同定できない¹。また、山元氏の理論計算ではでてこなかったピークがあった。このうち低い周波数の目立つものについては測定を行った²。

また、山元氏の予言と測定値が一致したものについては、非常に精度よく一致していることがわかる。

5.2 アルミミラーのQ値

Q値は3回ずつ測定し、標本分散の平方根により誤差を見積もった。系統誤差としてフィードバックの影響が考えられるが、一番低い周波数の、そして一番大きなピークの周波数の 28.78714 kHz について open-loop 伝達関数を測ったところはおおむね1より小さかったので (< 0.01)、問題ないだろう。

5.3 2本吊り融解石英の共鳴周波数

アルミミラーの共鳴周波数は山元氏の予言とよく一致していたが、融解石英は周波数の低いところだけが計算値と一致した。また、その一致の度合いもよくない。原因は全く不明である。坪野先生の話では作成の仕方で、本来無いはずの異方性ができてしまったのかも知れないとのことだが、確かめる時間はなかった。次に実験をする人の課題となるでしょう。

¹他のピークをみれば理論値からのずれが1kHz程度はある。

²低い周波数の方が重要であることについては「2.2鏡面の変位」の章を参照。

5.4 2本吊り融解石英のQ値

アルミよりもよい。だいたい5~10倍くらいである。特に低い周波数でよいのは喜ばしいことである。しかし51.24kHzのQ値 2880 はちょっと問題であるかもしれない¹。

融解石英の重さは1035gであった。この下で、鏡面の変位のパワースペクトルを推定する。

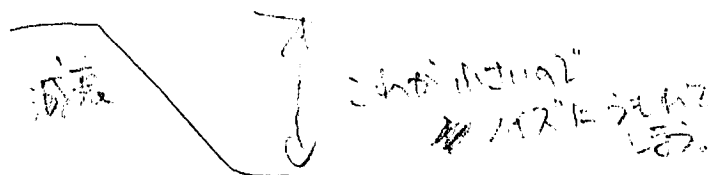
$$\frac{\langle x^2 \rangle}{8\pi\Delta f} = S_o > \frac{kT}{m_1\pi Q_1\omega_1^3} = 2.2 \times 10^{-42}$$
$$\langle x^2 \rangle = 8\pi\Delta f S_o = 1.66 \times 10^{-38} \text{ m}^2\text{Hz}$$
$$\frac{\sqrt{\langle x^2 \rangle}}{300\text{m}} = 4.3 \times 10^{-22}$$

で、第ゼロ近似ではこれでも良さそうだが、やはり駄目でしょう。Q値が~3000のピークとかもありますし。

5.5 磁石の影響

磁石の影響はありそうである。28.81kHz以外では磁石はQ値を下げています。28.81kHz で、磁石のないほうがQ値が高いのはおそらく電気的な影響ではないだろうか。このときは伝達関数を測ってないのでよくわからないが。「今後の課題」の章でも触れているので参照されたし。

ちなみに磁石の直径は2mmである。



6 今後の課題

熱雑音にきいてくるのはQ値の低いモードなので²、すべてのピークについてQ値を調べる事が大事である。今回の実験ではピークが小さくてとれなかったものがあった。次の実験者はこのようなものについても測定を行うことが大事である。そのようなピークは元々伝達関数が小さいので思いきりロックをきつくる必要がある。雑音を低減しないと減衰がきちんと直線上に³ならないからである。そして、1回1回時間をかけて⁴とればよい。もしくはきちんと2重振り子でやった方がかえって時間がかからなくてよい。

もう一つは磁石をはった事による影響である。これを見積もるためにすぐ思いつくのはとりあえず以下の2つの方法である。

¹「原理」の章を参照。

²それと共鳴周波数の低いモード。

³log表示で

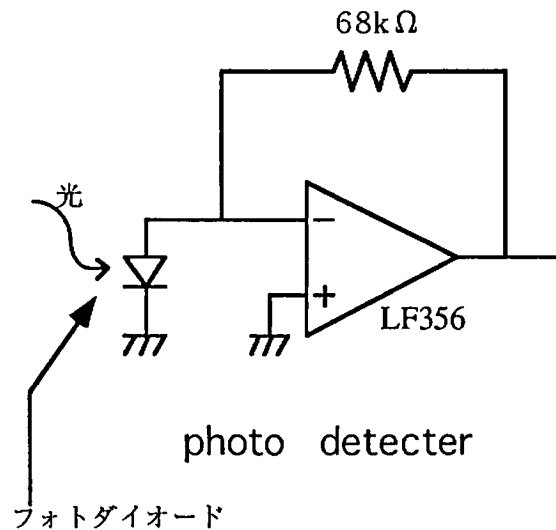
⁴ロックがきついとはずれたときに揺れてしまっておさまるのに~1時間かかる。

1つはコイルと磁石の相互作用ではなく、金属板を用いてコンデンサとしての力を利用する。しかしアルミ板を極板として用いてアルミミラーに対してやってみたところ、あまりうまく行かなかった。帯電するのは表面だけなので熔融石英の両面にコーティングすればアルミミラーと同程度の効果を得られるかもしれない。しかし、アルミミラーでやって駄目なものは熔融石英でやっても駄目だろう。

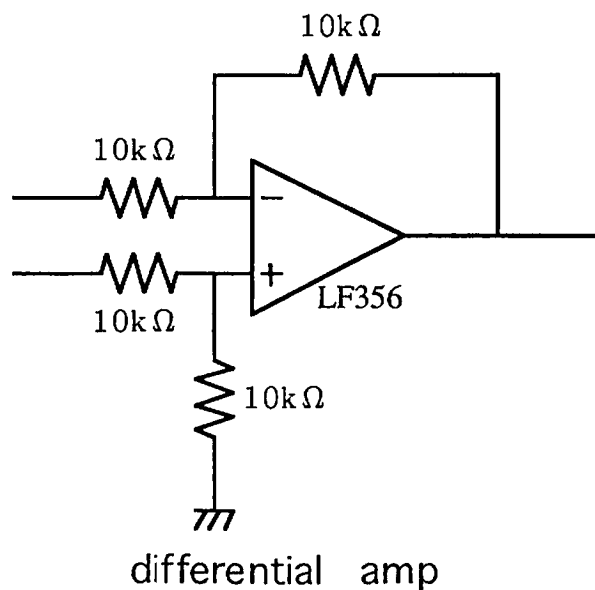
もう一つは磁石と同じ形状の金属片をいくつか貼ってみてその個数や付けた場所による影響を調べることである。これもまた次に実験をする人の課題であろう。

7 補遺

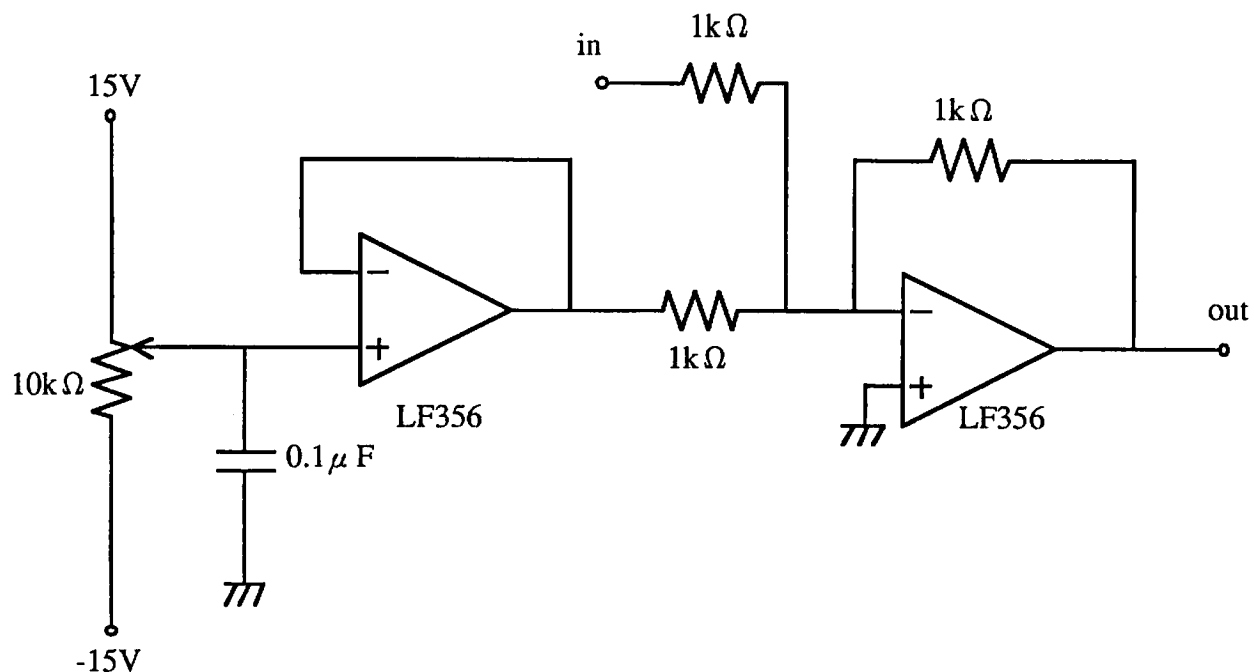
7.0.1 デイテクタ



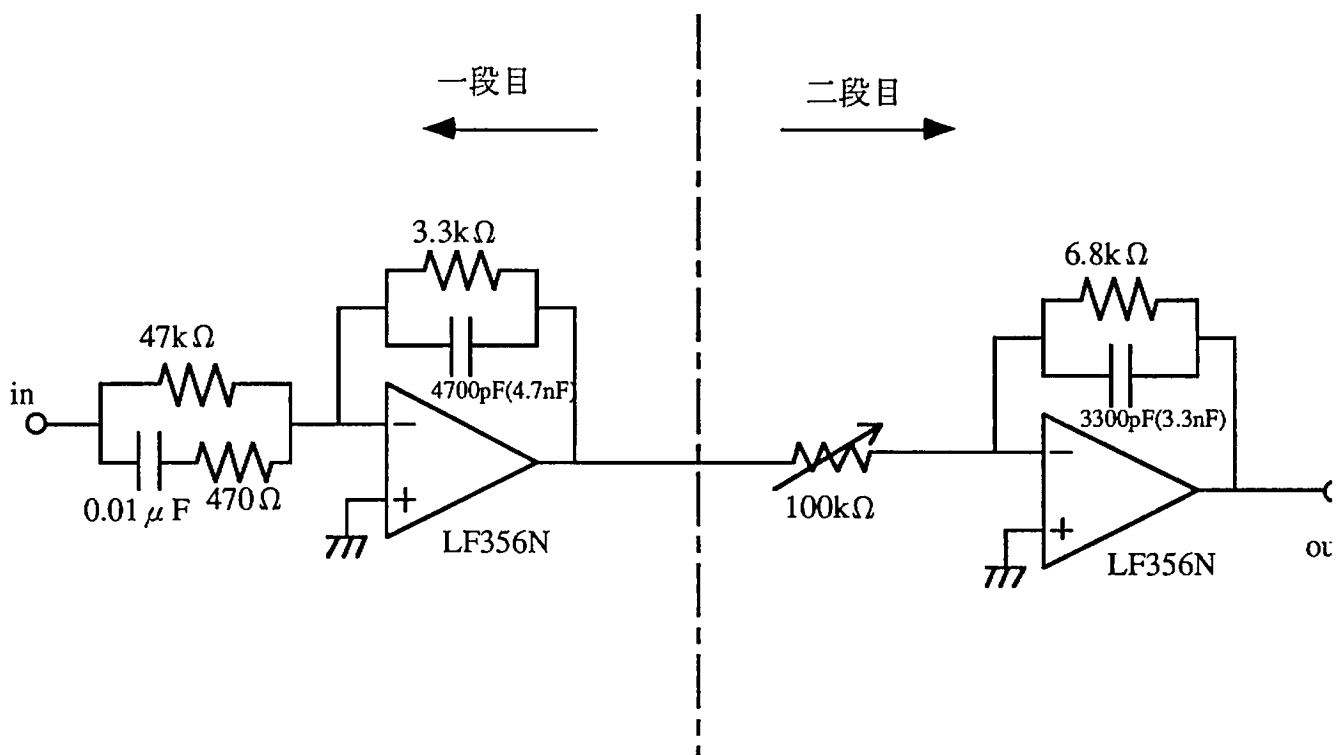
7.0.2 差動アンプ



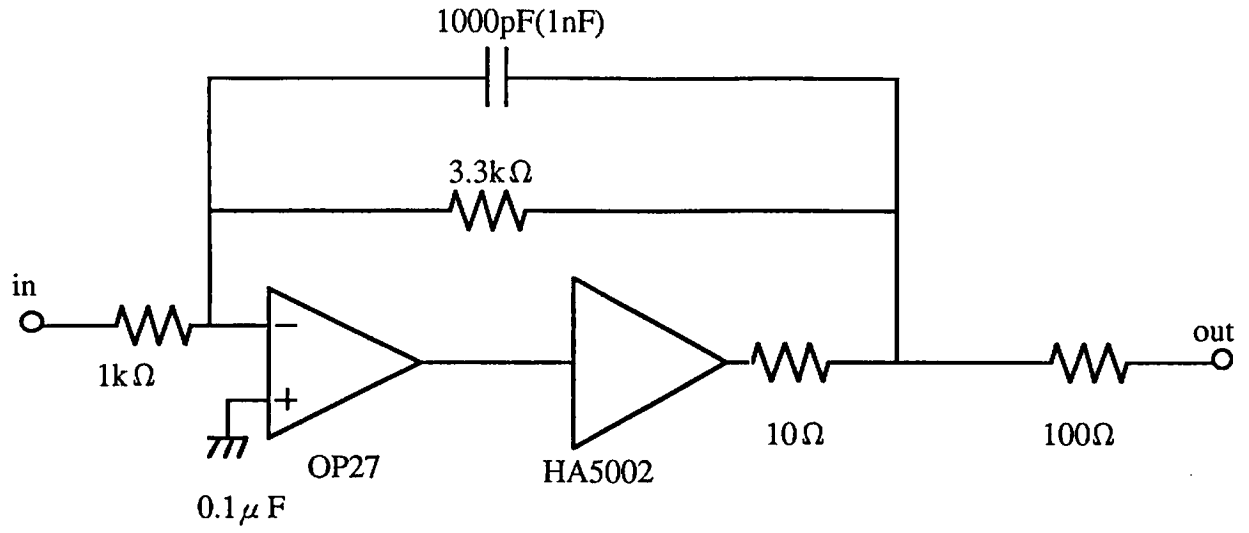
7.0.3 オフセット調整器



7.0.4 フィルタ



7.0.5 ドライバ

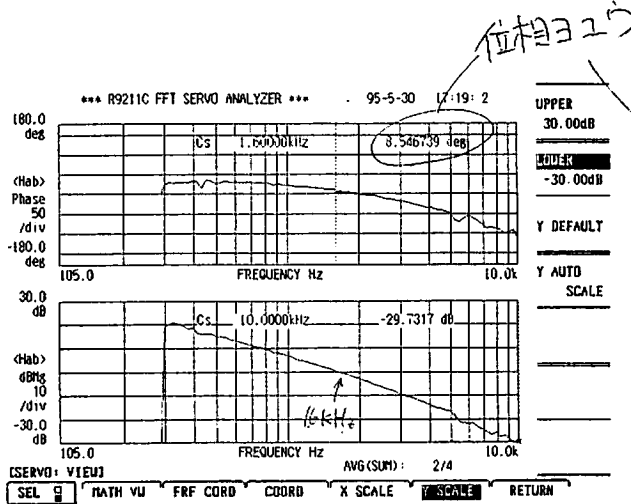


driver

入出力の測り、open loop 伝達関数

unity gain frequency.

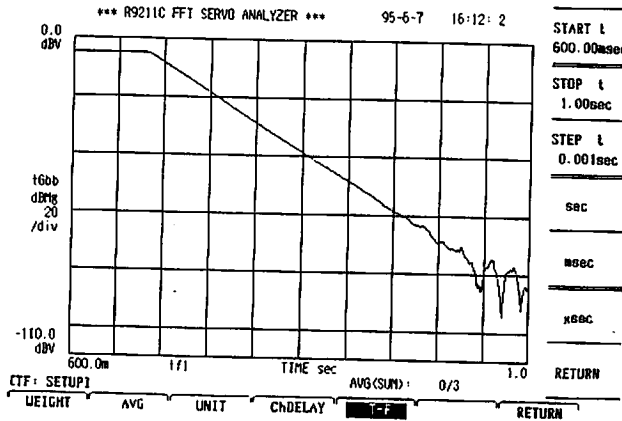
Bode



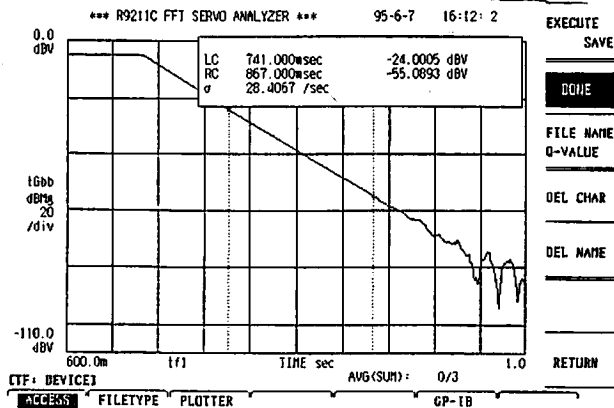
位相32°

10° 1kHz
Fz
O.k.

Spot 28.81kHz の減衰

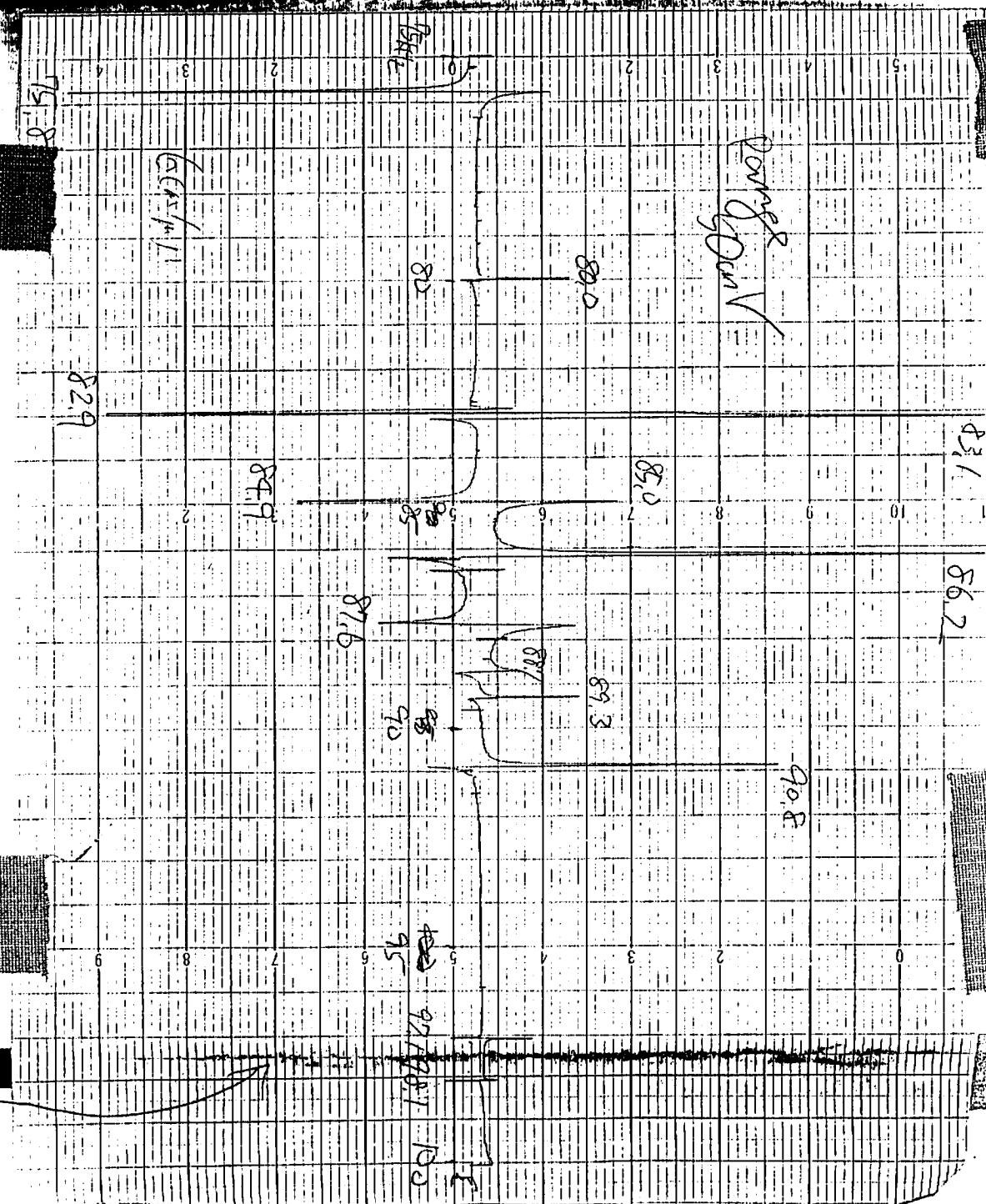


減衰2°
Q値を測る所



エー7 f p^u l

75~100



Date 1/6

2000

10-750L

10-750L
2.5% (5' + 1%)

Date

9/17

