

# 円柱弾性体の振動モードの解析

S. Tsubaki

September 26, 1994

## 1 Introduction

本実験は、円柱形状の弾性体の固有振動に関する知見を得ることを目的としている。特に、固有振動数と固有振動モードに関する解析が今回の実験の目的である。

天体から発生する重力波の検出において、よく使われる方法として、レーザーの干渉を用いたものがある。特に、Michelson-Morley 型干渉計を発展させた、Fabry-Pérot 型干渉計や Delay line 型干渉計がよく使われている。どの方法も、光路長を長くして重力波を検出しようとするものである。現在作られている、もしくは作られる予定の重力波検出器は、F-P 型干渉計のものが多いようである。

それらの干渉計において、レーザー光線を反射させる鏡として用いられるのが、円柱形状の弾性体である。干渉計で検出されるノイズとしては、様々な原因のものがある。その一つに、鏡の固有振動がある。

円柱弾性体を置いておくと、置かれている環境が熱浴となり、熱平衡状態が生じる。このとき、弾性体を構成している原子が振動し、その振動エネルギーの総和が  $k_B T$  となるような固有振動を行う。これが雑音として検出されるのである。その鏡の固有振動による雑音がどの程度の大きさのものであるのかを評価したいことが、今回の実験の動機である。

解析にあたっては、Hutchinson [3] の方法を用いた。これは、解析解の存在しない円柱形状弾性体の固有振動を解析する強力な方法である。これにより、従来は薄い円盤状の弾性体あるいは長い棒状の弾性体でなければ解析できなかったものが、どのような円柱形状の弾性体でも解析できるようになった。

## 2 円柱弾性体の満たす微分方程式とその解

以下に述べるのは、Rasband [2] によるものである。  
これから考える円柱弾性体の形状は次の通りである:

半径	R	長さ	L
ポアソン比	$\sigma$	ヤング率	$E$
密度	$\rho$	剪断率	$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}$
縦の音速	$C_t = \left(\frac{\mu}{\rho}\right)^{\frac{1}{2}}$	横の音速	$C_l$
音速比	$\lambda = \frac{C_t}{C_l} = \left(\frac{1-2\sigma}{2(1+\sigma)}\right)^{\frac{1}{2}}$		

まず、以下で用いる弾性体に関する式は次の通りである:

1. 円柱座標における変位ベクトル  $u_i$  と歪テンソル  $u_{ij}$  の関係式

$$\begin{aligned}
 u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
 u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \\
 u_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 2u_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \\
 2u_{rz} &= \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \\
 2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

2. 歪テンソルと応力テンソルの関係式

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\sigma} \left( u_{ij} + \frac{\sigma}{1-2\sigma} u_{ii} \delta_{ij} \right). \tag{2.2}$$

3. 弾性体の運動方程式

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{E}{2(1+\sigma)} \Delta \mathbf{u} + \frac{E}{2(1+\sigma)(1-2\sigma)} \text{grad div } \mathbf{u}. \tag{2.3}$$

まず、弾性体の方程式 (2.3) は、変位ベクトル  $\mathbf{u}$  を用いて次のように書き直すことができる:

$$\ddot{\mathbf{u}} = C_l^2 \Delta \mathbf{u} + (C_l^2 - C_t^2) \text{grad div } \mathbf{u}. \tag{2.4}$$

ここで、Helmholtz の定理より、変位ベクトルをスカラー場  $\phi$  とベクトル場  $\mathbf{A}$  を用いて、

$$\mathbf{u} = \text{grad } \phi + \text{rot } \mathbf{A} \tag{2.5}$$

と表すこととする。このとき、式 (2.5) を (2.4) に代入し、次の式を得る:

$$\begin{cases} \text{grad } \ddot{\phi} &= C_l^2 \Delta \text{grad } \phi \\ \text{rot } \ddot{\mathbf{A}} &= C_t^2 \Delta \text{rot } \mathbf{A} \end{cases} \tag{2.6}$$

ここで、単一振動数  $\bar{\omega}$  のみの振動を考えると、 $\exp[i\bar{\omega}t]$  の時間依存性を示すはずである。これより、式 (2.6) を Cartesian 座標系の成分に書き直すと、次のようになる:

$$\begin{cases} \Delta\phi + \left(\frac{\bar{\omega}}{C_t}\right)^2 \phi = 0 \\ \Delta A_x + \left(\frac{\bar{\omega}}{C_t}\right)^2 A_x = 0 \\ \Delta A_y + \left(\frac{\bar{\omega}}{C_t}\right)^2 A_y = 0 \\ \Delta A_z + \left(\frac{\bar{\omega}}{C_t}\right)^2 A_z = 0 \end{cases} \quad (2.7)$$

これを円柱座標  $(\bar{r}, \bar{\theta}, \bar{z})$  に変換し、さらに次のような変換により定義される無次元量を用いて表すことにする:

$$r = \frac{\bar{r}}{R}, \theta = \bar{\theta}, z = \frac{\bar{z}}{R}, \omega = \frac{\bar{\omega}R}{C_t}. \quad (2.8)$$

すると、式 (2.7) は次のような微分方程式になる (see Appendix I):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \omega^2 \lambda^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \omega^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \omega^2 \phi = 0 \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \omega^2 \phi = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

これより、次の解を得る (see Appendix II):

$$\begin{cases} \phi(r, \theta, z) = A J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \\ A_r(r, \theta, z) = B \frac{r}{n} J_n(\hat{\alpha} r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \\ A_\theta(r, \theta, z) = -B \hat{\alpha} J'_n(\hat{\alpha} r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -\sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \\ A_z(r, \theta, z) = C J_n(\bar{\alpha} r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{Bmatrix} \end{cases} \quad (2.10)$$

ここで、 $A, B, C$  は任意定数であり、 $\alpha, \hat{\alpha}, \bar{\alpha}, \beta, \gamma, \delta$  はそれぞれ次の関係式を満たす:

$$\begin{cases} \alpha^2 + \delta^2 = \omega^2 \lambda^2 \\ \hat{\alpha}^2 + \beta^2 = \omega^2 \\ \bar{\alpha}^2 + \gamma^2 = \omega^2 \end{cases} \quad (2.11)$$

これらのポテンシャルを用い、変位ベクトル (式 (2.5))、歪テンソル (式 (2.1))、応力テンソル (式 (2.2)) を求めると、表 1 の通りとなる。ここで、I、II、III という 3 つのタイプ

は、用いられている  $\alpha$  が式 (2.11) における  $\alpha, \hat{\alpha}, \bar{\alpha}$  のどれに相当するか、すなわち、任意定数  $A, B, C$  のうちどれを 0 でないものとしているかを表している。

また、 $\beta$  は Type I の解では式 (2.11) の  $\beta$  を、Type II では  $\gamma$  を意味している。そして、関数  $\psi_n(x)$  は次式で定義される：

$$\psi_n(x) = x \frac{J_{n-1}(x)}{J_n(x)} - (n+1). \quad (2.12)$$

さらに、記号 ' は Bessel 関数の変数に関する微分である。

### 3 境界条件を満たす解を求める

以下に述べるのは、Hutchinson [3] によるものである。

まず、微分方程式 (2.4) を満たす解は、表 1 にある Type I、II、III の解の線形結合で表すことができる。これより、ある量  $F$  の一般解  $f$  は 3 種類の解  $f_1, f_2, f_3$  を用いて、次のように書けるはずである：

$$f = \sum A_i f_i^{(A)} + \sum B_j f_j^{(B)} + \sum C_k f_k^{(C)}. \quad (3.1)$$

ここで、 $f^{(A)}, f^{(B)}, f^{(C)}$  は Type I、II、III の解をそれぞれ  $f_1, f_2, f_3$  として、

$$\begin{aligned} f^{(A)} &= [D_1 f_1(\alpha \leftrightarrow \delta) \quad + D_2 f_2(\alpha \leftrightarrow \beta) ] \cdots A \text{ series} \\ f^{(B)} &= [D_3 f_1 \quad + D_4 f_2 ] \cdots B \text{ series} \\ f^{(C)} &= [D_5 f_3(\alpha \leftrightarrow \beta) \quad + D_6 f_1(\alpha \leftrightarrow \delta) ] \cdots C \text{ series} \end{aligned} \quad (3.2)$$

のように重ね合わせたものである。

まず、境界条件のうち 3 つを考える：

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}(r, \theta, h) &= 0 \\ \sigma_{rz}(q, \theta, z) &= 0 \\ \sigma_{\theta z}(r, \theta, h) &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで、 $h$  はアスペクト比 (高さ と直径の比;  $h = L/2R$ ) を表している。これより、 $\sigma_{rz}$  と  $\sigma_{\theta z}$  が 0 になるには

$$h\alpha_{A_i} = h\alpha_{C_i} = \begin{cases} i\pi & (i = 0, 1, 2, \dots) : \text{even solution} \\ \frac{2i-1}{2}\pi & (i = 1, 2, 3, \dots) : \text{odd solution} \end{cases} \quad (3.4)$$

であればよく、また、 $\sigma_{rz}$  が 0 になるには

$$\alpha_{B_j} = \text{zero's of } J'_n(\alpha_{B_j}) \quad (3.5)$$

であるばよいことが分かる (see Appendix III)。

式 (3.4) において、 $\alpha_A, \alpha_C$  とは、円柱の軸方向にたつ波の山の数を指定する数であることより、両者は等しくなる、すなわち  $\alpha_A = \alpha_C$  となるはずである。これより、式 (3.4) が正当であることが分かる。

また、境界条件を満たすように定数  $D_1 \sim D_6$  を定めると、次のようになる：

$$\begin{aligned}
 D_1 &= \beta_A(\alpha_A^2 - \beta_A^2)J'_n(\beta_A) \times C_A, \\
 D_2 &= 4\alpha_A\delta_A J'_n(\delta_A) \times C_A, \\
 D_3 &= (\alpha_B^2 - \beta_B^2) \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta_B h \\ \cos \beta_B h \end{array} \right\} \times C_B, \\
 D_4 &= -4\delta_B \left\{ \begin{array}{l} \sin \delta_B h \\ \cos \delta_B h \end{array} \right\} \times C_B, \\
 D_5 &= 4\delta_A J'_n(\delta_A) \times C_C, \\
 D_6 &= nJ_n(\beta_A) \times C_C.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

ここで、添字 C は式 (3.4) より A にしてよいとした。また、 $C_A, C_B, C_C$  は定数である。次ぎに、境界条件の残りの 3 つを考える：

$$\begin{aligned}
 \sigma_{rr}(1, \theta, z) &= 0, \\
 \sigma_{zz}(r, \theta, h) &= 0, \\
 \sigma_{r\theta}(1, \theta, z) &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

これらを近似的に満たすことを考える。

まず、 $\sigma_{rr}$  について考える。すると、式 (3.3) により、

$$\sigma_{rr}(1, \theta, h) = \sigma_{rz}(1, \theta, h) = 0. \tag{3.8}$$

であるから、 $\sigma_{rr}$  は  $\sigma_{rr}(z = h) = \sigma_{rz}(z = h) = 0$  なる周期的境界条件を満たす<sup>1</sup>。これより、 $\sigma_{rr}$  を Fourier 級数に展開すると、 $[-2h, 2h]$  で直交する関数の組  $\{1, \sin \frac{m\pi z}{2h}, \cos \frac{m\pi z}{2h}\}$  を用いて、

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos \frac{m\pi}{2h}z + b_m \sin \frac{m\pi}{2h}z). \tag{3.9}$$

となる。ここで、係数  $a_m, b_m$  は次式で定義される：

$$\begin{aligned}
 a_m &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{rr} \cos \frac{m\pi}{2h}z dz, \\
 b_m &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{rr} \sin \frac{m\pi}{2h}z dz.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

<sup>1</sup> 周期的境界条件を満たす関数の Fourier 級数表示は、境界で真の値に収束することが保証され、これより境界条件が破られないことが保証される。

これを  $m$  の偶奇にわけると、 $\sigma_{rr}$  が境界条件を満たすためには  $a_0 = 0$  でなくてはならないことを考え、式 (3.9) は

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos \frac{n}{h} \pi z + b_{2n} \sin \frac{n}{h} \pi z) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} \cos \frac{2n-1}{2h} \pi z + b_{2n-1} \sin \frac{2n-1}{2h} \pi z) \quad (3.11) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} \cos \alpha_{A_n}^{(e)} z + b_{2n} \sin \alpha_{A_n}^{(e)} z) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} \cos \alpha_{A_n}^{(o)} z + b_{2n-1} \sin \alpha_{A_n}^{(o)} z).\end{aligned}$$

となる。ここで、 $\alpha_A$  の肩の (e)、(o) は、それぞれパリティの偶奇を表す文字である。ここで、表 1 と式 (3.1) より、 $\sigma_{rr}$  は  $\alpha_A^{(e)}$  に対しては  $\cos$  型、 $\alpha_A^{(o)}$  に対しては  $\sin$  型の  $z$  依存性を示すことが分かる。よって、三角関数の直交性により、式 (3.11) において恒等的に 0 となる。これより、

$$a_{2n} = b_{2n-1} = 0 \quad (\text{for all } n \in \mathbf{N}). \quad (3.12)$$

でなくてはならない。これより、条件

$$\begin{aligned}a_{2n} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{rr} \cos \alpha_{A_n}^{(e)} z dz = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{rr} \cos \alpha_{A_n}^{(e)} z dz = 0, \\ b_{2n-1} &= \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{rr} \sin \alpha_{A_n}^{(o)} z dz = \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{rr} \sin \alpha_{A_n}^{(o)} z dz = 0.\end{aligned} \quad (3.13)$$

を得る。

ここで、Fourier 級数の区間について考えると、円柱の  $z$  方向の振動を考えると、第 1 励起状態として  $u_z \propto \cos \frac{\pi}{2h} z$  の形が生じるはずであることから、区間  $[-h, h]$  が半波長に相当することが分かる。これより、Fourier 級数の区間は 1 波長分の長さ  $[-2h, 2h]$  であるべきであることが分かる。

また、 $\sigma_{r\theta}$  についても同様に展開すると、条件は

$$\begin{aligned}\frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{r\theta} \cos \alpha_A^{(e)} z dz &= \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{r\theta} \cos \alpha_A^{(e)} z dz = 0, \\ \frac{1}{2h} \int_{-h}^h \sigma_{r\theta} \sin \alpha_A^{(o)} z dz &= \frac{1}{h} \int_0^h \sigma_{r\theta} \sin \alpha_A^{(o)} z dz = 0.\end{aligned} \quad (3.14)$$

で与えられることが分かる。

最後に  $\sigma_{zz}$  について考える。今回は  $r$  を変数として、Fourier 級数展開ではなく Fourier-Bessel 級数展開を用いることとする。よって、式 (3.5) で定義される  $\alpha_B$  を用いて

$$\sigma_{zz} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k J_n(\alpha_{B_k} r) r dr; \quad C_k = \left[ \frac{2}{J_{n+1}(\alpha_{B_k})} \right]^2 \int_0^1 \sigma_{zz} J_n(\alpha_{B_k} r) r dr. \quad (3.15)$$

と展開することができる。ここで、Fourier-Bessel 展開において、Bessel 関数  $J_n(x)$  の零点ではなく、その微分  $J'_n(x)$  の零点を用いたが、このときも同様に直交完備性を有しているため、式 (3.15) は正しいことが保証される。

式 (3.15) より、 $\sigma_{zz}$  に対する境界条件は  $C_k = 0$ 、すなわち

$$C_k = \left[ \frac{2}{J_{n+1}(\alpha_{B_k})} \right]^2 \int_0^1 \sigma_{zz} J_n(\alpha_{B_k} r) r dr = 0. \quad (3.16)$$

で与えられることが分かる。

以上で得られた近似的境界条件の式 (3.13)、(3.14)、(3.16) に式 (3.1) を代入することにより、次のように行列を用いて書き表すことができる：

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \\ \hat{A} & \hat{B} & \hat{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{B} \\ \mathbf{C} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.17)$$

ここで、行列  $A$  の成分を  $a_{ij}$  のように表すと、それぞれ次のようになる：

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \sigma_{rr}^{(A)}, \\ b_{ij} &= \int_0^h \sigma_{rr}^{(B)} \begin{cases} \cos \alpha_{A_i} z \\ \sin \alpha_{A_i} z \end{cases} dz, \\ c_{ii} &= \sigma_{zz}^{(C)}, \\ \bar{a}_{ji} &= \int_0^1 \sigma_{zz}^{(A)} r J_n(\alpha_{B_j} r) dr, \\ \bar{b}_{jj} &= \sigma_{zz}^{(B)}, \\ \bar{c}_{ji} &= \int_0^1 \sigma_{zz}^{(C)} r J_n(\alpha_{B_j} r) dr, \\ \hat{a}_{ii} &= \sigma_{r\theta}^{(A)}, \\ \hat{b}_{ij} &= \int_0^h \sigma_{r\theta}^{(B)} \begin{cases} \cos \alpha_{A_i} z \\ \sin \alpha_{A_i} z \end{cases} dz, \\ \hat{c}_{ii} &= \sigma_{r\theta}^{(C)}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

ただし、展開で用いた関数  $\sin \alpha_{A_i} z, \cos \alpha_{A_i} z, J_n(\alpha_{B_j} r)$  の直交性を用いた。

以上より、ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  が全て 0 とはならないような解を持つためには次式が成立しなくてはならない：

$$\det \begin{vmatrix} A & B & C \\ \bar{A} & \bar{B} & \bar{C} \\ \hat{A} & \hat{B} & \hat{C} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.19)$$

この式を満たす周波数  $\omega$  が、この円柱弾性体の固有振動の角振動数を与えるのである。

## 4 Discussions

この方法を用いて得られた固有振動の周波数の図は別紙の通りである。これを見ると、少なくとも Hutchinson [3] にある周波数は存在することが分かる。しかし、余計な周波数も存在することが見て取れる。

これらの余分な周波数が、果たして物理的に意味のある解を表しているかどうかを調べるために、ある周波数に対して、その振動モードがどのようなものであるのかを示すことが出来るようにプログラムを変更したのだが、うまく作動せず、現在のところ、これらの余分な周波数が棄却されうるモードであるのか否かはまだわかっていない。

このように余分なモードの出てくる原因としてはいくつか考えられる。それらをあげてみよう。

1. プログラムのバグによるもの。これが一番もっともらしい。共同実験者の山元氏と比較すると、私のプログラムの扱っているデータのオーダーが全般的に大きい。これがどこに起因するものかは不明であるが、得られるデータがほぼ同一であることより、一概にこれが原因とは言い切れないように思う。
2. 計算誤差によるもの。今回のプログラミングの際、桁落ちなどの計算誤差を少なくする工夫は特に行わなかった。このため、計算誤差が生じるような数値を扱っているならば、確実に意味のないデータとなるであろう。ただ、調べた限りにおいては、減算の際に同程度の数同士の減算などは見られなかった。よって、詳しく調べなくてはならないとは思いますが、あまり今回のケースでは重要ではないように思う。
3. 自作の Bessel 関数のルーチンによる誤差。今回用いた Bessel 関数その他のルーチンは、奥村 [6] のものを用いた。しかし、誤差については、数表 [5] と照らし合わせて、小数点以下第 10 位までは正しいことが分かっている。よって、これは原因としては除外できるものと思われる。

また、現在は、デバッグをしながら、過去の実験データとの照合を行なっている。しかし、おおむねは一致するものの、詳しい検討をしていないので、良い一致を示しているように思われるというにとどめておこう。

また、Hutchinson [3] について、少し疑問がある。変位ベクトルを求めるとき、ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  を用いる。ところが、これらがすべて 0 でないものとして行列式を求めている。これが果たして保証されているのかがまだわかっていない。

## References

- [1] Landau, L.D. and Lifshitz, E.M.: *Theory of Elasticity*, A Course of Theoretical Physics, Vol. 7.



- [2] Rasband,S.N.: *Resonant Vibrations of Free Cylinders and Disks*, Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 57, No. 4, Apr. 1975, pp.899-905.
- [3] Hutchinson,J.R.: *Vibrations of Solid Cylinders*, Journal of Applied Mechanics, Vol. 47, Dec. 1980, pp.901-907.
- [4] McMahon,G.W.: *Experimental Study of the Vibrations of Solid, Isotropic, Elastic Cylinders*, The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 36, No. 1, Jan. 1964, pp.85-91.
- [5] Abramowitz,M. and Stegun,I.A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*,N.B.S. appl. math. ser., vol. 55.
- [6] 奥村晴彦: C 言語による最新アルゴリズム事典, 技術評論社, 1991.
- [7] 三尾典克, 大橋正健 編: 重力波アンテナ技術検討書-干渉計ハンドブック-

	Type I	Type II	Type III
$\frac{u_r}{R}$	$\alpha J'_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$-\alpha \beta J'_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$-\frac{n}{r} J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{Bmatrix} \cos n\theta$
$\frac{u_\theta}{R}$	$-\frac{n}{r} J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$	$\frac{n\beta}{r} J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$	$\alpha J'_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{Bmatrix} \sin n\theta$
$\frac{u_z}{R}$	$\delta J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} -\sin \delta z \\ \cos \delta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$\alpha^2 J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} -\sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	0
$\frac{u_{rr}}{R}$	$\alpha^2 J''_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$-\alpha^2 \beta J''_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$\left[ \frac{n}{r^2} J_n(\alpha r) - \frac{n\alpha}{r} J'_n(\alpha r) \right] \times \begin{Bmatrix} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{Bmatrix} \cos n\theta$
$\frac{u_{\theta\theta}}{R}$	$-\left[ \frac{n^2}{r^2} J_n(\alpha r) - \frac{\alpha}{r} J'_n(\alpha r) \right] \times \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$\beta \left[ \frac{n^2}{r^2} J_n(\alpha r) + \frac{\alpha}{r} J'_n(\alpha r) \right] \times \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$-\left[ \frac{n}{r^2} J_n(\alpha r) - \frac{n\alpha}{r} J'_n(\alpha r) \right] \times \begin{Bmatrix} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{Bmatrix} \cos n\theta$
$\frac{u_{zz}}{R}$	$-\delta^2 J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$-\alpha^2 \beta J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	0
$\frac{u_{r\theta}}{R}$	$\left[ \frac{n^2}{r^2} J_n(\alpha r) - \frac{n\alpha}{r} J'_n(\alpha r) \right] \times \begin{Bmatrix} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$	$-\frac{n\beta}{r^2} [J_n(\alpha r) - \alpha r J'_n(\alpha r)] \times \begin{Bmatrix} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$	$\frac{1}{2} \left[ \alpha^2 J''_n(\alpha r) - \frac{\alpha}{r} J'_n(\alpha r) \right] + \frac{n^2}{r^2} J_n(\alpha r) \times \begin{Bmatrix} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{Bmatrix} \sin n\theta$
$\frac{u_{rz}}{R}$	$\alpha \delta J'_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} -\sin \delta z \\ \cos \delta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$\frac{\alpha}{2} (\alpha^2 - \beta^2) J'_n(\alpha r) \times \begin{Bmatrix} -\sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \cos n\theta$	$\frac{n\gamma}{2r} J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \sin \gamma z \\ -\cos \gamma z \end{Bmatrix} \cos n\theta$
$\frac{u_{\theta z}}{R}$	$-\frac{n\delta}{r} J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} -\sin \delta z \\ \cos \delta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$	$-\frac{n}{2r} (\alpha^2 - \beta^2) J_n(\alpha r) \times \begin{Bmatrix} -\sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \sin n\theta$	$\frac{\alpha r}{2} J'_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} -\sin \gamma z \\ \cos \gamma z \end{Bmatrix} \sin n\theta$

表 1: 弾性体の微分方程式の解

	Type I	Type II	Type III
$\frac{\sigma_{rr}}{2\mu}$	$\frac{J_n(\alpha r)}{r^2} [(n^2 - 1) + \frac{r^2}{2}(2\delta^2 - \omega^2) - \psi_n(\alpha r)] \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{array} \right\} \cos n\theta$	$-\frac{\beta}{r^2} J_n(\alpha r) [(n^2 - 1) - (\alpha r)^2 - \psi_n(\alpha r)] \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{array} \right\} \cos n\theta$	$-\frac{n}{r^2} J_n(\alpha r) \phi_n(\alpha r) \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{array} \right\} \cos n\theta$
$\frac{\sigma_{\theta\theta}}{2\mu}$	$-\frac{J_n(\alpha r)}{r^2} [(n^2 - 1) + \frac{r^2}{2}(2\delta^2 - \omega^2) - \psi_n(\alpha r)] \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{array} \right\} \cos n\theta$	$\frac{\beta}{r^2} J_n(\alpha r) [(n^2 - 1) - \phi_n(\alpha r)] \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{array} \right\} \cos n\theta$	$\frac{n}{r^2} J_n(\alpha r) \phi_n(\alpha r) \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{array} \right\} \cos n\theta$
$\frac{\sigma_{zz}}{2\mu}$	$\frac{1}{2}(2\alpha^2 - \omega^2) J_n(\alpha r) \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{array} \right\} \cos n\theta$	$-\alpha^2 \beta J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{array} \right\} \cos n\theta$	0
$\frac{\sigma_{r\theta}}{\mu}$	$-\frac{2n}{r^2} J_n(\alpha r) \psi_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos \delta z \\ \sin \delta z \end{array} \right\} \sin n\theta$	$\frac{2n\beta}{r^2} J_n(\alpha r) \psi_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} \cos \beta z \\ \sin \beta z \end{array} \right\} \sin n\theta$	$\frac{2}{r^2} J_n(\alpha r) [(n^2 - 1) - \frac{(\alpha r)^2}{2} - \psi_n(\alpha r)] \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \gamma z \\ \sin \gamma z \end{array} \right\} \sin n\theta$
$\frac{\sigma_{rz}}{\mu}$	$2\alpha\delta J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin \delta z \\ \cos \delta z \end{array} \right\} \cos n\theta$	$\alpha(\alpha^2 - \beta^2) J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin \beta z \\ \cos \beta z \end{array} \right\} \cos n\theta$	$-\frac{n\gamma}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin \gamma z \\ \cos \gamma z \end{array} \right\} \cos n\theta$
$\frac{\sigma_{\theta z}}{\mu}$	$-\frac{2n\delta}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin \delta z \\ \cos \delta z \end{array} \right\} \sin n\theta$	$-(\alpha^2 - \beta^2) \frac{n}{r} J_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin \beta z \\ \cos \beta z \end{array} \right\} \sin n\theta$	$\alpha\gamma J'_n(\alpha r) \left\{ \begin{array}{l} -\sin \gamma z \\ \cos \gamma z \end{array} \right\} \sin n\theta$

表 1: 弾性体の微分方程式の解 (続き)

## Appendix I: 微分方程式 (2.7) の導出

まず、円柱座標系でラプラシアン  $\Delta$  が

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1)$$

で与えられることを用いると、式 (2.6) は次のようになる:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \omega^2 \lambda^2 \phi = 0, \\ \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2} + \omega^2 \mathbf{A} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

ここで、ベクトル  $\mathbf{A}$  はまだ Cartesian 座標系で表されているので、これを円柱座標系に変換することとする:

$$\begin{cases} A_x = A_r \cos \theta - A_\theta \sin \theta, \\ A_y = A_r \sin \theta + A_\theta \cos \theta. \end{cases} \quad (3)$$

これより、式 (2) は次のようになる:

$$\begin{cases} C_1 \cos \theta - C_2 \sin \theta = 0, \\ C_1 \sin \theta - C_2 \cos \theta = 0. \end{cases} \quad (4)$$

これは当然  $\theta$  にかかわらず成立するはずなので、

$$\begin{cases} C_1 = \frac{\partial^2 A_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_r}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_r}{\partial z^2} + \omega^2 A_r = 0, \\ C_2 = \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 A_\theta}{\partial z^2} + \omega^2 A_\theta = 0. \end{cases} \quad (5)$$

が成立する。

以上より、微分方程式 (2.6) を円柱座標系に書き直すと式 (2.9) になることが分かる。

また、Rasband[2] では

$$A_\theta \rightarrow r R A_\theta = \rho A_\theta.$$

と変換してある。これは、 $A_\theta$  を角度方向のベクトルではなく、角度そのものとして扱うための変換である。

## Appendix II: 微分方程式 (2.9) の解

微分方程式

$$\partial_r^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_r \phi + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \phi + \partial_z^2 \phi + \omega^2 \lambda^2 \phi = 0 \quad (6)$$

$$\partial_r^2 A_r + \frac{1}{r} \partial_r A_r - \frac{1}{r^2} A_r + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_r - \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_\theta + \partial_z^2 A_r + \omega^2 A_r = 0 \quad (7)$$

$$\partial_r^2 A_\theta + \frac{1}{r} \partial_r A_\theta - \frac{1}{r^2} A_\theta + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_\theta + \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_r + \partial_z^2 A_\theta + \omega^2 A_\theta = 0 \quad (8)$$

$$\partial_r^2 A_z + \frac{1}{r} \partial_r A_z + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 A_z + \partial_z^2 A_z + \omega^2 A_z = 0 \quad (9)$$

の解は、以下のようにして求めることができる。

### 1. 式 (6) の解 $\phi$

まず、

$$\alpha^2 + \delta^2 = \omega^2 \lambda^2$$

とおく。すると、式 (6) は次のようになる:

$$\left[ \partial_r^2 \phi + \frac{1}{r} \partial_r \phi + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \phi \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \partial_\theta^2 \phi + n^2 \phi \right] + \left[ \partial_z^2 \phi + \delta^2 \phi \right] = 0. \quad (10)$$

これより、 $\phi$  を変数分離すると、各 [] 内が 0 になればよい。ここで Bessel の微分方程式

$$\partial_x^2 y + \frac{1}{x} \partial_x y + \left( 1 - \frac{n^2}{x^2} \right) y = 0; \quad y = J_n(x)$$

において、 $x = \alpha r$  と変数変換をすることにより得られる方程式

$$\partial_r^2 y + \frac{1}{r} \partial_r y + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) y = 0; \quad y = J_n(\alpha r)$$

を用いると、式 (1) の解  $\phi$  は、A を任意定数として、

$$\phi(r, \theta, z) = A J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \delta z \\ \cos \delta z \end{Bmatrix}$$

となる。

### 2. 式 (9) の解 $\phi$

i) と同様に

$$\alpha^2 + \gamma^2 = \omega^2$$

とおくと、式 (9) は次のようになる:

$$\left[ \partial_r^2 A_z + \frac{1}{r} \partial_r A_z + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) A_z \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \partial_\theta^2 A_z + n^2 A_z \right] + \left[ \partial_z^2 A_z + \gamma^2 A_z \right] = 0. \quad (11)$$

これより、式 (2) の解  $A_z$  は、 $C$  を任意定数として、

$$A_z(r, \theta, z) = C J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \gamma z \\ \cos \gamma z \end{Bmatrix}$$

となる。

3. 式 (7)、(8) の解  $A_r$ 、 $A_\theta$   
まず、

$$\alpha^2 + \beta^2 = \omega^2$$

とおく。すると、式 (7)、(8) は次のようになる：

$$\begin{cases} \left[ \partial_r^2 A_r + \frac{1}{r} \partial_r A_r + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) A_r - \frac{1}{r^2} A_r \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \partial_\theta^2 A_r + n^2 A_r \right] + \left[ \partial_z^2 A_r + \beta^2 A_r \right] \\ \hspace{20em} = \frac{2}{r^2} \partial_\theta A_\theta \\ \left[ \partial_r^2 A_\theta + \frac{1}{r} \partial_r A_\theta + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) A_\theta - \frac{1}{r^2} A_\theta \right] + \frac{1}{r^2} \left[ \partial_\theta^2 A_\theta + n^2 A_\theta \right] + \left[ \partial_z^2 A_\theta + \beta^2 A_\theta \right] \\ \hspace{20em} = -\frac{2}{r^2} \partial_\theta A_r \end{cases}$$

これより、変数分離して

$$\begin{cases} A_r = D(r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \\ A_\theta = E(r) \begin{Bmatrix} -\cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \end{cases}$$

とおける。これより、 $D$ 、 $E$  に関する微分方程式

$$\partial_r^2 D + \frac{1}{r} \partial_r D + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) D - \frac{1}{r^2} D = \frac{2n}{r^2} E \quad (12)$$

$$\partial_r^2 E + \frac{1}{r} \partial_r E + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) E - \frac{1}{r^2} E = \frac{2n}{r^2} D \quad (13)$$

を得る。これと Bessel の微分方程式との類似より、式 (13) を満たす  $D$ 、 $E$  を

$$\begin{cases} D = F(r) J_n(\alpha r) \\ E = G(r) \partial_r J_n(\alpha r) \end{cases} \quad (14)$$

とおくと、式 (3) を式 (13) に代入することにより、 $F$ 、 $G$  に対する微分方程式

$$2 \left[ \partial_r F - \frac{n}{r^2} G \right] \partial_r J_n(\alpha r) + \left[ \partial_r^2 F + \frac{1}{r} \partial_r F - \frac{1}{r^2} F \right] J_n(\alpha r) = 0 \quad (15)$$

を得る。ここで、この式が  $r$  の値にかかわらず成立するためには、各 [] 内が 0 でなくてはならない。よって、まず

$$\partial_r^2 F + \frac{1}{r} \partial_r F - \frac{1}{r^2} F = 0$$

により、Fの特解が  $F = r$  と  $F = 1/r$  であることが分かる。これと、式 (3) の初めの [] より、B を任意定数として

$$\begin{cases} F = Bnr \\ G = Br^2 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} F = B\frac{n}{r} \\ G = -B \end{cases}$$

であることが分かる。これより得られる D、E を式に代入すると、式 (13)、(13) を満たす解が

$$\begin{cases} D = B\frac{n}{r}J_n(\alpha r) \\ E = -B\partial_r J_n(\alpha r) \end{cases}$$

であることが分かる。これより、式 (7)、(8) の解は、B を任意定数として

$$\begin{cases} A_r = B\frac{n}{r}J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} \sin n\theta \\ \cos n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \\ A_\theta = -B\partial_r J_n(\alpha r) \begin{Bmatrix} -\cos n\theta \\ \sin n\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \beta z \\ \cos \beta z \end{Bmatrix} \end{cases}$$

となる。

## Appendix III: 境界条件 (3.3) により導かれる条件 および $D_1 \sim D_6$ の決定

1.  $\sigma_{rz}(r, \theta, h) = 0, \sigma_{\theta z}(r, \theta, h) = 0$

まず、 $\sigma_{rz}(r, \theta, h) = 0$  より、

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = & \sum A_i \left[ D_1 \cdot 4\alpha_A \delta_A J'_n(\delta_A r) - D_2 \cdot \beta_A (\alpha_A^2 - \beta_A^2) J'_n(\beta_A r) \right] \left\{ \begin{array}{l} -\sin \alpha_A h \\ \cos \alpha_A h \end{array} \right\} \cos n\theta \\ & + \sum B_i \left[ D_3 \cdot 4\delta_B \left\{ \begin{array}{l} -\sin \delta_B h \\ \cos \delta_B h \end{array} \right\} + D_4 \cdot (\alpha_B^2 - \beta_B^2) \left\{ \begin{array}{l} -\sin \beta_B h \\ \cos \beta_B h \end{array} \right\} \right] \alpha_B J'_n(\alpha_B r) \cos n\theta \\ & + \sum C_i \left[ -D_5 \cdot \frac{n}{r} J_n(\beta_C r) + D_6 \cdot 4\delta_C J'_n(\delta_C r) \right] \alpha_C \left\{ \begin{array}{l} -\sin \alpha_A h \\ \cos \alpha_A h \end{array} \right\} \cos n\theta = 0. \end{aligned}$$

である。これより、A、C-series は、式 (3.4)、すなわち

$$\begin{cases} \sin \alpha_A h = \sin \alpha_C h = 0 & (\text{even}) \\ \cos \alpha_A h = \cos \alpha_C h = 0 & (\text{odd}) \end{cases}$$

が成立すれば消える。そして、B-series が消えるように  $D_3, D_4$  を定めると、 $C_B$  を定数として

$$\begin{aligned} D_3 &= (\alpha_B^2 - \beta_B^2) \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta_B h \\ \cos \beta_B h \end{array} \right\} \times C_B \\ D_4 &= -4\delta_B \left\{ \begin{array}{l} \sin \delta_B h \\ \cos \delta_B h \end{array} \right\} \times C_B \end{aligned}$$

となることが分かる。

また、これらが成り立てば、 $\sigma_{\theta z}(r, \theta, h) = 0$  が成立する。

2.  $\sigma_{rz}(1, \theta, z) = 0$

$\sigma_{rz}$  を書き下すと、次のようになる:

$$\begin{aligned} \sigma_{rz} = & \sum A_i \left[ D_1 \cdot 4\alpha_A \delta_A J'_n(\delta_A) - D_2 \cdot \beta_A (\alpha_A^2 - \beta_A^2) J'_n(\beta_A) \right] \left\{ \begin{array}{l} -\sin \alpha_A z \\ \cos \alpha_A z \end{array} \right\} \cos n\theta \\ & + \sum B_i \left[ D_3 \cdot 4\delta_B \left\{ \begin{array}{l} -\sin \delta_B z \\ \cos \delta_B z \end{array} \right\} + D_4 \cdot (\alpha_B^2 - \beta_B^2) \left\{ \begin{array}{l} -\sin \beta_B z \\ \cos \beta_B z \end{array} \right\} \right] \alpha_B J'_n(\alpha_B) \cos n\theta \\ & + \sum C_i \left[ -D_5 \cdot n J_n(\beta_C) + D_6 \cdot 4\delta_C J'_n(\delta_C) \right] \alpha_C \left\{ \begin{array}{l} -\sin \alpha_A z \\ \cos \alpha_A z \end{array} \right\} \cos n\theta = 0. \end{aligned}$$

これより、B-series は、式 (3.5)、すなわち

$$J'_n(\alpha_B) = 0$$



が成立していれば消える。そして、A、C-series が消えるように  $D_1, D_2, D_5, D_6$  を定めると、 $C_A, C_C$  を定数として

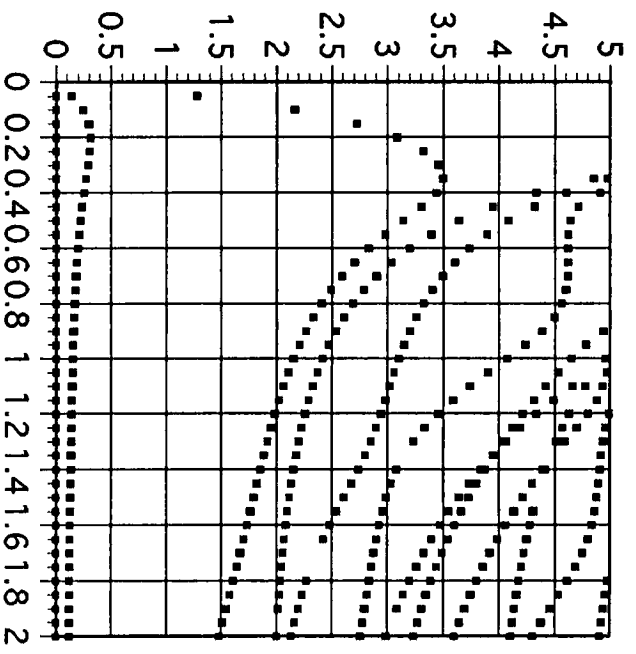
$$D_1 = \beta_A(\alpha_A^2 - \beta_A^2)J'_n(\beta_A) \times C_A$$

$$D_2 = 4\alpha_A\delta_A J'_n(\delta_A) \times C_A$$

$$D_5 = 4\delta_C J'_n(\delta_C) \times C_C$$

$$D_6 = nJ_n(\beta_C) \times C_C$$

であればよいことが分かる。



•

(

(