

特別実験I (研野研)

一 摩擦を受けた二逆立ち振り子
の力学

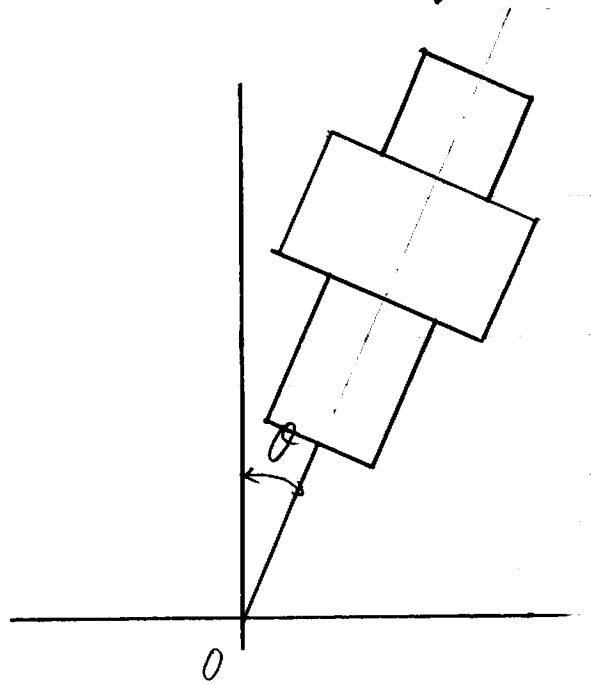
物理学科 4年 21532 F
篠原 紀幸

共同実験者: 井戸 過 剛

提出日 ~~9月25日(土)~~
9月27日(月)

§1. 理論から見た：逆立ち振り子の力学

振り子の摩擦のない理想
 的の場合から考えてみよう。
 おりの質量を M 、点 O から
 重心までの距離を L 、バネ
 定数を K としてやる。鉛直
 軸からの角度を θ と決
 定する運動方程式は、



$$(1) \quad I \ddot{\theta} = -K\theta + MgL \sin \theta$$

とかける。ここで I は原点 O の
 振り子の z - x - t である。

fig. 1

θ が微小であると考えると $\sin \theta \approx \theta$ かつ、バネからくる
 トルクと重力に与えるトルクの和 N_{net} は

$$(2) \quad N_{net} = -K\theta + MgL\theta$$

$$= -(K - MgL)\theta$$

と(1) 正味のバネ定数は、重心までの距離 L によって
 決定される。

振り子が感ずるポテンシャル V を V_{net} とすると、これは、
 バネからくるポテンシャルと重力に与えるポテンシャルの和であるから

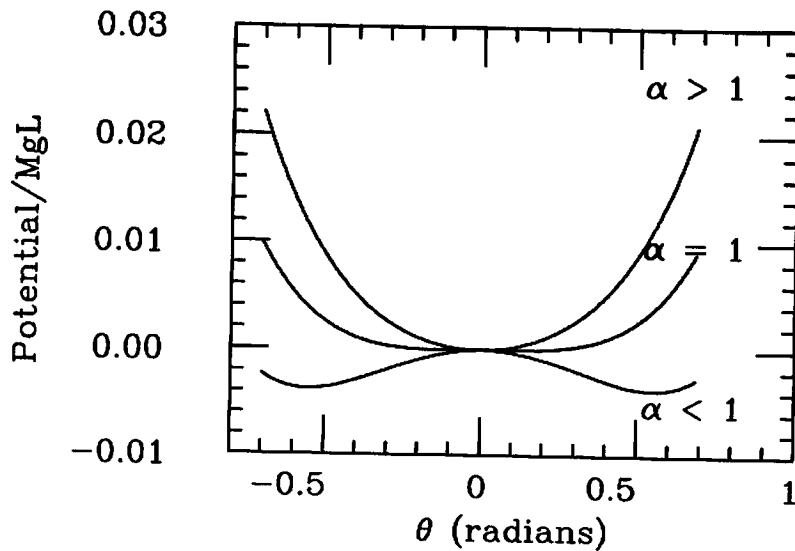
$$(3) \quad V_{net}(\theta) = \frac{1}{2} K\theta^2 + MgL(\cos \theta - 1)$$

$\kappa \equiv \alpha MgL$ とおくと

$$(A) \quad V_{\text{rot}}/MgL = \frac{1}{2} \alpha \theta^2 - 1 + \cos \theta$$

これは fig. 2 にある通り $\alpha > 1$ は双曲線型のポテンシャルである。又 $\alpha = 1$ は、ポテンシャルが θ の 4 次以上の項から成り、重力が寄与していない。よって $\alpha < 1$ は $\theta = 0$ が不安定な平衡点となり、この両側に安定な平衡点が対称に並んでいる。当然、 $\theta = \theta(\alpha)$ の時間発展も α に依存している。 $\alpha > 1$ は振動 ($\alpha = 1$ は時間 t の 2 次多項式) であり、 $\alpha < 1$ は指数関数で表す。振動はむしろ

Fig. 2



次に摩擦項 (\hat{Q} の比例項) を加えてみる
運動方程式は

$$(5) \quad I\ddot{\theta} = -k\theta + MgL \sin\theta - \beta\dot{\theta}$$

θ が微小とすると

$$I\ddot{\theta} = -k\theta + MgL\theta - \beta\dot{\theta}$$

θ が γ -1) 共振現象 $\hat{Q} \ll \rho, \kappa = \kappa_1 = \gamma \delta \varepsilon$

$$-I\omega^2 \hat{Q} = -(k - MgL)\hat{Q} - i\omega\beta\hat{Q}$$

$$\therefore I\omega^2 = (k - MgL) + i\omega\beta$$

($\tau = \rho$) の複素振動数 ω は

$$(6) \quad \omega = i \frac{\beta}{2I} \pm \sqrt{\frac{k - MgL}{I} - \left(\frac{\beta}{2I}\right)^2}$$

$$= i \frac{\beta}{2I} \pm \sqrt{\omega_r^2 - \left(\frac{\beta}{2I}\right)^2}$$

($\kappa = \tau$) ω_r は固有振動数

$$\omega_r^2 = \frac{k - MgL}{I}$$

である)

摩擦 $\alpha \tau = \rho$ の振動は $\gamma < 1$ (すなわち $\rho < \kappa$) の場合、 I と β の比を放
出して減衰する。減衰係数 $\gamma < 1$ である。これは ω の虚
部 τ から

$$(7) \quad \gamma = \text{Re}(\omega) = \frac{\beta}{2I}$$

これを用いると、観測した振動数は

$$(8) \quad \omega_0 = \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2}$$

これは ω_0 である。Paulson の論文 [1] には ω_0 は IS
 ω_0 外から、トルゲを加えて ω_0 と ω_0 の伝達関数は

$$(9) \quad H = \frac{1}{K - M_0 L - I \omega^2 + i k \phi(\omega)}$$

$$= \frac{1}{I(\omega_r^2 - \omega^2) + i k \phi(\omega)}$$

($\omega = \omega_r$ $\phi(\omega) = \frac{\omega \beta}{k} = 2 \frac{I}{k} \gamma \omega$ (10)) である)

である (10)。この場合の系の Q 値は

$$(10) \quad Q = \omega_r^2 / \frac{k}{I} \phi(\omega_r)$$

より

$$(11) \quad Q = \frac{\omega_r}{2\gamma}$$

これは、普通力学の教科書には、空気抵抗係数
 (11) $\gamma = \text{const}$ としている。したがって (11) である

$$Q \propto \omega_r$$

であることは明らかである。

5.3 実験装置と手順

まず実験装置の説明をする

(i) おもり

おもりは A, B とともに黄銅製である。

中心を通る A は高さ 16.0 cm
長径 4.5 cm の円筒形、約 2.2 kg
又 B は、ネジ 1 において A に固定
高さ 4.0 cm, 外径
7.0 cm, 内径 4.5 cm の中空
円筒形で、約 760g である。

何を加えておくと。

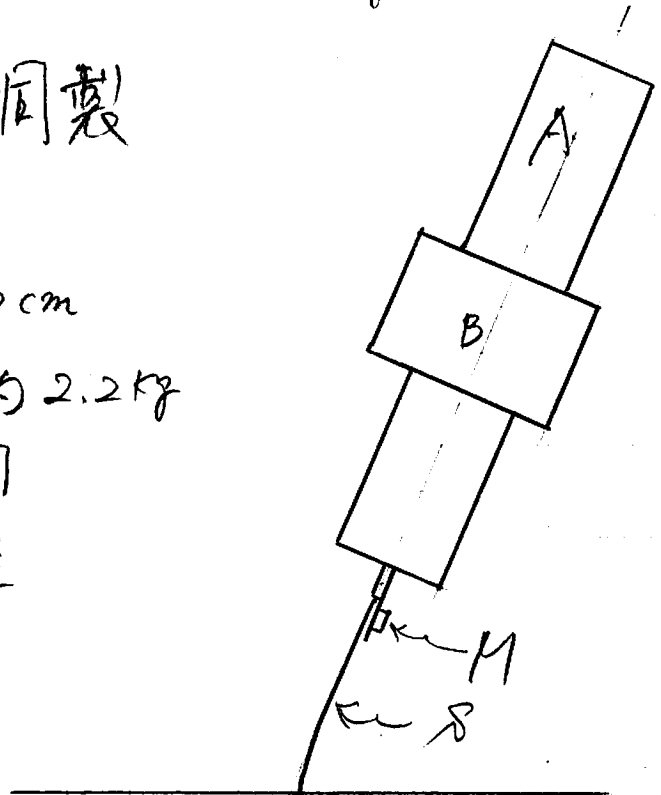
A には底にバネが固定されているので高さ 1.0 cm, 厚さ 5.0 mm
幅 3.0 cm の台が設けられている。

(ii) 板バネ

バネはリン青銅製である。幅 3.0 cm, 厚さ 1.0 mm
で重心までの距離を d とする d の様な高さ a の
用意される。

(iii) 他に、鏡 M, He-Ne レーザ、一次元位置検出半導
体素子を用いた検出器がある。

fig. 3



実験は次のように進めらる。

L-サから出る光を、おもりAは固定して鏡M1はあり、その反射光を検出器にある。検出器は光の高さによって電圧を出力するので、これをパソコンに通じてデータを記録できる。

これを重心までの距離Lを変えて繰り返す。

§ 4 実験結果と考察

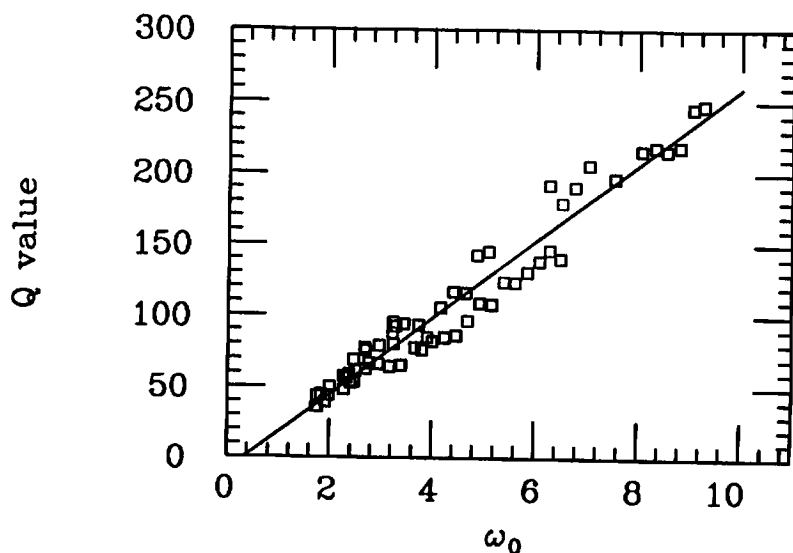
実験で測定した振動数 ω_0 (8) の ω_0 である。Q 値 Q (11) である。

$$(12) \quad Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}$$

と $\tau = \frac{1}{\gamma}$

実験では ω_0, γ を求め、(12) 式より Q 値を求め、このように求めた (ω_0, Q) のプロットが図 4 (Fig. 4) の直線上に分布していることがわかる。

Fig. 4



直線は最小二乗法により求めたものである。直線上に分布していることは、減衰係数 γ が定数であることを意味する。これは、減衰が空気抵抗によるものであることを示している。

$$F(\omega) = 2 \frac{I}{K} \gamma \omega \neq \text{const}$$

であることは意味している。Saulson の論文 [1] に示されている。

$\phi(\omega)$ は ω に依存せず一定である τ の値は

$$Q \propto \omega r^2$$

となる。今回我々が行った実験では精度と他の面から見て、Saulsonの論文を全く否定することはできないが、それ以上否定的な結果を与えていると考えてよい。

(付録1) 板バネのバネ定数 k を求める。

このレポートの中で使われるバネ定数 k の次元は (力・長さ) である。

板の厚さを a 、長さを L 、幅を b としておく。一端を固定し、他端を自由にしておく。自由端に、又は一定の力を加えてやると、板の各部分には変位が生ずる。変位を ξ とする。この ξ は fig. 5 にあるように x の関数である。

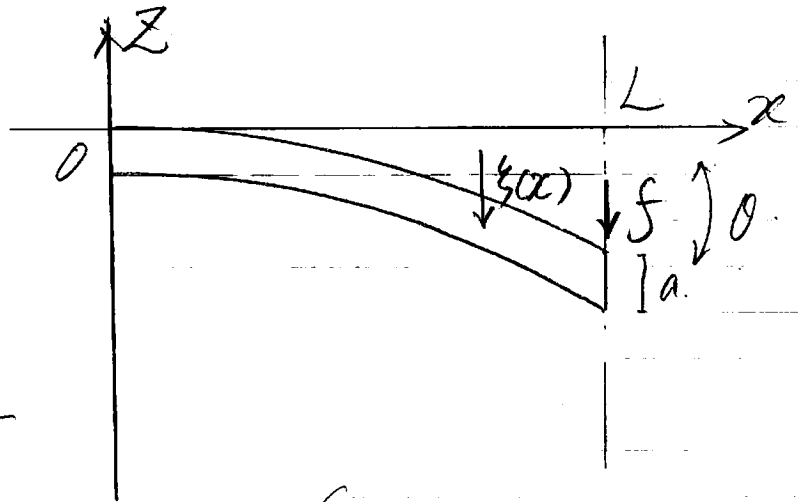


fig. 5

この断面二次モーメントを I とする。

$$(13) \quad I = \frac{1}{12} a^3 b$$

又、自由端に f とする。 E は Young 率、 σ は poisson 比である。

$$(14) \quad F = \frac{1}{2} \cdot \frac{EI}{1-\sigma^2} \int_0^L \left(\frac{d^2 \xi}{dx^2} \right)^2 dx$$

ここで、点 x における角運動量は

$$(15) \quad M = (L-x)f$$

一方、 $M =$

$$(16) \quad M = \frac{EI}{1-\sigma^2} \frac{d^2 \xi}{dx^2}$$

ξ を表せるから

(15) (16) の ξ

$$\frac{EI}{1-\sigma^2} \xi = f \left(\frac{1}{2} L x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right)$$

$\therefore \tau$ 固定端条件: $\xi(x=0) = 0, \frac{d}{dx} \xi(x=0) = 0$ を使って

$$\therefore \xi = \frac{(1-\sigma^2)}{EI} f \left(\frac{1}{2} L x^2 - \frac{1}{6} x^3 \right)$$

$$(18) \quad \xi(x=L) = \frac{(1-\sigma^2)}{3EI} L^3 \cdot f$$

(14), (15) の ξ

$$F = \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\sigma^2)}{EI} f^2 \cdot \frac{1}{3} L^3$$

ゆえ (18) の ξ

$$(19) \quad F = \frac{1}{2} \frac{3EI}{(1-\sigma^2) L^3} \xi^2(L)$$

これは、力 f は、 ξ の仕事、 $\xi(L)$ は、 ξ の弾性エネルギー

ゆえ $f = k \xi(L)$ とおくと

$$(20) \quad F = \frac{1}{2} k \xi^2(L)$$

k の計算は、 $\xi(L) = \theta$

$$(21) \quad k = \frac{3EI}{(1-\sigma^2) L^3}$$

$\therefore \tau$ $\xi(L)$ の微小 θ に対して $\xi(L) = L\theta$ とおくと

$\therefore \tau$ の (20) の ξ

$$(22) \quad F = \frac{1}{2} (k L^2) \cdot \theta^2$$

$$\tau = \tau'' \quad K = kL^2 \text{ である}$$

$$(23) \quad F = \frac{1}{2} k \theta^2$$

これは、角度 θ に対する、 $C = kL^2$ の弾性エネルギーである。求めるバネ定数は

$$(24) \quad K = kL^2 = \frac{2EI}{(1-\sigma^2)L}$$

である

参考文献

[1] P. R. Saulson, R. T. Stebbins, F. D. Dumont, and S. E. Hlock, J. Appl. Phys.

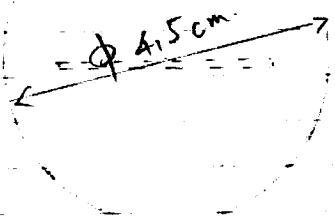
[2] P. R. Saulson, Phys Rev. D42, 2457 (1990)

[3] 富山小太郎、工学 岩波書店

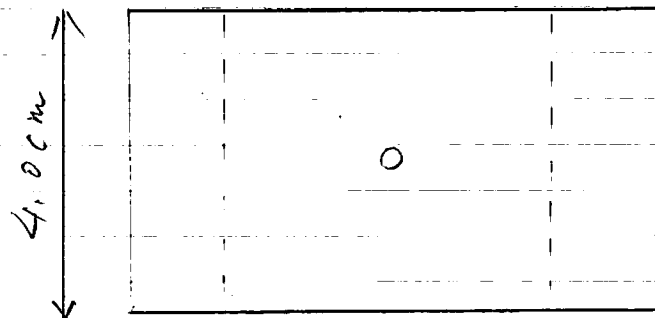
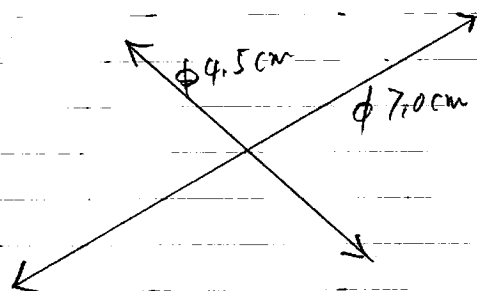
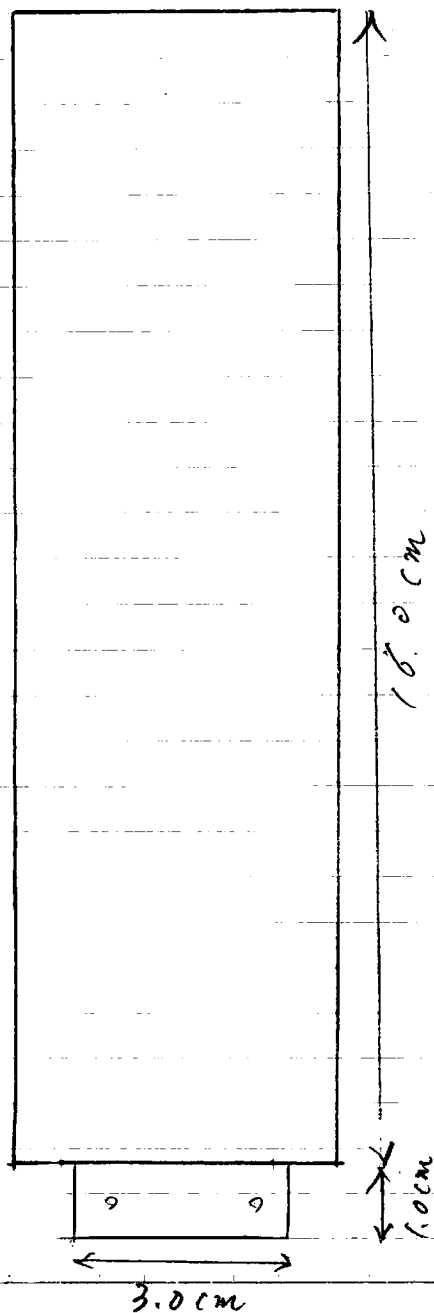
[4] 三浦久三著 藤原三訂 弾性理論
東京図書

(付録2) 実験2)用、 $r=$ 振り子の設計図

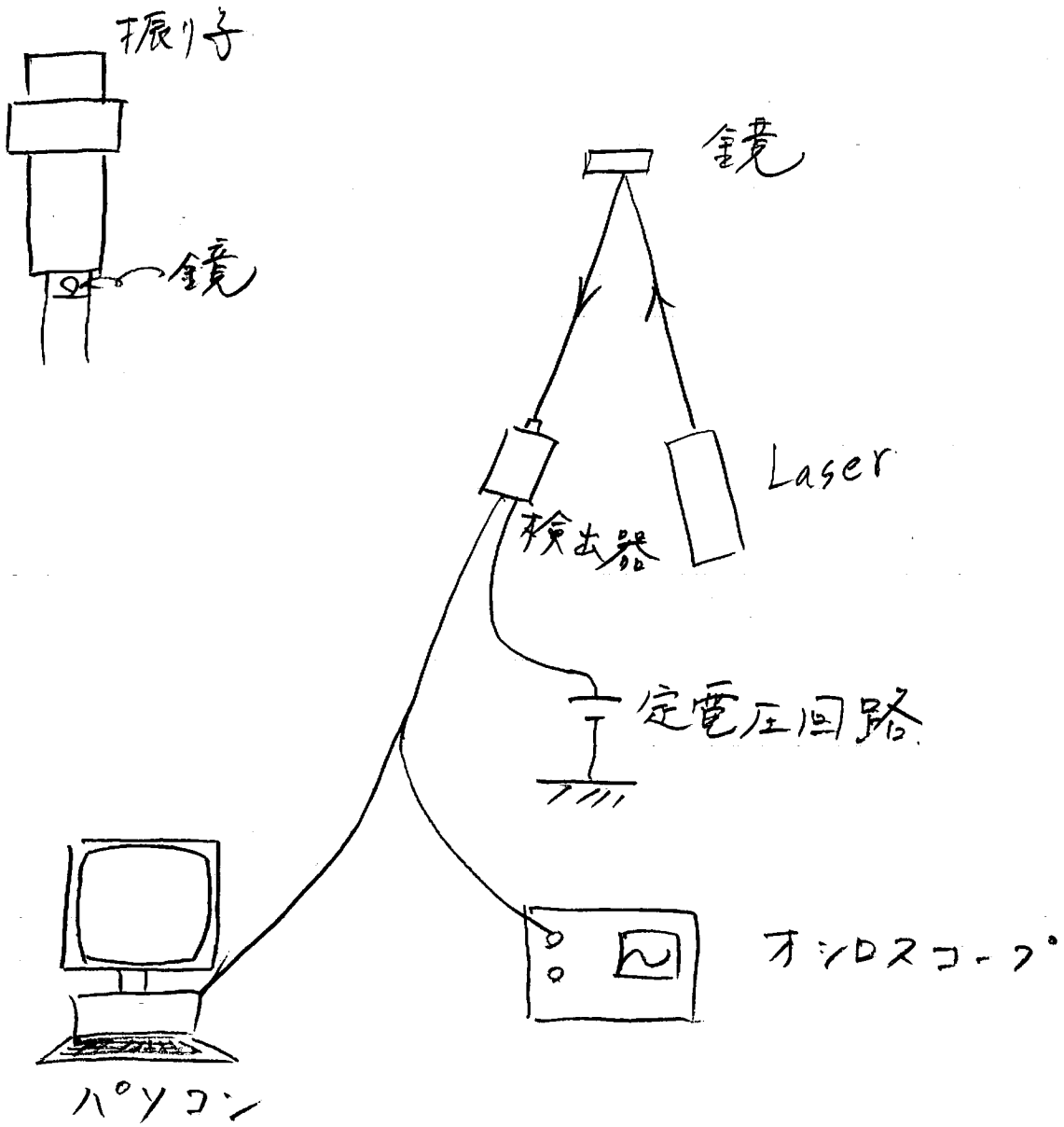
おとり A



おとり B

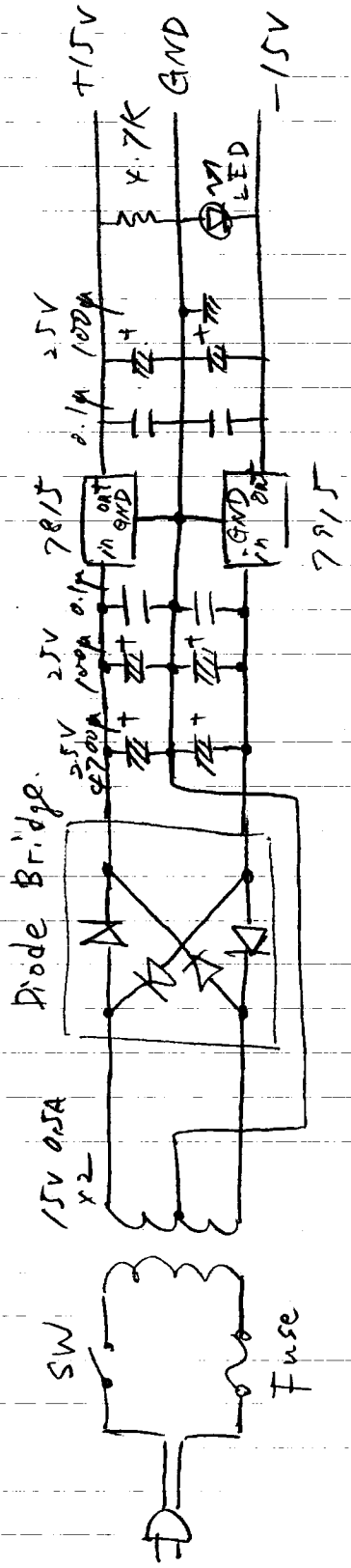


II. セットアップ



II. 回路图

(i) 定电压回路



(ii) 検波器

一次位置検出用 PSD S3979

