

特別実験 I

重力波検出のための
レーザー干渉計における
反射鏡の共振防止のための
基礎実験

1990年 夏学期

91557 福間 浩

(共同実験者 小野田 勝)

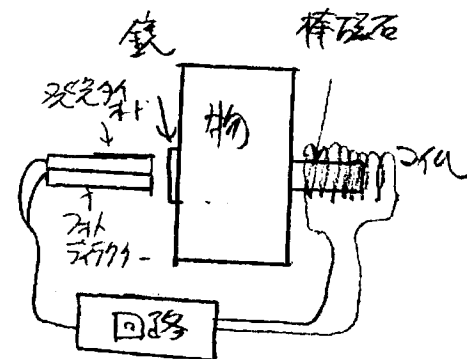
はじめに

今回の学生実験では、重力波検出のためのレーザー干渉計に使われる、自由質量の役割も兼ねる吊るされた鏡の共振を電氣的に防止するということをおこなった。

自由質量の役割のために、地面に固定することはできず吊るされる鏡であるが、それ故に今度は ちよとしたまっかけて大きく共振してしまうことになる。それでは、レーザー干渉計としての鏡の役割は果たせない。そこで、その鏡の共振のみをなるべくとてしまおうか、そのようなコントロールを、フォトセニサーとコイルを使った電磁石によるフィードバック系を作って実現することにした。

具体的には、鏡となる物の表面にフォトセニサー用の反射鏡をつけ、そのそばに、地面に固定されているフォトセニサーをとりつける。フォトセニサーは、発光ダイオードおよびフォトディテクターによる。

発光ダイオードの光が鏡に反射され、フォトディテクターで受光され、得られた信号は回路を通して、物件の反対側につけられた棒磁石を取り囲むコイルに流れて、磁氣的な力が物件にフィードバックされるようにシステムを組み立てた。



まず、最初は、1自由度モデルとして 改造てんびんの制御を試みた。

1. てんびんを用いた 1自由度系の制動

この実験では、1自由度系の調和振動を臨界減衰させることも実現するための材料として てんびんを(調和振動のQ値がでるだけ上がるように)改造したものをを用いた。

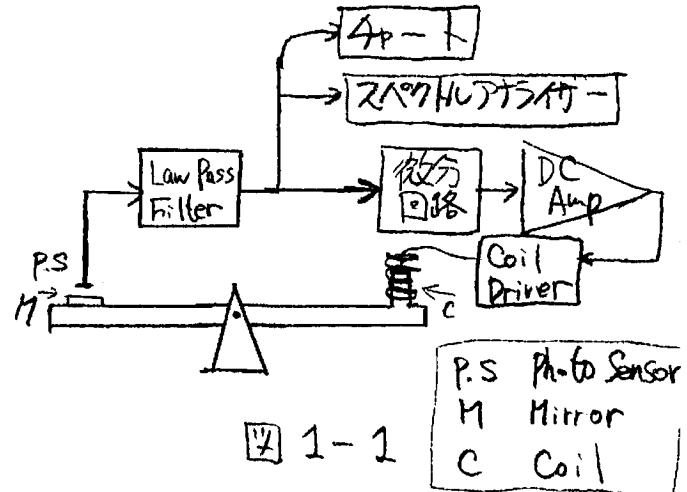


図 1-1 のように、てんびんの両腕の片方に鏡、もう片方に棒磁石をつけ、

鏡に向かては、発光ダイオードとフォトダイオードを用いたフォトセンサーを設置して、棒磁石のまわりはコイルでとり囲んだ。発光ダイオードから出た光が鏡で反射されてフォトダイオードに感受される光の強さによって、

実験室に固定されたフォトセンサーとてんびんの腕に固定された鏡の距離がわか、その時間変化によっててんびんの腕の調和振動の様子がわかる。この振動も臨界減衰させるためには、フォトセンサーで得られた信号も適当に電気回路で変換させ、てんびんのもう一方の腕におかれた棒磁石をとり囲むコイルにその電流を流して、てんびんに電磁気的な力も加えることで実現させようとした。結果的には、その電気回路としては、増幅器等を除くと、抵抗RとコンデンサCを用いた単純な微分回路だけを使ってでも、 $\tau = RC$ の値さえうまく選べば、減衰振動が実現できることがわかった。

1-1 自由振動の Q 値の測定

力を加えないときの調和振動の Q 値の測定をした。

一般の調和振動について考えてみる。質量の質量を m 、基準点からの変位を x 、振動の角周波数を ω 、 Q を Q 値とすれば

$$m(\ddot{x} + \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2 x) = 0 \quad (1.1)$$

となる。これより、

$$x \propto e^{(-\frac{\omega}{2Q} \pm \sqrt{\omega^2(1-4Q^2)})t} \quad (1.2)$$

となるが、 $Q > \frac{1}{2}$ を考えると、減衰項は $e^{-\frac{\omega}{2Q}t}$ となる。

従って、振動の振幅の時間変化を測定すれば、 Q が求まることになる。

ペンビンの腕の調和振動についても同様なことが言え、フォトセナードで得られた信号の振幅の時間変化をみれば、 Q 値が求まることになる。

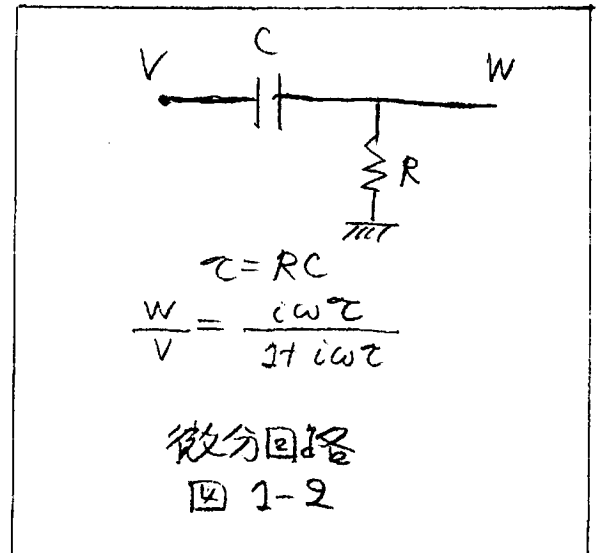
このために、フォトセナードからの信号をカーブに記録し、振幅の変化をのさいで測った。

実際には、測定する度ごとに Q 値が何十パーセントも変化し、 Q 値の決定は難しかったが、ある実験では $Q=41.9$ という値が得られ、他のものもこのまわりにあるものが多かった。

Q 値が何十パーセントも変化するのは、ペンビンを完全に自由振動できずに、様々なところで摩擦をおこしたり、 ω もそれがいつも一定ではないことによるものと思われる。

1-2 臨界減衰のための微分回路の時定数の決定

臨界減衰もするよな微分回路の時定数 $\tau = RC$ を決定しなけねならない。そのためには、適当な τ をあらかじめ仮定して、それを使って電磁石による減衰振動を求め、その Q 値をばかり、次に、この結果を用いて $\tau = \frac{1}{2Q}$ (臨界減衰) とするよな τ を逆算するという方法を用いた。



その際、Coil Driverに通す電圧の強さを 5 倍, 10 倍, 50 倍, 100 倍 という 4 つの段階に増幅させ、それぞれの増幅率でどのよな τ がよいかを決めることとした。最終的には増幅率 100 倍を用いた。具体的に示すと次のようになる。

外力を加えたときの減衰調和振動の方程式は、

$$m(\ddot{x}(t) + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t)) = f(x(t)) \quad (1.3)$$

それぞれの項をフーリエ変換すると、

$$m(-\omega^2 + \frac{i\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \tilde{x}(\omega) = F(\tilde{x}(\omega)) \quad (1.4)$$

ただし、 $F(\tilde{x}(\omega))$ は、微分回路および増幅器によつて (例定数 τ を用いて

$$F(\tilde{x}(\omega)) = -\frac{i\omega\tau}{1 + i\omega\tau} d\theta \tilde{x}(\omega) \quad (1.5)$$

とかける。

(1.5)と(1.4)に代入して整理すると、

$$-\omega^2 + i \left(\frac{\omega \omega_0}{Q} + \frac{\omega \tau}{(1+\omega^2 \tau^2)} \frac{\alpha}{m} G \right) + \omega_0^2 + \frac{\omega^2 \tau^2}{1+\omega^2 \tau^2} \frac{\alpha}{m} G = 0 \quad (1.6)$$

ここで $\omega \approx \omega_0$ と近似して、

$$-\omega^2 + i \omega \omega_0 \left(\frac{1}{Q} + \frac{\tau}{(1+\omega_0^2 \tau^2)} \frac{\alpha}{m} G \right) + \omega_0^2 \left(1 + \frac{\tau^2}{1+\omega_0^2 \tau^2} \frac{\alpha}{m} G \right) = 0 \quad (1.7)$$

とすれば、 $\frac{1}{Q'} = \frac{1}{Q} + \frac{\alpha G}{m} \cdot \frac{\tau}{\omega_0 (1+\omega_0^2 \tau^2)}$ (1.8)

$$\omega_0' = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\tau^2}{1+\omega_0^2 \tau^2} \frac{\alpha}{m} G} \quad (1.9)$$

とおきかえれば (1.7)は、

$$-\omega^2 + i \frac{\omega \omega_0}{Q'} + \omega_0'^2 = 0 \quad (1.10)$$

となる。外力を加えないときの調和振動の式(2.1)をフーリエ変換した式に近しい形となる。実際に外力を加えたとき得られるQ値は、 Q' であり、外力を加えないときのQ値と後に実験に用いたときの値とを併用して、(1.8)式は、

$$\frac{\alpha}{m} = \frac{1}{G} \left(\frac{1}{Q'} - \frac{1}{Q} \right) (1 + \omega_0^2 \tau^2) \frac{\omega_0}{\tau} \quad (1.11)$$

より α/m を得られる。

次に、臨界減衰のための時定数 τ の決定には、(1.11)式で、

$$Q' = \frac{1}{2} \text{ として 逆に}$$

$$\tau = \frac{\frac{\alpha}{m} \frac{G}{\omega_0} \pm \sqrt{\left(\frac{\alpha}{m} \right)^2 \frac{G^2}{\omega_0^2} - 4\omega_0^2 \left(2 - \frac{1}{Q} \right)^2}}{2\omega_0^2 \left(2 - \frac{1}{Q} \right)} \quad (1.12)$$

とすれば 求まる。

実験では、与りあえず $\tau = 2 \text{ msec}$ と決めて Q 値をはかると、
次のような結果を得られた。(ある実験の結果)

増幅率 G	測定した Q 値 Q	α/m	臨界減衰のための その値 (msec)
0	42		
5	36	0.93	—
10	26	1.73	—
50	11	1.59	60
100	10	0.84	57

ただし、 $T = 2.65 \text{ sec}$ ($\omega_0 = 2.37 \text{ rad/s}$)

表 1-1

臨界減衰のためのその値の欄で — となっているのは、式 (1.12) の
 $\sqrt{\quad}$ の中身が負となり計算できなかったことを示す。

本来なら α/m は一定であるべきかもしれないが、比例係数 α が G に
依存するかもしれない。あるいは、 Q の測定の誤差 (実験によって
何パーセントもかわる) によるか、 G によってバラバラになっている。

1-3 臨界減衰振動の検証

1-2の結果から、最終的には、 $Q=100$ で $\tau =$ μsec として、装置もセッティングした。

これにより、実際に臨界減衰が実現しているかを検証しなければならぬが、 τ の時間変化を記録してその振幅より Q 値を求めるとは Q があまりに小さく無理である。

従って、 Q 値は直接測定せず、アクセンサからの信号をスペクトルアナライザーにかけて、減衰させたときと させないときの差をみることで、どれだけの減衰の効果があるか調べることにした。
その結果は別紙 Fig.4 とおかれたものである。

4つのグラフのどれも横軸は振動の周波数 (Hz)、縦軸は、アクセンサからの信号の強さ (Volt) を対数目盛でとっている。

Gain 0 とおかれたものも、減衰の外力を与えなかったもので、Gain 10, 30 と、したいに外力を増し、Gain 100 で臨界減衰になっているはずである。
Gain 0 では 0.4 Hz 付近にあって鋭いスペクトルが、Gain が増すにつれて次第に消えていっている様子がわかる。

アクセンサの腕の固有振動が消去でき、フィードバックにより共振を抑制させていることがわかった。

2 円筒形の自由質点の制動

てんびんを用いた1自由度系の
 実験結果をふまえて、次に
 実際の自由質点をかねた反射鏡
 に近い模型として 図2-1のような
 円筒形の物体を 4本のワイヤで
 つり、この系の調和振動と臨界
 減衰状態にする実験をおこなった。

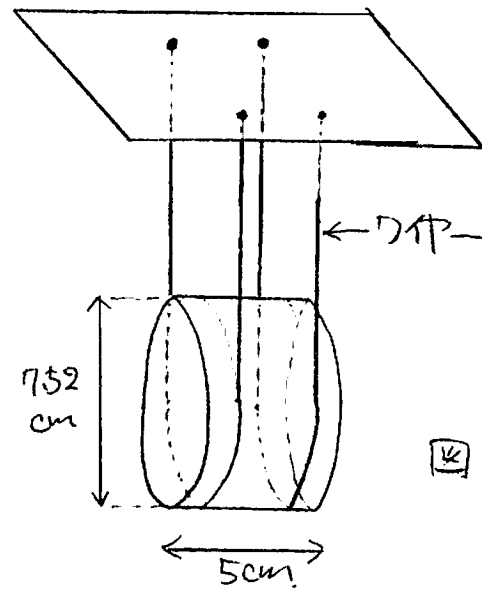
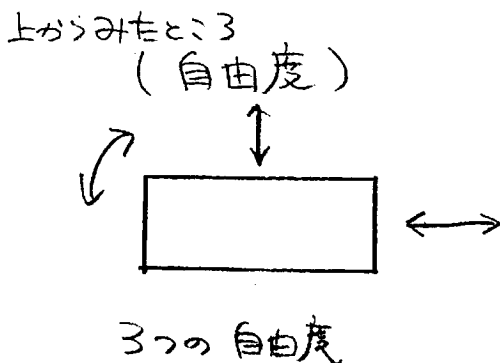


図2-1

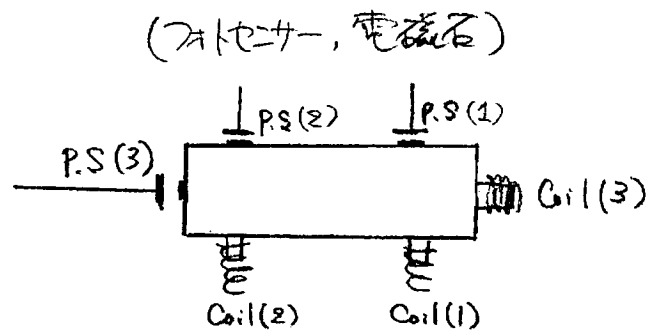
てんびんとは異なり、自由度は増える。自由質点としての性質と扱えない
 ようになるにも考え合わせて、4本吊りにした。その結果自由度は、
 前後左右のゆれと回転軸の鉛直方向の回転の3つで、それぞれに
 固有振動があることがわかった。(図2-2(a))

この3自由度の固定のためには、3組のフォトセナー、電磁石を
 使った。(図2-2(b)) また、真空槽中で実験をおこなった。



3つの自由度

図2-2(a)



P.S.はフォトセナー、P.S.とCoil.番号は対応

図2-2(b)

2-1 固有振動

この系の固有振動を考えてみる。

固有振動には、図2-4

のような、2種類のもの

がある。ただし(a)には、

2つの方向があるので、全部で

3つあることになる。(a)と(b)も

ともに平衡点がずれることにより、

ワヤ-により物体がわずかに

上昇し、その位置エネルギーに

よって、復元力が働き、振動

が起きると考えてよい。

実際に計算してみると、

(a)の方は最も簡単な近似で

ぶらぶらの振り子の運動と

同等となり、周期は $T_a = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}$ となる。

$g = 980 \text{ cm/sec}^2$ $h = 31 \text{ cm}$ とすれば $T_a = 1.117 \text{ (s)}$, 振動数 $f = 0.89 \text{ Hz}$

となる。一方、(b)の場合は複雑で $T_b = 2\pi \sqrt{\frac{h(\frac{e'^2}{3} + \frac{a^2}{3})}{2b^2}}$

ただし、 $e' = \frac{e}{2} = 2.5 \text{ cm}$, $b^2 = a^2 + (\frac{d}{2})^2 = 18.1 \text{ cm}^2$

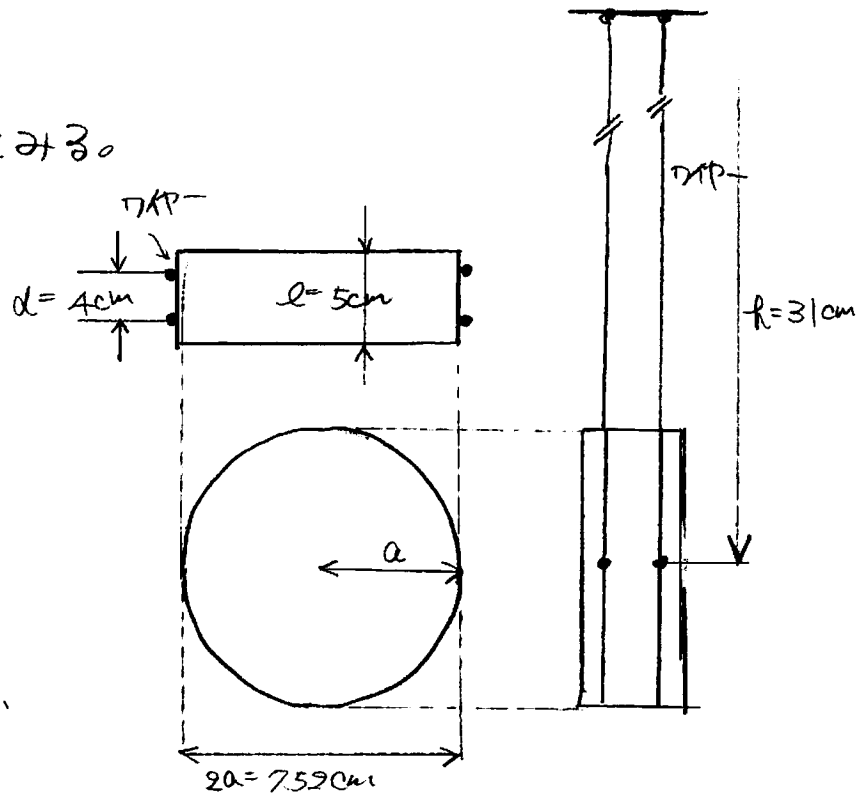


図2-3

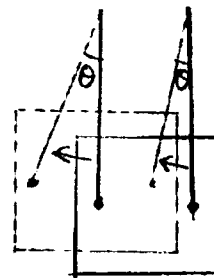


図2-4(a)

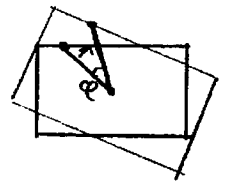


図2-4(b)

となり、実際に値を代入すると、

$$T_b = 0.80 \text{ sec}, \quad f = 1.25 \text{ Hz}$$

となった。(しかしこれは近似のしかたで他の答になることもある。

後でおこなうスペクトルアナライザによる分析では、(a)の方は
きれいにでてくるが、(b)の方はよくわからなかった。

2-2 臨界減衰の実現

この実験では、自由度が3つに増えただけで、基本的には
てんびんを用いた実験とかわりなかった。また、フレタバに対するときの
増幅率については、今回は電氣的ノイズを減らすために $Q=5\sim 10$
と、比較的低いもので実現できるようにセも選ぶことになった。

フレタによる Q 値の測定が臨界減衰の可能なまでの決定まで
は、てんびんと同じなのでここは省略する。実験において Q 値が激しく
変化することも同じであった。なお、フレタセンサーコイル組については、

図2-5のように CH1, CH2, CH3で区別した。

なお、CH1, CH2, CH3は

周期 $T = 1.125 \text{ sec}$

$f = 0.89 \text{ Hz}$ となった、

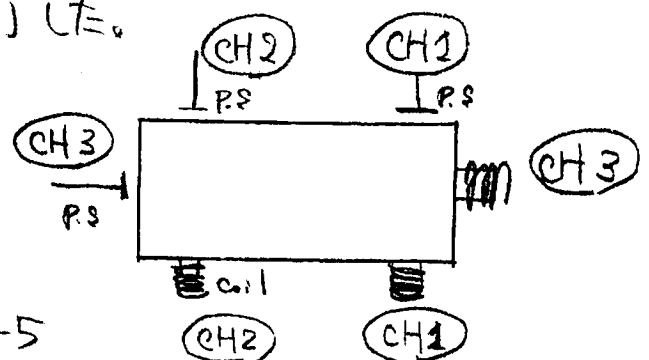


図2-5

また、ダンピングさせないとき ($G=0$) は、

CH1 については Q 値 $Q = 189.7$

CH3 については $Q = 178.0$

という値が得られた。

ここでは特に CH3 についての τ の値から決定する一例を
表にしてみる。

増幅率 G	Q 値 Q	α/m	臨界減衰 のための ($msec.$)	実験は真空内 $P = 50 \times 10^{-3} Torr$ $T = 1.125 sec$ は(めの $\tau = 0.38 msec$
0	178.0			
5	75.6	22.4	—	
10	48.6	22.0	55.5	
50	12.5	21.7	10.2	
100	6.7	21.1	5.28	

実際のセットでは G および τ を

表 2.2 のように決めたもので

臨界減衰するようにした。

CH	G	τ ($msec.$)
1	5	38
2	5	38
3	10	56

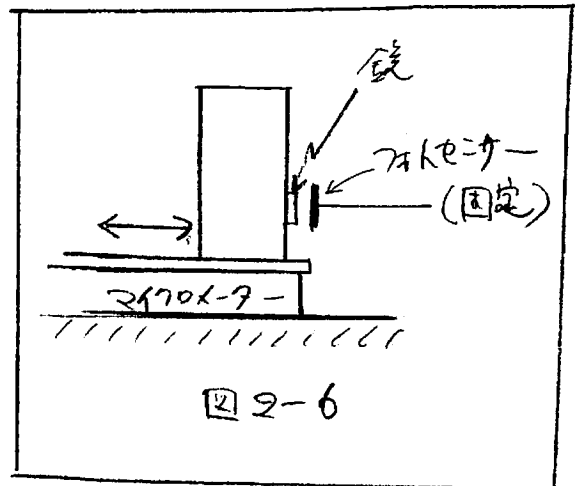
2-3 フォトセンサーの信号も変位に換算する。

減衰の様子をスペクトルアナライザーで分析することになるが、我々の知りたいのは、フォトセンサーから得られる電圧ではなく、実際の変位である。

そこで、物体に取り付けられた鏡とフォトセンサーとの距離をマイクロメーター上で固定し、受光の電圧と距離の関係と求めて、スペクトルアナライザーで求められた電圧も変位に換算しなおさなければならない。

その結果は別紙 Fig 9 上にある。

No. 1 とあるのは、CH1 のフォトセンサーについて、No. 2 とあるのは、CH3 のフォトセンサーについてである。



左側はその全体像も、右側は、その中で実際に使う範囲を示してある。

これからわかるように、実際使う範囲のときは、変位と電圧は比例関係があるので、電圧と変位の換算も容易である。

変位を δx 、電圧を δV とすれば、この図の仮定を $\frac{dV}{dx}$ として

$$\delta x = - \frac{\delta V}{\frac{dV}{dx}} = \frac{\delta V}{\left| \frac{dV}{dx} \right|}$$

とすればよい。スペクトルアナライザーで得られた信号も変位に換算する

ときには、更に、スペクトルアナライザーの出力の信号バンド幅の平均値で割らなければならない。

2.4 スペクトル アナライザー による検証

この場合と同様に臨界減衰しているかどうかをスペクトルアナライザーで検証した。結果は別紙 Fig 1, 2, 5, 6, 7にある。なお、縦軸は、2-3で説明したようにデータの変位(単位 m)に変換され、対数目盛でとられている。

また、スペクトルアナライザーにデータを取りこむに何回かくり返して平均をとることになっているが、すべて16回平均である。

実験は真空槽中でおこなったが、その真空度は $35 \sim 26 \times 10^{-3} \text{ Torr}$ の範囲である。

Fig. 1 Fig 1は、ダンピングをかけたときのスペクトルである。

CH1, CH2, CH3とも 0.9 Hz 付近に固有振動がみられた。また、その他にもいろいろとスペクトルが見えかかっているが、それらについてはあまり特定できなかった。

Fig. 2 Fig 2は、臨界減衰になるはずである。Fig 1と比べて 0.9 Hz 付近の突起は消えており、それは成功である。

Fig 1の山の頂上は 10^{-5} m 程度の $10 \mu\text{m}$ の振幅もあること示しているが、Fig 2ではせいぜい $10^{-7} \text{ m} (= 100 \text{ nm})$ に入っており、 $10^{-6} \text{ m} (= 1 \mu\text{m})$ 以下になっている。

Fig 3. これまでみてきたのは、対象物の振動の振幅だけをみてきたが、実際には、測定系の電気雑音も相当ふくまれているはずである。そこで、物体とセンサーの距離を固定してスペクトルをとってみると、この図のような結果が得られた。

これと Fig 2 とを比較してみると、固有振動の 0.9Hz 付近では、ほぼ「変位が電気ノイズ」程度までおさていることがわかった。

Fig 5 設計上は CH1, CH2 が増幅率 $G=5$, CH3 が $G=10$ で臨界減衰するはずであるが、その増幅率の組み合わせをいろいろかえてどのようになるかを実際に実験してみた。

この Fig 5 では、CH1 についてスペクトルをとっている。

これよりわかったことは、CH3 で臨界減衰させても CH1 には全く影響のないことをはじめとして、CH1, 2, 3 ともに臨界減衰させておくと、CH1 は、うまく臨界減衰状態を示さないことである。

また、臨界減衰以上に増幅すると、もともと固有振動付近では、電気雑音以下まで変位が小さくなるように見える現象が、周波数が増えると、たまたま振幅が大きくなる途中 (4Hz 弱) で急に落ち込む現象が出ることもわかった。

Fig 6, 7 Fig 6, 7 では、CH1 についてと同様なことを CH3 でみたことを示している。Fig 5 で述べたことと同様なことがいえる。

2-5 2つの問題点

(1) 電気雑音の、スペクトルが小さくなる現象

2.4でみた中で、増幅率と臨界減衰のために決めたもの以上にあげると、電気雑音のレベルがスペクトルが小さくなる現象があった。実際に変位が小さくなっているのだろうか？

実際は そうではない。我々が作った電気回路では、得られた信号の振幅をなるべくなくそうというフィードバックをコイルに与えるように作られているが、そのもとの信号は、実際の変位だけでなく、電気回路の生じる雑音も拾っていることになる。従って、信号の振幅を減らすフィードバックをすれば、変位+雑音の振幅が減るわけであり、実際の変位が小さくなっているかどうかはわからないことになる。

実際の変位を調べるには、電気回路のノイズを減らすか、あるいは、別の方法、たとえば実際にレーザー光を使ってはかる必要がある。

(2) 周波数の増加と変位の関係

Fig 5 でよくわかるように、約 4Hz の付近で急にスペクトルがおち込む現象があることがわかった。これについて考えてみる。

図 2-7 のような一極的なフィードバック系を考えてみる。

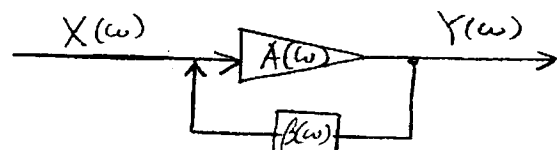


図 2.7

このフィードバック系では、
$$Y(\omega) = \frac{A(\omega)}{1 + \beta(\omega)A(\omega)} X(\omega)$$

となる、伝達関数 $A_S(\omega) = \frac{A(\omega)}{1 + \beta(\omega)A(\omega)}$ とする。

今回の実験でもこのフィードバック系と同じようなフィードバックとさせたと考えられ、その中で $A(\omega)$ や $\beta(\omega)$ による位相をおくせたと考える。そこで $A(\omega) = a e^{i\omega\theta_1}$, $\beta(\omega)A(\omega) = b e^{i\omega\theta_2}$ というようにおく。(a, b は実数とする)

$$A_S(\omega) = \frac{a e^{i\omega\theta_1}}{1 + b e^{i\omega\theta_2}}$$

ここで、ひとりの例として $a=1$, $b=1.5$, $\theta_1=-1$, $\theta_2=-1.2$ のようにおくと、別紙 Fig 8 のような形のスペクトルが予測される。おろしく、問題のスペクトルのおおむね形状は、これで説明がつくものとおもわれる。

まとめ

今回の実験は、つるされた鏡の共振を防止するという
ことであった。共振を防ぐという点については成功したと
思われる。しかし、レーザー干渉計で必要とさせる精度には
ほど遠い。実際には、鏡を完全に固定するのではなく、
あとは、残ったゆれを別のセンサーで検出することも必要である。

今回は、電気雑音については、かなりいなか減に扱ったが、
こうした高い精度が要求される実験では、電気回路の工夫が
必要である。そうすれば、もう少しは、揺れのレベルを下げる、とか
できたかも知れない。

ともあれ、 μm のオーダー以下に振動をおさえたことが事実であれば、
今回の実験は有意義であったといえるのではないかと。

FIG - 1 without Damping

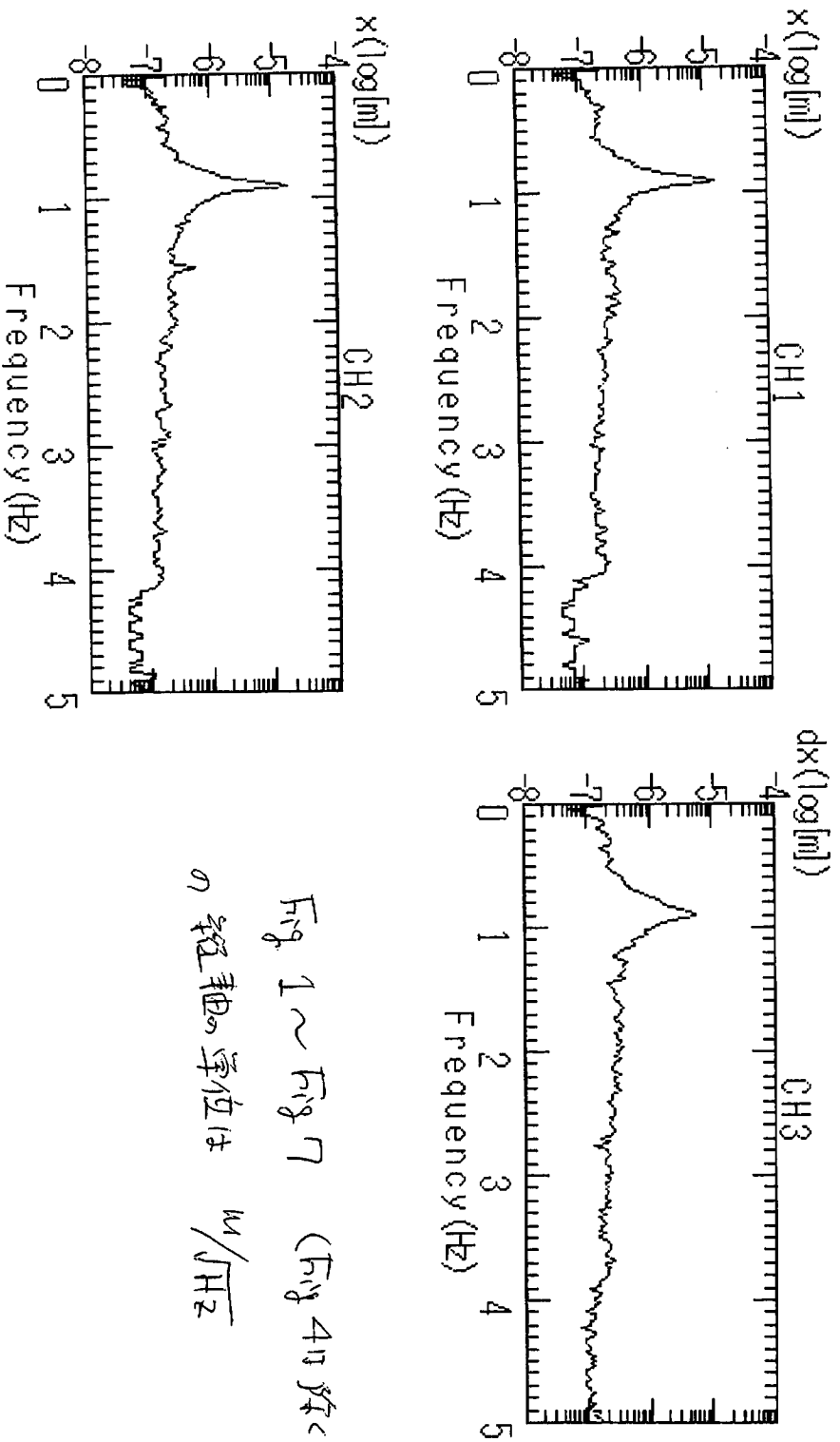


Fig 1 ~ Fig 7 (Fig 4n 迄)
 の縦軸単位は $\omega/\sqrt{\text{Hz}}$

FIG. 2 Critical Damping

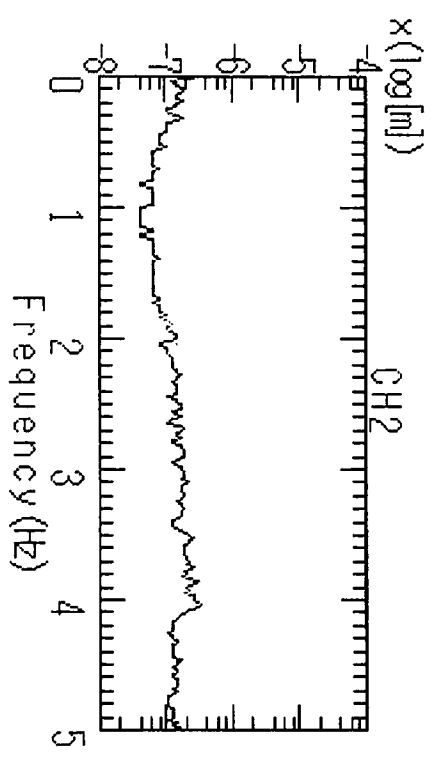
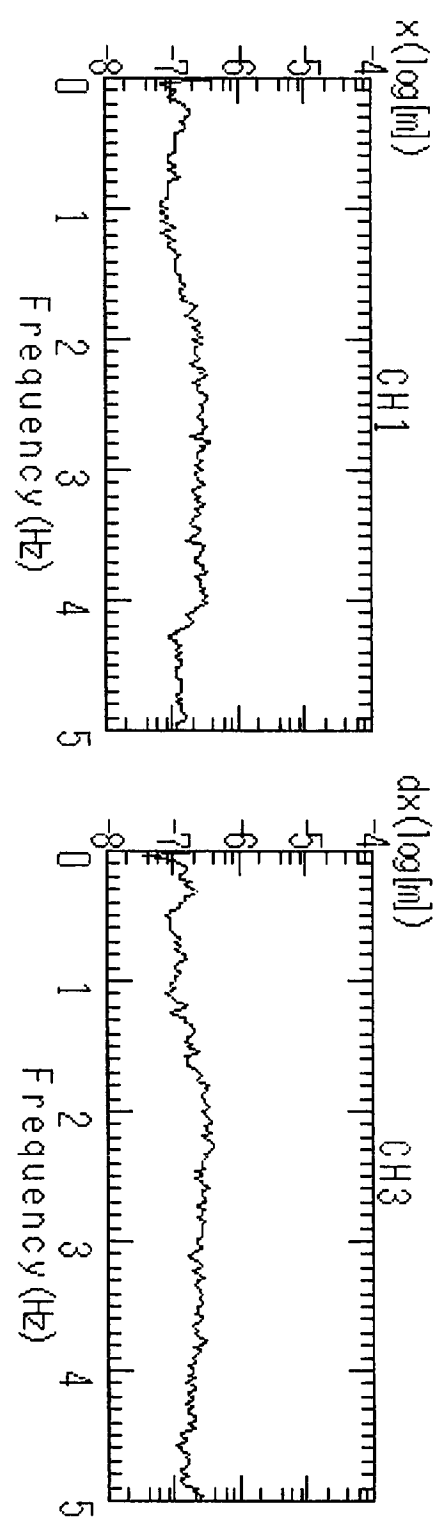


Fig. 3 Electric Noise

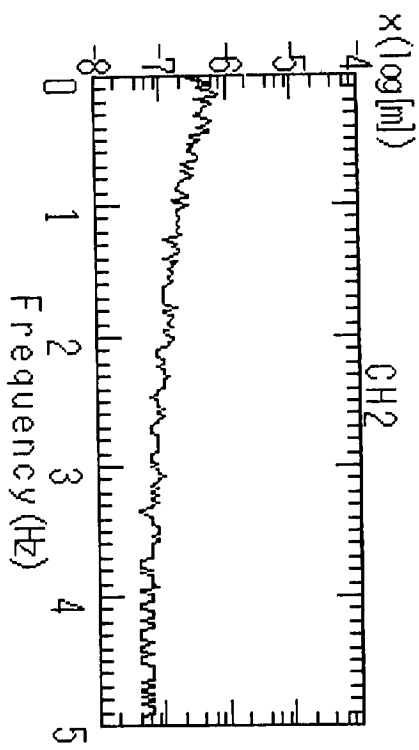
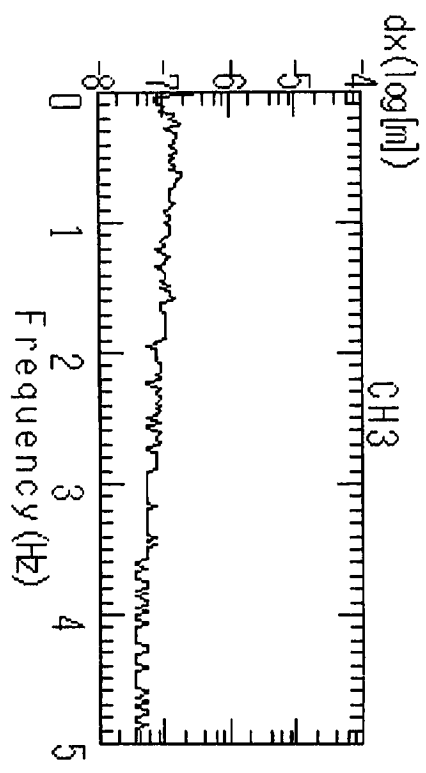
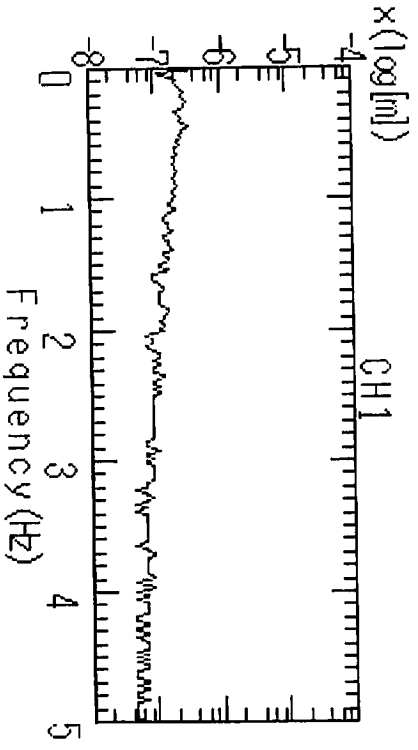


FIG. 4 10 (balance)

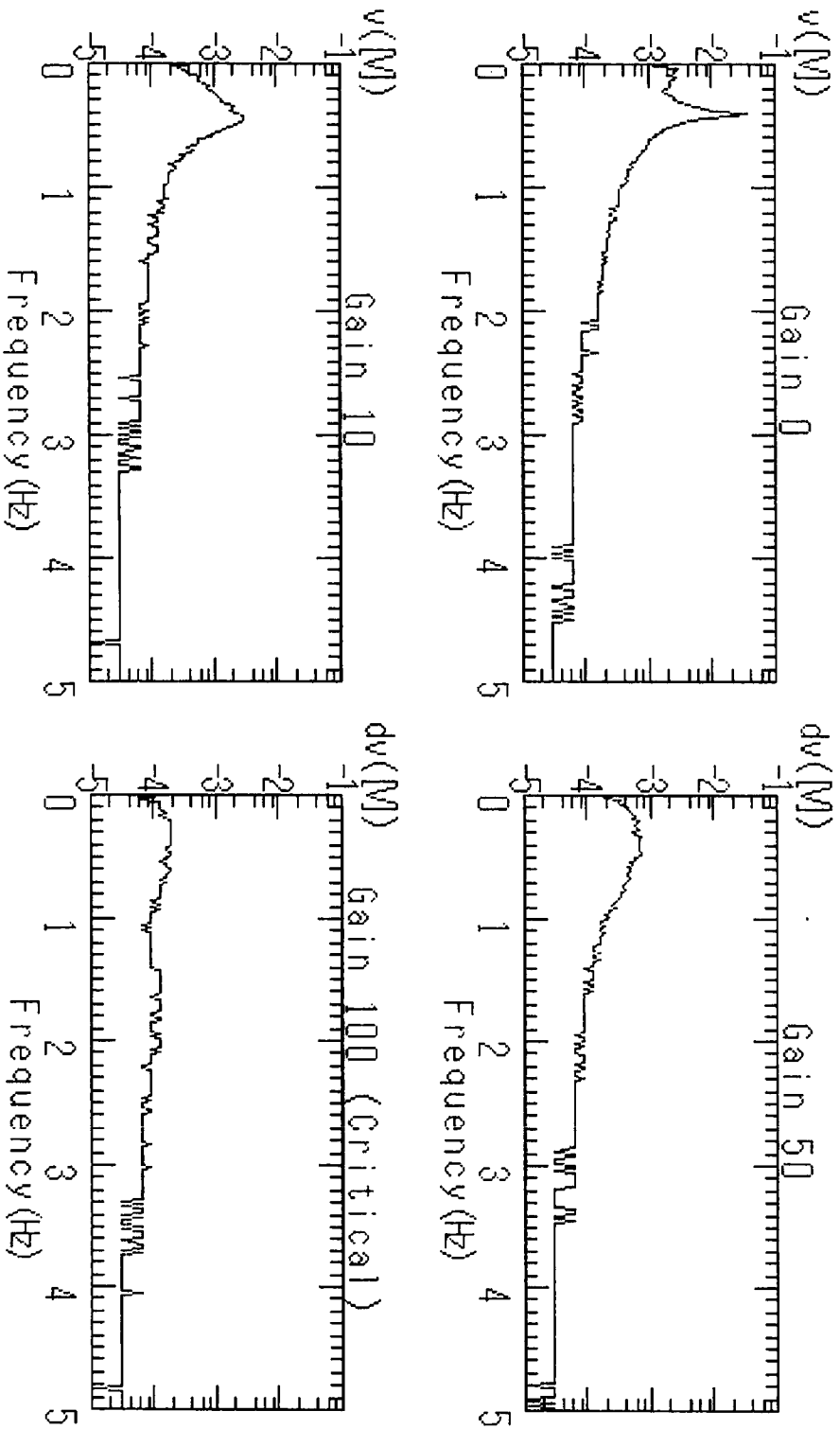


FIG. 5 CH1 Dr 1 - Dr 2 - Dr 3

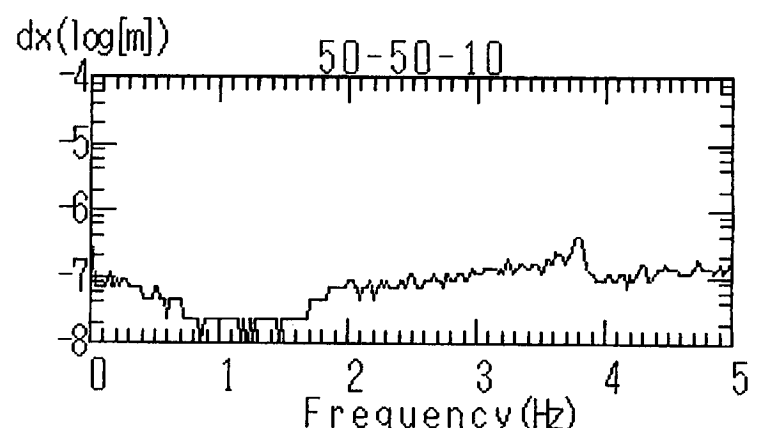
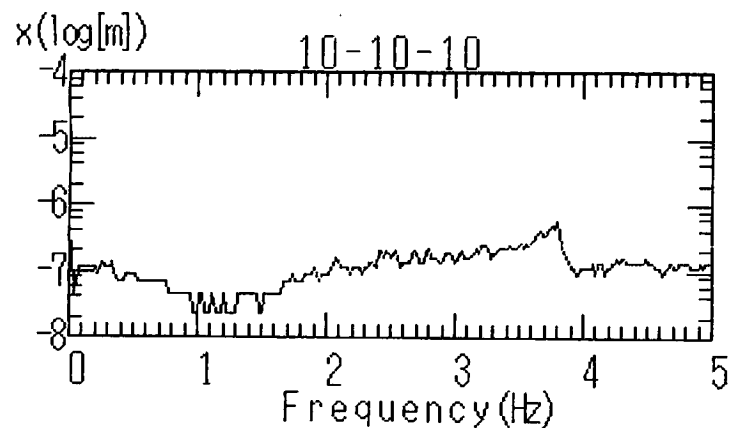
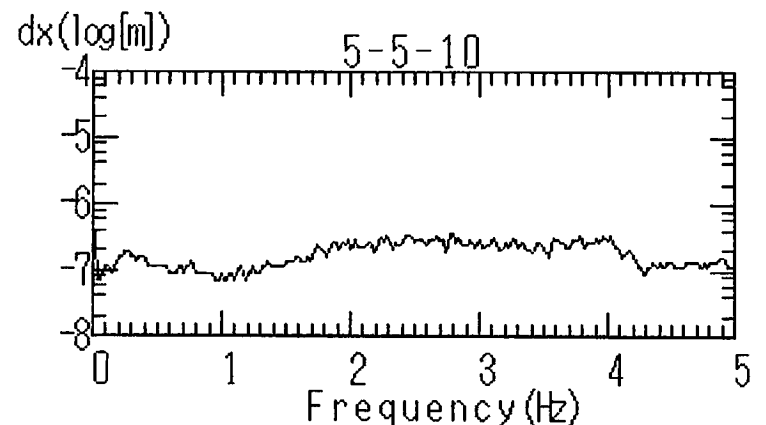
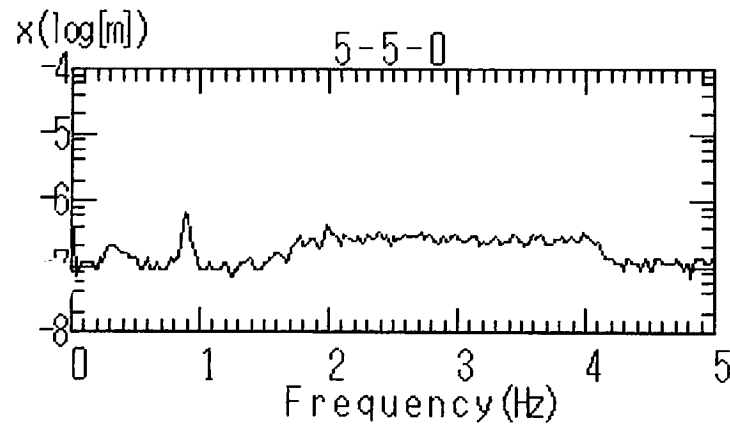
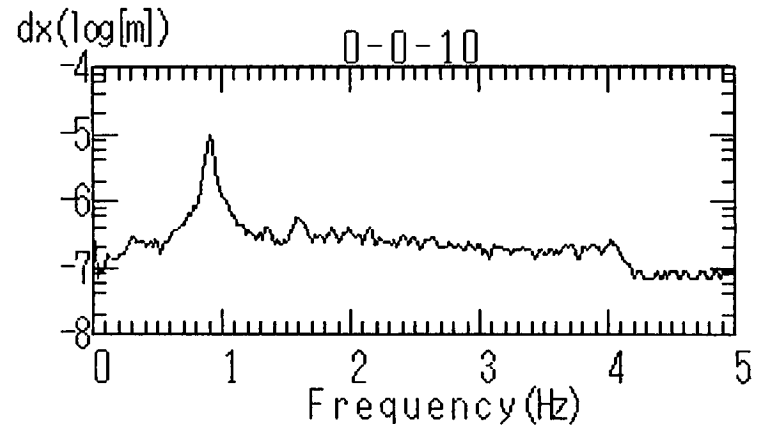
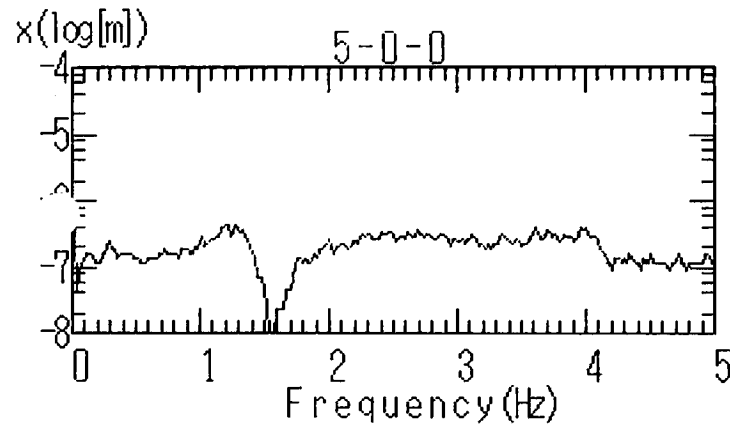
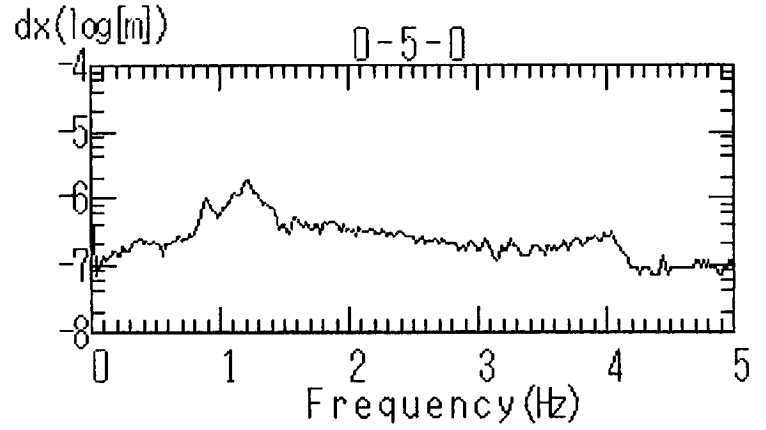
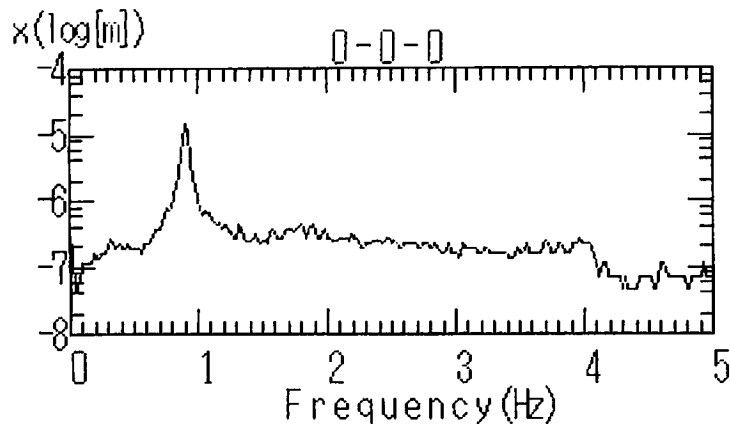


FIG. 6 CH3 Dr1 - Dr2 - Dr - 3

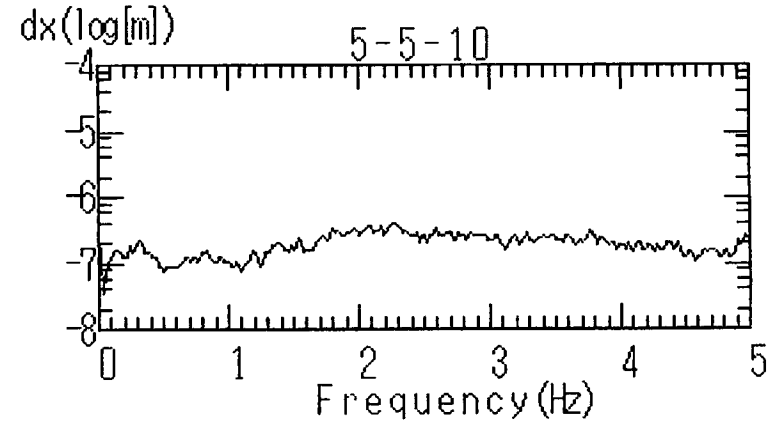
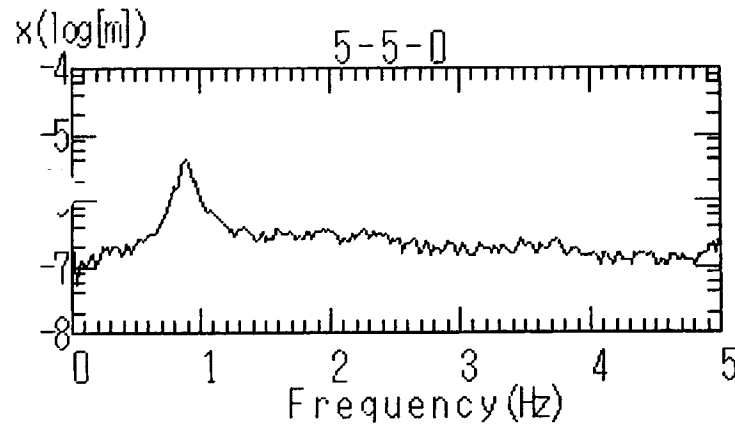
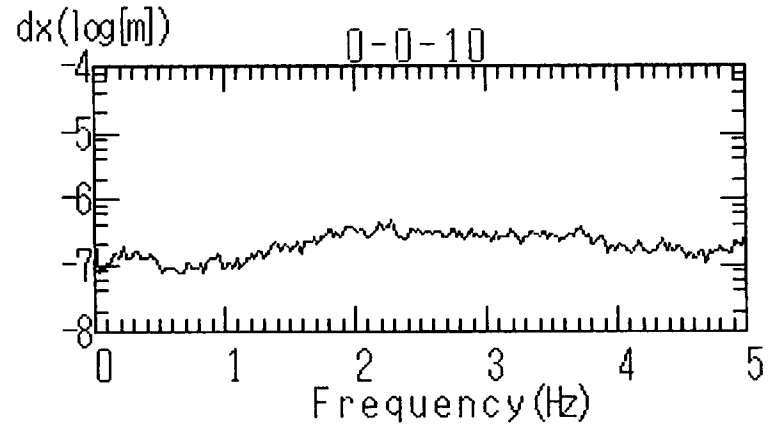
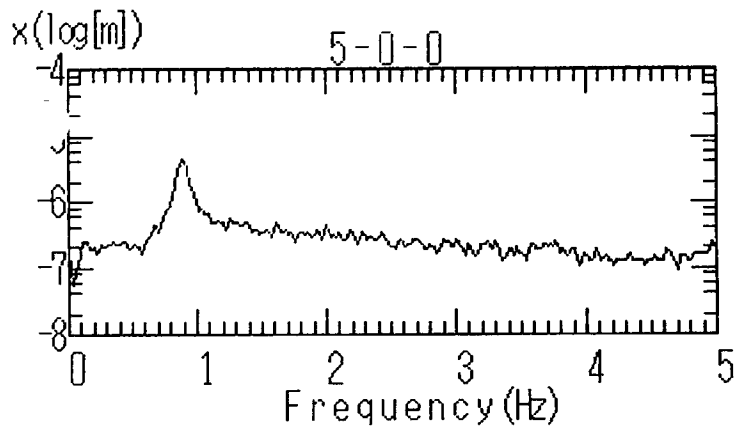
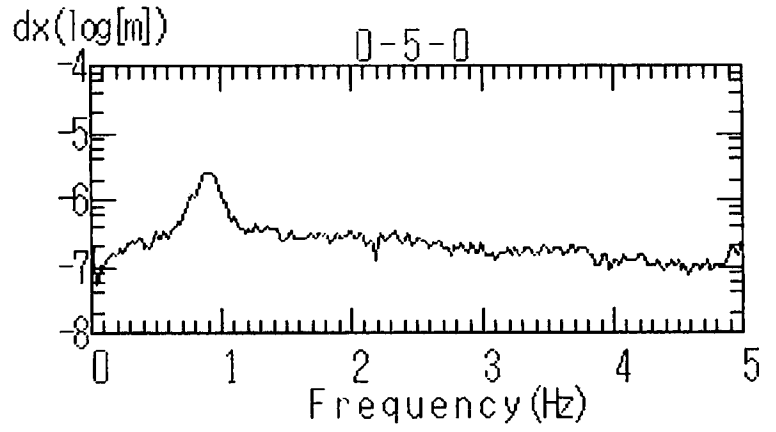
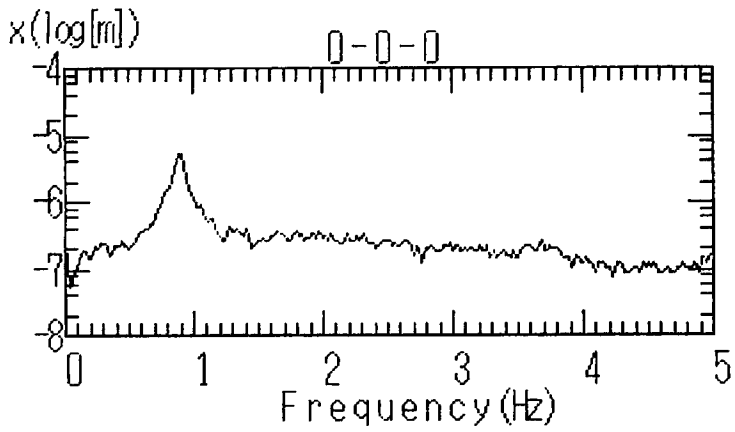


FIG. 7 CH3 Drive 3 depending

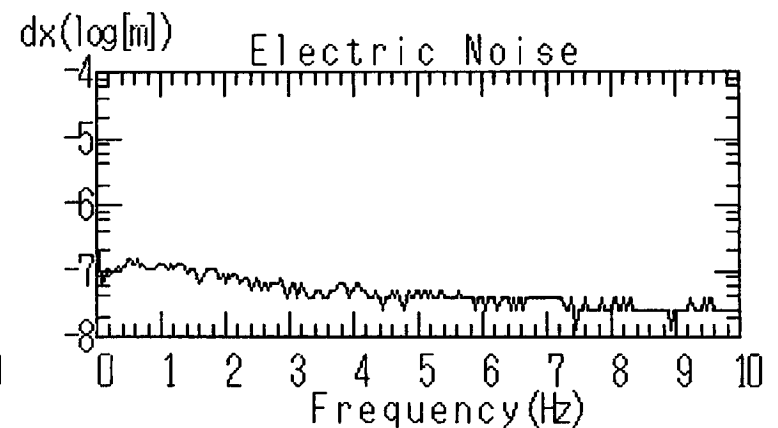
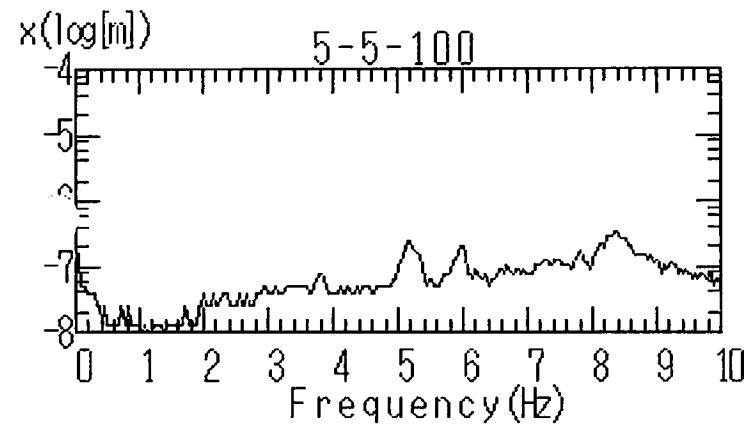
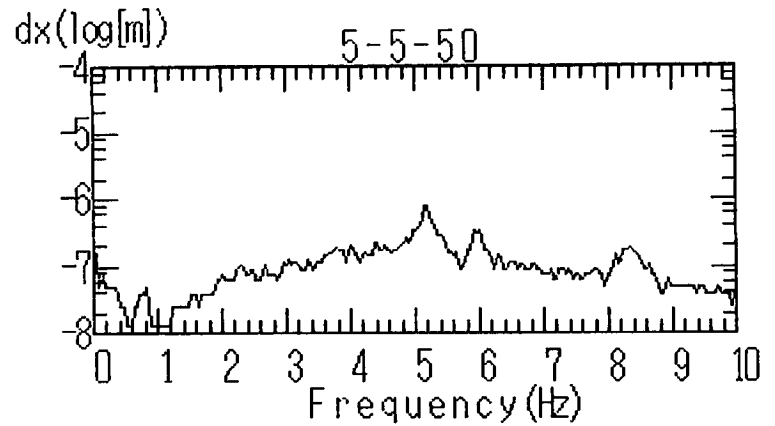
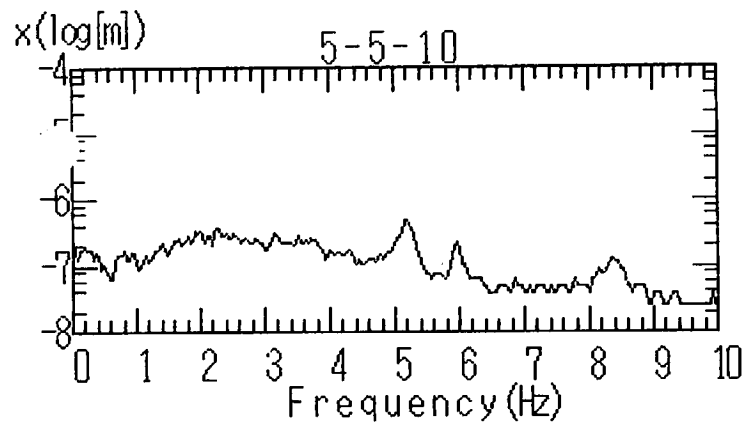
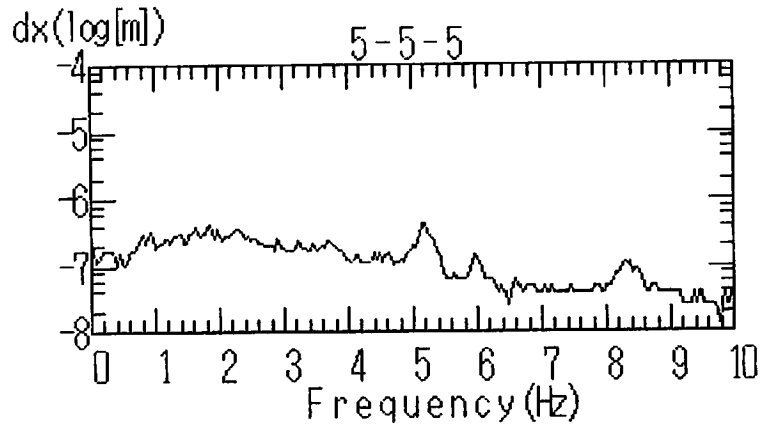
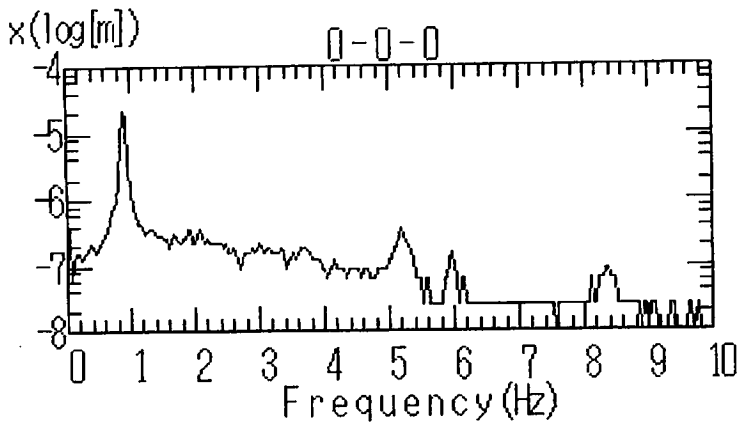


Fig 8 The Effect of Phase Delay

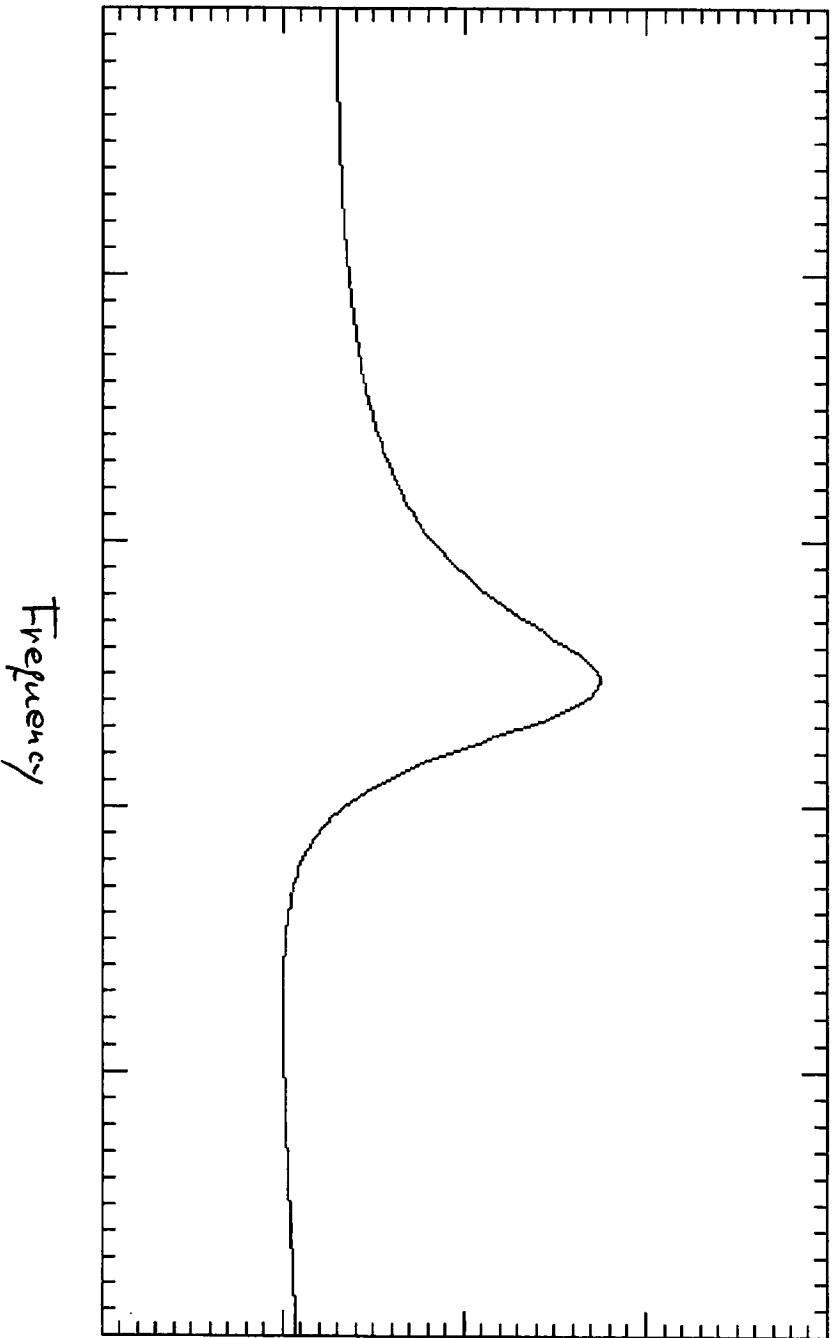


FIG. 9

