

## 修士論文

# 干渉計型重力波検出器における光学機械相互作用と 光の空間モードの揺らぎについて

東京大学理学系研究科  
物理学専攻 35-156023  
榎本 雄太郎

2017年1月5日第1版提出  
同31日最終版提出



---

## 要旨

人類初の重力波の直接検出がなされた現在、重力波でしか得られないような天文学的・宇宙論的情報をさらに豊富に得るため、また強重力における重力理論の検証を行うため、重力波検出器の感度や安定度を向上させる研究が求められている。現在の主流の検出器は干渉計型重力波検出器と呼ばれ、Michelson 干渉計を基本としたレーザー干渉計によって鏡間の距離の変化を測ることで重力波を検出する手法を採っているため、干渉計型重力波検出器の感度や安定度にはレーザー光と鏡の光学機械相互作用が密接に関わっている。具体的には、電磁場の量子揺らぎと鏡の運動の相互作用を正しく記述することで理解される量子雑音は、地球上の大型検出器においてほとんどの観測周波数帯で設計感度を制限し、光の輻射圧によって生じる Sidles-Sigg 効果と呼ばれるトルクは、鏡の姿勢に不安定性を引き起こし、鏡の基材の弾性モードが光学機械相互作用で増幅されてしまうパラメトリック不安定性は、高パワーのレーザー光の使用を困難にし感度向上を妨げる。

そこで本研究では干渉計型重力波検出器における光学機械相互作用をより良く理解するために、光共振器における一般の光の空間モードと一般の鏡の運動モードに対して記述し、さらにこの一般論を具体的な現象に適用することで干渉計型重力波検出器の量子雑音、Sidles-Sigg 効果、パラメトリック不安定性を再導出し、これらの現象に統一的な見方を与えた。またこの統一的な見方を利用して、鏡の回転運動の測定の量子雑音や鏡の弾性モードの測定の量子雑音、光の高次空間モードの量子揺らぎのポンデロモーティブスキューイングといったこれまで見過ごされてきた事象を明らかにした。とくに回転運動の測定では、鏡での反射から測定までの Gouy 位相シフトがホモダイン位相の役割を果たすこと、弾性モードの測定では、光共振器からの反射光の揺らぎが鏡の運動モードの量子揺らぎによって置き換わることがあり、そのような場合には量子雑音が 0 になりうるという特異な振る舞いをすることを初めて示した。



# 目次

図目次	iii
表目次	iv
<b>第 1 章 はじめに</b>	<b>1</b>
<b>第 2 章 重力波</b>	<b>3</b>
2.1 重力波の導出	3
2.2 自由質点の運動	5
2.3 重力波の放射	6
<b>第 3 章 干渉計型重力波検出器</b>	<b>9</b>
3.1 基本原理	9
3.2 雑音源とその対策	11
3.3 干渉計の構成	13
<b>第 4 章 光の空間モード</b>	<b>17</b>
4.1 近軸近似と Hermite-Gaussian モード	17
4.2 Hermite-Gaussian モードの量子化	20
4.3 共振器と空間モード	23
4.4 基本モードと高次モードの干渉	26
<b>第 5 章 光学機械相互作用</b>	<b>29</b>
5.1 一般論	29
5.2 基本モード: 光ばねと量子雑音	37
5.3 1 次モード: 角度不安定性と回転運動測定	45
5.4 高次モード: PI と機械的振動子の量子状態の転写	57

---

<b>第 6 章</b>	<b>結論・展望</b>	67
6.1	本研究の結論 . . . . .	67
6.2	今後の展望 . . . . .	67
<b>補遺 A</b>	<b>パワースペクトル</b>	69
<b>補遺 B</b>	<b>Fabry–Perot 共振器</b>	71
B.1	様々な関係式 . . . . .	71
B.2	Fabry–Perot 共振器の固有モード . . . . .	74
<b>補遺 C</b>	<b>電磁場の量子状態</b>	77
C.1	真空状態 . . . . .	77
C.2	コヒーレント状態 . . . . .	77
C.3	スクイーズド状態 . . . . .	78
<b>補遺 D</b>	<b>QPD での測定の量子雑音</b>	81
D.1	量子雑音の表式 . . . . .	81
D.2	輻射圧雑音を無視した場合: 散乱雑音 . . . . .	83
D.3	散乱雑音の悪化 . . . . .	84
<b>補遺 E</b>	<b>機械的振動子のゼロ点振動</b>	85
E.1	準備 . . . . .	85
E.2	光学機械相互作用を含む場合 . . . . .	86
	<b>参考文献</b>	89
	<b>謝辞</b>	95

# 図目次

2.1	重力波による質点の潮汐的運動の模式図 . . . . .	6
3.1	Michelson 干渉計 . . . . .	9
3.2	実際の干渉計の構成の模式図 . . . . .	14
3.3	干渉計の構成と散乱雑音の変化 . . . . .	15
4.1	Hermite-Gaussian モードの電場の振幅 . . . . .	18
4.2	基本モードの波面 . . . . .	19
4.3	Fabry-Perot 共振器と固有モード . . . . .	24
4.4	空間モードの次数と共振の様子 . . . . .	25
4.5	ビームジッターをもつ基本モードの光の模式図 . . . . .	27
5.1	微小な変位がある鏡面での反射 . . . . .	31
5.2	共振器による電磁場の揺らぎの増幅 . . . . .	34
5.3	鏡の $n$ 番目の固有モードと $TEM_{lm}$ モードの相互作用 . . . . .	36
5.4	光ばねと光減衰を表す模式図 . . . . .	38
5.5	鏡の並進運動と共振器に入射する基本モードの相互作用 . . . . .	39
5.6	鏡の変位測定の量子雑音と SQL、SQL を超えての感度 . . . . .	41
5.8	鏡の回転運動と共振器に入射する 10 モードの相互作用 . . . . .	49
5.9	23 mg 軽量鏡と共振器の写真 . . . . .	52
5.10	回転運動の制御法概念図 . . . . .	53
5.11	回転運動の制御のブロック図 . . . . .	54
5.12	軽量鏡上の光の位置 $\delta r$ の測定法 . . . . .	55
5.13	回転運動の感受率 $\theta_E/T_E$ . . . . .	56
5.14	回転運動制御による不安定性の回避 . . . . .	57
5.15	PI と高次モードの共振 . . . . .	59

5.16	PI が起きた鏡のモードと光の空間モード . . . . .	59
5.17	鏡の運動モードと共振器に入射する $TEM_{lm}$ モードの相互作用 . . . . .	61
5.18	鏡の弾性モード測定の量子雑音 . . . . .	62
5.19	反射光の高次モードの量子揺らぎのパワースペクトル . . . . .	63
5.20	共振器でアッパーサイドバンドだけ共振する場合の相互作用 . . . . .	64
B.1	Fabry–Perot 共振器の模式図 . . . . .	71
B.2	共振器内パワーと周波数の関係 . . . . .	73
C.1	真空状態とスクイーズド状態の量子揺らぎ . . . . .	79
E.1	熱浴から流入出する揺らぎと振動子の光学機械相互作用 . . . . .	87
E.2	Q 値が高い極限でのブロック図 . . . . .	87

## 表目次

5.1	並進運動測定と回転運動測定の量子雑音の類似関係 . . . . .	52
5.2	Advanced LIGO で観測された PI のパラメータ . . . . .	59
5.3	鏡の弾性モード測定の量子雑音のパラメータ . . . . .	61

# 第 1 章

## はじめに

重力波とは、時空のひずみが波として空間を伝播する現象である。1916年に A. Einstein が一般相対性理論によりその存在を予言し [1, 2]、R. A. Hulse と J. H. Taylor が 1974 年に発見した連星パルサー PSR B1913+16 の観測によって存在が間接的に証明された [3, 4]。そして 2015 年 9 月 14 日、Advanced LIGO の 2 台の検出器が連星ブラックホール合体からの重力波をとらえ、初の重力波の直接検出を果たした [5]。重力波の直接検出、あるいは重力波天文学の意義としては、重力波でしか得られない天文学的・宇宙論的情報が多いことや [6] 一般相対性理論をはじめとする重力理論の強重力における検証を可能とすること [7, 8] が挙げられる。初の直接検出によって重力波天文学が創成され、重力波検出がもたらす情報の豊富さが実際に確認された今、重力波天文学のさらなる発展のために検出器の感度や安定度を向上させる研究が求められている。

初検出を果たした米国の Advanced LIGO をはじめ、イタリアの Advanced Virgo [9] や日本の KAGRA [10, 11] といった地球上の大型重力波検出器は干渉計型重力波検出器と呼ばれ、Michelson 干渉計を基本としたレーザー干渉計によって鏡間の距離の変化を測定することで重力波を観測する。そのため、干渉計型重力波検出器では光と鏡の相互作用が本質的な役割を果たす。実際、Advanced LIGO、Advanced Virgo、KAGRA、また次世代の検出器ではほとんどの観測周波数帯で量子雑音と呼ばれる原理的な雑音で感度が制限されるが [9, 10, 12, 13]、量子雑音は光と鏡の運動の相互作用を正しく記述することによって初めて理解される [14]。それだけではなく、光の輻射圧によってもたらされる鏡の姿勢の不安定性 (Siddles–Sigg 効果) [15] や、鏡の基材の弾性モードが光との相互作用によって増幅されてしまう不安定性 (パラメトリック不安定性; PI) [16–18] といった、検出器の感度や安定度の向上を妨げる実際上の問題も光と鏡の相互作用の結果である。したがって、光と鏡の相互作用をより良く理解することは、重力波検出器の性能を向上させるための原理的問題、実際上の問題の両方を解決することに役立つはずである。

そこで本研究では、干渉計型重力波検出器において光と鏡の相互作用によって生じる現

象を統一的に記述し、そこからそれぞれの現象を理解するという新しい試みを行った。具体的には、電磁場の揺らぎのモードと鏡の運動のモードの相互作用の記述を出発点として、基本モードの電磁場の揺らぎに関連して光ばね効果や量子雑音、1次モードの揺らぎに関連して Sidles–Sigg 効果、高次モードの揺らぎに関連して PI を議論した。これらの個々の現象はこれまでによく知られたものである。さらに、鏡の運動との相互作用で基本モードの量子揺らぎがスクイーズを受ける (ポンデロモーティブスクイージング) という現象はよく知られているが、統一的記述を利用して、この現象と同様に高次モードの量子揺らぎが受けるスクイーズを議論し、高次モード測定を通じた鏡の運動の測定の量子雑音を議論するという初めての試みを行った。また、Sidles–Sigg 効果による鏡の回転運動の不安定性を回避する新しい方法の実験を長野晃士氏と共同で行い、この方法の本研究の文脈における理解を試みた。

本論文の構成は以下のようなものである。まず第2章で重力波についてまとめ、次に第3章で干渉計型重力波検出器の原理とその雑音についてまとめる。第4章でレーザーの電磁場やその揺らぎが空間モードを用いてどのように記述されるかを述べ、第5章で空間モードと鏡の運動との光学機械相互作用について調べる。第6章では結論と将来の展望について述べる。

## 第 2 章

# 重力波

重力波は一般相対性理論の枠組みの中で初めて導かれた [1, 2]。この章では一般相対性理論における、重力波の導出、重力波の存在する時空中での質点の運動、重力波の放射と発生源について記述する。

### 2.1 重力波の導出

一般相対性理論では時空を 4 次元の多様体と考え、十分近い 2 点  $x^\mu$  と  $x^\mu + dx^\mu$  のあいだの「距離」\*1  $ds$  が

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

と表せると仮定する。これ以降 Einstein の縮約記法を用いることとし、ギリシャ文字の添字は 0 – 3 の値をとることとする。 $g_{\mu\nu}(x)$  は計量テンソルという。一般相対性理論では、計量テンソル  $g_{\mu\nu}(x)$  が時空の幾何、すなわち重力を完全に特徴付ける。

計量テンソルは以下の Einstein 方程式に従う：

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

$c$  は光の速さ、 $G$  は万有引力定数である。ここで  $R_{\mu\nu}$  は Ricci テンソルと呼ばれ、次のように定義される：

$$R_{\mu\nu} := R_{\mu\alpha\nu}{}^\alpha, \quad (2.3)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta := -\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\Gamma_{\beta\gamma}^\delta + \frac{\partial}{\partial x^\beta}\Gamma_{\alpha\gamma}^\delta - \Gamma_{\alpha\mu}^\delta\Gamma_{\beta\gamma}^\mu + \Gamma_{\beta\mu}^\delta\Gamma_{\alpha\gamma}^\mu, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma := \frac{1}{2}g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}g_{\beta\delta} + \frac{\partial}{\partial x^\beta}g_{\alpha\delta} - \frac{\partial}{\partial x^\delta}g_{\alpha\beta}\right). \quad (2.5)$$

---

\*1  $ds^2$  は負にもなり得るため、ここでは「」をつけて表現した。

ここで、 $R_{\alpha\beta\gamma}{}^\delta$  は Riemann 曲率テンソル、 $\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma$  は接続係数または Christoffel 記号と呼ばれる。また、式 (2.2) における  $T_{\mu\nu}$  はエネルギー運動量テンソルである。

重力の存在しない Minkowski 空間では  $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} := \text{diag}[-1, 1, 1, 1]$  とすることができるが、Einstein 方程式を  $\eta_{\mu\nu}$  からのずれ  $h_{\mu\nu}(x) := g_{\mu\nu}(x) - \eta_{\mu\nu}$  で展開することを考える。重力が十分弱く  $h$  が十分小さいとし、式 (2.2) において  $h$  の1次まで考えることとすると、

$$-\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 \bar{h}^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 \bar{h}_\beta^\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 \bar{h}_\alpha^\mu}{\partial x^\beta \partial x^\mu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}, \quad (2.6)$$

$$\bar{h}_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

となる。微小な座標変換を行うことで Lorenz ゲージ条件

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.8)$$

を満たす座標系に移ることが必ずできることが知られているため [19]、以降 Lorenz ゲージ条件を課すことにすると、式 (2.6) は

$$-\square \bar{h}_{\alpha\beta} := -\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = \frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta} \quad (2.9)$$

と変形される。この式により、計量テンソルの  $\eta$  からのずれ  $h$  が源  $T$  から発生し波として伝播すること、すなわち重力波が存在することがわかる。

重力波の伝播を考えるため、真空中 ( $T_{\alpha\beta} = 0$ ) で式 (2.9) を考えることにする:

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0. \quad (2.10)$$

また、Lorenz ゲージ条件を満たしたまま次のトランスバース-トレースレス (transverse traceless; TT) ゲージ条件を満たす様な座標を採用することができる\*2 [20]:

$$h_{0\alpha} = 0, \quad (2.11)$$

$$h_k^j = 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial h^{jk}}{\partial x^j} = 0. \quad (2.13)$$

ここで TT ゲージでは  $\eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta} = 0$  であるため、 $h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta}$  である。以降 TT ゲージを採用することとし、 $h_{\alpha\beta}$  と  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  は区別しなくて良い。 $x^\mu = [ct, x, y, z]$  とおき、重力波

\*2 ラテン文字は 1-3 の値をとるとする。

$h_{\alpha\beta}$  が  $+z$  方向に伝播するとすると、波動方程式 (2.10) の解の成分  $h_{\alpha\beta}$  は、独立な 2 つの関数  $h_+(t)$  と  $h_\times(t)$  を用いて

$$h_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t - \frac{z}{c}) & h_\times(t - \frac{z}{c}) & 0 \\ 0 & h_\times(t - \frac{z}{c}) & -h_+(t - \frac{z}{c}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

と表される。ここで、 $h_+(t)$  と  $h_\times(t)$  のそれぞれに対応するモードをプラス (+) モードとクロス (×) モードという。以上より、一般相対性理論における重力波は光の速さで伝播し、2 つの独立なモードをもつことがわかった。

## 2.2 自由質点の運動

重力波によって実際にどのような効果が現れるのかを確かめるため、重力波の存在下での自由質点の運動を考えることにする。一般相対性理論では自由質点の軌跡は時空の測地線となる。つまり、質点の軌跡を  $x^\mu(\tau)$  と表すと  $x^\mu(\tau)$  は測地線方程式

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta}(x(\tau)) \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \quad (2.15)$$

を満たす。 $\tau$  は質点の軌跡に付されたパラメータである。

以下、TT ゲージを考え  $\tau$  として時刻  $t$  を採用することを考える。すると、 $x^\mu(t) = [ct, \mathbf{X}]$  が式 (2.15) を満たすことがわかる。つまり、TT ゲージで見た場合、重力波の存在下でも一定の空間座標に留まり続ける自由質点を配置することができるのである。そこで、 $xy$  平面上にある自由質点  $x^\mu(t; \theta) = [ct, R \cos \theta, R \sin \theta, 0]$  と原点にある自由質点の空間的距離が、 $z$  方向に伝播する + モードの重力波  $h_+(t) = h_p \cos \Omega t$ ,  $h_\times(t) = 0$  によってどのように変化するかを考える。質点間の距離は、

$$\sqrt{g_{jk}x_j(t; \theta)x_k(t; \theta)} = R\sqrt{1 + h_p \cos 2\theta \cos \Omega t} \quad (2.16)$$

$$= R \left( 1 + \frac{1}{2} h_p \cos 2\theta \cos \Omega t \right) \quad (2.17)$$

と表せる。ここで、式変形では  $h_p$  の 2 次以降は無視した。この式 (2.17) により、+ モードの重力波によって質点が図 2.1 上のように動くことがわかる。 $z$  方向に伝播する × モードの重力波  $h_+(t) = 0$ ,  $h_\times(t) = h_c \cos \Omega t$  でも同様であり、

$$\sqrt{g_{jk}x_j(t; \theta)x_k(t; \theta)} = R \left( 1 + \frac{1}{2} h_c \sin 2\theta \cos \Omega t \right) \quad (2.18)$$

となり、× モードの重力波によって質点が図 2.1 下のように動くこともわかる。図 2.1 のような潮汐的な質点の運動を捉えることで、重力波を検出することができる。

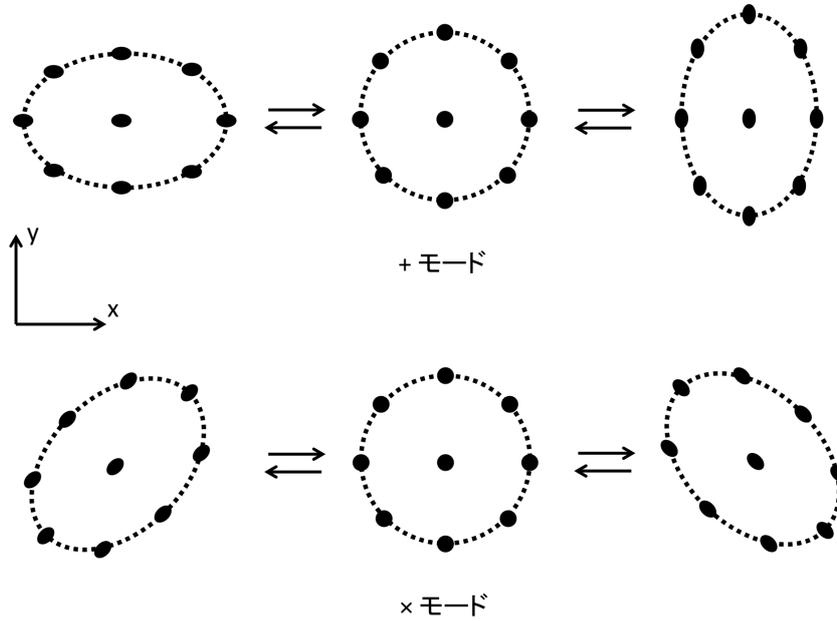


図 2.1:  $z$  方向に伝播する重力波が到来したときの  $xy$  平面上の自由質点の運動の模式図。質点が潮汐的に運動することがわかる。

## 2.3 重力波の放射

式 (2.9) より重力波がどのように放射されるかを導き、具体的にどのような現象が重力波源の候補として考えられるかについて述べる。

### 2.3.1 4 重極公式

エネルギー運動量が局在している重力波源から放射される重力波を考える。式 (2.9) を形式的に解くと、

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T^{\alpha\beta}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (2.19)$$

を得る。ここで、波源の典型的な速さが光速より十分小さく、重力波の波長よりも十分大きな距離だけ離れたところからみるとすると、式 (2.19) は次のように近似できる:

$$\bar{h}^{\alpha\beta}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{4G}{c^4 r} \int T^{\alpha\beta}(t - r/c, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (2.20)$$

ここで、 $r$  は観測地点から波源までの距離である。Lorenz ゲージ条件から従う  $\partial T^{\mu\nu}/\partial x^\mu = 0$ <sup>\*3</sup>より、4重極公式

$$\bar{h}^{jk}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}^{jk}(t - r/c) \quad (2.21)$$

を得る [19]。ここで、

$$I^{jk}(t) = \int x^j x^k T^{00}(t, \mathbf{x}) d^3 \mathbf{x}. \quad (2.22)$$

また、TT ゲージでは

$$\bar{h}_{jk}^{\text{TT}}(t, \mathbf{x}) \simeq \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{jk}^{\text{TT}}(t - r/c), \quad (2.23)$$

$$I_{jk}^{\text{TT}} = P_{jl} I_{lm} P_{mk} - \frac{1}{2} P_{jk} P_{lm} I_{lm}, \quad (2.24)$$

$$P_{jk} = \delta_{jk} - \hat{n}_j \hat{n}_k \quad (2.25)$$

と書ける。ここで、 $\hat{\mathbf{n}}$  は波源と観測地点を結ぶ方向の単位ベクトルである。以上より、重力波の放射が最低次では4重極放射であることがわかる。したがって、重力波は波源の非軸対称な運動から放射される。

### 2.3.2 重力波源とその候補

地球上の干渉計型重力波検出器の標的として考えられる主な重力波源を挙げる。

#### コンパクト連星合体

Advanced LIGO による重力波の初検出は、400 Mpc 程度離れた場所にあった 30 太陽質量程度のブラックホール (black hole; BH) 2 つからなる連星の合体からの重力波を捉えたものであった [5]。BH-BH 連星合体だけでなく、BH と中性子星 (neutron star; NS) からなる NS-BH 連星合体や NS2 つからなる NS-NS 連星合体も有力な重力波源として考えられている [21]。典型的な最大振幅は  $h \sim 10^{-21}$  と考えられており [22]、合体直前の重力波の周波数は  $f \sim 4.4 \text{ kHz} \times (M_\odot/M)$  で与えられる [6]。ここで、 $M_\odot$  は太陽質量、 $M$  は連星の合計質量である。Advanced LIGO、Advanced Virgo や KAGRA といった検出器では、年間数イベントから数 100 イベントが期待されている [23]。

#### 超新星爆発

超新星爆発の際のコアの崩壊から発生する重力波も、地球上の検出器で検出可能であると考えられている。コアの崩壊に非球対称性があれば重力波を発生する。10 kpc 離れ

<sup>\*3</sup>  $h$  のオーダーでは正しい。エネルギー運動量保存に対応する。

た場所での振幅は  $h \sim 10^{-22}$ – $10^{-21}$ 、典型的な周波数は  $f \sim 1$  kHz 程度と考えられている [24]。

### 中性子星の自転

回転する中性子星の形状に非軸対称性が存在すれば、重力波の発生源となる。放射される重力波の周波数は中性子星の回転周波数の2倍であるため、ミリ秒パルサーと呼ばれる速く回転する中性子星からの重力波の周波数は地球上の干渉計型重力波検出器の観測周波数帯の中であり、ミリ秒パルサーなどは波源の候補となる。これまで、中性子星の非軸対称性を表す楕円度  $\varepsilon$  に上限値をつけており、例えば Crab パルサーに対して  $\varepsilon \lesssim 10^{-4}$  という制限をつけている [25]。

## 第 3 章

# 干渉計型重力波検出器

干渉計型重力波検出器では、レーザー光を光源とする干渉計を構成する。重力波の到来で干渉計の鏡の位置が変化することによる干渉の変化を捉え、重力波を検出するのである。この章では、干渉計型重力波検出器の基本原則、主な雑音源とその低減のための工夫、Advanced LIGO、Advanced Virgo、KAGRA など用いられる先進的な干渉計構成について述べる。

### 3.1 基本原則

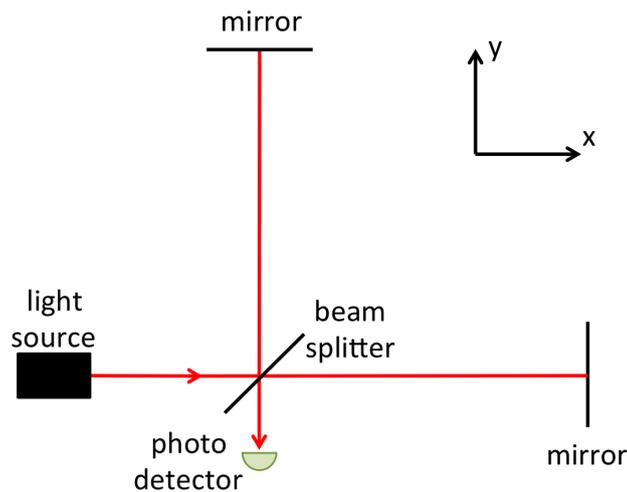


図 3.1: Michelson 干渉計の模式図。

図 3.1 のような Michelson 干渉計に  $+z$  方向から  $+$  モードの重力波  $h(t)$  が到来することを考えよう。鏡は注目する重力波に対して自由に動くとする。ビームスプリッター (BS) は 50:50 の BS であるとする。重力波が存在しないときの BS と  $x$  および  $y$  方向の

鏡の距離を  $L_x, L_y$  とし、 $L = (L_x + L_y)/2$  とする。式 (2.1) より、

$$\frac{dx}{dt} \simeq \pm c \left( 1 - \frac{1}{2} h(t) \right) \quad (3.1)$$

となるから、 $x$  方向の鏡に反射して往復するのにかかる時間  $T_x(t)$  は

$$T_x(t) = \int \left( \frac{dx}{dt} \right)^{-1} dx \quad (3.2)$$

$$= \frac{2L_x}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-2L/c}^t h(t') dt' \quad (3.3)$$

となる<sup>\*1</sup>。同様に  $y$  方向の往復にかかる時間  $T_y(t)$  は

$$T_y(t) = \frac{2L_y}{c} - \frac{1}{2} \int_{t-2L/c}^t h(t') dt'. \quad (3.4)$$

したがって、BS に入射する電場が  $E_{\text{in}}(t) = E_0 e^{i\omega_0 t}$  のとき、光検出器のところでの電場  $E_{\text{out}}(t)$  は、

$$E_{\text{out}}(t) = \frac{1}{2} [E_{\text{in}}(t - T_x(t)) - E_{\text{in}}(t - T_y(t))] \quad (3.5)$$

$$= \frac{1}{2} E_0 e^{i\omega_0(t - T_x(t))} \left[ 1 - e^{i(\phi + \phi_{\text{GW}}(t))} \right], \quad (3.6)$$

$$\phi = \frac{2\omega_0(L_x - L_y)}{c}, \quad (3.7)$$

$$\phi_{\text{GW}}(t) = \omega_0 \int_{t-2L/c}^t h(t') dt' \quad (3.8)$$

となる。光検出器のところでの光のパワー  $P_{\text{out}}(t)$  は、

$$P_{\text{out}}(t) = P_0 \sin^2 \frac{\phi + \phi_{\text{GW}}(t)}{2} \quad (3.9)$$

となる。ここで  $P_0$  は干渉計に入射する光のパワーである。これらの式から、干渉した光が重力波や腕の長さの差動変動によって変化することがわかる。具体的には、たとえば  $\phi = \pi/2$  になるように制御した場合、

$$P_{\text{out}}(t) \simeq \frac{P_0}{2} + \frac{P_0}{2} \phi_{\text{GW}}(t) \quad (3.10)$$

という光のパワーになり、光のパワーから重力波の線型信号が得られる。

<sup>\*1</sup> 通常  $|L_x - L_y|/L \ll 1$  であるため、積分範囲を  $L_x$  でなく  $L$  を用いて表した。

$\phi_{\text{GW}}$  の性質をみるために、 $\phi_{\text{GW}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \phi_{\text{GW}}(\Omega) e^{i\Omega t}$  と Fourier 分解してみよう。すると、

$$\phi_{\text{GW}}(\Omega) = \frac{2\omega_0 L}{c} \frac{\sin(\Omega L/c)}{\Omega L/c} h(\Omega) e^{-i\Omega L/c}, \quad (3.11)$$

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} h(\Omega) e^{i\Omega t} \quad (3.12)$$

のように表されることがわかる。この式により、 $\Omega L/c \ll 1$  の範囲では、

$$\phi_{\text{GW}}(\Omega) = 2 \frac{2\omega_0}{c} \frac{1}{2} L h(\Omega) \quad (3.13)$$

より重力波の信号は  $L$  に比例することがわかる。つまり、干渉計の腕の長さを長くすることで重力波に対する感度を向上させることができるということである。また重力波の影響は、 $x$  方向の鏡を  $+Lh/2$  だけ変位し  $y$  方向の鏡を  $-Lh/2$  だけ変位するということと  $\Omega L/c \ll 1$  の範囲では同じであることもわかる。ここでは  $+$  モードの重力波が  $+z$  方向から到来した場合を扱ったが、測定しているのは  $h_{11} - h_{22}$  なので、 $h = (h_{11} - h_{22})/2$  とすれば他の到来方向や偏光の場合も同様に扱える。

## 3.2 雑音源とその対策

この節では、干渉計型重力波検出器の主な雑音源とその対策の概要について述べる。

### 3.2.1 地面振動雑音

重力波検出器の鏡は重力波に対して自由に運動するのが理想であるが、地球上でそれを実現するのは困難である。そこで実際には、鏡を振り子として懸架することで振り子の共振周波数より高い周波数の重力波に対して自由に運動できるようにする方法をとる。鏡は振り子として懸架されるため、懸架系を通じて地面の揺れが鏡に伝わり鏡が振動してしまう。これが地面振動雑音である。

地面振動雑音の対策は第一に、鏡を多段振り子として懸架することである。単純な振り子では懸架点の変位  $X$  から振り子の変位  $Y$  までの伝達関数は  $Y/X \simeq (f/f_0)^{-2}$  ( $f_0$  は共振周波数) なので、共振周波数以上では  $(f/f_0)^{-2}$  の防振効果が得られる。さらに、振り子構造を  $n$  段にすることで地面振動による鏡の揺れは  $(f/f_0)^{-2n}$  だけ低減させることができる。

KAGRA では、地面振動雑音対策のため検出器を地下のトンネル内に建設している [10]。地下のほうが地上よりも地面振動自体が小さいためである。

地面振動雑音は、地面振動自体が低周波で大きいこと、低周波で防振効果を与えることが難しいことから、 $\lesssim 10$  Hz という低周波数帯域で感度を制限する雑音となる。

### 3.2.2 熱雑音

熱雑音とは、鏡やその懸架系が有限の温度をもっているために、鏡の反射面や重心が熱的に振動してしまう雑音である。熱振動のパワースペクトル  $S_x(f)$  は、揺動散逸定理 [26] によりつぎのように表される。

$$S_x(f) = -\frac{4k_B T}{(2\pi f)} \text{Im}[H(2\pi f)]. \quad (3.14)$$

ここで、 $k_B$  は Boltzmann 定数、 $T$  は系が接する熱浴の温度、 $H$  は系が受ける外力から変位までの伝達関数、 $f$  は周波数である。なお、パワースペクトルの定義は補遺 A を参照。熱雑音の表式の具体例として、伝達関数

$$H(2\pi f) = \frac{1}{m(2\pi)^2 [f_0^2(1 + i\phi(f)) - f^2]} \quad (3.15)$$

で表される振動子の熱振動の熱振動のパワースペクトルは、

$$S_x(f) = -\frac{4k_B T}{m(2\pi)^3 f} \frac{f_0^2 \phi(f)}{(f^2 - f_0^2)^2 + f_0^4 \phi^2(f)} \quad (3.16)$$

となる。この式より、 $f \ll f_0$  または  $f \gg f_0$  では  $\phi(f)$  が小さいほど熱振動が小さいことがわかる。 $\phi(f)$  はロスと呼ばれ、振動子のエネルギー損失を特徴づける。

式 (3.16) より、熱雑音の低減のためには鏡や鏡を吊る振り子のロスを小さくする必要がある。実際、Advanced LIGO では鏡と最終段の振り子はモノリシックな熔融石英を採用しており [12]、KAGRA では鏡と最終段の振り子にはサファイアを用いる [10] ことで熱雑音の低減を図っている。また式 (3.14) から明らかのように、鏡の温度を下げることも確実な熱雑音低減の手法である [27]。KAGRA は、鏡の温度を 20 K まで下げることで熱雑音を低減する [10]。

熱雑音は、検出器の感度が最も良い  $\sim 100$  Hz 付近で感度に影響を与える [9, 10, 12]。

### 3.2.3 量子雑音

干渉計型重力波検出器ではレーザー光の干渉を用いるが、電磁場の量子揺らぎに起因する雑音が量子雑音である。単純な干渉計の構成の場合\*2、量子雑音は散射雑音と輻射圧雑音の2種類に分けることができる。

\*2 シグナルリサイクリング共振器の離調、スクイズされた真空の入射、ホモダイン検波による backaction evasion などといった量子非破壊測定を行わない場合。

散射雑音は、光検出の際の光子数の揺らぎによるセンシング雑音である。式 (3.10) も示しているように検出器の出力に現れる重力波の信号の量は干渉計への入射光のパワー  $P_0$  に比例し、光検出器の際の光子数の量子揺らぎは  $\sqrt{P_0}$  に比例するため、重力波信号  $h$  へと換算した散射雑音は  $1/\sqrt{P_0}$  に比例する。したがって、干渉計へ入る光のパワー  $P_0$  を大きくすることで散射雑音を改善することができる。散射雑音は、 $\gtrsim 100$  Hz の高周波帯で感度を制限する [9, 10, 12]。

輻射圧雑音は、光が鏡に反射する際に光のパワー、すなわち輻射圧が量子的に揺らぐことで鏡を振動させてしまうという雑音である。鏡に与える力の量子揺らぎは  $\sqrt{P_0}$  に比例するため、輻射圧雑音は  $\sqrt{P_0}/mf^2$  に比例する。ここで、自由質点とみなせる鏡の外力に対する応答の伝達関数が、 $m$  を質量としたときに  $-1/m(2\pi f)^2$  であることを用いた。したがって、 $P_0$  を小さくすること、鏡の質量  $m$  を大きくすることで輻射圧雑音を低減することができる。輻射圧雑音は、数 10 Hz 帯で感度を制限することが予定されている [9, 10, 12]。

以上の議論からもわかるように、散射雑音と輻射圧雑音は光のパワーに対して反対の依存性を持ち、両者はトレードオフの関係にある。このトレードオフの関係によって定まる量子雑音のレベルを標準量子限界 (SQL) と呼ぶ [28]。まとめると、量子雑音の低減のためには、高いパワーのレーザーで散射雑音を下げ、質量の大きな鏡で輻射圧雑音を下げ、さらには SQL を超えるような量子非破壊計測を用いる必要があることがわかる。量子雑音については 5.2.2 節でさらに詳しく述べる。

## 3.3 干渉計の構成

3.1 節では干渉計型重力波検出器の基本原理を単純な Michelson 干渉計で説明したが、実際に検出器で用いられる干渉計の構成はもっと複雑である。ここでは Advanced LIGO、Advanced Virgo、KAGRA で用いられる干渉計の要素について述べる。

### 3.3.1 Fabry–Perot Michelson 干渉計

3.1 節の終わりに、Michelson 干渉計の腕の長さを長くすることで感度を向上させられることを述べたが、実効的な腕の長さを長くするために両腕を Fabry–Perot 共振器にするのが Fabry–Perot Michelson 干渉計である (図 3.2)。共振器の鏡の間を光が何度も往復し長い距離を伝播するのである。なお、Fabry–Perot 共振器については補遺 B を参照。また Fabry–Perot 共振器においては光の入射側の鏡を input test mass (ITM)、もう一方の鏡を end test mass (ETM) と呼ぶことに触れておく。平均往復回数はフィネス (補遺 B) に比例し、散射雑音はフィネスに比例して改善する (図 3.3)。反対に、輻射圧雑音

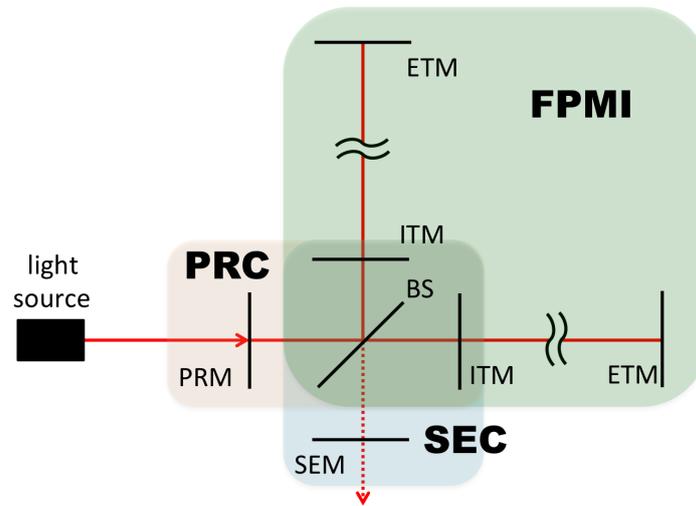


図 3.2: 実際の干渉計型重力波検出器の構成の模式図。FPMI は Fabry–Perot Michelson 干渉計、PRC は PR 共振器、SEC は SE 共振器を表す。

はフィネスに比例して悪化する。また同様に光の平均滞在時間  $\tau$  もフィネスに比例する。周波数が  $\gtrsim 1/\tau$  の信号では共振器内での信号の相殺が始まるため、検出器の帯域はフィネスに反比例する。散射雑音の改善と腕共振器内での信号の相殺を考慮すると、高周波帯での散射雑音は腕の共振器のフィネスを変えても変化しないことに注意する必要がある (図 3.3)。

腕の共振器はレーザー光が最も増幅される部分であり、Advanced LIGO では腕の共振器の中に貯まる光のパワーは最大 800 kW にもなることが予定されている [18]。

### 3.3.2 パワーリサイクリング共振器

(Fabry–Perot) Michelson 干渉計の入射側ではない方のポートに光が来ないように制御した場合、ほぼ全ての光は入射側へと反射される。入射側ではないポートを Anti-symmetric (AS) ポートと呼ぶ。そこで入射側に鏡 (power recycling mirror; PRM) を置くことで Michelson 干渉計から返ってきた光を打ち返すというのが power recycling (PR) である。ここで PRM と Michelson 干渉計が共振器を構成していると解釈することができ、この共振器を PR 共振器と呼ぶ (図 3.2)。PR では、BS のところでの光のパワーを PR 共振器によって増幅することができ、実効的なパワーを上げることで散射雑音を改善することができる (図 3.3)。

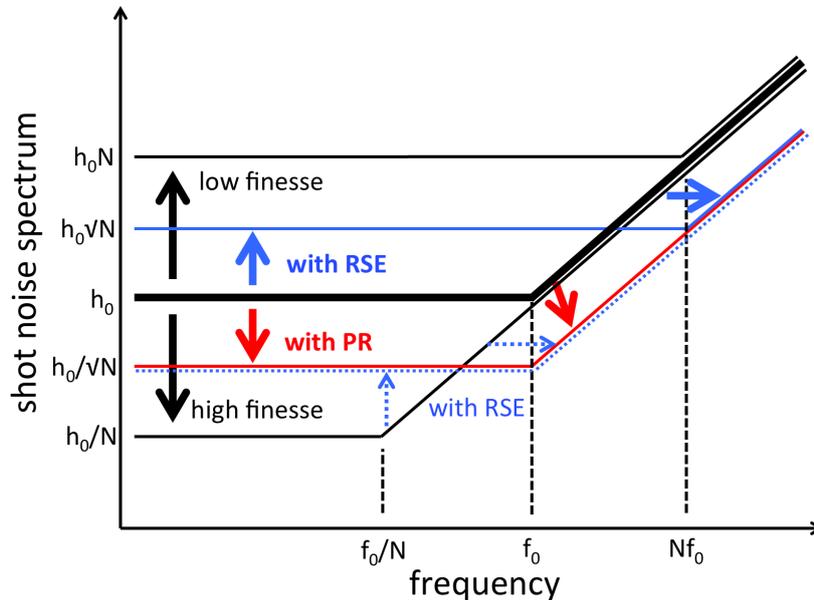
3.3.3 シグナルエクストラクション共振器<sup>\*3</sup>

図 3.3: 干渉計の構成によって散射雑音のノイズスペクトルがどのように変化するかを表した模式図。太線を基準として、腕共振器のフィネスを  $N$  倍または  $1/N$  倍にした場合 (黒線)、PR によって実効的なパワーを  $N$  倍にした場合 (赤線)、RSE によって帯域を  $N$  倍にした場合 (青線) の散射雑音のスペクトルを示した。腕共振器のフィネスを  $N$  倍にしてさらに RSE を用いると青点線のようになる。

AS ポートが暗くなるように制御した場合、入射側から入った電磁場は入射側へ反射され、AS ポートから入った電磁場は AS ポートへ反射される。また、両腕の長さの同相変動の信号は入射側のポートに現れ、差動変動の信号は AS ポートへ現れる。したがって、AS ポートに新たに鏡 (signal extraction mirror; SEM) を置いた場合、干渉計に入射されるレーザー光には影響を与えずに差動変動の信号にのみ影響を与えることができる。ここで、Fabry–Perot 共振器の ITM2 つと BS と SEM からなる共振器 (signal extraction 共振器; SE 共振器、図 3.2) が共振状態であるように制御すると、差動信号にとって腕共振器のフィネスを低下させることができる。ここで、SEM の導入によって腕共振器中のレーザー光の量は変わらないので、腕共振器内に生成される重力波信号は変わらないことに注意する。その結果、低周波帯での散射雑音の悪化と引き換えに検出器の帯域を広げ、高周波帯での散射雑音を改善することができる (図 3.3)。この方法が resonant sideband extraction (RSE) である。散射雑音が高周波帯で感度を制限することを思い出

<sup>\*3</sup> 歴史的な事情から、signal extraction 共振器は signal recycling 共振器、signal extraction mirror は signal recycling mirror とそれぞれ呼ばれることが多い。

すと、RSE が検出器の感度向上に有用であることがわかる。RSE の特長をみるために次のようなことを考える。図 3.3 からわかるように、PR の利用や高パワー光源の利用で実効的なパワーを  $N$  倍上げた場合と、腕共振器のフィネスを  $N$  倍にした上で RSE で帯域を  $N$  倍にした場合は同じ散射雑音を与える。しかし、RSE を利用した場合には BS でのパワーは  $N$  倍小さくて済む。BS を大きなパワーの光が通過すると熱レンズ効果といった技術的困難をもたらすこと、大きな PR のゲインを得ることはそもそも難しいこと、という点から PR に加えて RSE を併せて用いることが有用なのである。

# 第 4 章

## 光の空間モード

古典的あるいは量子的な光の取り扱いをするとき、平面波を用いて電磁波の式を表すことが多い。しかし平面波は横方向<sup>\*1</sup>の空間的な広がりが無限であるため、実際のレーザー光の伝播やそれに関連する電磁場の揺らぎのように、横方向の広がりが有限である電磁場を表現するのには適切ではない。そこでこの章では、レーザー光のようにほぼ一方向に進む光の空間的な広がりと伝播を表す、光の空間モードについて述べる。

### 4.1 近軸近似と Hermite-Gaussian モード

電磁波の波動方程式

$$\left( \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (4.1)$$

の解を次のように表すことを考える。

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{E}^{(+)} + \mathbf{E}^{(-)} \quad (\mathbf{E}^{(+)} = \mathbf{E}^{(-)*}), \quad (4.2)$$

$$\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{x}, z, \omega) e^{i\omega(t-z/c)}. \quad (4.3)$$

ここで  $\mathbf{x} = [x, y]$  である。式 (4.3) のように電場を分離することは、平面波のように変化する部分とゆっくりとした変化する振幅部分に分けることに対応する。そこで、 $\psi$  の  $z$  方向の変化はゆっくりであると仮定し、

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \ll \frac{\omega}{c} \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \quad (4.4)$$

を課す。すると、波動方程式 (4.1) は

$$\left( \nabla_{\perp}^2 - 2i \frac{\omega}{c} \frac{\partial}{\partial z} \right) \psi(\mathbf{x}, z, \omega) = 0 \quad (4.5)$$

---

<sup>\*1</sup> 伝播方向に垂直な方向という意味。

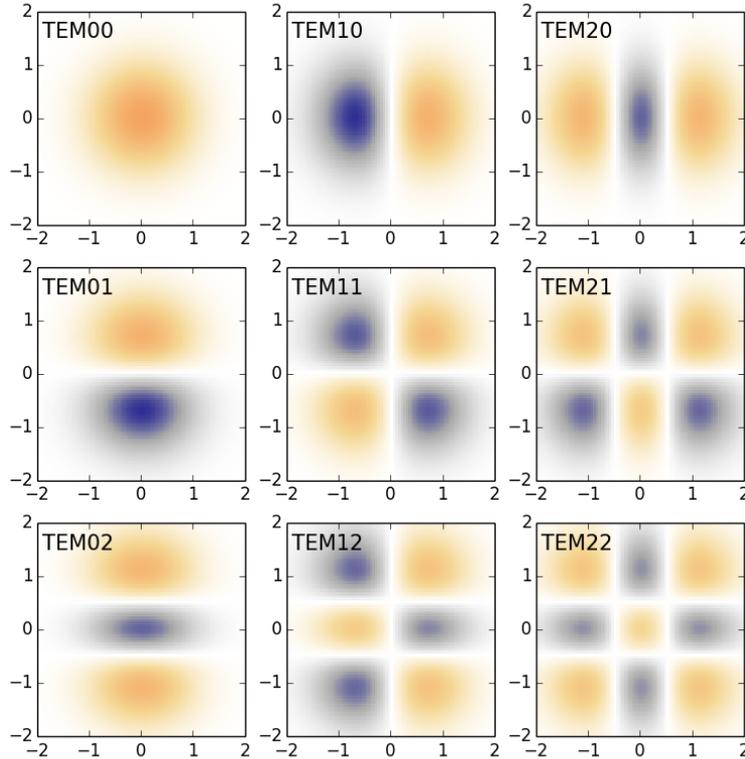


図 4.1: いくつかの Hermite-Gaussian モードの電場の振幅を表すグラフ。\$l, m\$ がそれぞれ 2 以下のものを図示した。橙色の部分は振幅が正であり、青色の部分は振幅が負であり、濃淡が絶対値の大小を表す。\$x\$ 方向、\$y\$ 方向の次数に応じて電場に節が存在することがわかる。

となる。ここで  $\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  である。このような波動方程式の近似を近軸近似という。これ以降、電磁波の偏光を 1 つ選び電場をスカラーとして扱うこととする\*2。

近軸近似された波動方程式の解として、次のような解の組がある。

$$\begin{aligned} \psi_{lm}(\mathbf{x}, z, \omega) = & \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_{lm} \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)}, \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \\ & \times \exp \left[ \left( -\frac{1}{w^2(z)} - i \frac{k}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + i(l + m + 1)\zeta(z) \right]. \end{aligned} \quad (4.6)$$

次数 \$l, m\$ は非負整数である。ここで、各記号の定義は以下のようなものである。

\*2 式 (4.26) からわかるように近軸近似では \$|k\_{x,y}/k| \lesssim \lambda/w\_0 \ll 1\$ となるため、伝播方向がほぼ一様とみなせる。したがって電場をスカラーとして扱って問題ない。

$$k = \omega/c, \quad (4.7)$$

$$\zeta(z) = \arctan(z/z_0), \quad (4.8)$$

$$z_0 = kw_0^2/2, \quad (4.9)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + z^2/z_0^2}, \quad (4.10)$$

$$R(z) = z + z_0^2/z, \quad (4.11)$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}, \quad (4.12)$$

$$H_{lm}(x, y) = H_l(x)H_m(y). \quad (4.13)$$

$w_0$  は実パラメータである。 $xy$  平面での電場の分布が Hermite 多項式と Gaussian の積になっており (図 4.1)、このような解の組  $\{\psi_{lm}\}$  を Hermite-Gaussian (HG) モードという。 $\psi_{lm}$  を  $lm$  モードまたは TEM $lm$  モードといい、特に 00 モードを基本モードという。通常のレーザー光のモードは基本モードである。また、括り出した  $e^{i(\omega t - kz)}$  と合わせて

$$U_{lm}(\mathbf{x}, t) := \psi_{lm}(\mathbf{x}, z, \omega) e^{i(\omega t - kz)} \quad (4.14)$$

も HG モードと呼ぶことが多い。

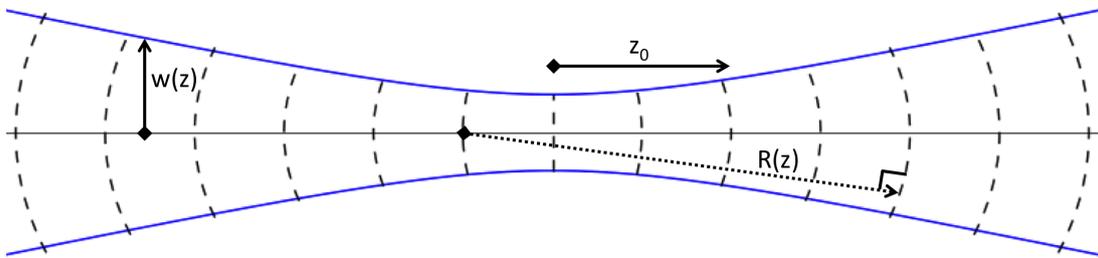


図 4.2: 基本モードの波面と、 $z_0$ ,  $w(z)$ ,  $R(z)$  を表した模式図。

HG モードの振る舞いや式 (4.6) に現れる量の意味について考えよう。基本モードの波面を図示すると図 4.2 のようになる。式 (4.6) からわかるように、基本モードの電場の振幅は  $xy$  平面上で Gaussian になっている。その Gaussian の広がり特徴づけるのが  $w(z)$  であり、ビーム径と呼ばれる。 $w(z)$  は双曲線になっており、伝播するにしたがってビーム径が双曲線のように広がっていくことを意味する。 $w_0$  は  $z = 0$  (ビームウエスト) でのビーム径である。 $|z| \gg z_0$  では  $w(z) \simeq 2z/kw_0 =: \alpha_0 z$  と振る舞い、ビームの広がり角が  $\alpha_0$  となる\*3。次に  $R(z)$  について考える。 $[0, 0, z]$  を通る等位相面 (波面) は式

\*3  $\alpha_0$  は  $w_0$  に反比例する。つまり、ビームを絞るほどビームの広がり角は大きくなってしまいうことである。

(4.6) と (4.14) より

$$\Delta z + \frac{x^2 + y^2}{2R(z)} = 0 \quad (4.15)$$

である。ここで、 $\Delta z$  は  $[0, 0, z]$  からの  $z$  方向のずれである。等位相面の式を  $\Delta z$  の2次以降を無視して変形すると

$$(R(z) + \Delta z)^2 + x^2 + y^2 = R^2(z) \quad (4.16)$$

を得る。したがって、 $R(z)$  は  $z$  での波面の曲率半径を表す。次に、Rayleigh 長と呼ばれる  $z_0$  について考える。 $|z| \ll z_0$  では、 $w(z) \simeq w_0$ ,  $R(z)/z \gg 1$  であることからビームを平行光線として扱うことができる。反対に  $|z| \gg z_0$  では、 $w(z) \propto z$ ,  $|z - R(z)| \ll z_0$  であることからビームを点波源から広がる球面波として扱うことができる。つまり、 $z_0$  はビームがどれだけ平行になっているかを表す量であることがわかる。式 (4.9) より長い距離を平行に伝播させるためにはビーム径を大きくしなければいけないということがわかる\*4。さらに、Gouy 位相  $\zeta(z)$  について考える。これは伝播の際の基本モードと高次モードの位相差である。ある距離伝播したとき、 $lm$  モードは基本モードと比較して  $(l+m)\zeta$  だけ位相変化が少ない。 $|z| \gg z_0$  で  $\zeta(z) \simeq \pm\pi/2$  である。

最後に、HG モードが近軸近似の条件 (4.4) を満たすかどうかを調べる。

$$\left| \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right| \bigg/ \frac{\omega}{c} \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right| \sim (kw_0)^{-2} \sim \left( \frac{\lambda}{w_0} \right)^2 \quad (4.17)$$

であり、ビーム径が波長より十分大きければ条件を満たすことがわかる。ビーム径が波長より十分大きい範囲では HG モードは正確な解であるということである。重力波検出器で用いるレーザーは通常  $\lambda \sim 1 \mu\text{m}$ ,  $w_0 \sim 0.1\text{--}100 \text{mm}$  程度だから  $\lambda \ll w_0$  が十分成り立ち、レーザー光の電場を表現するのに HG モードを用いることができる。

## 4.2 Hermite-Gaussian モードの量子化

前節で HG モードが近軸近似における波動方程式の解であることがわかった。それでは、レーザー光やそれに関連する揺らぎを議論する際に HG モードを考えるだけで十分なのであろうか。その答えを知るために、HG モードを平面波と関連付けることを考える。

まず準備として、HG モードの持つ性質を列挙する。

\*4 平行な光の極限として平面波があるが、平面波の横方向の広がりは無限である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx dy \psi_{lm}^*(\mathbf{x}, z, \omega) \psi_{l'm'}(\mathbf{x}, z, \omega) = \delta_{ll'} \delta_{mm'}, \quad (4.18)$$

$$\sum_{l,m=0}^{\infty} \psi_{lm}^*(\mathbf{x}, z, \omega) \psi_{lm}(\mathbf{x}', z, \omega) = \delta^2(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (4.19)$$

式 (4.18) は HG モードの正規直交性、式 (4.19) は完全性を表す。また、HG モードの横方向の Fourier 変換  $\psi(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega)$  を

$$\psi_{lm}(\mathbf{x}, z, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} \psi(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega) e^{-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{x}} \quad (4.20)$$

で定義すると、

$$\sum_{l,m=0}^{\infty} \psi_{lm}^*(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega) \psi_{lm}(\mathbf{k}'_{\perp}, z, \omega) = (2\pi)^2 \delta^2(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}), \quad (4.21)$$

$$\psi_{lm}(\mathbf{k}_{\perp}, z, \omega) = \psi_{lm}(\mathbf{k}_{\perp}, 0, \omega) \exp\left(i \frac{k_{\perp}^2 c}{2\omega} z\right) \quad (4.22)$$

の性質を満たす。式 (4.21) は式 (4.19) から直ちに導かれ、式 (4.22) は式 (4.20) を波動方程式 (4.5) に代入することで導ける。

以上の準備で、平面波で展開された電場を HG モードでの展開に変換することを考える。 $|\mathbf{k}_{\perp}| \ll k$  の平面波だけを考え、考える周波数帯域  $\Delta\omega$  が  $\Delta\omega \ll \omega$  である場合、電場の平面波展開は次のように書ける [29]。

$$E^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega(t-z/c)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} E(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) e^{-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{x}} \exp\left(i \frac{k_{\perp}^2 c}{2\omega} z\right). \quad (4.23)$$

ここで、式 (4.21) と (4.22) を用いると

$$\begin{aligned} e^{-i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{x}} \exp\left(i \frac{k_{\perp}^2 c}{2\omega} z\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \mathbf{k}'_{\perp} e^{-i\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{x}} \exp\left(i \frac{k'_{\perp}{}^2 c}{2\omega} z\right) \delta^2(\mathbf{k}_{\perp} - \mathbf{k}'_{\perp}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \mathbf{k}'_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{x}} \exp\left(i \frac{k'_{\perp}{}^2 c}{2\omega} z\right) \sum_{l,m=0}^{\infty} \psi_{lm}^*(\mathbf{k}_{\perp}, 0, \omega) \psi_{lm}(\mathbf{k}'_{\perp}, 0, \omega) \\ &= \sum_{l,m=0}^{\infty} \psi_{lm}^*(\mathbf{k}_{\perp}, 0, \omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2 \mathbf{k}'_{\perp}}{(2\pi)^2} e^{-i\mathbf{k}'_{\perp} \cdot \mathbf{x}} \psi_{lm}(\mathbf{k}'_{\perp}, z, \omega) \\ &= \sum_{l,m=0}^{\infty} \psi_{lm}^*(\mathbf{k}_{\perp}, 0, \omega) \psi_{lm}(\mathbf{x}, z, \omega) \end{aligned} \quad (4.24)$$

を得る。したがって、式 (4.23) はさらに

$$E^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} U_{lm}(\mathbf{x}, t) E_{lm}(\omega), \quad (4.25)$$

$$E_{lm}(\omega) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} E(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \psi_{lm}^*(\mathbf{k}_{\perp}, 0, \omega) \quad (4.26)$$

となる。式 (4.25) は、近軸近似の適用できるような  $|\mathbf{k}_{\perp}| \ll k$  の平面波は HG モードの線型和で書き表せるということの意味している。 $\mathbf{k}_{\perp}$  の分の自由度が  $l, m$  の自由度に変換されていると解釈することもできる。

ここまでは電磁場を古典的に扱ってきたが、次に HG モードを量子化することを考える。よく知られた平面波を用いた電磁場の量子化を行った上で式 (4.26) のような変換をすることで量子化された HG モードを得ることができ、近軸近似の範囲内の任意の量子化された電磁場  $\hat{E}(\mathbf{x}, t)$  は次のように表される [29–31]。

$$\hat{E}(\mathbf{x}, t) = \sum_{l,m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{c}} [U_{lm}^*(\mathbf{x}, t) \hat{a}_{\omega}^{lm} + U_{lm}(\mathbf{x}, t) \hat{a}_{\omega}^{\dagger lm}] \quad (4.27)$$

$$=: \sum_{l,m=0}^{\infty} \hat{E}_{lm}(\mathbf{x}, t) \quad (4.28)$$

ここで、HG モードの生成消滅演算子  $\hat{a}_{\omega}^{lm}$  は式 (4.26) と同様に平面波の生成消滅演算子  $a(\mathbf{k}_{\perp}, \omega)$  から

$$\hat{a}_{\omega}^{\dagger lm} := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\mathbf{k}_{\perp}}{(2\pi)^2} a^{\dagger}(\mathbf{k}_{\perp}, \omega) \psi_{lm}^*(\mathbf{k}_{\perp}, 0, \omega) \quad (4.29)$$

と定まり、式 (4.18) より交換関係

$$[\hat{a}_{\omega}^{lm}, \hat{a}_{\omega'}^{\dagger l'm'}] = 2\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\omega - \omega') \quad (4.30)$$

を満たす。 $\hat{a}_{\omega}^{lm}$  は、周波数  $\omega$  の  $lm$  モードの光子を消滅させる演算子である。

さらに 2 光子形式 [32] にならって、サイドバンド周波数  $\Omega := \omega - \omega_0$  を用いた表式を導こう。 $|\Omega| \ll \omega_0$  として、

$$\hat{a}_1^{lm}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{a}_{\omega_0+\Omega}^{lm} + \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^{\dagger lm}), \quad (4.31)$$

$$\hat{a}_2^{lm}(\Omega) = \frac{1}{i\sqrt{2}} (\hat{a}_{\omega_0+\Omega}^{lm} - \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^{\dagger lm}), \quad (4.32)$$

$$\hat{a}_j^{lm}(z, t) = \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} (\hat{a}_j^{lm}(\Omega) e^{i\Omega(z/c-t)} + \hat{a}_j^{\dagger lm}(\Omega) e^{-i\Omega(z/c-t)}) \quad (j = 1, 2) \quad (4.33)$$

を定義すると、

$$\hat{E}_{lm}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{c}} u_{lm}(\mathbf{x}) [\hat{a}_1^{lm}(z, t) \cos \phi_{lm} + \hat{a}_2^{lm}(z, t) \sin \phi_{lm}] \quad (4.34)$$

と書き表せる。 $\hat{a}_j^{lm}$  は直交位相振幅と呼ばれる。ここで、

$$u_{lm}(\mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_{lm} \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(z)}, \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \exp \left( -\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \right), \quad (4.35)$$

$$U_{lm}(\mathbf{x}, t) = u_{lm}(\mathbf{x}) e^{i\phi_{lm}} \quad (4.36)$$

である。また、 $\hat{E}_{lm} = \hat{E}_{lm}^{(+)} + \hat{E}_{lm}^{(-)}$ , ( $\hat{E}_{lm}^{(+)} = \hat{E}_{lm}^{(-)\dagger}$ ) と分解すると、

$$\hat{E}_{lm}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\pi \hbar \omega_0}{c}} U_{lm}(\mathbf{x}, t) [\hat{a}_1^{lm}(z, t) - i\hat{a}_2^{lm}(z, t)] \quad (4.37)$$

と書き表すこともできる。交換関係は

$$\begin{aligned} [\hat{a}_1^{lm}(\Omega), \hat{a}_2^{\dagger l' m'}(\Omega')] &= i2\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\Omega - \Omega'), \\ [\hat{a}_1^{lm}(\Omega), \hat{a}_1^{\dagger l' m'}(\Omega')] &= [\hat{a}_2^{lm}(\Omega), \hat{a}_2^{\dagger l' m'}(\Omega')] \\ &= 2\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(\Omega - \Omega'), \\ [\hat{a}_1^{lm}(\Omega), \hat{a}_2^{l' m'}(\Omega')] &= 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

となる。さらに、 $\hat{a}_j^{lm}(z, t)$  のパワースペクトルとクロススペクトル  $S_{jk}^{lm, l' m'}(f)$  は真空状態に対して次のようになる。

$$S_{jk}^{lm, l' m'}(f) = \delta_{jk} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (j, k = 1, 2). \quad (4.39)$$

## 4.3 共振器と空間モード

3.3 節からわかるように実際の干渉計型重力波検出器は多くの共振器の組み合わせからなっているが、共振器に対する光の振る舞いを考える際には光の空間モードを考えることが重要である。なぜなら、光が共振器で共振状態となるためには光が共振器を1周して得る位相が  $2\pi$  の整数倍であるだけでなく、波面の曲率やビーム半径が1周する前と後とで一致する必要があるからである。そこでこの節では共振器の中で HG モードで表される光がどのように振る舞うかをみる。

図 4.3 のように球面鏡が向き合った Fabry–Perot 共振器を考えよう。鏡に反射するところで鏡の面と波面の曲率中心が一致していれば、反射した光は入射してきた経路をそのまま戻るように進む。したがって図 4.3 に描かれているような光は共振器の中で共振しうる。そのような共振しうる光のモードを、共振器の固有モードという。固有モードの Rayleigh 長  $z_0$  とウエスト位置から見た鏡の位置  $z_1, z_2$  は、鏡の曲率  $R_1, R_2$  と鏡間の距

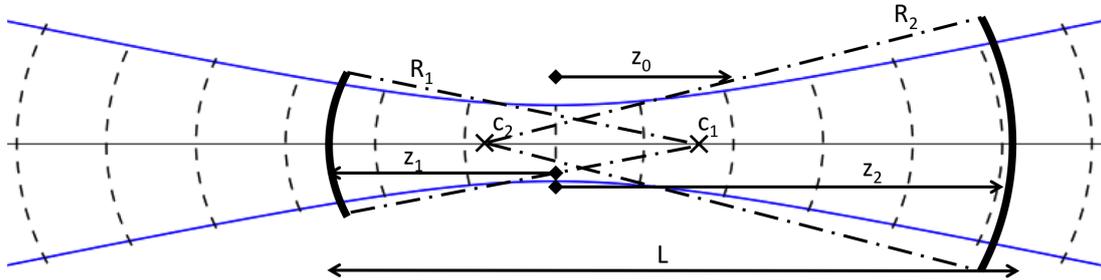


図 4.3: 向かい合う球面鏡からなる Fabry-Pérot 共振器とその固有モード。  $c_1, c_2$  はそれぞれの鏡の曲率中心であり、固有モードの伝播の軸、つまり式 (4.6) における  $z$  軸は  $c_1, c_2$  を通るように定まっている。

離  $L$  を用いて次のように表される。なお、この表式の導出は補遺 B を参照のこと\*5。

$$z_0 = \frac{L\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}}{|g_1+g_2-2g_1g_2|}, \quad (4.40)$$

$$z_j = \frac{Lg_1g_2(1-g_j)}{g_j(g_1+g_2-2g_1g_2)} \quad (j=1,2). \quad (4.41)$$

ここで  $g$  ファクター  $g_j$  は

$$g_j = 1 - \frac{L}{R_j} \quad (4.42)$$

で定義される。つまり、鏡の曲率半径とその間の距離を決めると共振しうるモードが決定されるのである。ただし  $z_0$  が実であることから、共振器で共振する固有モードが存在するためには  $0 < g_1g_2 < 1$  の条件を満たす必要がある。

共振器の固有モードの光は共振器で共振しうるが、一般には全ての  $lm$  モードが同時に共振するのではない。なぜなら、次数の異なるモードは Gouy 位相の分だけ空間を伝播するときに獲得する位相が異なるので、あるモードが共振しているとき次数の異なるモードも共振するわけではないからである。それでは次数の異なるモード間の位相差はどのようになるのであろうか。図 4.3 のような共振器では、1 周の伝播の間の Gouy 位相シフト  $\zeta_{\text{ground}}$  は

$$\zeta_{\text{ground}} = 2 \arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) + 2 \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right) \quad (4.43)$$

と表せる。  $\tan$  の加法定理を用いると

$$\tan\left[\arctan\left(\frac{z_1}{z_0}\right) + \arctan\left(\frac{z_2}{z_0}\right)\right] = \text{sgn}(g_1)\sqrt{\frac{1-g_1g_2}{g_1g_2}} \quad (4.44)$$

\*5 ここで、  $\text{sgn}(g_1) = \text{sgn}(g_2) = \text{sgn}(g_1 + g_2 - 2g_1g_2)$  であることに触れておく。

が得られることから、

$$\cos \zeta_{\text{round}} = \frac{1 - \tan^2 \left[ \arctan \left( \frac{z_1}{z_0} \right) + \arctan \left( \frac{z_2}{z_0} \right) \right]}{1 + \tan^2 \left[ \arctan \left( \frac{z_1}{z_0} \right) + \arctan \left( \frac{z_2}{z_0} \right) \right]} \quad (4.45)$$

$$= 2g_1g_2 - 1 \quad (4.46)$$

となり、 $\zeta_{\text{round}}$  を  $g$  ファクターを用いて表せることがわかる。図 4.4 に、光の周波数と各次数のモードの共振の様子の一例を示した。次数によって共振周波数がずれていて、次数が 1 違うと共振周波数が  $\text{FSR} \times \zeta_{\text{round}}/2\pi$  だけ異なる。なお、FSR は free spectral range の略であり、共振器の隣り合う共振周波数の周波数差、すなわち  $\text{FSR} = c/2L$  である (補遺 B)。つまり、共振器の中で共振するのは、固有モードの光のうち 1 周の位相も共振条件を満たしている次数のモードだけであるということである。

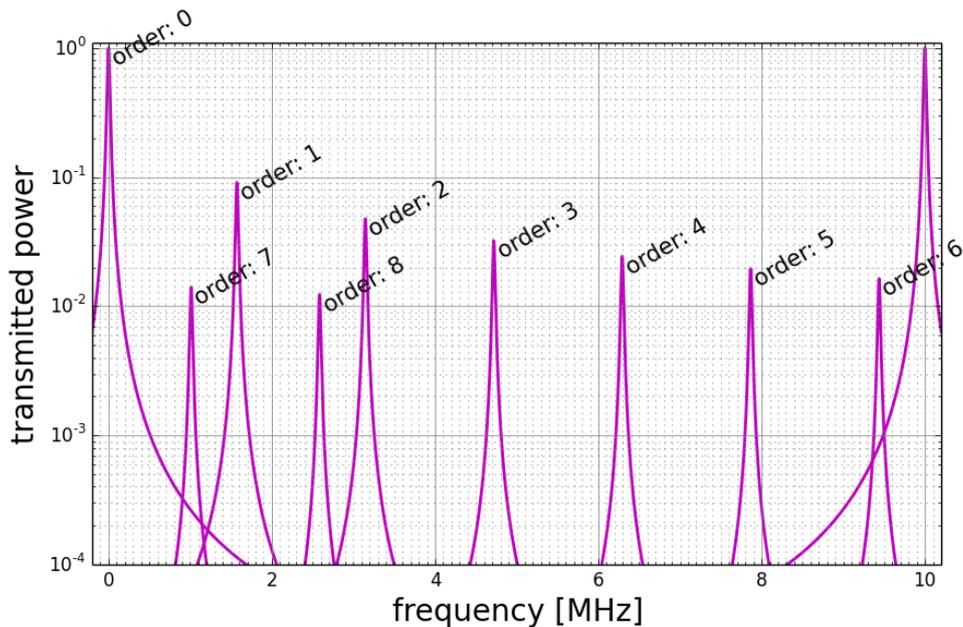


図 4.4: 光の周波数と各次数のモードの共振の様子。周波数は基本モードが共振する周波数を 0 として表した。FSR = 10 MHz,  $\zeta_{\text{round}} = \arccos 0.7$  である。このグラフは、共振器を透過するあるモードの光のパワーが周波数に応じてどう変化するかを示している。

それでは次に、共振器に適切な光を入射することで共振器の中に実際に光を共振させることを考える。例えば基本モードの光を共振させるとしよう。そのためには、共振させたい基本モードと一致したレーザー光を共振器に入射すればよい\*6。しかし、完全にモードが一致した光を入射することは実際には不可能である。そこで、入射光のモードが共振

\*6 周波数あるいは共振器長の制御も当然必要である。

器の固有基本モードとどれだけ一致しているかを考える必要がある。式 (4.19) より HG モードは完全系をなすため、入射光の電場を共振器の固有モードで次のように展開することができる。

$$E_{\text{in}}^{(-)}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{l,m=0}^{\infty} U_{lm}(\boldsymbol{x}, t) E_{lm}. \quad (4.47)$$

ここで、

$$\eta := \frac{|E_{00}|^2}{\sum_{l,m=0}^{\infty} |E_{lm}|^2} \quad (4.48)$$

をモードマッチ率という。入射光のパワー全体のうち、共振器の固有基本モードで表される電場のパワーの割合がどれだけであるかを表している。入射光の伝播の軸やウエスト位置や Rayleigh 長を共振器の固有モードのものとなるべく一致させることで高いモードマッチ率を得ることができ、入射光のなるべく多くの光を共振器で共振させることができるのである。

## 4.4 基本モードと高次モードの干渉

4.2 節で、近軸近似の範囲内で HG モードが完全系をなすことがわかった。それでは完全系をなすこと具体例として、ビームジッター\*7をもっていたりウエスト位置や Rayleigh 長が少しずれているような基本モードの電場が、基準となる HG モードの線型和として実際に表されることをみてみよう。このことは、干渉計型重力波検出器において入射ビームと共振器の固有モードの伝播軸のずれの検出 (wave front sensing; WFS) [33] やモードマッチの制御 (active mode matching) [34] の原理として用いられている。

まず、図 4.5 のようにビームウエストでビームの中心が  $\delta x$  だけずれて伝播方向が  $\delta\theta$  だけ傾いているような基本モードの電場を考える。

$$\begin{bmatrix} z \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta\theta & \sin \delta\theta \\ -\sin \delta\theta & \cos \delta\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z' \\ x' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \delta x \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

で  $[z', x']$  を定義すると、図 4.5 のような基本モードの電場は  $U_{00}(x', y, z', t)$  で表される。 $U_{00}(x', y, z', t)$  を  $\delta x, \delta\theta$  の 1 次までで展開し  $w_0 \gg \lambda$  を用いると、

\*7 ビームの位置や進む方向がふらつくこと。

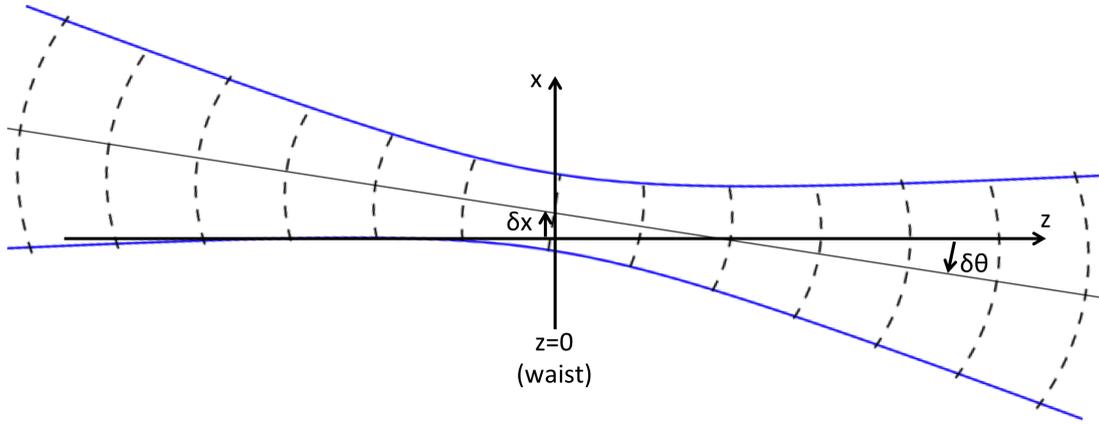


図 4.5: ビームジッターをもつ基本モードの光の模式図。

$$\begin{aligned}
 U_{00}(x', y, z', t) &\simeq \left[ 1 - \frac{2x(z\delta\theta - \delta x)}{w^2(z)} \right] \left[ 1 + ikx\delta\theta - ik\frac{x}{R(z)}(z\delta\theta - \delta x) \right] U_{00}(x, y, z, t) \\
 &\simeq \left[ 1 + \frac{2x}{w(z)} \frac{1 + iz/z_0}{\sqrt{1 + (z/z_0)^2}} \left( \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) \right] U_{00}(x, y, z, t) \\
 &= U_{00}(x, y, z, t) + \left( \frac{\delta x}{w_0} + i\frac{\delta\theta}{\alpha_0} \right) U_{10}(x, y, z, t) \tag{4.50}
 \end{aligned}$$

となる。 $\alpha_0 = 2/kw_0$  である。したがって、ジッターをもつ基本モードは小さな 10 モードの重ね合わせによって表されることがわかる<sup>\*8</sup>。ここで、位置のずれ  $\delta x$  は同位相での重ね合わせ、角度のずれ  $\delta\theta$  は  $90^\circ$  差での重ね合わせで表されていることが見てとれる。

次に、Rayleigh 長が  $z_0 + \delta z_0$  でありウエスト位置が  $\delta z$  である基本モードの電場がどのように書き表されるかを考える。そのような光は  $U_{00}(x, y, z - \delta z, t)|_{z_0 \rightarrow z_0 + \delta z_0}$  で表される。これを  $\delta z_0, \delta z$  の 1 次までで展開すると、

<sup>\*8</sup>  $y$  方向のジッターは 01 モードの重ね合わせで表されることも同様にわかる。

$$\begin{aligned}
& U_{00}(x, y, z - \delta z, t)|_{z_0 \rightarrow z_0 + \delta z_0} \\
& \simeq \left[ 1 - \cos 2\zeta(z) \frac{\delta z_0}{2z_0} + \sin 2\zeta(z) \frac{\delta z}{2z_0} \right] \left[ 1 + \frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} \left( \cos 2\zeta(z) \frac{\delta z_0}{z_0} - \sin 2\zeta(z) \frac{\delta z}{z_0} \right) \right] \\
& \times \left[ 1 + i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \left( \cos 2\zeta(z) \frac{\delta z_0}{z} + \sin 2\zeta(z) \frac{\delta z}{z} \right) \right] \left[ 1 - i \sin 2\zeta(z) \left( \frac{\delta z_0}{2z_0} + \frac{\delta z}{2z_0} \right) \right] \\
& \times U_{00}(x, y, z, t) e^{ik\delta z} \\
& \simeq \left[ 1 + e^{2i\zeta(z)} \left( \frac{2(x^2 + y^2)}{w^2(z)} - 1 \right) \left( \frac{\delta z_0}{2z_0} + i \frac{\delta z}{2z_0} \right) \right] U_{00}(x, y, z, t) e^{i(k\delta z - \frac{\delta z}{2z_0})} \\
& = \left[ U_{00}(x, y, z, t) + \left( \frac{\delta z_0}{2z_0} + i \frac{\delta z}{2z_0} \right) \frac{U_{20}(x, y, z, t) + U_{02}(x, y, z, t)}{\sqrt{2}} \right] e^{i(k\delta z - \frac{\delta z}{2z_0})}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

となる。ここで、定数の位相因子  $\exp[i(k\delta z - \delta z/2z_0)]$  は時刻  $t$  の再定義で消すことができるので無視できる。この表式より、Rayleigh 長のずれやウエスト位置のずれが、20モードと 02モードの重ね合わせで表されることがわかる。ここで、Rayleigh 長のずれ  $\delta z_0$  は同位相での重ね合わせ、ウエスト位置のずれ  $\delta z$  は  $90^\circ$  差での重ね合わせで表されていることが見てとれる。

# 第 5 章

## 光学機械相互作用

光学機械相互作用とは、鏡の機械的運動が電磁場の揺らぎを励起したり、反対に電磁場の揺らぎが鏡の機械的運動を励起したりする相互作用である。光学機械相互作用を扱うオプトメカニクスは近年研究が盛んになってきており [35]、干渉計型重力波検出器においても非常に重要な位置を占めている。この章では、光の空間モードと鏡の剛体運動および弾性運動を考慮した光学機械相互作用の一般論を述べ、そしてその一般論を重力波検出器やそれに関連する分野での具体例に適用して議論するという新しい試みを行う。扱う具体例は、共振器における光ばね効果、干渉計型重力波検出器の量子雑音、Sidles–Sigg 効果、PI といったこれまでに知られている現象に加え、光の高次空間モードを用いた鏡の回転運動測定や弾性モード測定の量子雑音といった今まで議論されていなかった対象も扱う。

### 5.1 一般論

基本モードの単色レーザー光は、基本モードのある周波数  $\omega_0$  に対するコヒーレント状態で表される。ここで、電磁場の状態については補遺 C を参照。つまり、式 (4.34) より電場が

$$\hat{E}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{c}} \left\{ Au_{00} \cos \phi_{00} + \sum_{lm} u_{lm} [\hat{a}_1^{lm}(z, t) \cos \phi_{lm} + \hat{a}_2^{lm}(z, t) \sin \phi_{lm}] \right\} \quad (5.1)$$

と表される。ここでレーザー光のパワーの平均値を  $P$  とすると、

$$P = \frac{c}{8\pi} \cdot 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \langle \hat{E}^2(\mathbf{x}, t) \rangle = \hbar\omega_0 \frac{A^2}{2} \quad (5.2)$$

より\*1、 $A = \sqrt{2P/\hbar\omega_0}$  と表せる。式(5.1)は、 $\hat{E} = \hat{E}^{(+)} + \hat{E}^{(-)}$ , ( $\hat{E}^{(+)} = \hat{E}^{(-)*}$ ) と分解したとき

$$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega_0}{c}} \left\{ AU_{00}(\mathbf{x}, t) + \sum_{lm} U_{lm}(\mathbf{x}, t) [\hat{a}_1^{lm}(z, t) - i\hat{a}_2^{lm}(z, t)] \right\} \quad (5.3)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega_0}{c}} \left\{ AU_{00}(\mathbf{x}, t) + \sum_{lm} U'_{lm}(\mathbf{x}, t; Z) [\hat{a}_1^{lm}(z, t; Z) - i\hat{a}_2^{lm}(z, t; Z)] \right\} \quad (5.4)$$

と書ける。ここで、

$$U'_{lm}(\mathbf{x}, t; Z) = U_{lm}(\mathbf{x}, t)e^{-i(l+m)\zeta(Z)}, \quad (5.5)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1^{lm}(z, t; Z) \\ \hat{a}_2^{lm}(z, t; Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(l+m)\zeta(Z) & \sin(l+m)\zeta(Z) \\ -\sin(l+m)\zeta(Z) & \cos(l+m)\zeta(Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1^{lm}(z, t) \\ \hat{a}_2^{lm}(z, t) \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

を定義して用いた。 $U'_{lm}$  は  $z = Z$  で  $U_{00}$  と位相がそろっている。

以上のように表される光が鏡に反射したときどのような相互作用が起こるのかについて、この節で文献 [17] の方法にならい、さらに詳細に述べる。

### 5.1.1 鏡面の変位による電磁場の励起

図 5.1 のように、鏡面に理想的な球面からの変位がある場合における光の反射を考えよう。理想的な球面の曲率半径は波面の曲率半径と一致しているものとする。変位  $\Delta z$  を、長さの次元を持つ量  $C(t)$  を用いて

$$\Delta z = C(t)f(x, y) \quad (5.7)$$

と書くことにする。すると、反射光  $\hat{E}_{\text{refl}}^{(-)}(\mathbf{x}, t)$  は

$$\hat{E}_{\text{refl}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega_0}{c}} AU_{00} e^{-2ik_0C(t)f(x, y)} + (\text{fluc.}) \quad (5.8)$$

$$\simeq \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega_0}{c}} AU_{00} [1 - 2ik_0C(t)f(x, y)] + (\text{fluc.}) \quad (5.9)$$

と表されることがわかる。ここで、(fluc.) は量子揺らぎの項である。Hermite 多項式は完全系を成すことから、 $f(x, y)$  を Hermite 多項式で

\*1 cgs ガウス単位系を用いている。そのため電場のエネルギー密度は  $E^2/8\pi$  である。インテグラルの前の因子 2 は、磁場のエネルギー密度の分も含めるためのものである。 $A^2/2$  となっているのは、 $\cos^2 \phi$  の時間平均が  $1/2$  であるためである。

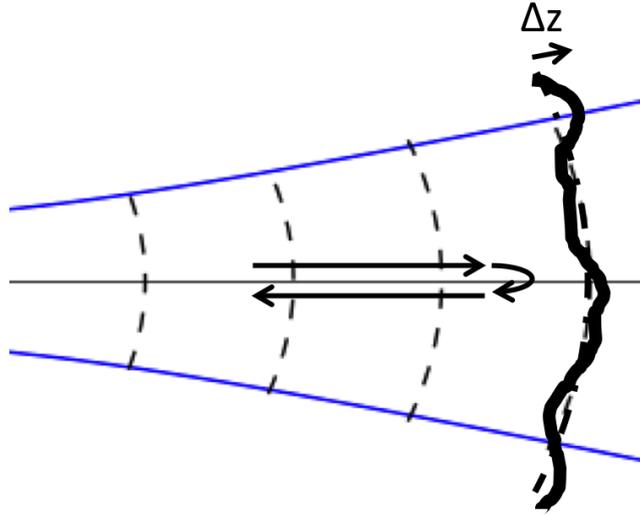


図 5.1: 微小な変位がある鏡面での反射の模式図。

$$f(x, y) = \sum_{lm} b_{lm} \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_{lm} \left( \frac{\sqrt{2}x}{w(Z)}, \frac{\sqrt{2}y}{w(Z)} \right), \quad (5.10)$$

$$b_{lm} = \int_{-\infty}^{\infty} dx dy u_{00}(x, y, Z) u_{lm}(x, y, Z) f(x, y) \quad (5.11)$$

のように展開することができる。 $Z$  は任意であるが、鏡の  $z$  座標の値を  $Z$  として選ぶことにする。この展開を用いると、式 (5.9) はさらに

$$\hat{E}_{\text{refl}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) \simeq \sqrt{\frac{\pi \hbar \omega_0}{c}} A \left[ U_{00} - 2ik_0 C(t) \sum_{lm} b_{lm} U'_{lm}(Z) \right] + (\text{fluc.}) \quad (5.12)$$

と書けることがわかる。この式より、鏡面の変位による揺らぎの項が

$$\hat{a}_2^{lm}(z, t; Z) \rightarrow 2Ak_0 C(t) b_{lm} + \hat{a}_2^{lm}(z, t; Z) \quad (5.13)$$

となることがわかる。つまり、鏡面の変位により HG モードの電磁場が励起されるということである。

### 5.1.2 輻射圧による鏡の運動の励起

まず、揺らぎのあるレーザー光の輻射圧\*2がどのように表されるかを調べるために、

$$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega_0}{c}} A \left[ U_{00} + \sum_{lm} \hat{\beta}_{lm}(t) U'_{lm}(Z) \right] \quad (5.14)$$

で表される光の  $z = Z$  での輻射圧  $p(x, y, t)$  を求めると、

$$p(x, y, t) = \frac{2}{c} \frac{c}{4\pi} \frac{4\pi\hbar\omega_0}{c} \cdot \frac{A^2}{2} \left[ u_{00}^2(x, y, Z) + 2u_{00}(x, y, Z) \sum_{lm} \text{Re}[\hat{\beta}_{lm}(t)] u_{lm}(x, y, Z) \right] \quad (5.15)$$

$$= \frac{2P}{c} u_{00}^2(x, y, Z) + \frac{4P}{c} u_{00}(x, y, Z) \sum_{lm} \text{Re}[\hat{\beta}_{lm}(t)] u_{lm}(x, y, Z) \quad (5.16)$$

を得る。第1項は一定の輻射圧を表し時間的に一定であるため、以降は無視する。

つぎに、鏡面に圧力  $p(x, y, t)$  を受けた鏡がどのように運動するかを調べよう。鏡の中の点  $[x, y, z]$  の光軸方向の変位  $f(x, y, z, t)$  の運動方程式は、

$$\rho \ddot{f} = (f \text{ の空間微分}) + p(x, y, t) \delta(z = \text{surface}) \quad (5.17)$$

と書ける。ここで  $\rho$  は鏡の質量密度である。この運動方程式を鏡の固有モードを使って解くことを考える。固有モード  $F_n(t) f_n(x, y, z)$  が次のような条件

$$(f_n \text{ の空間微分}) = -\kappa_n f_n, \quad (5.18)$$

$$\begin{aligned} \rho \ddot{F}_n &= -\kappa_n F_n + \frac{1}{V} f_{\text{ex}} \quad (V: \text{鏡の体積}) \\ \Rightarrow F_n &= \chi_n f_{\text{ex}}, \end{aligned} \quad (5.19)$$

$$\int_{\text{mirror}} dV f_n f_{n'} = V \delta_{nn'}, \quad (5.20)$$

$$\sum_n f_n(\mathbf{x}) f_n(\mathbf{x}') = V \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (5.21)$$

を満たすとし\*3、

$$f(x, y, z, t) = \sum_n C_n(t) f_n(x, y, z) \quad (5.22)$$

\*2 輻射圧という言葉は名前に反してしばしば「輻射圧による力」という意味で用いられるが、ここでは圧力、つまり単位面積当たりの力を考える。

\*3  $\chi_n$  は固有モードの感受率であり、周波数空間では  $1/M[\Omega_0^2 + i\Omega_0/Q - \Omega^2]$  のように書ける。 $M$  は鏡の質量である。

と分解する。式 (5.21) より

$$p(x, y, t)\delta(z = \text{surface}) = \sum_n f_n(x, y, z) \int \frac{dx'dy'}{V} p(x', y', t) f_n(x', y', z = \text{surface}) \quad (5.23)$$

と書けるので、式 (5.19) より各  $n$  に対して

$$C_n(t) = \chi_n \int dx'dy' p(x', y', t) f_n(x', y', z = \text{surface}) \quad (5.24)$$

を満たす。この式により、鏡面に圧力を与えたときの鏡の応答がわかる。

そして式 (5.16) と式 (5.24) を合わせて、輻射圧の揺らぎによる鏡の運動を考える。光の空間モードと鏡の運動のモードのオーバーラップ因子  $B_{lm,n}$  を

$$B_{lm,n} = \int dx dy u_{00}(x, y, Z) u_{lm}(x, y, Z) f_n(x, y, z = \text{surface}) \quad (5.25)$$

で定義すると、鏡の運動は

$$C_n(t) = \frac{4P\chi_n}{c} \sum_{lm} B_{lm,n} \text{Re}[\hat{\beta}_{lm}(t)] \quad (5.26)$$

のように決まることがわかる。

後の便宜のため、式 (5.7) を

$$\Delta z = \sum_n C_n(t) f_n(x, y, z = \text{surface}) \quad (5.27)$$

のように鏡の固有モードで分解して記述したときの式 (5.12) と式 (5.13) を書いておく。

$$\hat{E}_{\text{refl}}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega_0}{c}} A \left[ U_{00} - 2ik_0 \sum_{lm,n} C_n(t) B_{lm,n} U'_{lm}(Z) \right] + (\text{fluc.}), \quad (5.28)$$

$$\hat{a}_2^{lm}(z, t; Z) \rightarrow 2Ak_0 \sum_n C_n(t) B_{lm,n} + \hat{a}_2^{lm}(z, t; Z). \quad (5.29)$$

### 5.1.3 共振器によるフィードバック

共振器を構成する鏡の面の変位により励起された電磁場は、共振器内で増幅されて鏡の運動を励起する。そしてその励起された運動が再び電磁場を励起する。このように、共振器では 5.1.1, 5.1.2 節で述べた機構が結びつきフィードバックし合う。そこで、共振器内に生まれた電磁場がどのように増幅されるかをここで述べる。

式 (B.2) より、共振器内に生まれた周波数  $\omega$  の  $lm$  モードの光は

$$g(\phi) := \frac{1}{1 - re^{-i\phi}} \quad (5.30)$$

倍だけ増幅される。ここで  $r$  は共振器を構成する鏡の振幅反射率の積であり、 $\phi = 2\omega L/c - (l+m+1)\zeta_{\text{round}}$  である。 $L$  は共振器長であり、 $\zeta_{\text{round}}$  は式 (4.46) のように定まる\*4固有モードの1周の Gouy 位相シフトである。さらに、 $\phi_0 = 2\omega_0 L/c - \zeta_{\text{round}}$  を定義し、

$$g_{lm}(\Omega) := g \left( \phi_0 + \frac{2L}{c}\Omega - (l+m)\zeta_{\text{round}} \right) \quad (5.31)$$

を定義しておく。

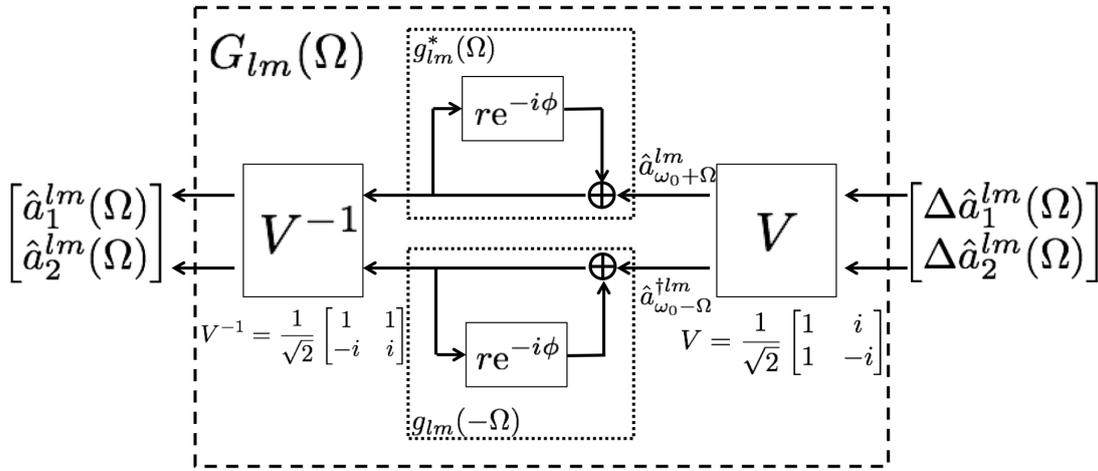


図 5.2: 共振器による電磁場の揺らぎの増幅を表す模式図。

それでは、共振器内に生まれた揺らぎがどのように増幅されるかを図 5.2 のように考えよう。

$$\hat{E}^{(-)} = \sqrt{\frac{\pi \hbar \omega_0}{c}} \sum_{lm} [\Delta \hat{a}_1^{lm}(t) - i \Delta \hat{a}_2^{lm}(t)] U_{lm}'(Z), \quad (5.32)$$

$$\Delta \hat{a}_j^{lm}(z, t) = \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} \left( \Delta \hat{a}_j^{lm}(\Omega) e^{i\Omega(z/c-t)} + \text{h.c.} \right) \quad (j = 1, 2) \quad (5.33)$$

のように表される揺らぎが生まれたとする。あるサイドバンド周波数  $\Omega$  に注目すると、 $\omega_0 \pm \Omega$  の2つの周波数の光に分解されることがわかる。そして、それぞれの周波数の光は周波数に応じて共振器内で増幅される。さらに、増幅された後の電磁場を再び直交位相振幅で表すことができる。したがって共振器で増幅された後の直交位相振幅  $[\hat{a}_1^{lm}(\Omega; Z), \hat{a}_2^{lm}(\Omega; Z)]$  は、

\*4 Fabry–Perot 共振器の場合は式 (4.46) のように  $g$  ファクターで決まるが、3つ以上の鏡からなる共振器の場合は1周の  $ABCD$  行列を考える必要がある [36]。

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{a}_1^{lm}(\Omega) \\ \hat{a}_2^{lm}(\Omega) \end{bmatrix} &= V^{-1} \begin{bmatrix} g_{lm}^*(\Omega) & 0 \\ 0 & g_{lm}(-\Omega) \end{bmatrix} V \begin{bmatrix} \Delta\hat{a}_1^{lm}(\Omega) \\ \Delta\hat{a}_2^{lm}(\Omega) \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_{lm}^*(\Omega) + g_{lm}(-\Omega) & i[g_{lm}^*(\Omega) - g_{lm}(-\Omega)] \\ -i[g_{lm}^*(\Omega) - g_{lm}(-\Omega)] & g_{lm}^*(\Omega) + g_{lm}(-\Omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\hat{a}_1^{lm}(\Omega) \\ \Delta\hat{a}_2^{lm}(\Omega) \end{bmatrix} \quad (5.34) \\
&=: G_{lm}(\Omega) \begin{bmatrix} \Delta\hat{a}_1^{lm}(\Omega) \\ \Delta\hat{a}_2^{lm}(\Omega) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

と書ける。ここで  $V$  は図 5.2 で定義された通りである。

ここで式 (5.34) を用いて、式 (5.13) のように励起された電磁場がどのように輻射圧に寄与するか考える。

$$C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} C(\Omega) e^{i\Omega(t-Z/c)} \quad (5.35)$$

と Fourier 変換すると、

$$\Delta\hat{a}_2^{\dagger lm}(\Omega) = 2Ak_0 C(\Omega) b_{lm} \quad (5.36)$$

となることがわかる。式 (5.34) より、

$$\hat{a}_1^{\dagger lm}(\Omega) = -iAk_0 C(\Omega) b_{lm} [g_{lm}(\Omega) - g_{lm}^*(-\Omega)] =: iAk_0 C(\Omega) b_{lm} G_{lm}^-(\Omega) \quad (5.37)$$

と増幅される。ここで  $G_{lm}^-(\Omega) := g_{lm}^*(-\Omega) - g_{lm}(\Omega)$  を定義した。

$$A \cdot \text{Re}[\hat{\beta}_{lm}(t)] = \int_0^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \left( \hat{a}_1^{lm}(\Omega) e^{i\Omega(z/c-t)} + \text{h.c.} \right) \quad (5.38)$$

であることに注意すると、鏡の  $n$  番目の固有モードへの寄与は式 (5.26) より

$$C_n(\Omega) = \frac{4Pk_0}{c} i\chi_n(\Omega) \sum_{lm} B_{lm,n} b_{lm} G_{lm}^-(\Omega) C(\Omega) \quad (5.39)$$

と表すことができることがわかる。ここで、 $C_n(\Omega)$  と  $\chi_n(\Omega)$  は

$$C_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} C_n(\Omega) e^{i\Omega(t-Z/c)}, \quad (5.40)$$

$$\chi_n C(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \chi_n(\Omega) C(\Omega) e^{i\Omega(t-Z/c)} \quad (5.41)$$

で定めた。

#### 5.1.4 まとめ

この節の内容をブロック図にまとめよう。式 (5.26)、(5.29)、(5.34) より、鏡の  $n$  番目の固有モードの運動と TEM $_{lm}$  モードの電磁場の揺らぎだけに注目したときの系のブロック図は図 5.3 のように書ける。このブロック図は次のように説明される。共振器内の

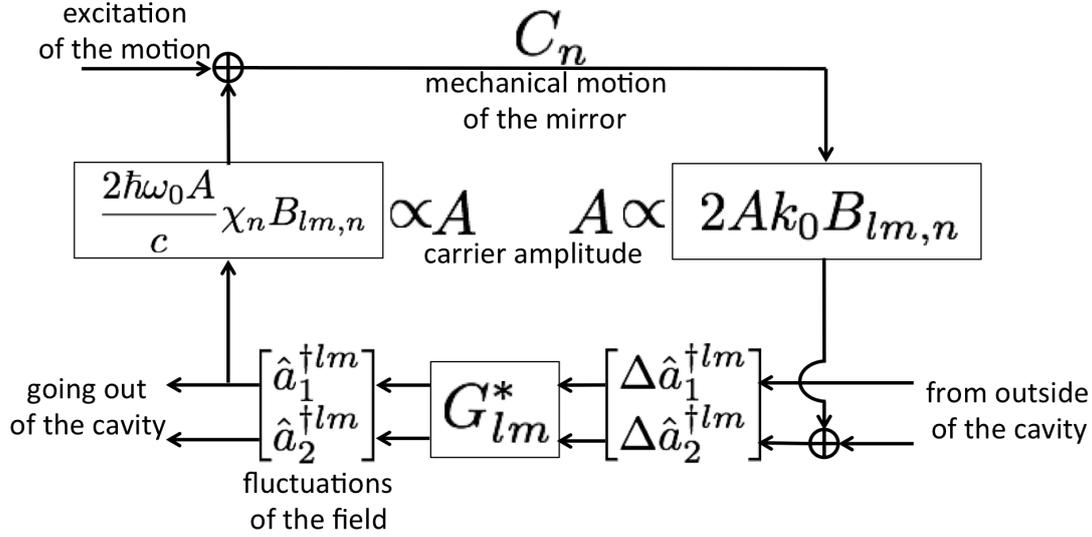


図 5.3: 鏡の  $n$  番目の固有モードと  $TE_{lm}$  モードの相互作用を表すブロック図。共振器内の電磁場の揺らぎ  $\hat{a}_1^{\dagger lm}$  による輻射圧の揺らぎが鏡の運動を励起し、輻射圧以外に起因するものも含めた鏡の運動  $C_n$  が電磁場の揺らぎを励起する。励起された電磁場の揺らぎは共振器に入射してきた光の揺らぎと重ね合わさり、共振器内で行列  $G_{lm}^*$  で表される増幅を受ける。

電磁場の揺らぎによる輻射圧の揺らぎが鏡の運動を励起し、輻射圧以外に起因するものも含めた鏡の運動が電磁場の揺らぎを励起する。励起された電磁場の揺らぎは共振器に入射してきた光の揺らぎと重ね合わさり、共振器内で増幅される。ここで図 5.3 からわかるように、フィードバックループは  $[G_{lm}^*]_{12}$  成分を通じて閉じるため、フィードバックループを形成するためには  $G_{lm}^- (= -2i[G_{lm}^*]_{12})$  が 0 でない必要がある。また、2 箇所のゲインがレーザー光の振幅  $A$  に比例しており、このループのループゲインが共振器内のレーザーのパワー  $P$  に比例することもわかる。

図 5.3 では 1 つの  $n$  と 1 つの  $lm$  についてしか書いていないが、本当は全ての  $n$  と  $lm$  を同時に考える必要がある。つまり、多入力多出力系として扱う必要があるということである。鏡のモードに注目した場合は次のような行列

$$\mathcal{H}_{nn'} := \sum_{lm} \frac{2\hbar\omega_0 A}{c} \chi_n B_{lm,n} \cdot [G_{lm}^*]_{12} \cdot 2Ak_0 B_{lm,n'} \quad (5.42)$$

$$= \frac{4Pk_0 i \chi_n}{c} \sum_{lm} G_{lm}^- B_{lm,n} B_{lm,n'} \quad (5.43)$$

でループが特徴付けられる。光の揺らぎに注目した場合も同様に

$$\mathcal{H}_{lm,l'm'} := \frac{8Pk_0}{c} \sum_n i \chi_n B_{l'm',n} B_{lm,n} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} G_{l'm'}^* \quad (5.44)$$

という行列がループを特徴付ける。しかし実際には 1 入力 1 出力系としての取り扱いで十分な場合が多く、そのような取り扱いが正当化される理由は次節以降の個々の例で触れる。

## 5.2 基本モード: 光ばねと量子雑音

この節では、鏡の光軸方向の並進運動と光の基本モードの揺らぎの相互作用に前節の議論を適用することで、光ばね (および光減衰) 効果と干渉計型重力波検出器の量子雑音の表式を導出する。

並進運動を考えるとすることは、式 (5.25) で

$$f_0(x, y, z) = 1 \quad (5.45)$$

であるモードを考えるとことである。ここで、並進運動のラベルを  $n = 0$  と名付けた。このとき式 (4.18) より、唯一の 0 でない  $B_{lm,0}$  を与えるのは  $l = m = 0$  のときだけで、 $B_{00,0} = 1$  である。したがって、並進運動を考えるとときには基本モードだけを考えれば良い。つまり

$$\mathcal{H}_{0n} = \mathcal{H}_{n0} = \frac{4Pk_0i\chi_0}{c} G_{00}^- \delta_{0n} \quad (5.46)$$

ということである。反対に基本モードの揺らぎを考えると、一般に  $B_{00,0}$  以外にも  $B_{00,n} \neq 0$  である  $n$  が存在する。しかし、鏡を剛体として扱うことのできる周波数帯を考える場合には鏡の運動のモードとして並進運動だけ考えれば良くなる。なぜなら、回転運動 (例えば  $f_1(x, y, z) \propto x$ ) に対しては  $B_{00,n} = 0$  であるからである。よって、特に述べない限りは基本モードの揺らぎを考えるとときには並進運動以外の鏡のモードは無視することにする。

### 5.2.1 光ばね

共振器が共振から少しずれている場合には、共振器長の変化に応じて共振器内の光のパワーが変化し、輻射圧が鏡に対してばねのようにはたらく。この効果を光ばねという。定性的には図 5.4 左のように理解できる。共振点よりも共振器長がやや長い場合には、共振器長が小さくなると輻射圧が増加して復元力を受けるということである。共振器長がやや短い場合に反ばね効果が起きることも同様にわかる。また、共振器長の変化の周波数が共振器内の電場が変化する時間の逆数よりも大きいとき、光減衰や光反減衰が起きることも同様に理解できる。共振器長の変化に対して内部の電場が遅れて変化するような場合には、共振器長が一巡の変化をする間に仕事 ( $\oint F dx$ ) を受ける (図 5.4 右)。共振点より共

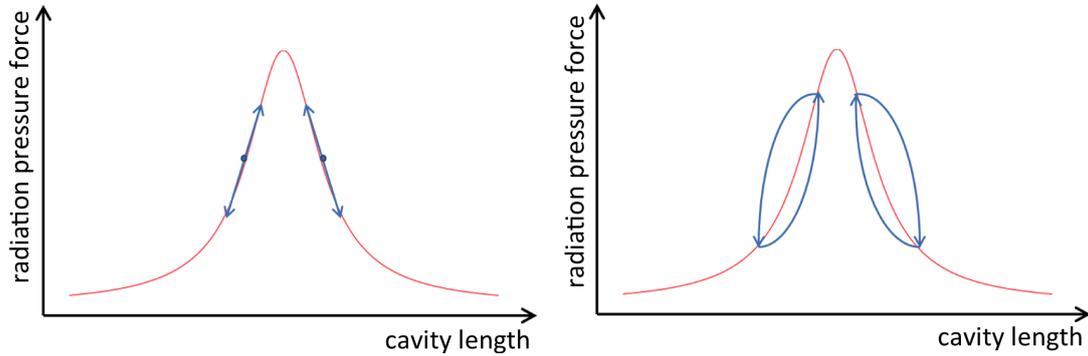


図 5.4: 光ばね (左) と光減衰 (右) を表す模式図。横軸が共振器長変動で縦軸が輻射圧による力である。

共振器長が短い (長い) とき、鏡が一巡で受ける仕事は負 (正) であり、光 (反) 減衰を受けることが見て取れる。以降で、この光ばね効果と光減衰効果を定量的に導出する。

まず  $G_{00}^-(\Omega)$  を求める。 $\theta := 2L\Omega/c$ ,  $\delta\phi_0 \equiv \phi_0 \pmod{2\pi}$  とおき、 $|\theta| \ll 1$ ,  $|\delta\phi_0| \ll 1$  とすると、

$$G_{00}^-(\Omega) = g_{00}^*(-\Omega) - g_{00}(\Omega) \quad (5.47)$$

$$= \frac{1}{1 - re^{i(\phi_0 - \theta)}} - \frac{1}{1 - re^{-i(\phi_0 + \theta)}} \quad (5.48)$$

$$\simeq \frac{2i\delta\phi_0}{(T/2 + i\theta)^2 + \delta\phi_0^2} \quad (T := 1 - r^2) \quad (5.49)$$

と表される。鏡の変位から、変位によって生じる輻射圧による力までの伝達関数、つまりばね定数を  $k(\Omega)$  とおくと、 $\mathcal{H}_{00} = -\chi_0 k(\Omega)$  であるから式 (5.46) よりばね定数は

$$k(\Omega) = -\frac{4Pk_0}{c} iG_{00}^- \quad (5.50)$$

$$= \frac{8Pk_0}{c} \frac{\delta\phi_0}{(T/2 + i\theta)^2 + \delta\phi_0^2} \quad (5.51)$$

$$= \frac{8Pk_0\delta\phi_0}{c} \frac{T^2/4 + \delta\phi_0^2 - \theta^2 - iT\theta}{(T^2/4 + \delta\phi_0^2 - \theta^2)^2 + T^2\theta^2} \quad (5.52)$$

$$\simeq \frac{8Pk_0\delta\phi_0}{c} \left[ \frac{1}{T^2/4 + \delta\phi_0^2} - i\Omega \frac{2LT/c}{(T^2/4 + \delta\phi_0^2)^2} \right] \quad (5.53)$$

と求まる。最後の式変形では  $\theta$  の最低次だけ残した。 $k(\Omega)$  の実部は復元力を表し虚部は減衰力を表すことを思い出すと、式 (5.53) が光ばね効果と光減衰効果の表式になっていることがわかる。式 (5.53) において、 $\delta\phi_0$  の符号 (共振点からどちらにずれているか) によって復元力と減衰力の符号が変わること、復元力と減衰力の相対的な符号から、光ばねと光反減衰、光反ばねと光減衰が組みになって現れることがわかる。また、減衰力の項で

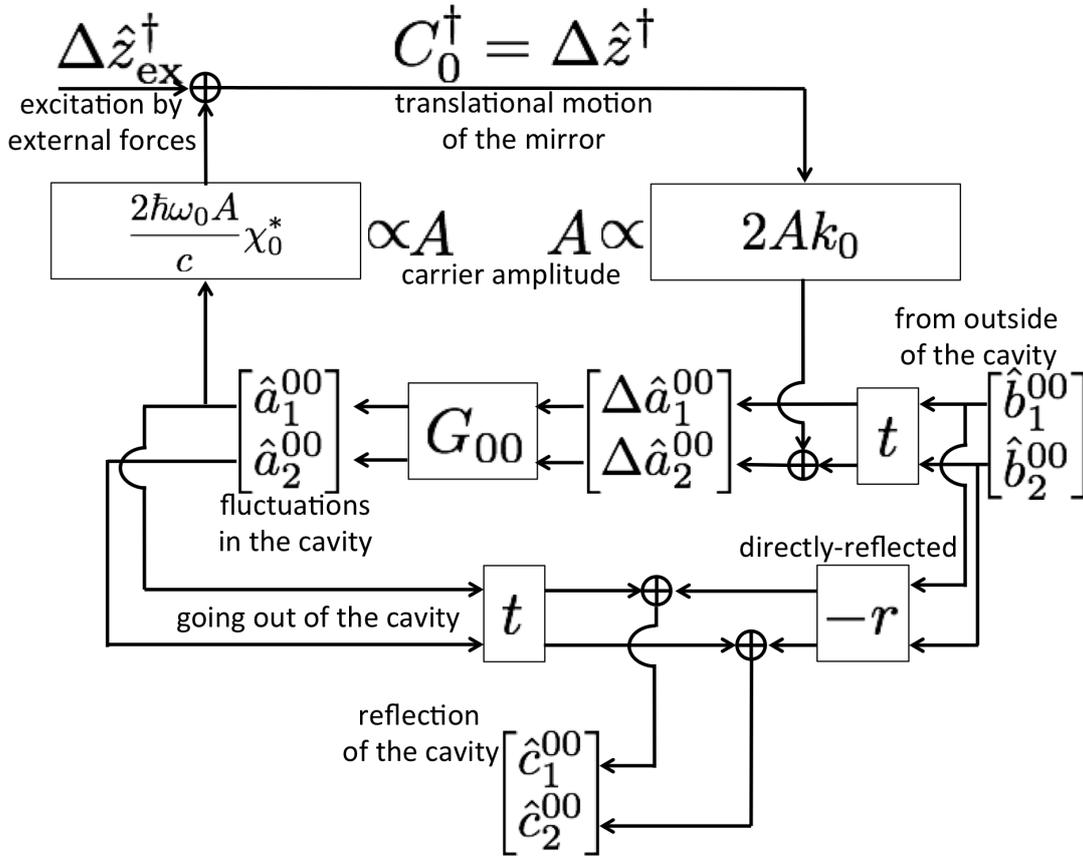


図 5.5: 鏡の並進運動と共振器に入射する基本モードの相互作用を表すブロック図。

$i\Omega$  の係数が  $\Omega$  に依存しないことから、減衰力が速度に比例した減衰力であることがわかる。

### 5.2.2 量子雑音

ここでは、図 5.3 の excitation of the motion と書かれた部分からループに入る鏡の並進運動を、共振器から出てくる基本モードの電磁場を通じて測定することを考える。このとき基本モードの量子揺らぎが測定の量子雑音を与える。共振器の外から入射する光や共振器で反射される光も具体的に書くと、図 5.5 のようなブロック図となる。簡単のため、共振器のエンドミラーの反射率は 1 としロスもないとする。つまりフロントミラーの反射率と透過率について  $r_1 = r, t_1 = \sqrt{T}$  である。並進運動の変位  $C_0(t)$  を  $\Delta \hat{z}(t)$  と名付け、輻射圧以外による並進運動の励起を  $\Delta \hat{z}_{ex}(t)$  と呼ぶことにし、 $\Delta \hat{z}_{ex}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \Delta \hat{z}_{ex}(\Omega) e^{i\Omega t}$  で Fourier 変換を定義する。

### 1 枚の鏡で反射されるだけの場合

まず、単純であり現実的ではないが重要な要素を多く含む例として、鏡が1枚だけあってその反射光の位相を通じて鏡の並進運動を測定する場合を考える。フロントミラーの透過率  $T$  が1であると言い換えることもできる。この場合  $G_{00}$  が単位行列になるため、光学機械相互作用が鏡の運動に対してループを作らない。したがって、

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{c}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{a}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{b}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2Ak_0\Delta\hat{z}_{\text{ex}}^\dagger(\Omega) \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

を得る。ここで、

$$\kappa_0 := -\frac{2\hbar\omega_0 A\chi_0^*}{c} 2Ak_0 = -\frac{8P\omega_0\chi_0^*}{c^2} \quad (5.55)$$

を定義した。鏡は十分共振周波数の低い振り子として懸架されているとし、質量  $m$  の自由質点と見なせるような場合を考えよう。その場合  $\chi_0 = -1/m\Omega^2$  であるから、

$$\kappa_0 = \frac{8P\omega_0}{mc^2\Omega^2} \quad (5.56)$$

となる。反射光の位相揺らぎ  $\hat{c}_2^{00}(\Omega)$  は  $z_{\text{SQL}} := \sqrt{2\hbar/m\Omega^2}$  を使うと

$$\hat{c}_2^{00}(\Omega) = \left[ -\kappa_0\hat{b}_1^{00}(\Omega) + \hat{b}_2^{00}(\Omega) \right] + \sqrt{2\kappa_0} \frac{\Delta\hat{z}_{\text{ex}}^\dagger}{z_{\text{SQL}}} \quad (5.57)$$

となるから、 $\Delta\hat{z}_{\text{ex}}^\dagger$  を測定する際の量子雑音のパワースペクトル  $S_{z,\pi/2}(f)$  は、式 (4.39) より

$$S_{z,\pi/2}(\Omega/2\pi) = \left( \frac{z_{\text{SQL}}}{\sqrt{2\kappa_0}} \right)^2 (\kappa_0^2 + 1) = \frac{z_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_0} (\kappa_0^2 + 1) \quad (5.58)$$

となる。ただし入射光がコヒーレント状態であるとした (補遺 C)。

式 (5.58) の意味を考えよう。第2項は、もともとの入射光が持っている位相揺らぎ成分  $\hat{b}_2^{00}(\Omega)$  に起因しており、それがセンシング雑音となっていることを表している。そのためこの項は散射雑音を表す。散射雑音は周波数依存性がなく、白色雑音であることがわかる。次に第1項は、もともとの入射光の振幅揺らぎ成分  $\hat{b}_1^{00}(\Omega)$  に起因しており、その揺らぎが鏡を実際に振動させることによる変位雑音である。そのためこの項は輻射圧雑音を表すことがわかる。散射雑音である第2項は  $1/\kappa_0$  に比例しており、輻射圧雑音である第1項は  $\kappa_0$  に比例しており、両者はトレードオフの関係にあるため

$$S_{z,\pi/2}(\Omega/2\pi) = \frac{z_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_0} (\kappa_0^2 + 1) \geq z_{\text{SQL}}^2 \quad (5.59)$$

という不等式を満たす。そのため  $z_{\text{SQL}}$  は標準量子限界 (standard quantum limit; SQL) と呼ばれる。SQL は次のように理解できる: 散射雑音を減らし精度よく測定するために

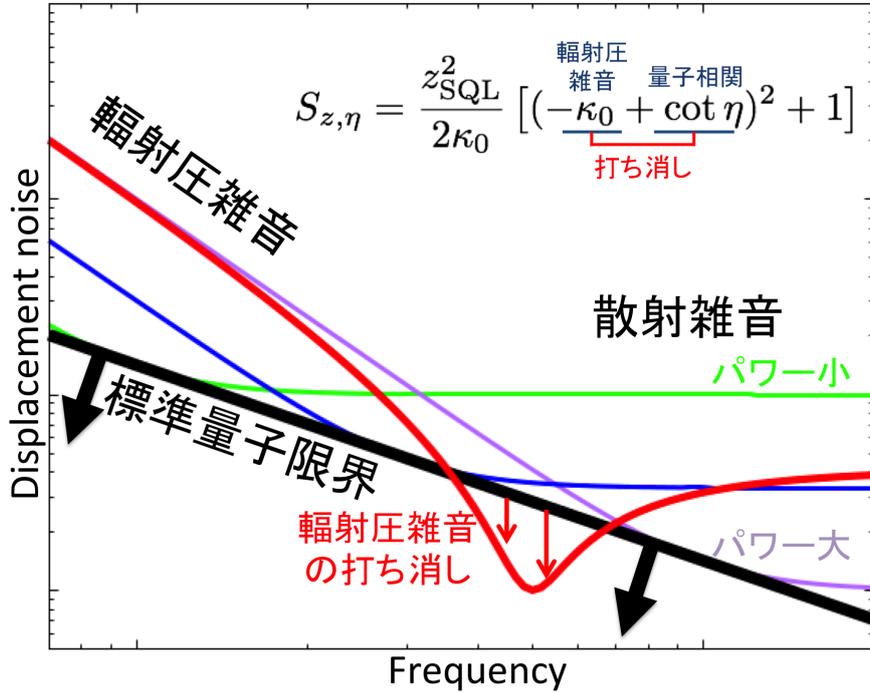


図 5.6: 鏡の変位測定 of 量子雑音と SQL、SQL を超えての感度のスペクトル。パワースペクトルのルートをとったものである。緑、青、紫線の順で入射パワーが大きくなっている。パワーを変化させた場合の量子雑音のスペクトルの包絡線として黒線の SQL が現れる。赤線は、紫と同じパワーでホモダイン測定をあるホモダイン位相で行った場合のスペクトルである。

入射光のパワー  $P$  (つまり  $\kappa_0$ ) を上げると、測定の反作用である輻射圧雑音が大きくなってしまい、最終的な測定の精度は SQL を超えることができない (図 5.6)。

ここまでは、測定したい変位の信号を含んでいる反射光の位相揺らぎ成分を測定することを考えたが、実は位相揺らぎ成分と振幅揺らぎ成分の線型和を測定すると SQL を超えることができる [14]。反射光の 2 つの直交位相振幅の次のような線型和

$$\hat{c}_\eta^{00}(\Omega) = \hat{c}_1^{00}(\Omega) \cos \eta + \hat{c}_2^{00}(\Omega) \sin \eta \quad (5.60)$$

を測定することを考えよう。

$$\hat{c}_\zeta^{00}(\Omega) := \sin \eta \left[ (-\kappa_0 + \cot \eta) \hat{b}_1^{00}(\Omega) + \hat{b}_2^{00}(\Omega) \right] + \sin \eta \sqrt{2\kappa_0} \frac{\Delta \hat{z}_{\text{ex}}^\dagger}{z_{\text{SQL}}} \quad (5.61)$$

であるから、 $\hat{c}_\eta^{00}(\Omega)$  を通じて  $\Delta \hat{z}_{\text{ex}}^\dagger$  を測定する際の量子雑音のパワースペクトル  $S_{z,\eta}(f)$  は、

$$S_{z,\eta}(\Omega/2\pi) = \frac{z_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_0} [(-\kappa_0 + \cot \eta)^2 + 1] \quad (5.62)$$

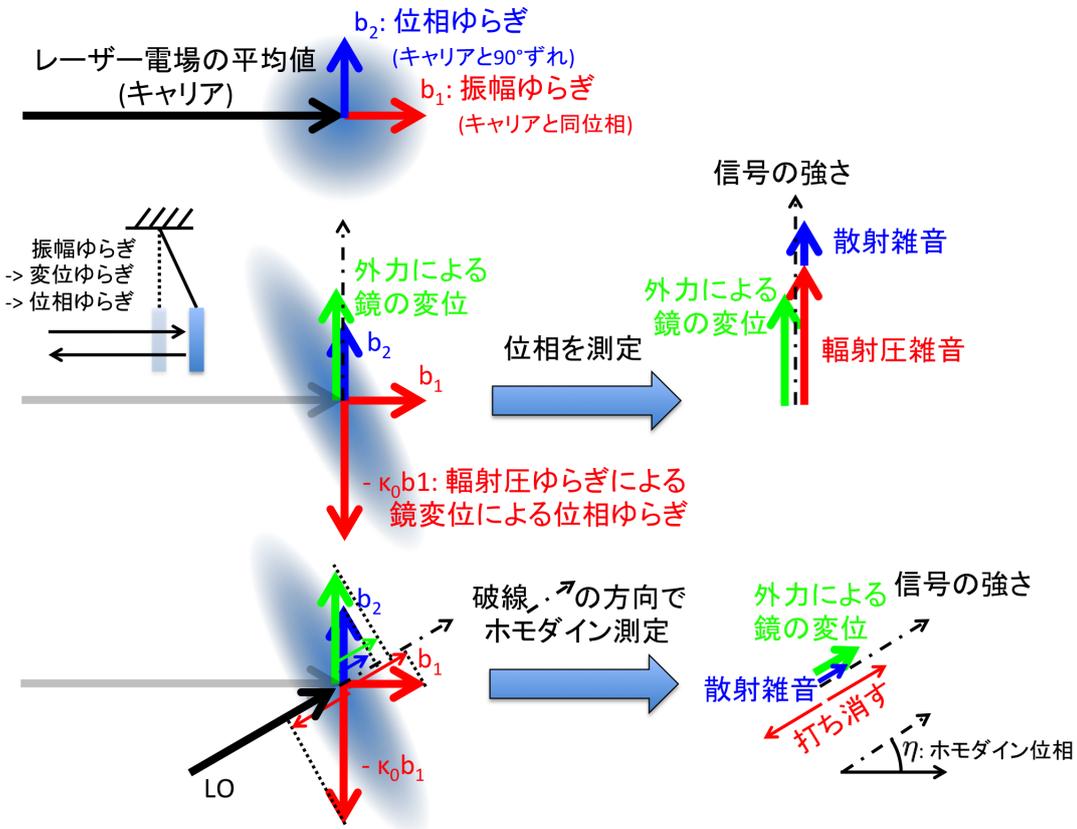


図 5.7: ポンデロモーティブスキージングを受けた電場とその測定の模式図。上段は入射光の様子を表し、中段は反射光の様子と反射光の位相揺らぎの測定、下段は反射光の様子と反射光の揺らぎのホモダイン測定を表している。LO と揺らぎを干渉させてパワーを測定した場合、LO と同じ方向の揺らぎがパワーの揺らぎに寄与するため、測りたいホモダイン位相の分だけ元のキャリア光と位相差を持った LO を用意すれば行いたいホモダイン測定が実現できることがわかる。

となる。この式より、位相揺らぎ成分に混ぜられた振幅揺らぎ成分が輻射圧雑音を打ち消すことで、SQL を超えて低減された量子雑音を得ることができるとわかる (図 5.6)。このように振幅揺らぎと位相揺らぎの線型和を測定できる方法としてホモダイン測定があり、 $\eta$  をホモダイン位相という。ホモダイン測定では、別に用意した基本モードのレーザー光 (ローカルオシレータ; LO) と測定したい基本モードの揺らぎ成分を適切な位相差で干渉させ、干渉した光のパワーを測定することで実現される (図 5.7)。

なぜホモダイン測定によって輻射圧雑音を打ち消すことができるのかを考えよう。それは図 5.7 のように複素平面上で電場の様子を考えると理解できる。振幅揺らぎ  $b_1$  と位相揺らぎ  $b_2$  を持った光が鏡に反射すると、振幅揺らぎによって励起された鏡の並進運動による位相揺らぎ (図中  $-k_0 b_1$ ) を新たに得る。その結果、直交する方向の独立した揺らぎ

$b_1, b_2$  を持っていた入射光は、図 5.7 のように反射によって  $b_1$  と  $-\kappa_0 b_1$  のベクトル和と  $b_2$  という独立した揺らぎをもった光となる。したがって反射光は図 5.7 のようにスクイーズド状態となる。この現象はポンデロモーティブスクイージングと呼ばれる。図 5.7 の中段のように反射光の位相を測定する場合、 $-\kappa_0 b_1$  と  $b_2$  は独立であるからこれら 2 つは単純に平方和で足されて雑音として寄与するが、下段のように  $b_1$  と  $-\kappa_0 b_1$  のベクトル和と直交する方向でホモダイン測定をした場合、 $b_1$  に由来する寄与をなくすることができる。このことは、鏡の運動と電磁場の量子揺らぎの量子相関を使って打ち消していると説明することもできる。

### DRSE 干渉計の場合

実際の重力波検出器に用いられる干渉計に対応するような場合として、離調 (detune) をしたシグナルリサイクリング共振器を含む Fabry–Perot Michelson 干渉計<sup>\*5</sup>を考える [37–39]。このような干渉計を detuned RSE 干渉計 (DRSE 干渉計) と呼ぶ。干渉計のスケーリング則 [39] により、このような干渉計の量子雑音は、1 つの実効的な共振器とそのエンドミラーの並進運動の変位を考えることで求めることができる。実効的な共振器の各種のパラメータ  $P, T, \delta\phi_0$  は次のように決まる [39]。

$$P = 2P_c = \frac{4}{T_{\text{ITM}}} P_{\text{BS}}, \quad (5.63)$$

$$T = \frac{1 - R_S}{1 + R_S + 2\sqrt{R_S} \cos 2\delta\phi_0^S} T_{\text{ITM}}, \quad (5.64)$$

$$\delta\phi_0 = \frac{\sqrt{R_S} \sin 2\delta\phi_0^S}{1 + R_S + 2\sqrt{R_S} \cos 2\delta\phi_0^S} T_{\text{ITM}}. \quad (5.65)$$

ここで、 $P_c, P_{\text{BS}}$  はそれぞれ腕共振器内と BS での光のパワー、 $T_{\text{ITM}}$  は腕共振器の ITM の透過率、 $R_S$  は SEM の反射率、 $\delta\phi_0^S$  は SE 共振器の離調、つまり周波数  $\omega_0$  の基本モードの光が 1 周で得る位相である。また、実効的な ETM の変位  $\Delta z$  や質量  $m$  は次のように決まる。

$$\Delta z = \frac{1}{2} Lh, \quad (5.66)$$

$$m = \frac{1}{2} 2M = M. \quad (5.67)$$

ここで、 $L$  は腕共振器の長さ、 $h$  は重力波の振幅、 $M$  は ITM または ETM の質量である<sup>\*6</sup>。

<sup>\*5</sup> パワーリサイクリング共振器を含んでもよい。

<sup>\*6</sup> 式 (5.63) より実際の腕共振器内のパワーよりも 2 倍大きなパワーを考えているため、輻射圧の効果が実際と同じになるためには質量を 2 倍にする必要がある。さらに、ETM と ITM の相対運動を ETM のみ

以上より DRSE 干渉計の量子雑音を考えるには、対応する実効的な共振器のエンドミラーの変位の測定に対する量子雑音を考えれば良いことがわかった。それでは、実効的な共振器に対する量子雑音の表式を求めよう。図 5.5 で、光学機械相互作用のループのループゲインを表す行列を  $\mathcal{A}$  とすると、共振器内の基本モードの揺らぎは

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{a}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} = G_{00}(1 - \mathcal{A})^{-1} \left( t \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{b}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} + Ak_0L \begin{bmatrix} 0 \\ h^*(\Omega) \end{bmatrix} \right) \quad (5.68)$$

で求めることができる。ここで  $\mathcal{A}$  を求めると、

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\kappa_0 & 0 \end{bmatrix} G_{00} \quad (5.69)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\kappa_0[G_{00}]_{11} & \mathcal{H}_{00}^* \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

であるから、

$$G_{00}(1 - \mathcal{A})^{-1} = \frac{1}{1 - \mathcal{H}_{00}^*} \begin{bmatrix} [G_{00}]_{11} & [G_{00}]_{12} \\ (1 - \mathcal{H}_{00}^*)[G_{00}]_{21} - \kappa_0[G_{00}]_{11}[G_{00}]_{22} & [G_{00}]_{22} \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

と表すことができる。ここで  $\mathcal{H}_{00}^*$  や  $G_{00}$  を求めておくと、

$$\mathcal{H}_{00}^* = \frac{\iota_c}{\Omega^2} \frac{\Delta}{(\gamma - i\Omega)^2 + \Delta^2}, \quad (5.72)$$

$$G_{00} = \frac{c}{2L} \frac{1}{(\gamma - i\Omega)^2 + \Delta^2} \begin{bmatrix} \gamma - i\Omega & -\Delta \\ \Delta & \gamma - i\Omega \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

である。ただし、

$$\gamma = \frac{Tc}{4L}, \quad (5.74)$$

$$\Delta = \delta\phi_0 c/2L, \quad (5.75)$$

$$\iota_c = \frac{4Pk_0}{mL} = \frac{8P_c k_0}{ML} \quad (5.76)$$

を定義した。また、ここでも  $\chi_0 = -1/m\Omega^2$  とした。以上の準備で、図 5.5 より実効的な共振器から反射されてくる電場の揺らぎ  $\hat{c}_j^{00}$  の表式を求めることができ、

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{c}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} \hat{a}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{a}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{b}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} \quad (5.77)$$

$$= \frac{1}{c} \left[ \mathbf{M} \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{b}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} + \mathbf{D}h^*(\Omega) \right] \quad (5.78)$$

---

の運動に押し付けているため換算質量を考える必要がある。よって  $m = 2M \cdot 2M/(2M + 2M) = M$  である。

である。ただし

$$\mathcal{C} = \Omega^2[(\Omega + i\gamma)^2 - \Delta^2] + \Delta\iota_c, \quad (5.79)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\Omega^2(\Omega^2 + \gamma^2 - \Delta^2) - \Delta\iota_c & 2\gamma\Delta\Omega^2 \\ -2\gamma\Delta\Omega^2 + 2\gamma\iota_c & -\Omega^2(\Omega^2 + \gamma^2 - \Delta^2) - \Delta\iota_c \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \Delta\Omega \\ (-\gamma + i\Omega)\Omega \end{bmatrix} \frac{2\sqrt{\gamma\iota_c}}{h_{\text{SQL}}} \quad (5.81)$$

であり、 $h_{\text{SQL}} = \sqrt{8\hbar/ML^2\Omega^2}$  である。この反射光の表式は、例えば文献 [40] と一致している。以上より、共振器へ入射する光がコヒーレント状態だとして、この反射光を式 (5.60) のようにホモダイン測定すると、量子雑音のパワースペクトル  $S_{h,\eta}(f)$  は

$$S_{h,\eta}(\Omega/2\pi) = \frac{[\cos \eta, \sin \eta] \mathbf{M}^t \mathbf{M}^t [\cos \eta, \sin \eta]}{|D_1 \cos \eta + D_2 \sin \eta|^2} \quad (5.82)$$

と求まることがわかる。

式 (5.78) における注意点として、直交位相振幅が共振器内の古典光 (キャリア) を基準にして定義されているため、入射光のキャリアを基準にした直交位相振幅とは異なっている。この2つは、

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1^{00,\text{incident}}(\Omega) \\ \hat{a}_2^{00,\text{incident}}(\Omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 + \Delta^2}} \begin{bmatrix} \gamma & -\Delta \\ \Delta & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{a}_1^{00,\text{intra}}(\Omega) \\ \hat{a}_2^{00,\text{intra}}(\Omega) \end{bmatrix} \quad (5.83)$$

で変換することができる。

式 (5.82) の特別な場合として、RSE の場合 ( $\delta\phi_0^S = \pi/2$ ) を考える。すると  $\delta\phi_0 = 0$  となり、 $\Delta = 0$  となるから、

$$S_{h,\eta}(\Omega/2\pi) = \frac{h_{\text{SQL}}^2}{2\mathcal{K}_0} [(-\mathcal{K}_0 + \cot \eta)^2 + 1] \quad (5.84)$$

を得る。ここで、

$$\mathcal{K}_0 = \frac{2\gamma\iota_c}{\Omega^2(\Omega^2 + \gamma^2)} \quad (5.85)$$

である。この  $\mathcal{K}_0$  の表式より、散射雑音が  $\Omega \gtrsim \gamma$  から悪化し始めることがわかる。式 (5.64) より  $T = T_{\text{ITM}}(1 + \sqrt{R_S})/(1 - \sqrt{R_S})$  となっているから、RSE によって実効的に ITM の透過率が増加しそれに比例して  $\gamma$  も大きくなる。よって、RSE によって干渉計型重力波検出器の周波数帯域を広げることができることがわかる。

### 5.3 1次モード：角度不安定性と回転運動測定

この節では、光軸に垂直な軸を中心とした鏡の回転運動と TEM<sub>10</sub> または 01 モードの揺らぎとの相互作用に 5.1 節の議論を適用することで、Sidles–Sigg 効果 [15, 41] と

光てこのような方法による鏡の回転運動測定の量子雑音の表式 [31] を導出する。また、Sidles–Sigg 効果による鏡の回転運動の不安定性の回避を、アクチュエータの取り付けることのできないミリグラムスケールの鏡に対して実証した実験 [42–44] についても記述する。

光軸に垂直な軸を中心とした鏡の回転運動を考えると、式 (5.25) で

$$f_1(x, y, z) = s_1 x, \quad (5.86)$$

$$f_2(x, y, z) = s_2 y \quad (5.87)$$

であるモードを考えると、ここで、光軸は  $z$  軸であり、 $y$  軸中心の回転を  $n = 1$ 、 $x$  軸中心の回転を  $n = 2$  と名付けた。 $s_1, s_2$  は規格化定数であり、式 (5.20) より

$$V = s_j^2 \int_{\text{mirror}} dV x_j^2 \quad (5.88)$$

$$\Rightarrow s_j^2 = M/I_j \quad (5.89)$$

と決まる。ここで、 $M$  は鏡の質量、 $I_j$  は回転運動  $f_j$  に対応する慣性モーメント  $I_j = \int_{\text{mirror}} dV \rho x_j^2$  である。式 (4.18) より、 $f_1$  に対して唯一の 0 ではない  $B_{lm,1}$  を与えるのは  $l = 1, m = 0$  のときだけであり、 $f_2$  に対しては  $l = 0, m = 1$  のときだけであり、そして

$$B_{10,1} = \int dx dy u_{00}(x, y, Z) u_{10}(x, y, Z) s_1 x \quad (5.90)$$

$$= \frac{s_1 w(Z)}{2} \int dx dy \frac{2x}{w(Z)} u_{00}(x, y, Z) u_{10}(x, y, Z) \quad (5.91)$$

$$= \frac{s_1 w(Z)}{2}, \quad (5.92)$$

$$B_{01,2} = \frac{s_2 w(Z)}{2} \quad (5.93)$$

である。したがって、回転運動  $f_1$  を考えるときには TEM<sub>10</sub> モードの揺らぎだけを、回転運動  $f_2$  を考えるときには TEM<sub>01</sub> モードの揺らぎだけを考えれば良い。

反対に 10/01 モードの揺らぎを考えるとき、一般に  $B_{10,1}$  や  $B_{01,2}$  以外にも 0 でない値を与える  $n$  が存在する。しかし、5.2 節と同様に、鏡を剛体として扱うことのできる周波数帯域を考える場合には鏡の運動モードとして回転運動だけを考えれば良くなる。よって、特に述べない限りはこの節では回転運動以外の鏡の運動モードは無視することにする。

### 5.3.1 角度不安定性

共振器を構成する鏡の並進運動に対して光ばね効果や光減衰効果があったように、回転運動に対しても光学機械相互作用によって(反)復元トルクや(反)減衰トルクが生じる。反復元トルクが鏡を懸架する系の機械的な復元トルクを上回るような場合、その鏡の運動は角度不安定性を生じる。それではここで、Fabry–Perot 共振器の1つの鏡の回転運動に対する(反)復元トルクや(反)減衰トルクの表式を図 5.3 と式 (5.43) から導こう。 $f_1$  に対する相互作用と  $f_2$  に対する相互作用は全く同様であるので、 $y$  軸を中心とした回転である  $f_1$  についてのみ考えることにする。

準備として次のような計算をしておく。 $y$  軸回りの回転角を  $\delta\theta(t)$  とすると、鏡面の  $z$  軸方向の変位  $\Delta z(x, y, t)$  は

$$\Delta z(x, y, t) = C_1(t)s_1x = \delta\theta(t)x \quad (5.94)$$

と表されるので、

$$\delta\theta(t) = s_1C_1(t) \quad (5.95)$$

である。また、式 (5.24) より

$$C_1(t) = \chi_1 \int dx dy p(x, y, t) s_1 x \quad (5.96)$$

$$= s_1 \chi_1 \left( \int dx dy p(x, y, t) x \right), \quad (5.97)$$

$$\Rightarrow \delta\theta(t) = \chi'_1 \left( \int dx dy p(x, y, t) x \right), \quad (5.98)$$

$$\chi'_1 = s_1^2 \chi_1 = M\chi_1/I_1 \quad (5.99)$$

を得る。ここで括弧の中身が  $y$  軸回りの回転に対応するトルクであることに注意すると、 $\chi'_1$  がトルクから回転角までの感受率であることがわかる\*7。

回転角からトルクまでの伝達関数が「ばね定数」 $k_{\text{rot}}(\Omega)$  であるため、その伝達関数を求めよう。式 (5.43) の  $\mathcal{H}_{11}$  を用いて、図 5.3 から考えると

$$\frac{1}{s_1} \times \mathcal{H}_{11} \times s_1 = -k_{\text{rot}}(\Omega)\chi'(\Omega) \quad (5.100)$$

であるから、

$$k_{\text{rot}}(\Omega) = -\mathcal{H}_{11}/\chi'(\Omega) \quad (5.101)$$

\*7 周波数空間では  $M\chi_1/I_1 = 1/I_1[\Omega_0^2 + i\Omega\Omega_0/Q - \Omega^2]$  のように書ける。

のように求めることができる。 $\mathcal{H}_{11}$  を求めるために、まず  $G_{10}^-$  を求めておく。周波数  $\omega_0$  の基本モードが共振しているとする、

$$G_{10}^-(\Omega) = \frac{-2ire^{-i\theta} \sin \zeta_{\text{round}}}{1 - 2re^{-i\theta} \cos \zeta_{\text{round}} + r^2 e^{-2i\theta}} \quad (5.102)$$

$$\simeq \frac{-i}{\tan(\zeta_{\text{round}}/2)} \left( 1 - i\theta \frac{T}{4 \sin^2(\zeta_{\text{round}}/2)} \right) \quad (5.103)$$

が得られる。1行目から2行目の変形では  $|\theta| \ll 1$  と  $(1 - \cos \zeta_{\text{round}}) \gg T^*$ <sup>8</sup> を用いた。次に、 $B_{10,1}$  に現れる  $w(Z)$  を求める。回転運動を考えている鏡の  $g$  ファクターを  $g_1$ 、もう一方を  $g_2$  と置くと、 $w(Z)$  は  $g$  ファクターを用いて、

$$w(Z) = w_0^2 \left( 1 + \frac{Z^2}{z_0^2} \right) \quad (5.104)$$

$$= \frac{2L}{k_0} \frac{\text{sgn}(g_1)g_2}{\sqrt{g_1g_2(1-g_1g_2)}} \quad (5.105)$$

と書ける。ここで、式 (4.40) と (4.41) を用いている。以上の準備で、式 (5.43) より  $\mathcal{H}_{11}$  を求めると、

$$\mathcal{H}_{11} = \frac{4Pk_0i\chi_1}{c} \cdot \frac{-i}{\tan(\zeta_{\text{round}}/2)} \left( 1 - i\theta \frac{T}{4 \sin^2(\zeta_{\text{round}}/2)} \right) \cdot \left( \frac{s_1 w(Z)}{2} \right)^2 \quad (5.106)$$

$$= \chi' \frac{2P}{c} \frac{Lg_2}{1-g_1g_2} \left( 1 - i\Omega \frac{LT/c}{2(1-g_1g_2)} \right) \quad (5.107)$$

となる。 $\zeta_{\text{round}}$  を  $g$  ファクターで表すのに式 (4.44) を用いた。したがって式 (5.101) より、

$$k_{\text{rot}}(\Omega) = -\frac{2P}{c} \frac{Lg_2}{1-g_1g_2} \left( 1 - i\Omega \frac{LT/c}{2(1-g_1g_2)} \right) \quad (5.108)$$

を得る。 $k_{\text{rot}}$  の実部が (反) 復元トルクに対応し虚部が (反) 減衰トルクに対応するので、これが Sidles-Sigg 効果 [15] や (反) 減衰トルク [41] の表式である。

式 (5.108) に関して、 $1 - g_1g_2 > 0$  であることから、 $g_2 > 0$  ならば反復元トルクがはたらき  $g_2 < 0$  ならば復元トルクが働くこと、 $g_2 > 0$  ならば減衰トルクがはたらき  $g_2 < 0$  ならば反減衰トルクが働くことがわかる。光ばねの場合と同様に、復元トルクと減衰トルクの相対符号から、復元トルクと反減衰トルク、反復元トルクと減衰トルクが組みになって現れることがわかる。

<sup>8</sup> 1 周の Gouy 位相が  $2\pi$  から十分離れているということである。 $\zeta_{\text{round}} \rightarrow 2\pi$  では、 $z_0 \rightarrow 0$  となり共振器の固有モードが定まらなくなってしまう。すべての HG モードが共振してしまうということもできる。

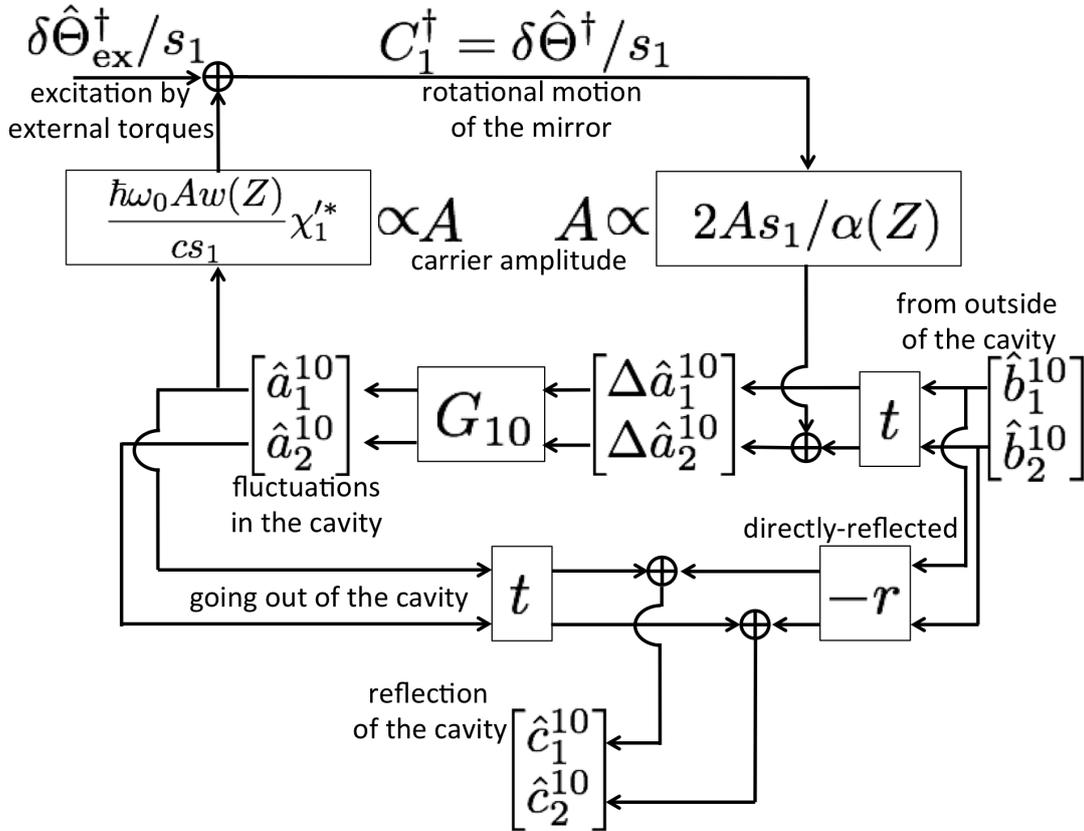


図 5.8: 鏡の回転運動と共振器に入射する 10 モードの相互作用を表すブロック図。直交位相振幅は、共振器内のキャリアと鏡の位置  $Z$  を基準に定められている。

### 5.3.2 回転運動測定の量子雑音

5.2.2 節と同様に、図 5.3 の excitation of the motion と書かれた部分からループに入る鏡の回転運動を、共振器から出てくる 10 や 01 モードの電磁場を通じて測定することを考える。このとき、10 や 01 モードの量子揺らぎが回転運動測定の量子雑音を与えることを本研究は初めて明らかにした [31]。この測定の量子雑音に関わる光学機械相互作用を表すブロック図は完全に図 5.5 と同様であり、図 5.8 となる。図 5.8 を使うことで、鏡の並進運動の測定の量子雑音 (5.2.2 節) と同様に回転運動測定の量子雑音を導くことができる。ここでは、簡単のため 1 枚の鏡に反射された光を測定する場合、つまりフロントミラーの透過率  $T$  が 1 である場合の鏡の  $y$  軸を中心とした回転運動測定を考え、並進運動の測定との類似性を使いながら議論する。

$y$  軸を中心とする回転運動  $f_1$  の変位  $C_1(t)$  は、 $y$  軸回りの回転角  $\delta\hat{\Theta}(t)$  と式 (5.95) の比例関係にあり、輻射圧以外により励起された回転を  $\delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}(t)$  と呼ぶことにする。そして  $\delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Omega}{2\pi} \delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}(\Omega) e^{i\Omega t}$  で Fourier 変換を定義する。フロントミラーの透過率  $T$  が 1 であるので  $G_{10}$  は単位行列であり、光学機械相互作用が鏡の運動に対してループを

作らない。したがって、式 (5.54) と同様に、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{10}(\Omega; Z) \\ \hat{c}_2^{10}(\Omega; Z) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{a}_1^{10}(\Omega; Z) \\ \hat{a}_2^{10}(\Omega; Z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{10}(\Omega; Z) \\ \hat{b}_2^{10}(\Omega; Z) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2A\delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}^\dagger(\Omega)/\alpha(Z) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\kappa_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{10}(\Omega; Z) \\ \hat{b}_2^{10}(\Omega; Z) \end{bmatrix} + \frac{\sqrt{2\kappa_1}}{\Theta_{\text{SQL}}} \begin{bmatrix} 0 \\ \delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}^\dagger(\Omega) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.109)$$

を得る。ここで、 $\alpha(Z) = 2/k_0 w(Z)$  であり、

$$\kappa_1 = -\frac{4Pw(Z)}{c\alpha(Z)}\chi'_1 = \frac{4Pw(Z)}{I_1 c \Omega^2 \alpha(Z)}, \quad (5.110)$$

$$\Theta_{\text{SQL}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{I_1 \Omega^2}} \quad (5.111)$$

である。鏡が自由な剛体と見なせるような場合を考え、 $\chi'_1 = -1/I_1 \Omega^2$  としている。鏡の回転によって励起される 10 モードの光の表式が、式 (4.50) から与えられるものと一致していることが確認できる。また式 (5.109) の表式が基本モードの場合と同様であることから、鏡の回転運動との相互作用によって反射光がポンドロモーティブスキージングを受けていることがわかる。

反射光の 10 モードの揺らぎの表式が得られたので、次に、反射光に対してなんらかの測定を行うことを通じて  $\delta\hat{\Theta}$  を測定することを考えよう。ここでは、光てこのように、鏡から一定の距離だけ離れた場所 ( $z = Z_{\text{meas}}$ ) で反射光の横方向の位置を測定することを考えることにする。 $z = Z_{\text{meas}}$  での反射光の横方向の位置を考えるために、反射光の電場を

$$\hat{E}^{(-)}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{\pi\hbar\omega_0}{c}} \left\{ AU_{00} + \sum_{lm} U'_{lm}(Z_{\text{meas}}) [\hat{c}_1^{lm}(z, t; Z_{\text{meas}}) - i\hat{c}_2^{lm}(z, t; Z_{\text{meas}})] \right\} \quad (5.112)$$

と書いておく。基本モードの光の  $x$  方向の位置は

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx dy x \hat{E}^2}{\int_{-\infty}^{\infty} dx dy \hat{E}^2} \quad (5.113)$$

で求めることができるので、反射光の  $x$  方向の位置  $\delta\hat{x}(t, Z_{\text{meas}})$  は

$$\delta\hat{x}(t, Z_{\text{meas}}) = w(Z_{\text{meas}}) \frac{\hat{c}_1^{10}(Z_{\text{meas}}, t; Z_{\text{meas}})}{A} \quad (5.114)$$

と求められることがわかる。ここで、 $xu_{00} = wu_{10}/2$  を用いた。ただし、位置検出に 4 分割光検出器 (quadrant photodetector; QPD) を用いることを仮定した場合については補遺 D を参照のこと<sup>\*9</sup>。式 (5.114) は、式 (4.50) の一般化になっており、式 (4.50) から幾

<sup>\*9</sup> 光てこでの横方向の位置検出には通常 QPD を用いるが、QPD が検出する量は  $\int_{-\infty}^{\infty} dx dy \text{sgn}(x) \hat{E}^2$  であるため、位置検出を QPD で行うことを仮定した場合以降の議論に修正を加える必要がある。

何学的に得られる結果 [31] と一致している。式 (5.6) より、 $\psi := \zeta(Z_{\text{meas}}) - \zeta(Z)$  を用いて

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1^{10}(z, t; Z_{\text{meas}}) \\ \hat{c}_2^{10}(z, t; Z_{\text{meas}}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi \\ -\sin \psi & \cos \psi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{10}(z, t; Z) \\ \hat{c}_2^{10}(z, t; Z) \end{bmatrix} \quad (5.115)$$

と表すことができるから、測定される量  $\delta\hat{x}(t, Z_{\text{meas}})$  は、

$$\delta\hat{x}^\dagger(\Omega, Z_{\text{meas}}) = \frac{w(Z_{\text{meas}})}{A} [\hat{c}_1^{10}(\Omega; Z) \cos \psi + \hat{c}_2^{10}(\Omega; Z) \sin \psi] \quad (5.116)$$

$$= \frac{2w(Z_{\text{meas}}) \sin \psi}{\alpha(Z)} \left\{ \delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}^\dagger(\Omega) + \frac{\sqrt{2\kappa_1}}{\Theta_{\text{SQL}}} [(-\kappa_1 + \cot \psi) \hat{b}_1^{10}(\Omega; Z) + \hat{b}_2^{10}(\Omega; Z)] \right\} \quad (5.117)$$

と表されることがわかる。式 (5.116) の形を見ると、この測定がホモダイン位相  $\psi$  のホモダイン測定になっていることがわかる。 $\psi$  は、鏡の位置から測定を行う位置まで伝播する間に得る Gouy 位相シフトであるから、光てこのような鏡の回転運動測定では Gouy 位相シフトがホモダイン位相の役割を果たすのである。さらに、横方向の位置検出を行う場所を決めることがホモダイン位相を決めることに対応することもわかる。

測定される量の表式 (5.117) が得られたので、角度  $\delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}$  を測定する場合の量子雑音のパワースペクトルの表式を求めよう。入射光がコヒーレント状態であるとする、式 (4.39) より量子雑音のパワースペクトル  $S_{\Theta, \psi}(f)$  は

$$S_{\Theta, \psi}(\Omega/2\pi) = \frac{\Theta_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_1} [(-\kappa_1 + \cot \psi)^2 + 1] \quad (5.118)$$

と求めることができる。この回転運動測定の量子雑音の表式 (5.118) は、並進運動の場合の表式 (5.62) と全く同じ形をしている。このことから Gouy 位相シフト  $\psi$  がホモダイン位相の役割を果たすことがわかる。また、 $\psi = \pi/2$  のとき

$$S_{\Theta, \pi/2}(\Omega/2\pi) = \frac{\Theta_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_1} (\kappa_1^2 + 1) \geq \Theta_{\text{SQL}}^2 \quad (5.119)$$

であることも同様である。 $\psi = \pi/2$  は、横方向の位置検出をビームウエストで行い<sup>\*10</sup>、入射光が鏡に当たるのはウエストから十分遠いところであるような、通常の光てこの構成の場合に対応する。したがって、そのような場合には量子雑音は  $\Theta_{\text{SQL}}$  を超えることができず、 $\Theta_{\text{SQL}}$  が SQL であることを式 (5.119) は示している。さらに、 $-\kappa_1 + \cot \psi \simeq 0$  である周波数帯では輻射圧雑音の打ち消しによって SQL を超えることができるのも同様である。以上のような類似関係を、表 5.1 にまとめておく。

\*10 通常は散乱雑音のみを気にするため、式 (D.19) から検出位置でのビーム径は小さい方がいい。

表 5.1: 鏡の並進運動測定と回転運動測定の量子雑音の類似関係。この表は、量子雑音の原因となる HG モード、そのモードの揺らぎによって生じる光の揺らぎ、ポンドロモータースクイージング (PS) の表式、ホモダイン測定を特徴付けるパラメータをまとめている。

モード	揺らぎ: $\hat{a}_1$	揺らぎ: $\hat{a}_2$	PS	ホモダイン測定
TEM00	振幅	位相	$\hat{a}_2^{00} \rightarrow -\kappa_0 \hat{a}_1^{00} + \hat{a}_2^{00}$	ホモダイン位相 $\eta$
TEM10	横方向の位置	傾き	$\hat{a}_2^{10} \rightarrow -\kappa_1 \hat{a}_1^{10} + \hat{a}_2^{10}$	Gouy 位相シフト $\psi$

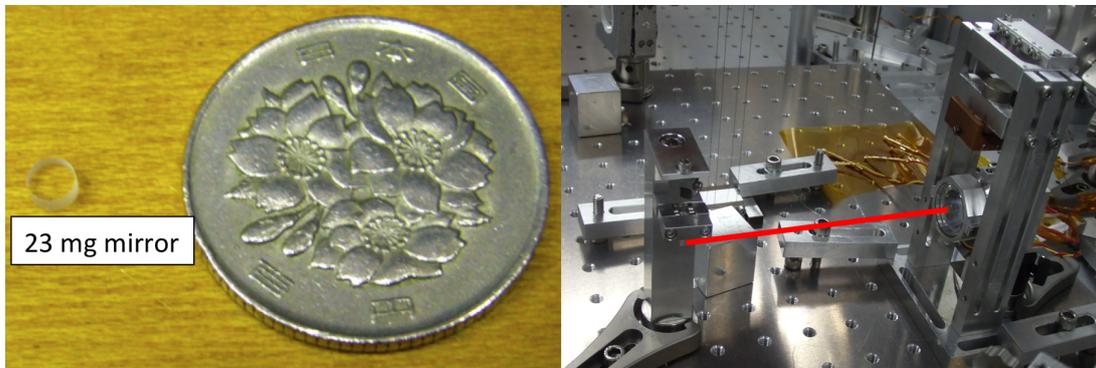


図 5.9: 23 mg 軽量鏡 (左) と軽量鏡を含む Fabry-Perot 共振器 (右) の写真。

### 5.3.3 軽量鏡の回転運動の不安定性回避の実証実験

我々の研究室では、懸架された 23 mg の軽量鏡を一端とする Fabry-Perot 共振器を用いて (図 5.9)、図 5.6 の赤線のような輻射圧雑音の打ち消しの実証を目指した実験を行っている [45–50]。我々の実験においては 5.3.1 節で述べた角度不安定性が非常に深刻になることが知られていた。なぜなら、輻射圧雑音低減の実証に必要な輻射圧雑音に制限された測定は大きな共振器内パワーを要求し、大きな共振器内パワーは回転方向の大きな反ばね効果を生むからである。さらに、軽量鏡は非常に小さい (図 5.9) のでスペースや雑音の観点からアクチュエータを取り付けることができないため、鏡にアクチュエータが取り付けられる場合 [51, 52] のように鏡の回転運動を直接安定化させることができないからである。そこでこの小節では、我々<sup>\*11</sup>が行った回転運動の不安定性回避の実証実験 [42, 43] について 5.3.1 節の角度不安定性とその回避の 1 つの例として述べる。

<sup>\*11</sup> 同研究室の修士 2 年の長野晃士氏と共同で実験を行った。

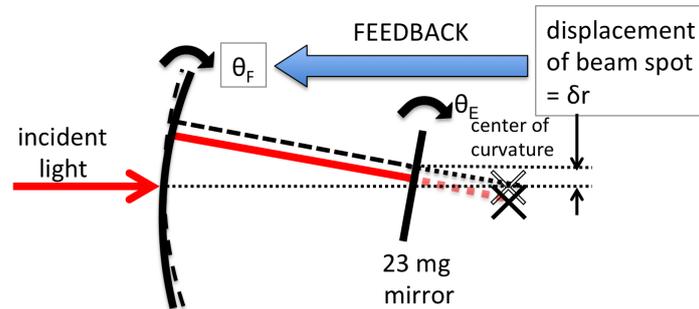


図 5.10: 回転運動の制御法の概念図。軽量鏡上の光の位置  $\delta r$  を測定し、もう一方の鏡の回転  $\theta_F$  へフィードバックする。

### 不安定性と制御方法の概要

我々の実験系の共振器は、平面鏡である軽量鏡がエンドミラーであり、曲率半径  $R$  の鏡がフロントミラーである (図 5.9)。そのため、軽量鏡の回転運動に対する反ばねトルク  $T_{RP}$  の表式は式 (5.108) より

$$T_{RP} = F_{RP}(R - L)\theta_E \quad (5.120)$$

となる。ここで、 $F_{RP}$  は共振器内の光の輻射圧による力  $2P/c$  であり、 $\theta_E$  は軽量鏡の回転角である。また、ダンピング項は次に述べる機械的なダンピングに比べて非常に小さいと考えられるので無視した。

鏡は輻射圧によるトルクの他に、懸架系による機械的な復元トルクを受ける。我々の軽量鏡の場合は鉛直方向から 1 本のファイバーで吊られているため、鉛直軸を中心とした回転 (yaw 方向と呼ぶ) に対する復元トルクが小さく、yaw 方向の回転の不安定性が特に問題となる。よって、今後は yaw 方向の回転のみ考えることにする。yaw 方向の復元トルクのばね定数を  $k_{\text{mech}}$  とすると、yaw 方向の回転の運動方程式は

$$I \frac{d^2\theta_E}{dt^2} = -[k_{\text{mech}} - F_{RP}(R - L)]\theta_E \quad (5.121)$$

となる。したがって、共振器内パワーが増加し  $[k_{\text{mech}} - F_{RP}(R - L)] < 0$  となると軽量鏡の回転運動は不安定になる。

この軽量鏡の回転運動の不安定性を回避するために我々は次のような制御法を考案した [46–48]。この方法は、共振器で共振している光が軽量鏡上でどこに当たっているかを測定し、その測定結果を軽量鏡ではない鏡 (もう一方の鏡と呼ぶ) の回転へフィードバックするという方法である (図 5.10)。図 5.10 からわかるように、このフィードバックによって光の当たる位置を中心に近づけることができ、軽量鏡に加わる輻射圧による反ばね

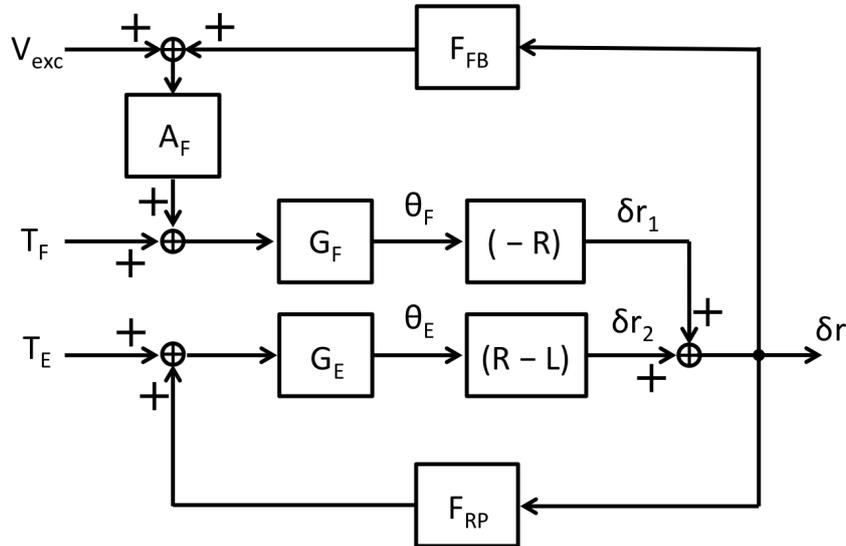


図 5.11: 共振器の鏡の回転運動を記述するブロック図。 $T_{E(F)}$  は軽量鏡 (もう一方の鏡) に作用する外部トルク、 $G_{E(F)}$  は軽量鏡 (もう一方の鏡) のトルクから角度までの感受率、 $\theta_{E(F)}$  は軽量鏡 (もう一方の鏡) の回転角である。 $F_{FB}$  は制御フィルタの伝達関数に対応し、 $A_F$  はアクチュエータ効率、 $V_{exc}$  は制御ループに注入される電圧信号である。文献 [43] より。

トルクを軽減することができる。実際、もう一方の鏡の回転角  $\theta_F$  を考えに入れると、式 (5.121) は

$$I \frac{d^2 \theta_E}{dt^2} = -[k_{mech} - F_{RP}(R - L)] \theta_E - F_{RP} R \theta_F \quad (5.122)$$

$$= -k_{mech} \theta_E + F_{RP} (\delta r_1 + \delta r_2) \quad (5.123)$$

となる。ここで  $\delta r_1 = -R\theta_F$ ,  $\delta r_2 = (R - L)\theta_E$  である。この制御をわかりやすく取り扱うために図 5.11 を考える。 $H := F_{FB} A_F G_F R$  を定義すると、 $\delta r_2$  から  $\delta r := \delta r_1 + \delta r_2$  までの伝達関数が  $1/(1 + H)$  であることがわかるから、式 (5.120) が

$$T_{RP} = \frac{1}{1 + H} F_{RP} (R - L) \theta_E \quad (5.124)$$

のようになり、この制御によって反ばねトルクが  $1/(1 + H)$  倍に低減されることがわかる。

次に、軽量鏡上の光の位置  $\delta r$  を測定する方法について述べる。我々の実験では、図 5.12 のような方法を用いた。この方法では、共振器の透過光を適切なレンズを通した後に QPD で横方向の位置を測定することで  $\delta r$  を測定した。 $x_{lens} = R - L$ ,  $x_{QPD} =$

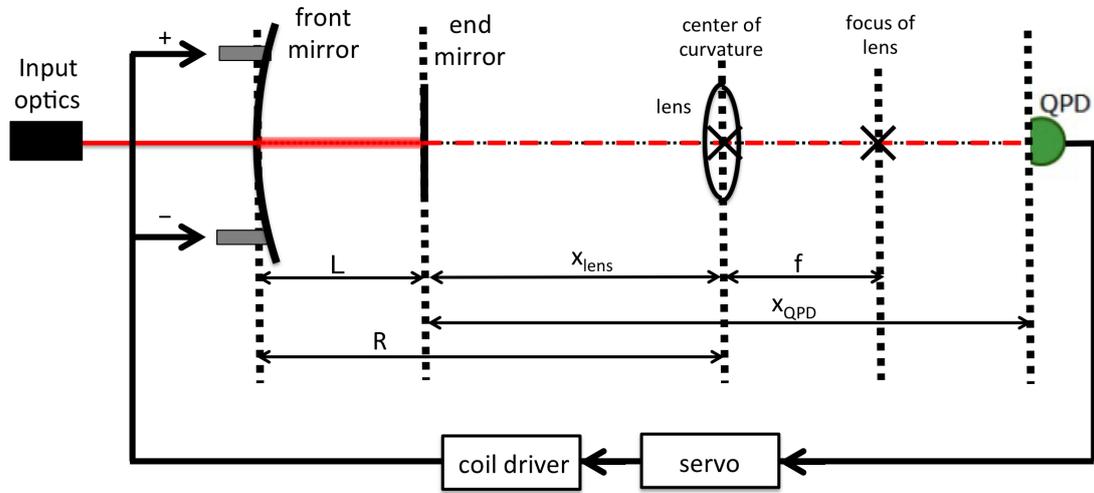


図 5.12: 軽量鏡上の光の位置  $\delta r$  の測定法の概念図。文献 [43] より。

$2(R - L)$ ,  $f = (R - L)/2$  とすれば QPD で測定されるのは軽量鏡上の光の位置  $\delta r$  だけで、透過光の傾きの信号が混入しないことがわかっていたため<sup>\*12</sup>、そのようにレンズと QPD を配置して透過光を測定した。

### 制御の効果の実証法

制御による反ばねトルクの低減を実証する確実な方法は感受率  $\theta_E/T_E$  を測定することだが、軽量鏡にはアクチュエータが付いていないのでトルクを与えることができず、感受率を直接測定することは困難である。そこで我々は、共振器で共振する光自身の輻射圧を使って軽量鏡の回転運動を励起し、 $\delta r/T_F$  の測定<sup>\*13</sup>を通じて感受率  $\theta_E/T_E$  を求める方法を開発した [42, 43]。ブロック図 5.11 より、 $\delta r/T_F$  は

$$\frac{\delta r}{T_F} = \frac{-\frac{G_F R}{1+H} G_E^{-1}}{G_E^{-1} - \frac{1}{1+H} F_{RP}(R - L)} \quad (5.125)$$

と表すことができる。これを用いると、感受率  $\theta_E/T_E$  は

$$\frac{\theta_E}{T_E} = \frac{G_E}{1 - \frac{1}{1+H} G_E(R - L) F_{RP}} \quad (5.126)$$

$$= -\frac{\delta r}{T_F} \frac{1+H}{G_F R} G_E \quad (5.127)$$

<sup>\*12</sup> より一般に、 $x_{\text{lens}} = 2f x_{\text{QPD}} = 4f$  ならば良い。また、反射光に対して WFS を行ってもよい。

<sup>\*13</sup>  $\delta r$  は先述したように測定し、 $T_F$  は注入した  $V_{\text{exc}}$  に比例すると考えられるため、伝達関数  $\delta r/T_F$  は測定可能である。

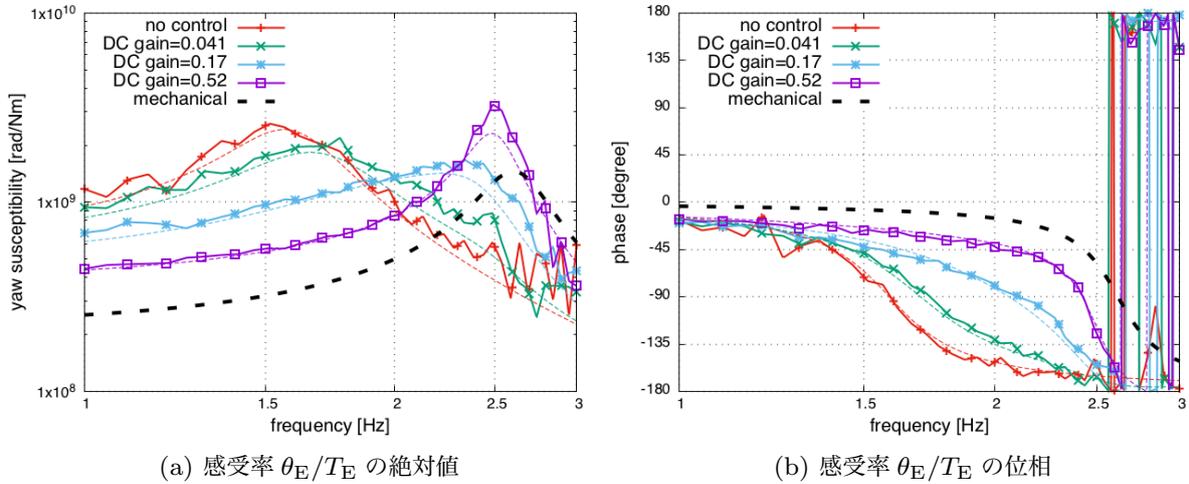


図 5.13: 回転運動の感受率  $\theta_E/T_E$  の測定結果。印付きの色付き実線は測定値で、色付きの点線は理論線を表す。黒の点線は機械的な感受率の理論線  $G_E$  を表す。文献 [43] より。

となることがわかる。 $H$ ,  $G_F$ ,  $G_E$  は補助的な測定で知ることができるので、この式を通じて、測定した  $\delta r/T_F$  から感受率  $\theta_E/T_E$  を得ることができる。

## 結果

我々は上で述べた測定により、軽量鏡の回転運動の不安定性の回避を実証した。その実験結果について述べる。まず、不安定にならないような共振器内パワー ( $[k_{\text{mech}} - F_{\text{RP}}(R - L)] > 0$ ) で、感受率  $\theta_E/T_E$  を測定したところ図 5.13 のような結果を得た。この感受率の測定結果は、輻射圧の反ばねトルクで低下した共振周波数が、回転運動制御のゲインの上昇にしたがって元の機械的な共振周波数へと上昇していく様子がわかる。この結果は、 $\delta r$  を測定し  $T_F$  へフィードバックする我々の回転運動制御が有効に、かつ理論通りにはたらいっていることを示している。

次に、制御なしでは回転運動が不安定になってしまうような共振器内パワー ( $[k_{\text{mech}} - F_{\text{RP}}(R - L)] < 0$ ) での共振器のロックを行った。図 5.14a は、この制御によって通常では不安定になるような共振器内パワーで動作させることができてたことを示している。この図により、共振器内パワーが  $[k_{\text{mech}} - F_{\text{RP}}(R - L)] = 0$  に対応する臨界パワーを超えなければ回転運動制御を切っても共振器のロックが継続し、臨界パワーを超えると回転運動制御を切った直後に共振器のロックが外れることがわかる。また図 5.14b は、 $\delta r/T_F$  の伝達関数の測定によって得られた  $-G_E(R - L)F_{\text{RP}}$  の Nyquist 図を示している。 $-G_E(R - L)F_{\text{RP}}$  は制御がない場合の軽量鏡の回転運動を特徴付けるループ伝達関数なので、この Nyquist 図から、図中の青線では制御がない場合には回転運動が不安定で

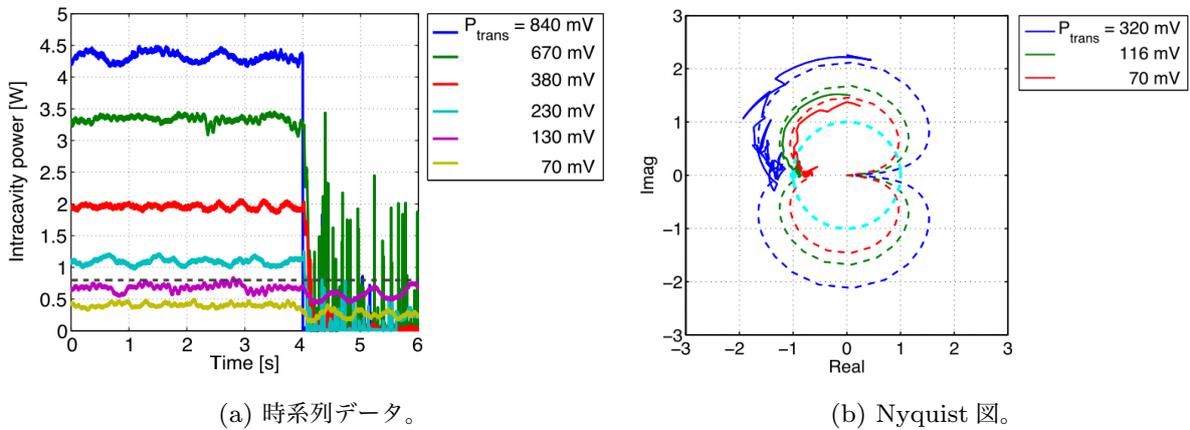


図 5.14: (a) 共振器内パワーの時系列データ。時刻 4 秒において回転運動制御を切っている。黒の点線が臨界パワーである。(b) 軽量鏡の回転運動の Nyquist 図。青線が臨界パワーを超えた場合、緑線と赤線は臨界パワーを超えない場合である。水色の点線が単位円である。文献 [44] より。

あることが見て取れる。

以上のように、我々はアクチュエータの付いていない小さな軽量鏡の回転運動の不安定性をこのような新規の制御手法によって回避できることを実証し、軽量鏡を用いた輻射圧雑音の低減の実証へ向けた大きな障害を取り除いた。

## 5.4 高次モード: PI と機械的振動子の量子状態の転写

この節では、鏡の弾性体としての運動を含む一般の運動と光の高次モード\*<sup>14</sup>の揺らぎとの相互作用を鏡の運動の共振周波数付近で考えることで、パラメトリック不安定性 (parametric instability; PI) [16–18] が導かれることを確認し、さらに光の高次モードのスキューズや高次モードを用いた鏡の運動の測定という新規手法を提案し、その量子雑音の表式を導出や物理的意味の議論を行う。

### 5.4.1 パラメトリック不安定性

PI は、鏡の基材の弾性モードが光との相互作用によって増幅されてしまう不安定性であり、文献 [16] により初めて指摘され、Advanced LIGO において実際に観測された [18]。重力波検出器の腕共振器の中の光のパワーを上げると PI が起こってしまい検出器を観測

\*<sup>14</sup> 基本モードでもよい。一般のモードという意味で用いている。

状態に維持できないため、PI とその回避法の理解は検出器の感度と安定度の向上の双方にとって重要である。

PI は、図 5.3 のようなブロック図を考えることで理解できる [17]。図 5.3 のブロック図において、鏡の 1 つの弾性モード  $n$  に着目し、その共振周波数付近を考えることにする。実際の重力波検出器の鏡の弾性モードの共振の鋭さは  $Q \sim 10^7$  程度であるので複数の共振が同じ周波数で重なることはほぼ考えられないため、注目した弾性モードの運動以外は無視することができる。すると、この弾性モードの運動に対する光学機械相互作用のループのループゲイン  $R_n$  は、式 (5.43) より

$$R_n = \mathcal{H}_{nn} = \frac{4Pk_0i\chi_n}{c} \sum_{lm} G_{lm}^- B_{lm,n}^2 \quad (5.128)$$

と表せる。したがって、この弾性モードの感受率  $\chi_n = 1/M[\Omega_n^2(1 + i/Q_n) - \Omega^2]$  は

$$\chi_n \rightarrow \frac{\chi_n}{1 - R_n} \quad (5.129)$$

$$= \frac{1}{M\Omega_n^2 [1 + \text{Im}(R_n(\Omega_n))/Q_n + i(1 - \mathcal{R}_n)/Q_n] - M\Omega^2} \quad (5.130)$$

と変更を受ける。ここで、パラメトリックゲイン  $\mathcal{R}_n$  を

$$\mathcal{R}_n = \text{Re}[R_n(\Omega_n)] = \frac{4Pk_0Q_n}{M\Omega_n^2c} \sum_{lm} \text{Re}[G_{lm}^-(\Omega_n)] B_{lm,n}^2 \quad (5.131)$$

を定義した。式 (5.130) の分母の虚部より、パラメトリックゲイン  $\mathcal{R}_n$  が 1 を超えると弾性モードのダンピングがアンチダンピングへと転じ、弾性モードが不安定になることがわかる。

パラメトリックゲインが大きな値をとるためには、 $B_{lm,n}$  が大きな<sup>\*15</sup> $lm$  に対して  $\text{Re}[G_{lm}^-(\Omega_n)]$  が大きな値である必要がある。どのような場合に  $\text{Re}[G_{lm}^-(\Omega_n)]$  が大きくなるかは、図 5.15 のように考えるとわかる。 $(l+m)$  次モードの  $\omega_0 - \Omega_n$  のサイドバンドが共振器の共振条件の近くであると、 $\text{Re}[g_{lm}(-\Omega)]$  が大きくなるため、 $\text{Re}[G_{lm}^-(\Omega_n)]$  が大きな値を取りうるのである。

Advanced LIGO で初めて観測された PI は、表 5.2 ようなパラメータ、図 5.16 のようなモードにおいて発生した [18]。腕共振器内パワーが低いうちは、腕共振器の鏡の曲率半径を微調整することで  $\zeta_{\text{round}}$  を調整し、PI に寄与している  $\text{Re}[G_{lm}^-(\Omega_n)]$  を低下させることで PI に対処することができるが、パワーを Advanced LIGO の設計値程度まで上げるとそれだけでは PI を回避することができず、受動または能動ダンピングを行うことで

<sup>\*15</sup>  $B_{lm,n}$  が大きいというのは、 $lm$  次モードの電場の分布と  $n$  次モードの鏡表面の変位の分布が似ているということである。

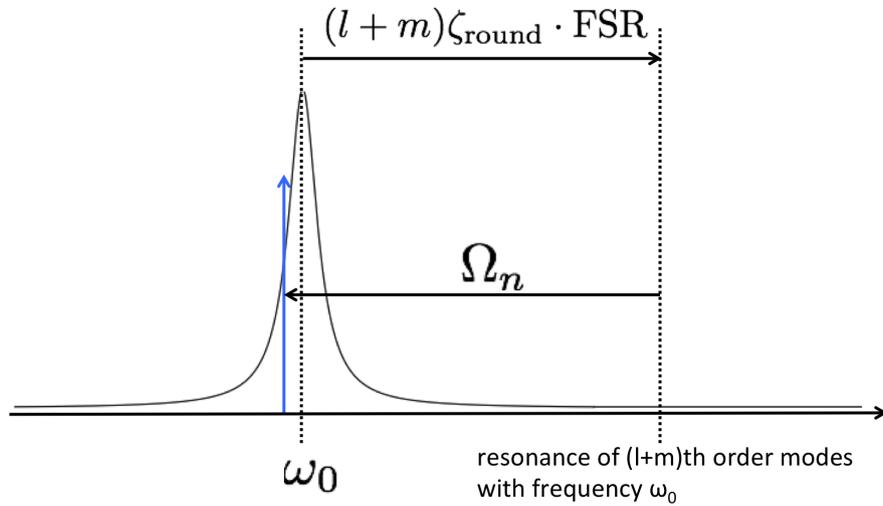


図 5.15: 大きなパラメトリックゲインを与えるような高次モードの共振の模式図。この図では、 $\omega - \Omega_n$  のサイドバンドは最も近い共振で共振条件を満たしているが、一般に FSR の整数倍だけ離れたどの共振でもよい。

表 5.2: Advanced LIGO で観測された PI のパラメータ。文献 [18] より。

$P$	$\Omega_n/2\pi$	$Q_n$	$M$	$\lambda = k_0/2\pi$	$B_{lm,n}$	$\mathcal{R}_n$
50 kW	15.54 kHz	$12 \times 10^6$	40 kg	1064 nm	0.1	2

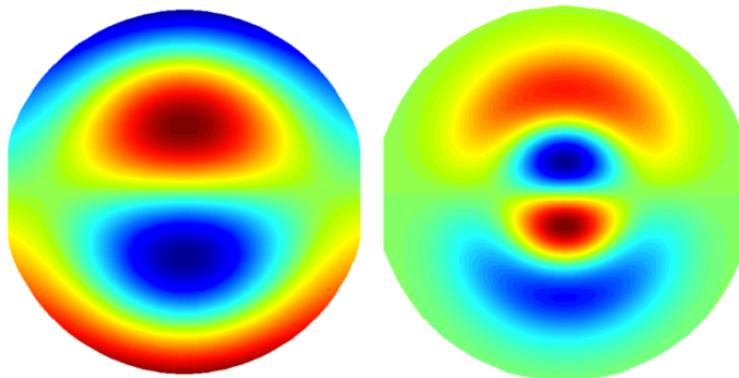


図 5.16: Advanced LIGO で PI を起こした鏡のモード (左) と、その不安定性を引き起こした光の空間モード (右)。左図は鏡の運動モードによる表面の変位を示し、右図は光の空間モードによる輻射圧の分布を示している。文献 [18] より。

実効的な  $Q$  を下げる必要がある [18]。このことから PI は、Advanced LIGO が運悪く観測してしまったのではなく、干渉計型重力波検出器のさらなる感度向上の実現のためには積極的に解決しなければならない問題であることがわかる。なお、Advanced LIGO のような実際の干渉計型重力波検出器での PI を考える際には、 $\text{Re}[G_{lm}^-(\Omega_n)]$  を求めるのに PR 共振器や SE 共振器の影響も考えて計算する必要がある [17]。

### 5.4.2 機械的振動子の量子状態の転写

5.2.2 節や 5.3.2 節と同様に、共振器から出てくる光の高次モードの揺らぎの測定を通じて、対応する鏡の運動モードを測定することを考えることができる。以下で、このような測定における量子雑音という新規な議論を行う。この小節では PI のときと同様に、鏡の運動モード  $n$  の共振周波数  $\Omega_n$  付近を考え、サイドバンド周波数  $\pm\Omega_n$  の高次モードの片方だけが共振器で共振するような場合を取り上げる。そしてそのような場合に運動モードの測定の量子雑音の表式や高次モードが受けるスクイズを明らかにする。なお、5.4.1 節と同様に、鏡のモードの共振は十分鋭く 1 つのモードだけを考えれば十分であるとする。また簡単のため、注目する光の高次モード以外は共振器で共振せず、無視できるような場合を考える<sup>\*16</sup>。このような場合は、1 つの運動モードと 1 つの光の空間モードだけを考えればよいので、図 5.5 や図 5.8 と全く同様のブロック図 5.17 を考えればよい。

特に、 $\omega + \Omega_n$  のサイドバンド (アッパーサイドバンド、 $\omega - \Omega_n$  のサイドバンドはロウワーサイドバンドという) のみ共振する場合、つまり  $g_{lm}(\Omega_n)$  は大きな値を取り  $g_{lm}(-\Omega_n)$  は小さな値を取るような場合を考えることにする。このようなとき、量子雑音は今まで知られていなかった非常に特異な性質を示す場合がある。そのような量子雑音の性質について以下で議論する。

反射光の揺らぎは式 (5.78) と同様に計算できて、

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{c}_1^{lm} \\ \hat{c}_2^{lm} \end{bmatrix} &= \frac{1}{1 - R_n^*} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{TG_{lm}^{+*}}{2} - 1 + R_n^* & -\frac{iTG_{lm}^{-*}}{2} \\ \frac{iTG_{lm}^{-*}}{2} + \frac{iTR_n^*(G_{lm}^{+*2} - G_{lm}^{-*2})}{2G_{lm}^{-*}} & \frac{TG_{lm}^{+*}}{2} - 1 + R_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{lm} \\ \hat{b}_2^{lm} \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2Ak_0 B_{lm,n}}{\sqrt{T}} \begin{bmatrix} -\frac{iTG_{lm}^{-*}}{2} \\ \frac{TG_{lm}^{+*}}{2} \end{bmatrix} C_{n,\text{ex}}^\dagger \right\} \end{aligned} \quad (5.132)$$

となる。ここで、 $G_{lm}^+(\Omega) := g_{lm}^*(-\Omega) + g_{lm}(\Omega)$  を定義した。式 (5.132) を用いれば、反射光の測定を通じて鏡の運動モードの変位を測定する場合の量子雑音の表式を導出することができる。そこで例えば、この式を Advanced LIGO の腕共振器と鏡に適用することで量子雑音の表式を求めると図 5.18 のようになる。このグラフは、共振周波数 23.019 kHz

<sup>\*16</sup> 以下で扱う例ではこの仮定は満たされる。

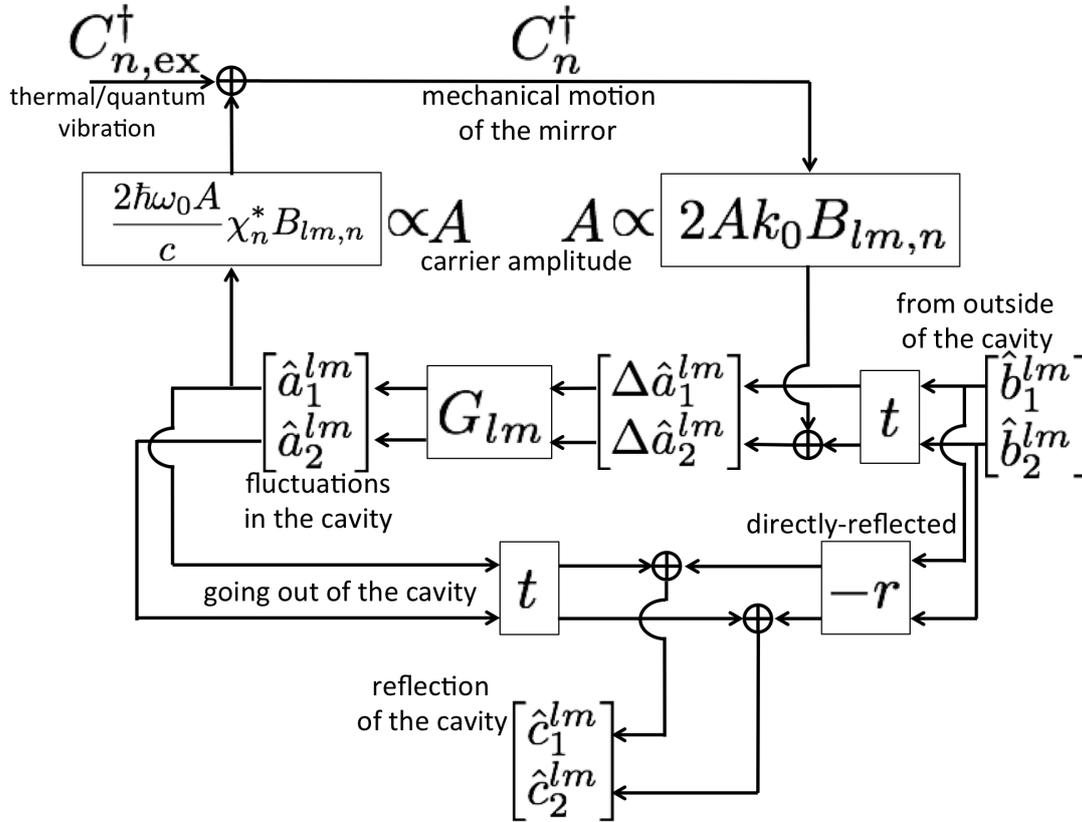


図 5.17: 鏡の運動モードと共振器に入射する  $TE_{lm}$  モードの相互作用を表すブロック図。

表 5.3: 鏡の弾性モード測定の量子雑音の計算に用いたパラメータ。共振周波数  $\Omega_n/2\pi$  やオーバーラップ因子  $B_{lm,n}$  は Advanced LIGO の理論値を用いた [53]。アッパーサイドバンドは共振周波数でちょうど共振器の共振条件を満たすと仮定したが、このことは Advanced LIGO の腕共振器の曲率変動の範囲内 [18, 54] で実現可能である。

$P$	$\Omega_n/2\pi$	$Q_n$	$M$	$\lambda = k_0/2\pi$	$B_{lm,n}$	$\mathcal{R}_n$
34.35 kW	23.019 kHz	$12 \times 10^6$	40 kg	1064 nm	0.42483	-1.000

の鏡の弾性モードの振幅を、ある 3 次の空間モードの測定を通じて測定した場合の量子雑音のパワースペクトルを示している。計算に用いたパラメータは表 5.3 にまとめている。図 5.18 では、synodyne 測定<sup>\*17</sup> [55] を行った場合共振周波数付近において SQL を超えた感度を得ることができ、鏡の弾性モードの基底状態のゼロ点振動を測定するのに十分な

<sup>\*17</sup> ホモダイン測定では  $\hat{c}_1^{lm} \cos \eta + \hat{c}_2^{lm} \sin \eta$  という量を測定するが、synodyne 測定では  $\hat{c}_1^{lm} \cos \eta + \hat{c}_2^{lm} e^{i\phi} \sin \eta$  という量を測定する。

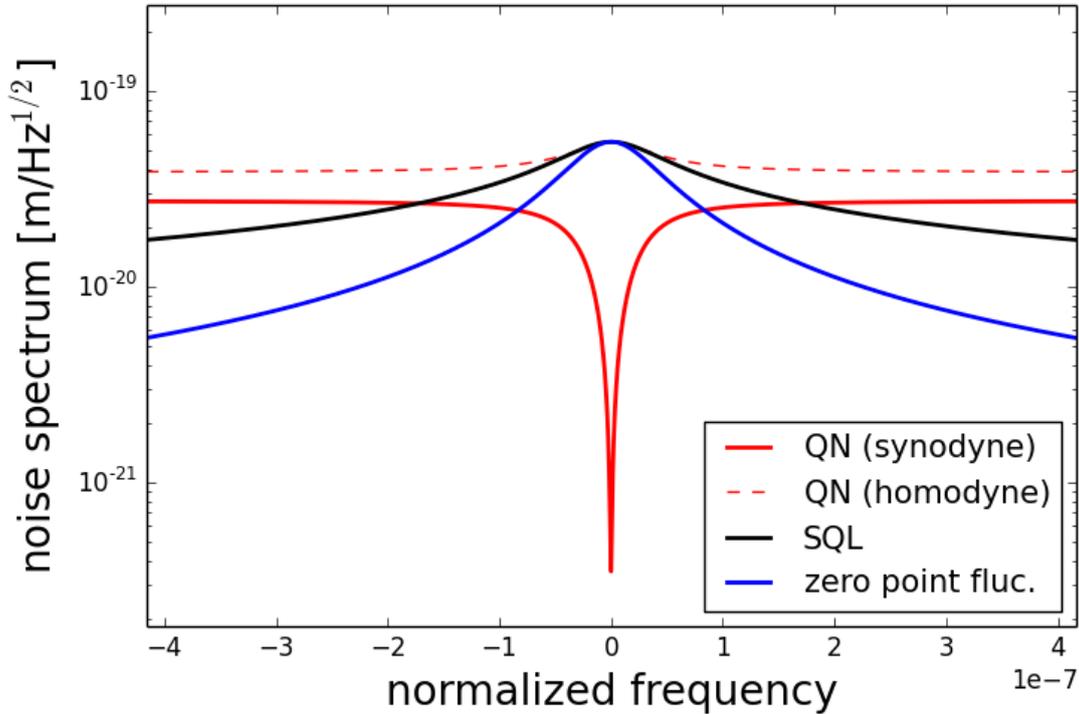


図 5.18: 鏡の弾性モードの測定の量子雑音の例。Advanced LIGO の腕共振器の鏡の弾性モードを 3 次モードの測定を通じて測定した場合の量子雑音。横軸は共振周波数で規格化した周波数である。赤の実線は  $[\hat{c}_1^{lm} + i\hat{c}_2^{lm}]/\sqrt{2}$  を測定した場合、赤の鎖線は  $[\hat{c}_1^{lm} + \hat{c}_2^{lm}]/\sqrt{2}$  を測定した場合の量子雑音である。黒線は SQL であり、青線は弾性モードのゼロ点振動のパワースペクトルである。

感度を与える。機械的振動子のゼロ点振動やそのパワースペクトルについては補遺 E を参照。なお、自由質点と見なせないような周波数帯域も含めて一般に SQL は  $\sqrt{2\hbar|\chi_n|}$  と表される [28, 40]。また、ちょうど共振周波数のところではゼロ点振動と量子雑音の S/N 比が非常に高くなっていることがわかる。以上のような量子雑音の特異な性質は、反射光の受けるスキューピングを見ることでもわかる (図 5.19)。図 5.19 は、反射光の量子揺らぎ  $\hat{c}_1^{lm} \cos \eta + \hat{c}_2^{lm} e^{i\phi} \sin \eta$  の線形結合のパワースペクトルを示している。 $[\hat{c}_1^{lm} + i\hat{c}_2^{lm}]/\sqrt{2}$  という揺らぎ成分は、共振周波数において入射光の揺らぎに由来する揺らぎが 0 になっていることがわかる。 $[\hat{c}_1^{lm} + i\hat{c}_2^{lm}]/\sqrt{2}$  という成分に弾性モードの変位が完全に転写されていると表現することもできる。このことが、ゼロ点振動と光の量子雑音の高い S/N 比の理由である。また図 5.19 は、弾性モードのゼロ点振動の寄与を考えないと、直交する 2 つの方向の反射光の揺らぎがどちらもスキューピングを受けているかのように考えられることも示している。さらに、弾性モードのゼロ点振動を考慮に入れると反射光の揺らぎは散射雑音レベルとなることも示している。つまりこのことから、ポンデロモーティブスキュー

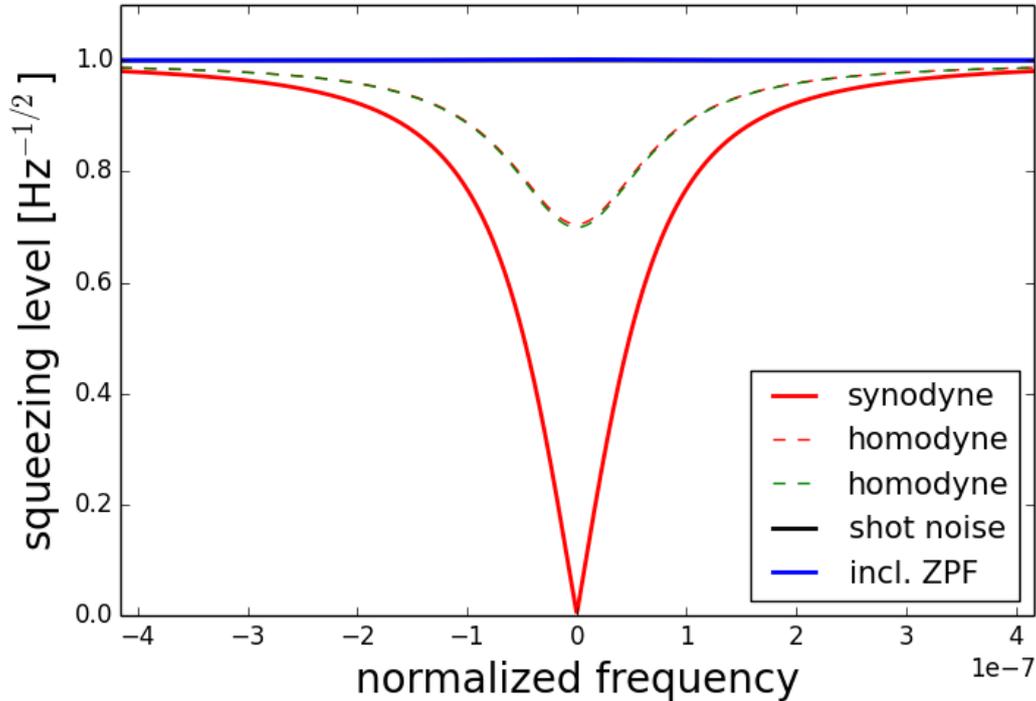


図 5.19: 反射光の量子揺らぎのパワースペクトル。横軸は共振周波数で規格化した周波数である。赤の実線は  $[\hat{c}_1^{lm} + i\hat{c}_2^{lm}]/\sqrt{2}$  という成分、赤の鎖線は  $[\hat{c}_1^{lm} + \hat{c}_2^{lm}]/\sqrt{2}$  という成分、緑の鎖線は  $[\hat{c}_1^{lm} - \hat{c}_2^{lm}]/\sqrt{2}$  という成分の反射光の揺らぎに対する入射光の量子揺らぎの寄与である。黒線は散射雑音レベルの揺らぎ、つまり真空揺らぎのレベルである (青線と重なっている)。青線は弾性モードのゼロ点振動の寄与を考慮に入れた場合の反射光の量子揺らぎである (黒線と重なっている)。青線はどの成分を測定しても同じであった。

ジングを考える際には鏡の振動の量子揺らぎも考慮に入れて反射光の揺らぎを導く必要があること、変位がスクイーズされゼロ点振動以下の位置揺らぎを持つ振動子を用意できれば [56] 直交する 2 つの方向の反射光の揺らぎがどちらもスクイーズを受けた光が得られること、の 2 点がわかる。

以上のような量子雑音の特異な性質を具体例に依らずに理解するために、共振器のフィネスが十分高く、またアップサイドバンドが鏡の運動モードの共振周波数でちょうど共振条件を満たす場合を考えよう。この場合、直交位相振幅を用いるよりもアップサイドバンドとロウワーサイドバンドを用いて考えるほうが簡単であり、図 5.20 のようなブロック図で記述される。高フィネス極限では共振器内にはアップサイドバンドしかないのみならずとみなすことができるためである。このブロック図から、反射光のアップサイドバンドへの入射光の揺らぎの寄与は  $[2/(1 - R_n^*) - 1] \hat{b}_+^{lm}$  であることがわかるので、光学機械相互作用のループゲイン  $R_n^* = -8Pk_0i\chi_n^* B_{lm,n}^2/cT$  が  $R_n^* = -1$  を満たすとき、反射光のアップサイドバンドの揺らぎに入射光の揺らぎの寄与がなくなることがわか

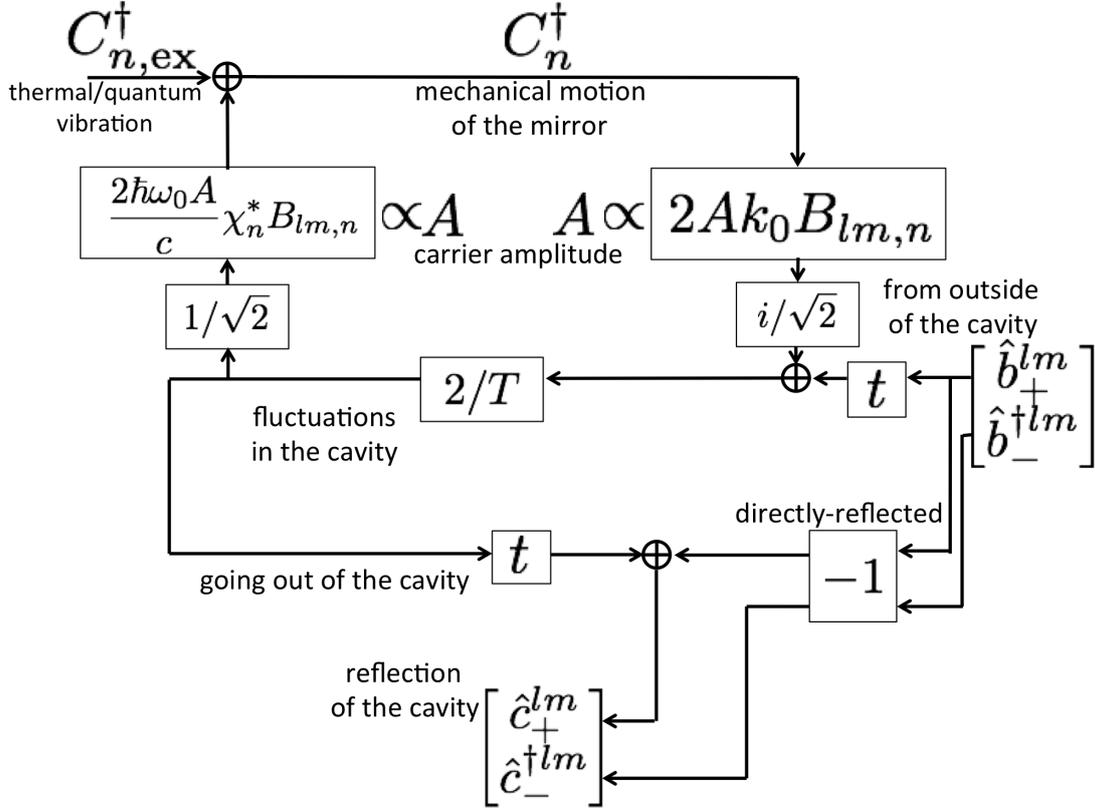


図 5.20: 鏡の運動モードと共振器に入射する TEM<sub>lm</sub> モードの相互作用を表すブロック図を、アッパーとロウワーサイドバンドを用いて簡略化したもの。ここで  $\hat{b}_\pm^{lm} := \hat{b}_{\omega_0 \pm \Omega}^{lm}$  である。 $\hat{c}_\pm^{lm}$  も同様である。高ファイネス極限では、共振器内にはアッパーサイドバンドしかないとみなすことができる。

る。したがってこのとき、理想的には鏡の運動モードの測定の量子雑音は 0 になりうる。 $R_n^*(\Omega_n) = -1 \Leftrightarrow \mathcal{R}_n = -1$  なので、量子雑音のこの特異な振る舞いにはパラメトリックゲインが重要な役割を果たしている。この際、消えてしまった入射光のアッパーサイドバンドの揺らぎは、鏡の運動モードを表す振動子が接触している熱浴へと散逸する (補遺 E)。

一方、このブロック図 5.20 のような状況では式 (5.132) は

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1^{lm} \\ \hat{c}_2^{lm} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - R_n^*} \left\{ \begin{bmatrix} R_n^* & i \\ -i & R_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{lm} \\ \hat{b}_2^{lm} \end{bmatrix} + \frac{2Ak_0 B_{lm,n}}{\sqrt{T}} \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} C_{n,\text{ex}}^\dagger \right\} \quad (5.133)$$

のように簡略化されるため、この式からも  $R_n^* = -1$  のときに量子雑音が 0 になりうるという量子雑音の振る舞いが理解できる。またこの式から、反射光のアッパーサイドバンドの揺らぎのパワースペクトル  $S_+$  は

$$S_+ = \left| \frac{2}{1 - R_n^*} - 1 \right|^2 + \left| \frac{2/\sqrt{T}}{1 - R_n^*} \right|^2 \left( 2iAk_0B_{lm,n}/\sqrt{2} \right)^2 S_{c_n} \quad (5.134)$$

と求めることができる。ここで  $S_{c_n}$  は鏡の運動モードの変位のパワースペクトルである。特に鏡の運動モードが基底状態にあるとき、 $S_{c_n}$  は補遺 E より式 (E.9) であるから、

$$S_+(\Omega/2\pi) = \frac{1}{|1 - R_n^*|^2} \left[ |1 + R_n^*|^2 + \frac{4|R_n|^2}{|\mathcal{R}_n|} \right] \quad (5.135)$$

$$= \begin{cases} 1 & (\mathcal{R}_n < 0) \\ 1 + \frac{8}{|1 - R_n^*|^2} \frac{|R_n|^2}{|\mathcal{R}_n|} & (\mathcal{R}_n > 0) \end{cases} \quad (5.136)$$

となる。ここで  $\Gamma = \Omega_n/Q$  であり、 $|\Omega - \Omega_n| \ll \Omega_n$  とした。このようにして、図 5.19 の青線の振る舞いを理解することができる。

最後に、実際に  $[\hat{c}_1^{lm} + i\hat{c}_2^{lm}]/\sqrt{2}$  という成分を測定する方法について議論する。 $[\hat{c}_1^{lm}(\Omega) + i\hat{c}_2^{lm}(\Omega)]/\sqrt{2} = \hat{c}_{\omega_0+\Omega}$  であるから、 $E_{\text{LO}}^{(-)} \propto e^{i(\omega_0+\Omega)t}$  と表される LO と干渉させてパワーを測定することを考える。すると、パワーの DC 成分から  $[\hat{c}_{\omega_0+\Omega} + \hat{c}_{\omega_0+\Omega}^\dagger]/\sqrt{2}$  という量が測定できることがわかる。また同様に  $E_{\text{LO}}^{(-)} \propto ie^{i(\omega_0+\Omega)t}$  と表される LO と干渉させてパワーを測定することを考えると、パワーの DC 成分から  $[-i\hat{c}_{\omega_0+\Omega} + i\hat{c}_{\omega_0+\Omega}^\dagger]/\sqrt{2}$  という量が測定できることがわかる。これらの量の測定を通じて、鏡の運動モードの変位のそれぞれ  $\cos \Omega t$  成分または  $\sin \Omega t$  成分を測定することができる。

以上より鏡の運動モードの測定の量子雑音を 0 にすることが可能であることがわかったが、鏡の運動モードに作用する外力の測定の雑音を 0 にすることはこの方法ではできない。なぜなら、運動モードの量子揺らぎ自体が外力の測定に対する雑音になってしまうからである。このことは、文献 [57] の式 (72) 付近の議論と一致している。



# 第 6 章

## 結論・展望

### 6.1 本研究の結論

本研究では、干渉計型重力波検出器における光学機械相互作用を統一的、一般的に議論した。より詳しく言えば、鏡の一般の運動モードと光の一般の空間モードの光学機械相互作用を、ブロック図を導入することで一般的に議論した。そしてその光学機械相互作用の一般論を具体的な運動モードや光の空間モードに適用することで、共振器の光ばね効果、干渉計型重力波検出器の量子雑音、Sidles–Sigg 効果、パラメトリック不安定性といった、干渉計型重力波検出器の感度や安定性に深く関わっている現象を再導出し、これらの現象の間に新たな統一的な見方を与えた。そればかりではなく、この統一的な見方を利用することで、鏡の回転運動測定の量子雑音、鏡の弾性運動測定の量子雑音、これらに伴った光の高次空間モードのポンデロモーティブスキージングといった、これまで考えられていなかったものを明らかにした。とくに鏡の回転運動測定の量子雑音 (5.3.2 節) では、反射する鏡の位置から反射光を測定するまでの Gouy 位相シフトがホモダイン位相の役割を果たすことを導いた。また鏡の弾性運動測定の量子雑音 (5.4.2 節) では、鏡の弾性モードの変位を共振器の反射光の測定を通じて測定する場合の量子雑音が 0 になるという特異な振る舞いを示すことを、Advanced LIGO の腕共振器のパラメータを用いた具体的な計算から示し、腕共振器のフィネスが高い場合での簡略化したブロック図を用いた理論計算から量子雑音の特異な振る舞いの物理的な解釈を示した。その解釈とは、共振器からの反射光の揺らぎが鏡の運動モードの量子揺らぎによって置き換わっているというものである。

### 6.2 今後の展望

干渉計型重力波検出器の量子雑音の研究という立場では次のような展望が考えられる。一般的な鏡と光のモードを取り扱ったため、鏡の並進運動と入射光の基本モードの揺ら

ぎ以外の揺らぎが重力波検出器の検出ポートにやってくる基本モードの揺らぎへ流入し、重力波検出器の量子雑音へ寄与するかを見積もることが可能となる。具体的には、スクイズを受けた真空場の注入の際のモードマッチの不完全性によって生じる(アンチ)スクイズされた高次モードの影響の見積もりや、高次モードの真空揺らぎが鏡の弾性モードを経由して基本モード揺らぎへ流れ込むことの影響の計算といったことがある。

パラメトリック不安定性に関しては、このような統一的な解析を通じて、光ばねに伴う不安定性や Sidles-Sigg 不安定性の回避で使われているような手法をパラメトリック不安定性の回避に応用する方法を考えることが可能である。

鏡の弾性モード測定の量子雑音において発見した量子雑音の特異な振る舞いについては次のようなことが考えられる。本研究では、鏡の運動モード測定の量子雑音が0になるということを、鏡の弾性モードを光の高次空間モード揺らぎを通じて測定する場合の量子雑音の議論において指摘した。しかし、必ずしも弾性モードや高次空間モードである必要はなく、ある運動モードの機械的共振周波数において、アップサイドバンドのみが共振器で共振すればよい。また、ある運動モードの変位を共振周波数付近で量子雑音0で測定することが可能であるということは、測定結果をなんらかの方法でフィードバックやフィードフォワードすることで、振動子の冷却にこの手法を応用することができると考えられる。例えば図 5.20 において、 $\hat{c}_+^{lm}$  を  $\hat{b}_+^{lm}$  へフィードフォワードする、 $\hat{c}_+^{lm}$  の測定結果を使って振動子をアクチュエートしフィードバックするといったものである。このような手法を用いた振動子の冷却については、さらなる研究が必要であろう。

# 補遺 A

## パワースペクトル

パワースペクトルとは、時間的に変化する物理量の揺らぎを周波数ごとに分解したものである。メートル [m] で表される物理量のパワースペクトルならば [m<sup>2</sup>/Hz] の単位で表される。また重力波の分野では、パワースペクトルの平方根を取った量が周波数ごとの揺らぎや雑音を表すのによく用いられ、こちらは [m/√Hz] の単位をもつ。

物理量  $x(t)$  のパワースペクトルを考えよう\*<sup>1</sup>。  $x$  は定常的であり、また平均値は 0 であるとする。有限時間の Fourier 変換

$$x_T(\Omega) = \int_{-T/2}^{T/2} dt x(t) e^{-i\Omega t} \quad (\text{A.1})$$

を考えたとき、

$$S_x(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle x_T^\dagger(2\pi f) x_T(2\pi f) + x_T(2\pi f) x_T^\dagger(2\pi f) \right\rangle \quad (\text{A.2})$$

で定義される  $S_x$  を (片側) パワースペクトル密度という\*<sup>2</sup>。ここで、 $\langle \cdot \rangle$  は揺らぎのアンサンブル平均を表す。パワースペクトル密度は、次式で定義される自己相関関数  $C_x(\tau)$  と Fourier 変換で移り合う関係にある [58]。

$$C_x(\tau) = \frac{1}{2} \langle x(t)x(t+\tau) + x(t+\tau)x(t) \rangle, \quad (\text{A.3})$$

$$S_x(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_x(\tau) e^{-2\pi i f \tau}, \quad (\text{A.4})$$

$$C_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} df S_x(f) e^{2\pi i f \tau} = \int_0^{\infty} df S_x(f) \cos(2\pi f \tau). \quad (\text{A.5})$$

\*<sup>1</sup>  $x(t)$  は古典的でも量子的でもいい。

\*<sup>2</sup> 両側パワースペクトル密度は片側の 1/2 である。その分、周波数で積分して分散を求める際には負の周波数側も積分する必要がある。重力波の分野では片側パワースペクトル密度が用いられている。

自己相関関数の  $\tau = 0$  の場合は  $x$  の分散  $\langle x^2(t) \rangle$  になるため、分散はパワースペクトル密度  $S_x$  を用いて、

$$\langle x^2(t) \rangle = \int_0^\infty df S_x(f) \quad (\text{A.6})$$

と表すことができる。この式により、ある周波数帯域での物理量の分散への寄与をパワースペクトル密度が表している、ということがわかる。

同様に、物理量  $x(t)$  と  $y(t)$  のクロススペクトル密度  $S_{xy}$  が次のように定義できる。

$$S_{xy}(f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\langle x_T^\dagger(2\pi f) y_T(2\pi f) + y_T(2\pi f) x_T^\dagger(2\pi f) \right\rangle. \quad (\text{A.7})$$

$S_x = S_{xx}$  であり、パワースペクトルはクロススペクトルの特別な場合である。パワースペクトルのときと同様に相互相関関数  $C_{xy}(\tau)$  を定義すると、クロススペクトル密度と相互相関関数は Fourier 変換で移り合う [58]。

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \langle x(t)y(t+\tau) + y(t+\tau)x(t) \rangle, \quad (\text{A.8})$$

$$S_{xy}(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau C_{xy}(\tau) e^{-2\pi i f \tau}, \quad (\text{A.9})$$

$$C_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} df S_{xy}(f) e^{2\pi i f \tau} = \int_0^\infty df S_{xy}(f) \cos(2\pi f \tau). \quad (\text{A.10})$$

クロススペクトルは、2つの物理量の間での周波数ごとの相関を表していることがわかる。また、

$$S_{xy}(f) = S_{yx}^*(f), \quad (\text{A.11})$$

$$C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau) \quad (\text{A.12})$$

の関係を満たす。式 (A.7) は形式的に

$$\delta(f - f') S_{xy}(f) = \langle x^\dagger(2\pi f) y(2\pi f') + y(2\pi f') x^\dagger(2\pi f) \rangle \quad (\text{A.13})$$

と書き表せる。ここで

$$x(\Omega) := \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(\Omega) \quad (\text{A.14})$$

である。

# 補遺 B

## Fabry–Perot 共振器

Fabry–Perot 共振器とは、2 枚の向き合った鏡からなる共振器である。鏡の間を光が何度も往復することで光が内部で増幅される。この章では、Fabry–Perot 共振器に対して光がどのように振る舞うかを調べ、また Fabry–Perot 共振器の固有モードの表式 (4.40)、(4.41) の導出を行う。

### B.1 様々な関係式

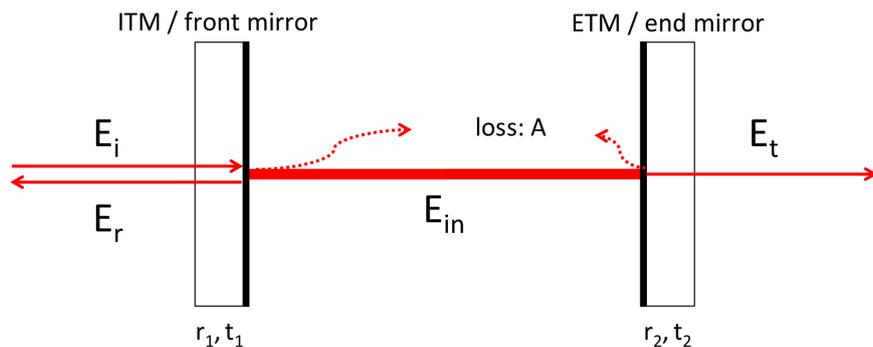


図 B.1: Fabry–Perot 共振器の模式図。

この節では Fabry–Perot 共振器の固有基本モードだけを考えることにし、空間モードは考えないこととする。図 B.1 のような共振器を考え、共振器内部の電場や共振器を透過または反射される電場を考えることとする。光の入射側の鏡を input test mass (ITM)、もう一方の鏡を end test mass (ETM) と呼ぶことにする。ITM と ETM の振幅反射率と振幅透過率はそれぞれ  $r_1, t_1$  と  $r_2, t_2$  とする。パワー反射率や透過率は  $R_1 := r_1^2$  などと大文字を用いて表すこととする。ここで、共振器内部側からの反射では反射率  $r_j$ 、外側か

らは  $-r_j$  であるとする。共振器を 1 周する間のパワーのロス率を  $A$  とする。共振器の長さを  $L$  とする。

入射電場  $E_i$  が ITM のところで  $E_i(t) = E_0 e^{i\omega_0 t}$  と表されているとする。このとき内部電場  $E_{\text{in}}$  は、共振器 1 周で得る位相  $\phi = 2\omega_0 L/c - \zeta_{\text{round}}$  を用いて

$$E_{\text{in}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t_1 E_i(t) (r_1 r_2 e^{-i\phi})^n \quad (\text{B.1})$$

$$= \frac{t_1}{1 - r e^{-i\phi}} E_i(t) \quad (\text{B.2})$$

と書ける<sup>\*1</sup>。ここで  $r := r_1 r_2$  を定義した。同様に、透過する電場  $E_t$  と反射する電場  $E_r$  も

$$E_t(t) = \frac{t_1 t_2}{1 - r e^{-i\phi}} E_i(t), \quad (\text{B.3})$$

$$E_r(t) = \left[ -r_1 + \frac{t_1^2 r_2 e^{-i\phi}}{1 - r e^{-i\phi}} \right] E_i(t) \quad (\text{B.4})$$

のようになる。式 (B.4) において、共振時 ( $\phi \equiv 0 \pmod{2\pi}$ ) に第 1 項と第 2 項の絶対値の大きさを比べたとき第 2 項が大きいときその共振器はオーバーカップリングであるといい、第 1 項が大きいときはアンダーカップリングであるといい、等しいときはクリティカルカップリングまたはインピーダンスマッチドであるという。

共振器内にためられている光のパワー  $P_{\text{in}}$  は、入射光のパワーを  $P_0$  とすると式 (B.2) より

$$P_{\text{in}} = \frac{T_1}{(1 - r)^2 + 4r \sin^2(\phi/2)} P_0 \quad (\text{B.5})$$

$$\simeq \frac{4T_1}{(1 - R)^2 + 4\delta\phi^2} P_0 \quad (1 - R \ll 1, |\delta\phi| \ll 1) \quad (\text{B.6})$$

となる。ここで  $\delta\phi \equiv \phi \pmod{2\pi}$ ,  $-\pi < \delta\phi \leq \pi$  で  $\delta\phi$  を定義した。光の周波数のずれを  $\delta f$  とおくと  $\delta\phi = 2\pi \cdot 2\delta f L/c$  であるが、共振器内パワーを入射光の周波数の関数としてプロットすると図 B.2 のようになる。式 (B.5) より周波数が  $c/2L$  変化するごとに共振ピークが現れることがわかるが、そのことが図 B.2 でも見て取れる。 $c/2L$  をフリースペクトラルレンジ (free spectral range; FSR) という。また式 (B.5) と (B.6) より

$$\delta f = f_c := \frac{c}{2\pi L} \arcsin \frac{1 - r}{2\sqrt{r}} \simeq \frac{c}{8\pi L} (1 - R) \quad (\text{B.7})$$

<sup>\*1</sup> 式 (B.2) で  $t_1 E_i(t)$  をひとかたまりとしてみると、共振器内部に生成される電場は  $1/(1 - r e^{-i\phi})$  だけ増幅されることがわかる。

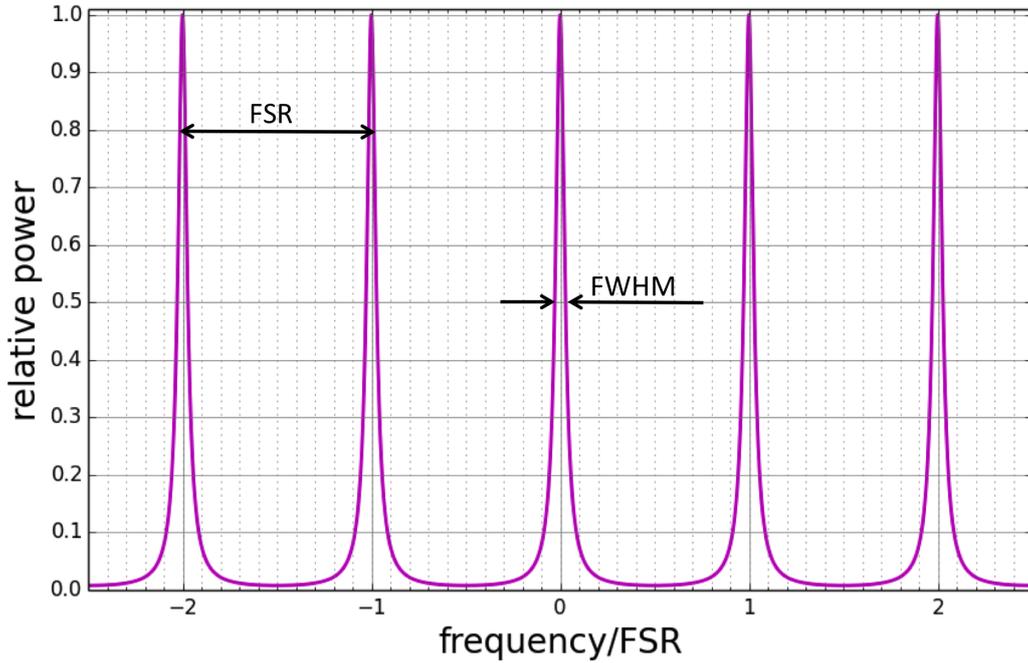


図 B.2: 共振器内パワーと周波数の関係を表すグラフ。

のとき、共振器内パワーが共振時の半分となる。したがって共振ピークの半値全幅 (full width at half maximum; FWHM) はこれの 2 倍 ( $2f_c$ ) である。FSR と FWHM の比から、共振器の共振の鋭さを表すパラメータであるフィネス  $\mathcal{F}$  が定義され、

$$\mathcal{F} := \frac{\text{FSR}}{\text{FWHM}} = \frac{2\pi}{4 \arcsin[(1-r)/2\sqrt{r}]} \simeq \frac{2\pi}{1-R} \quad (\text{B.8})$$

で求まる。

フィネスの物理的意味を知るために次のようなことを考えよう。まずは、共振器内の光子の平均往復回数を考える。 $n$  回往復する確率は  $(1-R)R^n$  で表されるので、平均往復回数  $N_{\text{avg}}$  は

$$N_{\text{avg}} = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot (1-R)R^n \quad (\text{B.9})$$

$$= \frac{R}{1-R} \simeq \frac{\mathcal{F}}{2\pi} \quad (\text{B.10})$$

となる。つまり、フィネスは光子の平均的な往復回数に比例する量である。同様に共振器内の光子の平均滞在時間  $\tau_s$  も

$$\tau_s \simeq \frac{2L}{c} \frac{\mathcal{F}}{2\pi} \quad (\text{B.11})$$

で表される。次に、鏡の位置の変位の信号の共振器による増幅を考えよう。共振状態から

共振器長が  $\Delta L$  だけ変化した時の共振器の反射光は、簡単のためオーバーカップリングの極限 ( $t_2 = 0, A = 0$ ) で式 (B.4) を変形することで

$$E_r(t) \simeq \left[ 1 - i \frac{(1 + r_1)^2}{1 - R_1} \frac{2\omega\Delta L}{c} \right] E_i \quad (\text{B.12})$$

と書ける。単に鏡に光を反射させる場合は、鏡の位置が  $\Delta L$  だけ変化すると反射光の位相は  $-2\omega\Delta L/c$  だけ変化することから、変位信号の共振器による増幅率は

$$\frac{(1 + r_1)^2}{1 - R_1} \simeq \frac{2}{\pi} \mathcal{F} \quad (\text{B.13})$$

となり、フィネスに比例することがわかる。この式から、干渉計型重力波検出器のショットノイズは腕共振器のフィネスに比例してショットノイズが改善することがわかる。

周波数  $f_c$  の意味を考えよう。式 (B.2) は  $f_c$  を用いて

$$E_{\text{in}}(t)/E_i(t) \simeq \frac{2t_1}{1 - R} \frac{1}{1 + i\delta f/f_c} \quad (\text{B.14})$$

と書くことができる。この式より、共振器による増幅は 1 次のローパスフィルターの性質を持ち、ローパスのポールの周波数は  $f_c$  となることがわかる。そのため、 $f_c$  はキャビティポール周波数と呼ばれる。

## B.2 Fabry–Perot 共振器の固有モード

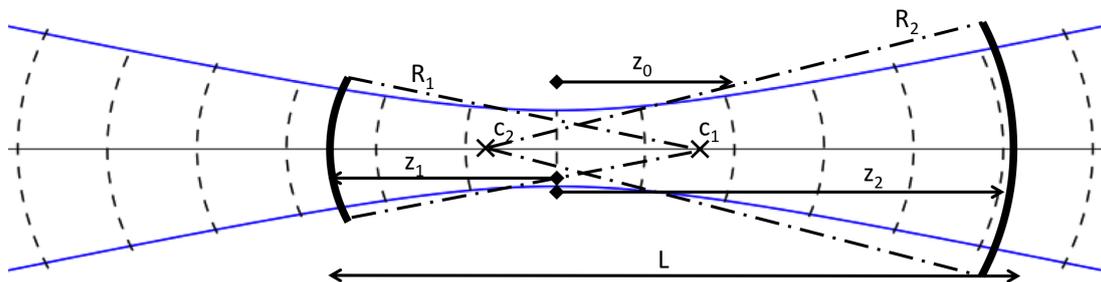


図 4.3: 向かい合う球面鏡からなる Fabry–Perot 共振器とその固有モード。  $c_1, c_2$  はそれぞれの鏡の曲率中心であり、固有モードの伝播の軸、つまり式 (4.6) における  $z$  軸は  $c_1, c_2$  を通るように定まっている。24 ページからの再掲。

式 (4.40) と (4.41) を導出しよう。共振器長が  $L$  であることと  $z = z_j$  で曲率半径が  $R_j$  であることから、

$$z_1 + z_2 = L, \quad (\text{B.15})$$

$$z_1 \left( 1 + \frac{z_0^2}{z_1^2} \right) = R_1, \quad (\text{B.16})$$

$$z_2 \left( 1 + \frac{z_0^2}{z_2^2} \right) = R_2 \quad (\text{B.17})$$

を満たす必要がある。式 (B.16) と (B.17) を足して式 (B.15) を用いることで、

$$z_0^2 = \left( \frac{R_1 + R_2}{L} - 1 \right) z_1 z_2 \quad (\text{B.18})$$

$$= \frac{1 - g_1 g_2}{(1 - g_1)(1 - g_2)} z_1 z_2 \quad (\text{B.19})$$

を得る。また、式 (B.16) と (B.17) の差をとって式 (B.15) を用いると

$$z_1 - z_2 = \frac{L(R_1 - R_2)}{2L - R_1 - R_2} \quad (\text{B.20})$$

$$= \frac{L(g_2 - g_1)}{g_1 + g_2 - 2g_1 g_2} \quad (\text{B.21})$$

を得る。したがって、式 (B.15) と式 (B.21) より

$$z_j = \frac{L g_1 g_2 (1 - g_j)}{g_j (g_1 + g_2 - 2g_1 g_2)} \quad (j = 1, 2) \quad (\text{4.41})$$

となる。この式を式 (B.19) に代入することで、

$$z_0 = \frac{L \sqrt{g_1 g_2 (1 - g_1 g_2)}}{|g_1 + g_2 - 2g_1 g_2|} \quad (\text{4.40})$$

が求められる。



# 補遺 C

## 電磁場の量子状態

干渉計型重力波検出器における光の状態を記述するのに必要ないくつかの量子状態についてまとめる [40, 59]。

### C.1 真空状態

真空状態  $|0\rangle$  は、どの消滅演算子を作用させても 0 になる状態として定義される。つまり、

$$\hat{a}_\omega^{lm} |0\rangle = 0 \quad (\text{C.1})$$

である。これより、

$$\langle \hat{a}_j^{\dagger lm}(\Omega) \hat{a}_k^{l'm'}(\Omega') + \hat{a}_k^{l'm'}(\Omega') \hat{a}_j^{\dagger lm}(\Omega) \rangle = 2\pi \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta_{jk} \delta(\Omega - \Omega') \quad (\text{C.2})$$

が導ける。したがって、式 (A.13) より真空状態での直交位相振幅  $\hat{a}_j^{lm}(z, t)$  のパワースペクトルとクロススペクトルは

$$S_{jk}^{lm, l'm'}(f) = \delta_{jk} \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (j, k = 1, 2) \quad (\text{4.39})$$

となる。

### C.2 コヒーレント状態

コヒーレント状態  $|\alpha\rangle$  は、真空状態に対して次のように変位演算子  $\hat{D}[\alpha]$  を作用させることで定義される。

$$|\alpha\rangle = \hat{D}[\alpha] |0\rangle =: \exp \left[ \sum_{lm} \int_0^\infty \frac{d\omega}{2\pi} \alpha^{lm}(\omega) \hat{a}_\omega^{\dagger lm} - \alpha^{\dagger lm}(\omega) \hat{a}_\omega^{lm} \right] |0\rangle. \quad (\text{C.3})$$

コヒーレント状態は消滅演算子の固有状態であり、

$$\hat{a}_\omega^{lm}|\alpha\rangle = \alpha^{lm}(\omega)|\alpha\rangle \quad (\text{C.4})$$

を満たす。

コヒーレント状態を考える際、状態を  $\hat{D}[\alpha]$  で変化させる代わりに任意の演算子  $\hat{O}$  を

$$\hat{O} \rightarrow \hat{D}^\dagger[\alpha]\hat{O}\hat{D}[\alpha] \quad (\text{C.5})$$

のように変換して、真空状態に対して期待値をとっても良い\*1。消滅演算子を式 (C.5) にしたがって変換すると

$$\hat{a}_\omega^{lm} \rightarrow \alpha^{lm}(\omega) + \hat{a}_\omega^{lm} \quad (\text{C.6})$$

となり、もとの演算子に複素数を足しただけのものになり扱いやすい。そこで、以降コヒーレント状態に対しては演算子を変化させて考えることとする。変位演算子  $\hat{D}[\alpha]$  として、とくに

$$\alpha^{lm}(\omega) = \frac{A}{\sqrt{2}} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)\delta_{l0}\delta_{m0}, \quad (\text{C.7})$$

$$\hat{D}[\alpha] = \exp\left[\frac{A}{\sqrt{2}}(\hat{a}_{\omega_0}^{\dagger lm} - \hat{a}_{\omega_0}^{lm})\right] \quad (\text{C.8})$$

を考えることにする。この演算子から与えられるコヒーレント状態の電場は、

$$\hat{E}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{c}} \left\{ Au_{00} \cos \phi_{00} + \sum_{lm} u_{lm} [\hat{a}_1^{lm}(z, t) \cos \phi_{lm} + \hat{a}_2^{lm}(z, t) \sin \phi_{lm}] \right\} \quad (\text{5.1})$$

と書ける。第 5 章でも述べたように、 $A = \sqrt{2P/\hbar\omega_0}$  のように電磁波のパワーと結びつく。このような光は、量子揺らぎと、ある周波数  $\omega_0$  の基本モードの古典的な電場の重ね合わせになっていることがわかり、理想的なレーザー光に対応する。

### C.3 スクイーズド状態

スクイーズド状態  $|\chi\rangle$  は、真空状態に対して次のようにスクイーズ演算子  $\hat{S}[\chi]$  を作用させることで定義される。

$$|\chi\rangle = \hat{S}[\chi]|0\rangle =: \exp\left[\sum_{lm} \int_0^\infty \frac{d\Omega}{2\pi} \chi^{lm}(\Omega) \hat{a}_{\omega_0+\Omega}^{\dagger lm} \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^{\dagger lm} - \chi^{\dagger lm}(\Omega) \hat{a}_{\omega_0+\Omega}^{lm} \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^{lm}\right] |0\rangle. \quad (\text{C.9})$$

\*1 Schrödinger 描像と Heisenberg 描像の関係と同じである。

コヒーレント状態のときと同様に、スクイーズ演算子の消滅演算子への作用を考える。  
 $\chi^{lm}(\Omega) = \xi_{\Omega} e^{-2i\phi_{\Omega}}$  とおくと、

$$S^{\dagger} \hat{a}_1 S = \hat{a}_1 (\cosh \xi + \sinh \xi \cos 2\phi) - \hat{a}_2 \sinh \xi \sin 2\phi, \quad (\text{C.10})$$

$$S^{\dagger} \hat{a}_2 S = -\hat{a}_1 \sinh \xi \sin 2\phi + \hat{a}_2 (\cosh \xi - \sinh \xi \cos 2\phi) \quad (\text{C.11})$$

のように変換される。この変換は、

$$\hat{a}_{\zeta} = \hat{a}_1 \cos \zeta + \hat{a}_2 \sin \zeta \quad (\text{C.12})$$

を用いて、

$$S^{\dagger} \hat{a}_{-\phi} S = \hat{a}_{-\phi} e^{\xi}, \quad (\text{C.13})$$

$$S^{\dagger} \hat{a}_{\frac{\pi}{2}-\phi} S = \hat{a}_{\frac{\pi}{2}-\phi} e^{-\xi} \quad (\text{C.14})$$

と書くとわかりやすい。つまり、 $-\phi$  の方向の量子揺らぎが  $e^{\xi}$  倍だけ増幅され、 $\pi/2 - \phi$  の方向の量子揺らぎが  $e^{-\xi}$  倍にスクイーズされているのがスクイーズド状態である。

真空状態とスクイーズド状態の直交位相振幅の揺らぎを図で表すと図 C.1 のようになる。

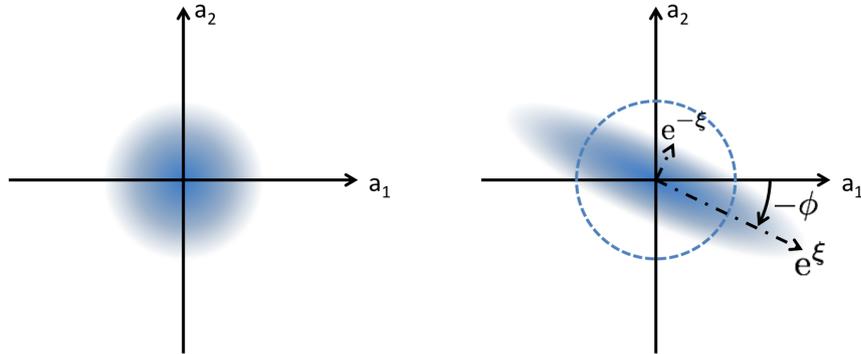


図 C.1: 真空状態 (左) とスクイーズド状態 (右) の量子揺らぎを表す模式図。



## 補遺 D

# QPD での測定の量子雑音

$z = Z$  にある鏡で反射された式 (5.112) のように表される光を  $z = Z_{\text{meas}}$  に置かれた QPD で測定することで鏡の回転運動を測定した場合の量子雑音の表式を導く。

### D.1 量子雑音の表式

QPD で測定するのは右のセクションと左のセクションのパワーの差なので、QPD の出力は、 $\hat{c}_1^{lm}(Z_{\text{meas}})$  や  $w(Z_{\text{meas}})$  を  $\hat{c}_1^{lm}$  や  $w$  と略記すると、

$$\begin{aligned}
 & \text{(QPD)} \\
 &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{sgn}(x) \cdot |\hat{E}|^2 \\
 &= \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \operatorname{sgn}(x) \cdot \frac{4\pi\hbar\omega_0}{c} \frac{1}{2} \left( A^2 u_{00}^2 + 2Au_{00} \sum_{l,m=0}^{\infty} \hat{c}_1^{lm} u_{lm} \right) \\
 &= \hbar\omega_0 A \sum_{l,m=0}^{\infty} \hat{c}_1^{lm} \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sgn}(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{2}{\pi w^2} \frac{H_l(\sqrt{2}x/w) H_m(\sqrt{2}y/w)}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} e^{-\frac{2(x^2+y^2)}{w^2}} \\
 &= \frac{\hbar\omega_0 A}{\pi} \sum_{l,m=0}^{\infty} \frac{\hat{c}_1^{lm}}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \operatorname{sgn}(x) H_l(x) e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy H_m(y) e^{-y^2} \\
 &= \hbar\omega_0 A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\hat{c}_1^{l0}}{\sqrt{\pi 2^l l!}} \int_0^{\infty} dx (1 - (-1)^l) H_l(x) e^{-x^2} \\
 &= 2\hbar\omega_0 A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{c}_1^{2k+1,0}}{\sqrt{\pi 2^{2k+1} (2k+1)!}} \int_0^{\infty} dx H_{2k+1}(x) e^{-x^2} \tag{D.1}
 \end{aligned}$$

$$=: 2\hbar\omega_0 A \sum_{k=0}^{\infty} \hat{c}_1^{2k+1,0} D_k \tag{D.2}$$

となる。4行目から5行目の変形で  $\int_{-\infty}^{\infty} dy H_m(y)e^{-y^2} = \int_{-\infty}^{\infty} dy H_m(y)H_0(y)e^{-y^2} = \sqrt{\pi}\delta_{m0}$  を用いた。 $C_k$  の計算には次の公式

$$\int_0^t dx H_n(x)e^{-x^2} = H_{n-1}(0) - e^{-t^2}H_{n-1}(t). \quad (\text{D.3})$$

を用いた。この式と、以下の式

$$H_{2k}(0) = \frac{(-1)^k(2k)!}{k!} \quad (\text{D.4})$$

をあわせて用いることで、

$$D_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!} \sqrt{\frac{(2k+1)!}{\pi 2^{2k+1}}} \quad (\text{D.5})$$

を得る。

式 (5.109) と (5.115) より、 $\hat{c}_1^{10}$  は鏡の回転角と鏡の位置での直交位相振幅で表すことができる。つまり、

$$\begin{aligned} & (\text{QPD})(\Omega) \\ &= 2\hbar\omega_0 A \left[ \left( \frac{2A}{\alpha(Z)} \delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}(\Omega) + (-\kappa_1 + \cot\psi)\hat{b}_1^{10}(\Omega; Z) + \hat{b}_2^{10}(\Omega; Z) \right) D_0 \sin\psi \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{c}_1^{2k+1,0} D_k \right] \quad (\text{D.6}) \end{aligned}$$

$$\propto \delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}(\Omega) + \frac{\alpha(Z)}{2A} \left[ (-\kappa_1 + \cot\psi)\hat{b}_1^{10}(\Omega; Z) + \hat{b}_2^{10}(\Omega; Z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\hat{c}_1^{2k+1,0} D_k}{D_0 \sin\psi} \right]. \quad (\text{D.7})$$

以上より、 $\delta\hat{\Theta}_{\text{ex}}$  を測定する際の量子雑音のパワースペクトルは、

$$S_{\Theta,\psi}^{\text{QPD}}(\Omega/2\pi) = \frac{\Theta_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_1} \left[ (-\kappa_1 + \cot\psi)^2 + 1 + \frac{1}{D_0^2 \sin^2\psi} \sum_{k=1}^{\infty} D_k^2 \right] \quad (\text{D.8})$$

となる。ここで、 $\arcsin$  の Taylor 展開

$$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (\text{D.9})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)^2} \quad (\text{D.10})$$

より

$$\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k+1)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{1}{(2k+1)^2} \quad (\text{D.11})$$

であることを用いると、

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_k^2/D_0^2 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{D.12})$$

であることがわかる。よって、

$$S_{\Theta,\psi}^{\text{QPD}}(\Omega/2\pi) = \frac{\Theta_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_1} \left[ (-\kappa_1 + \cot \psi)^2 + 1 + \frac{1}{\sin^2 \psi} \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \right] \quad (\text{D.13})$$

が得られる。とくに  $\psi = \pi/2$  のとき、

$$S_{\Theta,\pi/2}^{\text{QPD}}(\Omega/2\pi) = \frac{\Theta_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_1} \left[ \kappa_1^2 + \frac{\pi}{2} \right]. \quad (\text{D.14})$$

## D.2 輻射圧雑音を無視した場合: 散射雑音

式 (D.13) で、 $\kappa_1 = 0$  とすると、つまり輻射圧を考えないことにすると、

$$S_{\Theta,\psi}^{\text{QPD,shot}}(\Omega) = \frac{\hbar\omega_0}{8P} \cdot \frac{\pi\alpha^2(Z)}{2\sin^2 \psi} \quad (\text{D.15})$$

となる。ここでは  $\Theta_{\text{SQL}}$ ,  $\kappa_1$ ,  $A$  を用いず<sup>3</sup>に表した。ところで、

$$\sin \psi = \frac{(Z_{\text{meas}} - Z)/z_0}{\sqrt{1 + (Z_{\text{meas}}/z_0)^2} \sqrt{1 + (Z/z_0)^2}} \quad (\text{D.16})$$

と表せることを用いると、

$$\frac{\alpha(Z)}{\sin \psi} = \frac{w(Z_{\text{meas}})}{Z_{\text{meas}} - Z} \quad (\text{D.17})$$

である。これを用いて、

$$S_{x,\psi}^{\text{QPD,shot}}(\Omega/2\pi) := 2^2 (Z_{\text{meas}} - Z)^2 S_{\Theta,\psi}^{\text{QPD,shot}}(\Omega/2\pi) \quad (\text{D.18})$$

$$= \frac{\hbar\omega_0}{P} \frac{\pi}{4} w^2(Z_{\text{meas}}) \quad (\text{D.19})$$

となる。 $Z_{\text{meas}} - Z$  は光てこを考えたときの「てこ」の腕の長さであるため、 $S_{x,\psi}^{\text{QPD,shot}}$  は QPD 上でのビーム位置測定の立場での散射雑音である。

一方、QPD 上のビーム位置測定の立場での散射雑音は次のようにも導くことができる [60]。ビーム位置が  $x$  だけずれたときの QPD の出力は、 $(\text{QPD}) = \sqrt{8/\pi} Px/w(Z_{\text{meas}})$  である。QPD の出力の揺らぎは、右のセクションのパワー揺らぎと左のセクションのパワー揺らぎが無相関だとして、 $S_{(\text{QPD})}^{\text{naive}} = S_{(\text{right})} + S_{(\text{left})} = 2\hbar\omega_0 \frac{P}{2} + 2\hbar\omega_0 \frac{P}{2} = 2\hbar\omega_0 P$  である。したがって、ビーム位置測定の立場での散射雑音は、

$$S_x^{\text{naive}} = S_{(\text{QPD})}^{\text{naive}} / \left[ \sqrt{\frac{8}{\pi}} \frac{P}{w(Z_{\text{meas}})} \right]^2 \quad (\text{D.20})$$

$$= \frac{\hbar\omega_0}{P} \frac{\pi}{4} w^2(Z_{\text{meas}}) \quad (\text{D.21})$$

となり、式 (D.19) と一致する。

### D.3 散射雑音の悪化

式 (D.13) からわかるように、散射雑音は  $\sqrt{\pi/2} \simeq 1.25$  倍悪くなってしまう。さらに、輻射圧雑音の打ち消しを行う場合にはこの影響はより深刻になる。なぜなら、輻射圧雑音の打ち消しでは信号の量が減るが、10 以外の高次モード由来の散射雑音は変化しないからである。では、この散射雑音の悪化は原理的に避けられないのであろうか。この悪化は、QPD の出力は 10 モード以外の高次モードの寄与を持つから起きるものである。輻射圧によるトルクの表式は 10 モードのみで表されたことを思い出すと、QPD を用いる代わりに何らかの方法で光の軌道角運動量を測定すれば、このような散射雑音の悪化は起きない。考えられる例として、位置検出にもねじれ振り子を使うというものがある。

# 補遺 E

## 機械的振動子のゼロ点振動

散逸項を通じて熱浴と結合している振動子の量子力学的な取り扱い [61, 62] についてまとめる。

### E.1 準備

質量  $m$ 、共振周波数  $\Omega_n/2\pi$ 、Q 値  $Q$  の振動子を考える。  $\Gamma := \Omega_n/Q$  を定義しておく。振動子の消滅演算子を  $\hat{d}$  とすると、運動方程式は

$$\dot{\hat{d}} = -i\Omega_n\hat{d} - \frac{\Gamma}{2}\hat{d} - \sqrt{\Gamma}\hat{n}_{\text{in}} \quad (\text{E.1})$$

となる [61, 62]。ここで、 $\hat{n}_{\text{in}}$  は熱浴から流入してくる揺らぎの消滅演算子である。この運動方程式 (E.1) を周波数空間で解くと、

$$\hat{d}(\Omega) = \frac{-\sqrt{\Gamma}}{i(\Omega_n - \Omega) + \Gamma/2}\hat{n}_{\text{in}}(\Omega), \quad (\text{E.2})$$

$$[\hat{d}(-\Omega)]^\dagger = \frac{-\sqrt{\Gamma}}{-i(\Omega_n + \Omega) + \Gamma/2}[\hat{n}_{\text{in}}(-\Omega)]^\dagger \quad (\text{E.3})$$

を得る [62]。この式から、振動子の位置と運動量は  $x_{\text{ZPF}} := \sqrt{\hbar/2m\Omega_n}$  と  $p_{\text{ZPF}} := \sqrt{m\hbar\Omega_n/2}$  を用いて

$$\hat{x}^\dagger(\Omega) = x_{\text{ZPF}} \left( \hat{d}(\Omega) + [\hat{d}(-\Omega)]^\dagger \right), \quad (\text{E.4})$$

$$\hat{p}^\dagger(\Omega) = p_{\text{ZPF}} \left( -i\hat{d}(\Omega) + i[\hat{d}(-\Omega)]^\dagger \right) \quad (\text{E.5})$$

と表せる。熱浴の演算子  $\hat{n}_{\text{in}}$  は

$$\langle \hat{n}_{\text{in}}(\Omega) [\hat{n}_{\text{in}}(\Omega')]^\dagger \rangle = (n_b + 1) 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (\text{E.6})$$

$$\langle [\hat{n}_{\text{in}}(\Omega')]^\dagger \hat{n}_{\text{in}}(\Omega) \rangle = n_b 2\pi \delta(\Omega - \Omega'), \quad (\text{E.7})$$

$$\langle \hat{n}_{\text{in}}(\Omega) \hat{n}_{\text{in}}(\Omega') \rangle = \langle [\hat{n}_{\text{in}}(\Omega)]^\dagger [\hat{n}_{\text{in}}(\Omega')]^\dagger \rangle = 0 \quad (\text{E.8})$$

を満たすので、たとえば基底状態にある振動子 ( $n_b = 0$ ) の位置揺らぎのパワースペクトルは

$$S_x^{\text{ZPF}}(\Omega/2\pi) = \frac{\Gamma x_{\text{ZPF}}^2}{(\Omega_n - \Omega)^2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{E.9})$$

と表される。有限温度の熱浴に接している振動子の場合には  $n_b = k_B T / \hbar \Omega_n$  とすればよい。ところで、時間反転した運動方程式から、熱浴へ流れ出ていく揺らぎの消滅演算子  $\hat{n}_{\text{out}}$  は

$$\hat{n}_{\text{out}} - \hat{n}_{\text{in}} = \sqrt{\Gamma} \hat{d} \quad (\text{E.10})$$

を満たすことがわかる [61]。この式を用いて、熱浴から流入する揺らぎと振動子の状態から熱浴へ流れ出ていく揺らぎを求めることができる。また後の便宜のため、熱浴の Hermite 演算子  $\hat{X}_{\text{in}}, \hat{P}_{\text{in}}$  と  $\hat{X}_{\text{out}}, \hat{P}_{\text{out}}$  を

$$\hat{X}_a(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{n}_a(\Omega) + [\hat{n}_a(-\Omega)]^\dagger), \quad (\text{E.11})$$

$$\hat{P}_a(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i\hat{n}_a(\Omega) + i[\hat{n}_a(-\Omega)]^\dagger) \quad (\text{E.12})$$

で定義しておく ( $a = \text{in}, \text{out}$ ) と、それらの揺らぎは

$$S_{X_a} = S_{P_a} = 2n_b + 1 \quad (\text{E.13})$$

と表される。

## E.2 光学機械相互作用を含む場合

以上の振動子についての準備を 5.4.2 節の量子雑音の議論に適用しよう。光学機械相互作用を取り入れるためには、振動子と熱浴の Hamiltonian に相互作用項

$$H_{\text{int}} = -\frac{2\hbar\omega_0 AB_{lm,n}}{c} \hat{a}_1^{lm} x_{\text{ZPF}}(d + d^\dagger) \quad (\text{E.14})$$

を加えればよい。すると、振動子の運動方程式 (E.1) は

$$\dot{\hat{d}} = -i\Omega_n \hat{d} - \frac{\Gamma}{2} \hat{d} - \sqrt{\Gamma} \hat{n}_{\text{in}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{2\hbar\omega_0 AB_{lm,n}}{c\sqrt{2}p_{\text{ZPF}}} \hat{a}_1^{lm} \quad (\text{E.15})$$

と修正される。したがって、熱浴と相互作用する振動子に光学機械相互作用を取り入れた場合の系の運動はブロック図 E.1 で表される。

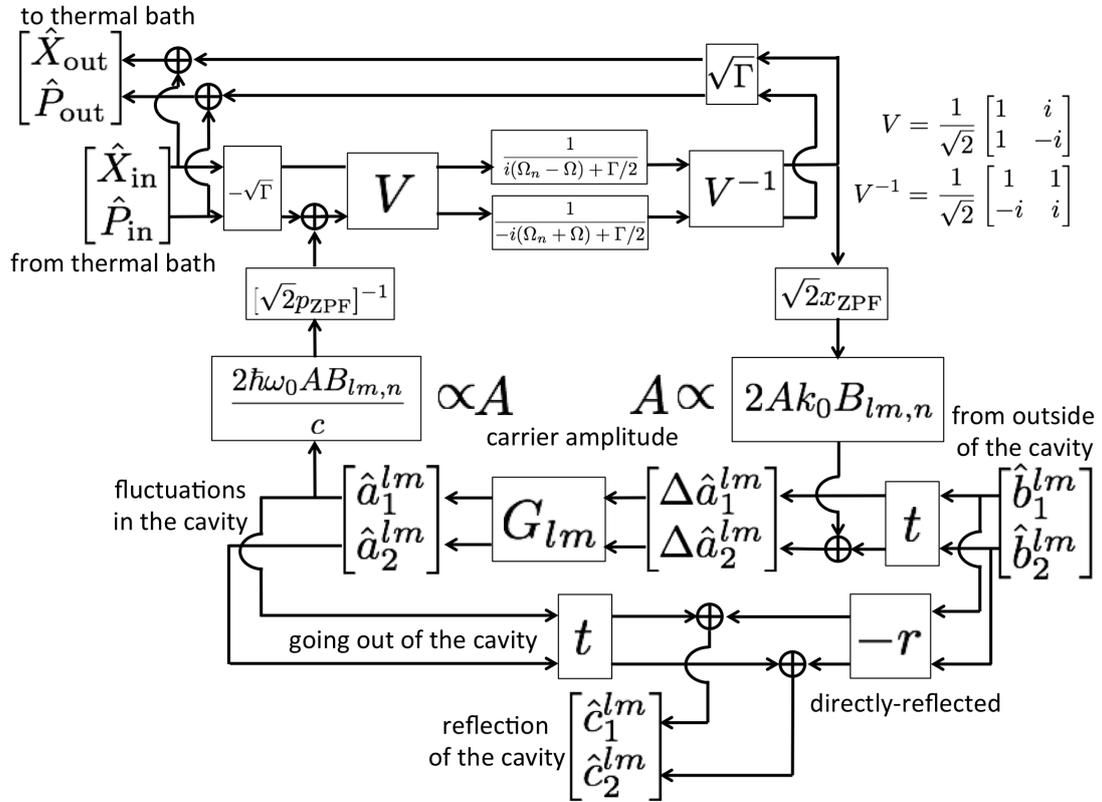


図 E.1: 熱浴から流入出する揺らぎと振動子の光学機械相互作用を表すブロック図。

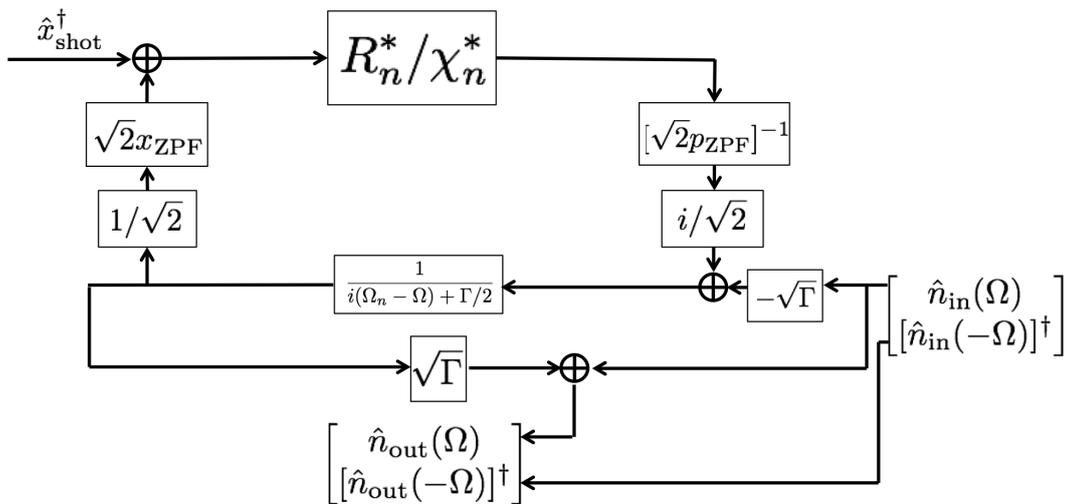


図 E.2: 熱浴から流入出する揺らぎと振動子の光学機械相互作用を表すブロック図を図 5.20 と同様に Q 値が大きい極限で簡略化したもの。

ブロック図 E.1 に対して、Q 値が十分高いという条件で図 5.20 と同様の簡略化を行うと、図 E.2 のように単純化される。ここで、 $\hat{x}_{\text{shot}}$  は光の揺らぎが光学機械相互作用を通じて流入する効果であり、

$$\hat{x}_{\text{shot}}^\dagger = \frac{t\hat{b}_+^{lm}}{2Ak_0B_{lm,n}i/\sqrt{2}} \quad (\text{E.16})$$

$$= x_{\text{ZPF}} \frac{2i\hat{b}_+^{lm}}{\sqrt{\Gamma|\mathcal{R}_n|}} \quad (\text{E.17})$$

と書ける。したがって図 E.2 より、

$$\begin{aligned} \hat{n}_{\text{out}}(\Omega) &= \left[ -\frac{1}{1-R_n^*} \frac{\Gamma}{i(\Omega_n - \Omega) + \Gamma/2} + 1 \right] \hat{n}_{\text{in}}(\Omega) \\ &\quad + \frac{2iR_n^*}{(1-R_n^*)\sqrt{|\mathcal{R}_n|}} \hat{b}_+^{lm} \end{aligned} \quad (\text{E.18})$$

$$= \left[ -\frac{2R_n^*}{(1-R_n^*)\mathcal{R}_n} + 1 \right] \hat{n}_{\text{in}}(\Omega) + \frac{2iR_n^*}{(1-R_n^*)\sqrt{|\mathcal{R}_n|}} \hat{b}_+^{lm}, \quad (\text{E.19})$$

$$[\hat{n}_{\text{out}}(-\Omega)]^\dagger = [\hat{n}_{\text{out}}(-\Omega)]^\dagger \quad (\text{E.20})$$

を得る。よって  $\hat{n}_{\text{out}}$  のパワースペクトル  $S_{n_{\text{out}+}}$  は、振動子が基底状態にある場合

$$S_{n_{\text{out}+}} = \begin{cases} 1 & (\mathcal{R}_n < 0) \\ 1 + \frac{8}{|1-R_n^*|^2} \frac{|R_n|^2}{|\mathcal{R}_n|} & (\mathcal{R}_n > 0) \end{cases} \quad (\text{E.21})$$

となる。最終的に、 $\mathcal{R}_n < 0$  のとき

$$S_{X_{\text{out}}} = S_{P_{\text{out}}} = 1 \quad (\text{E.22})$$

となることがわかる。この式から、光学機械相互作用を通じて入ってくる光の揺らぎを考慮に入れることで、熱浴から入ってくる揺らぎと熱浴へ出ていく揺らぎが等しくなることがわかる。

## 参考文献

- [1] A. Einstein, *Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation*. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, **1**:688–696, (1916).
- [2] A. Einstein, *Über Gravitationswellen*. Sitzungsber. Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften, **1**:154–167, (1918).
- [3] R. A. Hulse and J. H. Taylor, *Discovery of a pulsar in a binary system*. The Astrophysical Journal, **195**:L51–L53, (1975).
- [4] J. H. Taylor and J. M. Weisberg, *A new test of general relativity - Gravitational radiation and the binary pulsar PSR 1913+16*. The Astrophysical Journal, **253**:908–920, (1982).
- [5] B. P. Abbott *et al.*, *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Physical Review Letters, **116**(6):061102, (2016).
- [6] B. S. Sathyaprakash and B. F. Schutz, *Physics, astrophysics and cosmology with gravitational waves*. Living Reviews in Relativity, **12**, (2009).
- [7] N. Yunes and X. Siemens, *Gravitational-wave tests of general relativity with ground-based detectors and pulsar-timing arrays*. Living Reviews in Relativity, **16**, (2013).
- [8] B. P. Abbott *et al.*, *Tests of General Relativity with GW150914*. Physical Review Letters, **116**(22):221101, (2016).
- [9] F. Acernese *et al.*, *Advanced Virgo: a second-generation interferometric gravitational wave detector*. Classical and Quantum Gravity, **32**(2):024001, (2015).
- [10] K. Somiya, *Detector configuration of KAGRA—the Japanese cryogenic gravitational-wave detector*. Classical and Quantum Gravity, **29**(12):124007, (2012).
- [11] Y. Aso *et al.*, *Interferometer design of the KAGRA gravitational wave detector*. Physical Review D, **88**(4):043007, (2013).

- [12] J. Aasi *et al.*, *Advanced LIGO*. *Classical and Quantum Gravity*, **32**(7):074001, (2015).
- [13] S. Hild *et al.*, *Sensitivity studies for third-generation gravitational wave observatories*. *Classical and Quantum Gravity*, **28**(9):094013, (2011).
- [14] H. J. Kimble, Y. Levin, A. B. Matsko, K. S. Thorne, and S. P. Vyatchanin, *Conversion of conventional gravitational-wave interferometers into quantum non-demolition interferometers by modifying their input and/or output optics*. *Physical Review D*, **65**(2):022002, (2002).
- [15] J. A. Sidles and D. Sigg, *Optical torques in suspended Fabry-Perot interferometers*. *Physics Letters A*, **354**(3):167–172, (2006).
- [16] V. B. Braginsky, S. E. Strigin, and S. P. Vyatchanin, *Parametric oscillatory instability in Fabry - Perot interferometer*. *Physics Letters A*, **287**(5-6):331–338, (2001).
- [17] M. Evans, L. Barsotti, and P. Fritschel, *A general approach to optomechanical parametric instabilities*. *Physics Letters A*, **374**(4):665–671, (2010).
- [18] M. Evans *et al.*, *Observation of parametric instability in advanced LIGO*. *Physical Review Letters*, **114**(16):161102, (2015).
- [19] J. D. Creighton and W. G. Anderson, *Gravitational-Wave Physics and Astronomy*. John Wiley & Sons, (2012).
- [20] M. Maggiore, *Gravitational Waves. Vol.1, Theory and Experiments*. Oxford Univ. Press, (2008).
- [21] K. Belczyński, V. Kalogera, and T. Bulik, *A Comprehensive Study of Binary Compact Objects as Gravitational Wave Sources: Evolutionary Channels, Rates, and Physical Properties*. *The Astrophysical Journal*, **572**(1):407–431, (2002).
- [22] P. R. Saulson, *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors*. World scientific, (1994).
- [23] LIGO Scientific Collaboration *et al.*, *Predictions for the Rates of Compact Binary Coalescences Observable by Ground-based Gravitational-wave Detectors*. *Classical and Quantum Gravity*, **27**(17):173001, (2010).
- [24] C. D. Ott, *The gravitational-wave signature of core-collapse supernovae*. *Classical and Quantum Gravity*, **26**(6):063001, (2009).
- [25] J. Aasi *et al.*, *Gravitational Waves From Known Pulsars: Results From the Initial Detector Era*. *The Astrophysical Journal*, **785**(2):119, (2014).
- [26] H. B. Callen and T. A. Welton, *Irreversibility and generalized noise*. *Physical Review*, **83**(1):34–40, (1951).

- [27] T. Uchiyama *et al.*, *Reduction of thermal fluctuations in a cryogenic laser interferometric gravitational wave detector*. Physical Review Letters, **108**(14):141101, (2012).
- [28] V. B. Braginsky, F. Y. Khalili, *Quantum Measurement*. Cambridge, (1995).
- [29] A. Aiello, C. Marquardt, and G. Leuchs, *Transverse angular momentum of photons*. Physical Review A, **81**(5):053838, (2010).
- [30] A. Wünsche, *Quantization of GaussHermite and GaussLaguerre beams in free space*. Journal of Optics B, **6**(3):S47–S59, (2004).
- [31] Y. Enomoto, K. Nagano, and S. Kawamura, *Standard quantum limit of angular motion of a suspended mirror and homodyne detection of ponderomotively squeezed vacuum of the first-order Hermite-Gaussian modes of light field*. Physical Review A, **94**(1):012115, (2016).
- [32] C. M. Caves and B. L. Schumaker, *New formalism for two-photon quantum optics. I. Quadrature phases and squeezed states*. Physical Review A, **31**(5):3068–3092, (1985).
- [33] E. Morrison, B. J. Meers, D. I. Robertson, and H. Ward, *Automatic alignment of optical interferometers*. Applied optics, **33**(22):5041–5049, (1994).
- [34] G. Mueller *et al.*, *Determination and optimization of mode matching into optical cavities by heterodyne detection*. Optics letters, **25**(4):266–268, (2000).
- [35] M. Aspelmeyer, T. J. Kippenberg, and F. Marquardt, *Cavity optomechanics*. Reviews of Modern Physics, **86**(4):1391–1452, (2014).
- [36] K. Arai, *On the accumulated round-trip Gouy phase shift for a general optical cavity*. LIGO-T1300189-v1, <https://dcc.ligo.org/LIGO-T1300189/public>, (2013).
- [37] A. Buonanno and Y. Chen, *Quantum noise in second generation, signal-recycled laser interferometric gravitational-wave detectors*. Physical Review D, **64**(4):042006, (2001).
- [38] A. Buonanno and Y. Chen, *Signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors as optical springs*. Physical Review D, **65**(4):042001, (2002).
- [39] A. Buonanno and Y. Chen, *Scaling law in signal recycled laser-interferometer gravitational-wave detectors*. Physical Review D, **67**(6):062002, (2003).
- [40] H. Miao, *Exploring Macroscopic Quantum Mechanics in Optomechanical Devices*. Ph.D. thesis, the University of Western Australia, (2010).
- [41] S. Solimeno *et al.*, *Fabry–Pérot resonators with oscillating mirrors*. Physical Review A, **43**(11):6227–6240, (1991).

- [42] K. Nagano, Y. Enomoto, M. Nakano, A. Furusawa, and S. Kawamura, *New method to measure the angular antispring effect in a Fabry-Perot cavity with remote excitation using radiation pressure*. *Physics Letters A*, **380**(9-10):983–988, (2016).
- [43] Y. Enomoto, K. Nagano, M. Nakano, A. Furusawa, and S. Kawamura, *Observation of reduction of radiation-pressure-induced rotational anti-spring effect on a 23 mg mirror in a Fabry Perot cavity*. *Classical and Quantum Gravity*, **33**(14):1–9, (2016).
- [44] K. Nagano, Y. Enomoto, M. Nakano, A. Furusawa, and S. Kawamura, *Mitigation of radiation-pressure-induced angular instability of a FabryPerot cavity consisting of suspended mirrors*. *Physics Letters A*, **11**(12):261–5, (2016).
- [45] 阪田紫帆里, 『重力波検出器におけるポンドロモーティブスキューリングを利用した輻射圧雑音除去の研究』 博士論文, お茶の水女子大学, (2008).
- [46] T. Mori, *Development of a high power optical cavity for optomechanical quantum nondemolition measurement*. Ph.D. Thesis, Univ. of Tokyo, (2011).
- [47] 中野雅之, 『重力波検出器 KAGRA のための量子雑音低減技術の開発における光共振器の光学機械制御』 修士論文, 東京大学, (2014).
- [48] 小仁所志栞, 『重力波検出器における量子雑音最適化のための鏡の角度揺らぎ制御に関する研究』 修士論文, 東京大学, (2015).
- [49] 西村翼, 『重力波検出器における 輻射圧雑音低減の研究に向けた防振システムの設計・開発』 修士論文, 東京大学, (2015).
- [50] 長野晃士, 『重力波検出器 KAGRA のための量子雑音低減法の開発』 修士論文, 東京大学, (2017).
- [51] E. Hirose, K. Kawabe, D. Sigg, R. Adhikari, and P. R. Saulson, *Angular instability due to radiation pressure in the LIGO gravitational-wave detector*. *Applied optics*, **49**(18):3474–3484, (2010).
- [52] K. L. Dooley *et al.* , *Angular control of optical cavities in a radiation-pressure-dominated regime: the Enhanced LIGO case*. *Journal of the Optical Society of America A*, **30**(12):2618–2626, (2013).
- [53] S. Gras. personal communication, (2016).
- [54] L. Ju *et al.* , *Strategies for the control of parametric instability in advanced gravitational wave detectors*. *Classical and Quantum Gravity*, **26**(1):015002, (2009).
- [55] L. F. Buchmann, S. Schreppler, J. Kohler, N. Spethmann, and D. M. Stamper-Kurn, *Complex Squeezing and Force Measurement beyond the Standard Quantum Limit*. *Physical Review Letters*, **117**(3):030801, (2016).

- 
- [56] Y. Chen, *Macroscopic quantum mechanics: theory and experimental concepts of optomechanics*. Journal of Physics B, **46**(10):104001, (2013).
- [57] F. Y. Khalili *et al.*, *Quantum back-action in measurements of zero-point mechanical oscillations*. Physical Review A, **86**(3):033840, (2012).
- [58] 日野幹雄 『スペクトル解析』 朝倉書店, (1977).
- [59] K. J. Blow, R. Loudon, and S. J. D. Phoenix, *Continuum fields in quantum optics*. Physical Review A, **42**(7):4102–4114, (1990).
- [60] 道村唯太, 『通常の測定と弱測定での QPD による位置検出の量子限界』 Technical report, <http://granite.phys.s.u-tokyo.ac.jp/michimura/document/noteQPD.pdf>,(2013).
- [61] C. Gardiner and M. Collett, *Input and output in damped quantum systems: Quantum stochastic differential equations and the master equation*. Physical Review A, **31**(6):3761–3774, (1985).
- [62] B. D. Hauer, J. Maciejko, and J. P. Davis, *Nonlinear power spectral densities for the harmonic oscillator*. Annals of Physics, **361**:148–183, (2015).



# 謝辞

本研究をこのように修士論文としてまとめることができたのは、たくさんの方々の助けがあったおかげです。この場で感謝の言葉を述べます。

指導教員である川村静児教授には、この研究を全面的に支えていただきました。まず第一に、重力波検出器やその量子雑音といった魅力的なテーマを初めに教えてくださったのは川村先生でした。そのおかげでこのような本研究のテーマに出会うことができました。また、私が突拍子もないアイデアを話しても、真剣に受け止め議論してくださったことが何度となくありました。実際、本研究のきっかけは、私のアイデアに対して川村先生が的確な指摘をしてくださったことでした。私が最も感謝したいことは、私たちがやりたいことが最大限実現可能になるようにどのようなときも尽力してくださったことです。心から深く感謝を申し上げます。

物理学教室の安東正樹准教授には、学部4年次の特別実験の時から大変お世話になりました。時折参加させていただいた安東研究室のセミナーでは、そこで行われるレベルの高い議論に度々刺激されました。また物理学会や安東研中間発表会といった発表の機会では、今後研究を進めていくべき方向の指針となるような鋭い質問を投げかけてくださり、本研究の糸口となりました。そして、本修士論文の副査を務めてくださいました。

宇宙線研究所の内山隆准教授には、様々な面でお世話になりました。特に、GWPOセミナーや、物理学会や修士論文審査会などの発表練習では、親身に発表を聞いてくださり丁寧に優しく発表を指導していただきました。これらの経験は、様々な発表を行う上で心強く非常にありがたかったです。

宇宙線研究所の山元一広助教には、特に研究の面でお世話になりました。そのなかでも記憶に残っているのは、私の熱雑音についての質問に対して親切に答えてくださったことです。その日は祝日であったにも関わらず私がきちんとわかるまで付き合ってください、深い理解につながりました。

宇宙線研究所のKieran Craig氏には、様々な面でお世話になりました。論文を投稿する際には、私の拙い英語を何度も丁寧に直してくださり、コツを教えてくださいました。それだけではなく、普段の生活においても彼のユーモアは私を笑わせてくれました。また、

Glasgow に出張したときには Glasgow の街を案内してくださいました。

安東研究室の道村唯太助教には、学部4年次の特別実験の時から大変お世話になりました。特別実験の時から現在に至るまで、どんな些細でおかしな疑問でも丁寧に教えてくださいました。また、4年次に教えていただいた光ばね効果とブロック図の取り扱いは、本研究における非常に中心的な役割を担っており、氏の指導なしではこの研究を行うことはできませんでした。

東京工業大学の宗宮健太郎准教授には、大変お世話になりました。氏の話すことはいつも面白く、特に Jena で行われた熱雑音ワークショップのときには、重力波検出器の熱雑音や量子雑音に関する様々な面白いアイデアを教えてくださいました。それらの自由で面白いアイデアはとても刺激的で、自らの研究意欲を再確認させてくれました。

物理学教室の上田正仁教授には、本修士論文の副査を務めていただきました。本研究の要旨の説明にうかがったときや修士論文審査会の際には、より一般的な物理法則に依る鋭い指摘や質問をしてくださり、より基本的な原理に立ち返ることの大切さを学ぶことができました。

宇宙線研究所の中野雅之氏には、様々な面で大変お世話になりました。神岡での仕事の際には、研究面での面倒や生活面での面倒をすべてみてくださり、大変心強かったです。柏での軽量鏡を用いた実験では、どこから手をつけていいのかわからない私たちをサポートしてくださりました。何より、目指すべき先輩としての姿を私たちに見せてくれました。また、氏とお酒を飲むのはとても楽しい時間でありました。

安東研究室の小森健太郎氏には、とてもお世話になりました。学部4年次の特別実験の時から、光学機械系の実験や理論について様々な面白い話を教えてください、また、些細な疑問でもきちんと理解するまでとことん議論に付き合ってくださいました。氏との議論はいつも楽しく、またいつも新たな発見がありました。そのような議論に刺激されて生まれたアイデアは、本研究の随所にあります。

元川村研究室の阪田紫帆里氏、Daniel Friedrich 氏、我妻和博氏、森匠氏、小仁所志栞氏、西村翼氏は、懸架軽量鏡を用いた実験を創始し、現在に至るまでその実験系の改良してくださいました。彼らのおかげで私はこのテーマに出会うことができ、各段階の改良のおかげで優れた実験環境において測定を行うことができました。また川村研究室の酒井譲氏は、私の曖昧な指示にも関わらずしっかりと具体的な実験系の計算や回路の作成を行ってくださいました。

Massachusetts Institute of Technology の Slawek Gras 氏は、Advanced LIGO の腕共振器の鏡の弾性モードの共振周波数や弾性モードと光のモードのオーバーラップ因子の理論計算の詳細な結果について、親切にも提供してくださいました。このような理論計算の結果を提供していただければ、5.4.2 節の具体的な計算を行うことはできませんでした。

宇宙線研究所の重力波施設の秘書室の菊地理恵氏、千田藍氏、青田晶子氏には、部品の発注や出張の手続きなどとてもお世話になりました。簡単なことや同じようなことを何度も聞いてしまいご迷惑をおかけしたかと思いますが、それでも親切に対応してくださりました。優しさに甘えてばかりでしたが、とても感謝しております。

宇宙線研究所の Liu Yingtao 氏とは、実験の合間に彼のクラックリング雑音の実験について話すことが刺激的でよい気分転換でありました。長谷川邦彦氏と話すどうしようもなく下らない話は、研究生活や修士論文執筆中の息抜きでありました。三代浩世希氏の落ち着いた佇まいは、私の心持ちをいつも穏やかにしてくれました。片山純子氏の純粹さは、研究のことを一時忘れさせてくれました。安東研究室の有富尚紀氏、下田智文氏は、安東研究室を訪問した際にいつも下らない話の相手をしてくれました。また有富尚紀氏には4年次の特別実験の時から度々助けてもらいました。国立天文台の藤井善範氏は、神岡に滞在した際に YUKI ハウスでご飯を作ってくれるなど、同年代の少ない神岡滞在時の心の支えとなってくれました。

宇宙線研究所の川村研究室の同輩の長野晃士氏には、一番近くで一番お世話になりました。彼の実験に取り組む姿勢や1つ1つ積み重ねていく様子には感銘を受けるばかりでした。研究面について、非常に補完的だったのではないかと個人的には考えています。また、思いついたばかりのアバウトなアイデアを初めに話すのは彼でした。彼との議論の中でアイデアが洗練されたりダメであるということがわかったりということの繰り返しで、彼のおかげで考えがまとまるということが多々ありました。

最後に、私をここまで育て、大学院まで通わせてくれ、人生のあらゆる面をサポートしてくれた両親に感謝します。

ここに挙げた方々だけではなく、本当に多くの方々に支えていただきました。これらの支えがなければ本研究を行うことは到底できませんでした。これまで関わってきたすべての方々に心から感謝を申し上げます。ありがとうございました。