

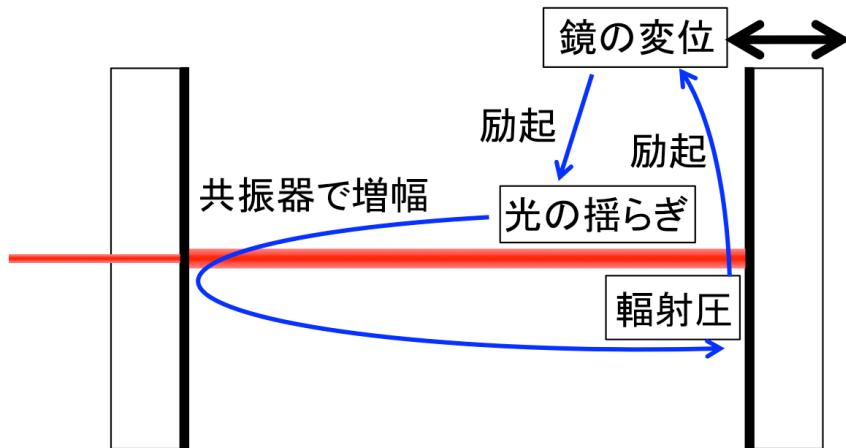
安東研中間報告会

修士での研究とこれからの実験の検討

榎本 雄太郎

私がこれからやりたいこと

- 光学機械相互作用を用いて、
なにか面白い実験をしたい。
- 修士の間にやったことと関連して
いれば、なお良い。



修士での研究の要約と、
ありえそうな今後の実験について発表する。
=> これから (~3年) やることをしっかり決めたい。

修士での研究

-- このようなタイトルの修論

-- 重力波検出器では、光学機械相互作用による様々な現象が起きる。

=> これらを統一的に扱った。

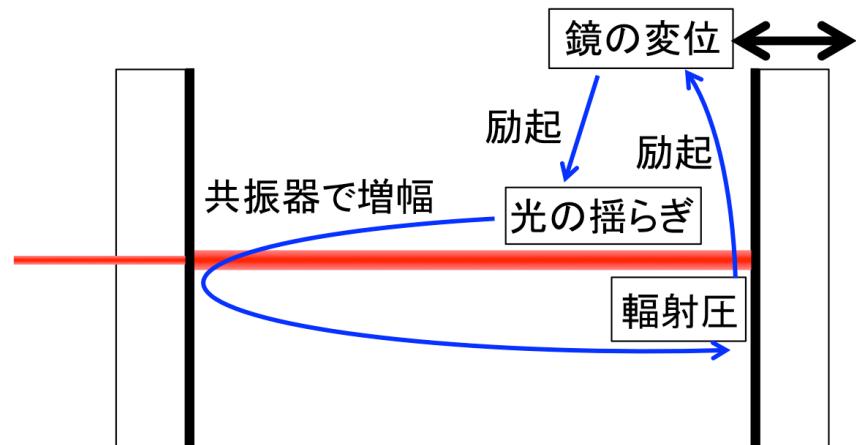
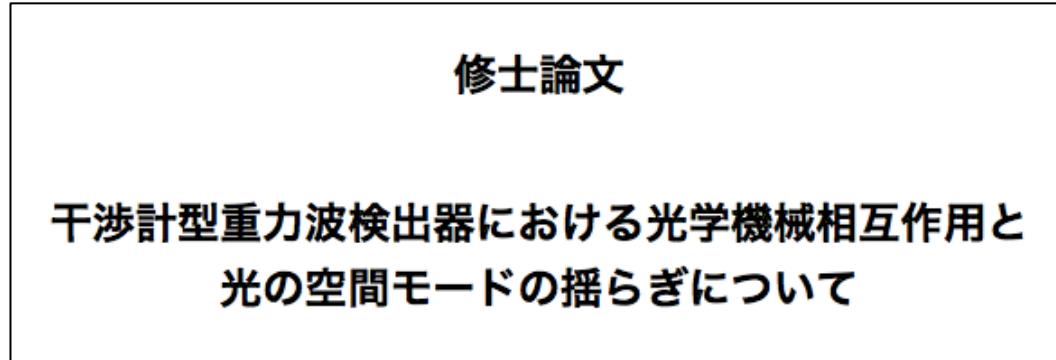
-- 光学機械相互作用の応用例:

- 重力波検出器の量子雑音低減

--> 辐射圧雑音の観測実験など

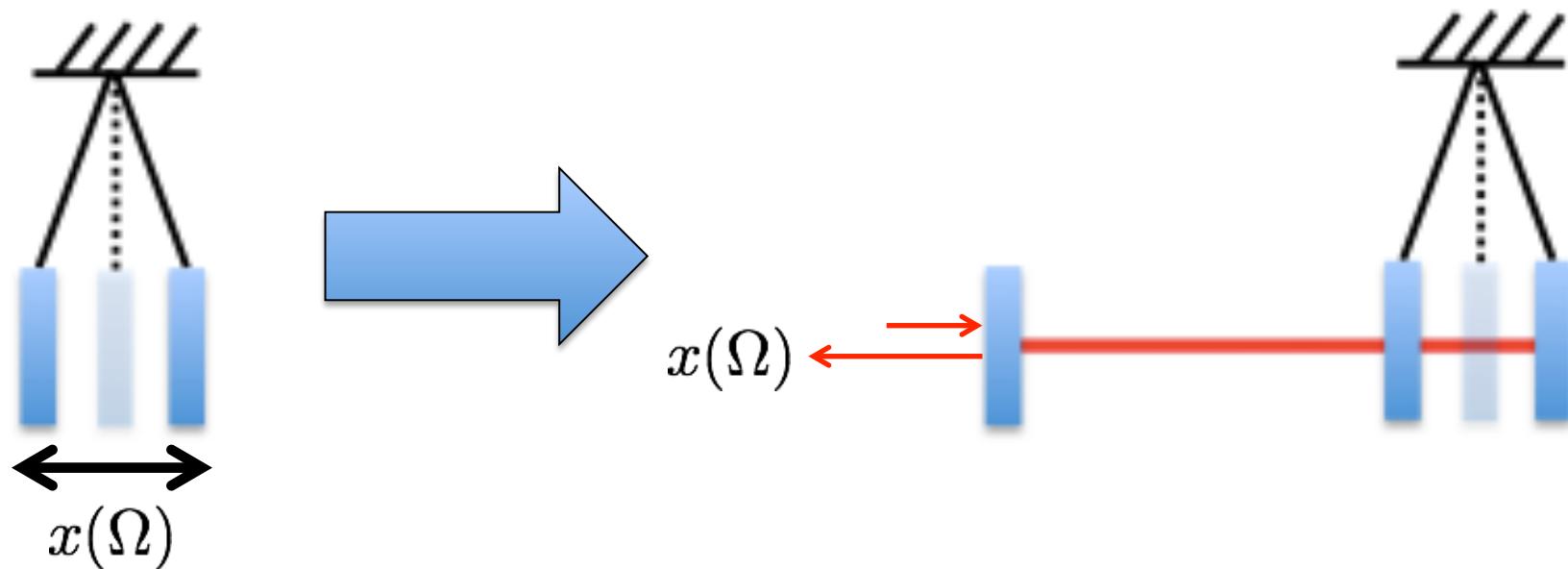
- 巨視系での量子状態の実現

--> 巨視的な鏡の冷却など



修士での研究

- 修論への研究において浮上した新規の内容:
振動子の量子状態の光への転写



- (光との相互作用がなかった場合に実現されていたはずの)振動子の変位が、共振器からの反射光の状態となって出てくる。

修士での研究

-- 光の状態の表し方

$$\hat{E} = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{c}} [(A + \hat{a}_1) \cos \omega_0 t + \hat{a}_2 \sin \omega_0 t]$$

古典的な振幅
振幅揺らぎ
(古典電場と
同位相)

輻射圧揺らぎ
=> 鏡を揺らす

古典電場(キャリア光)の位相

位相揺らぎ
(古典電場と
90度ずれ)

鏡の変位は位相揺らぎに
=> 読み取り雑音に

揺らぎ成分のフーリエ変換

$$\hat{a}_1(\Omega) = (\hat{a}_{\omega_0+\Omega} + \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^\dagger) / \sqrt{2}$$

↑upper ↓lower

$$\hat{a}_2(\Omega) = (\hat{a}_{\omega_0+\Omega} - \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^\dagger) / i\sqrt{2}$$

古典光の周波数 ω_0 に対して

$\omega_0 \pm \Omega$ の光の消滅/生成演算子の和

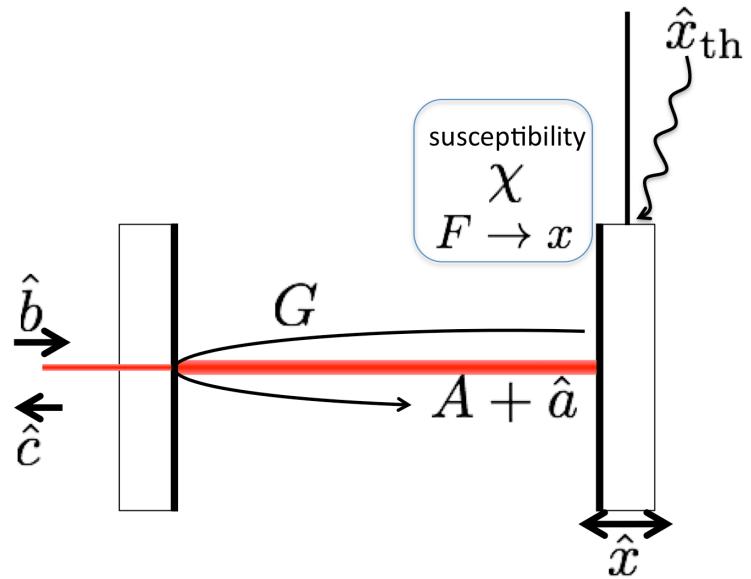
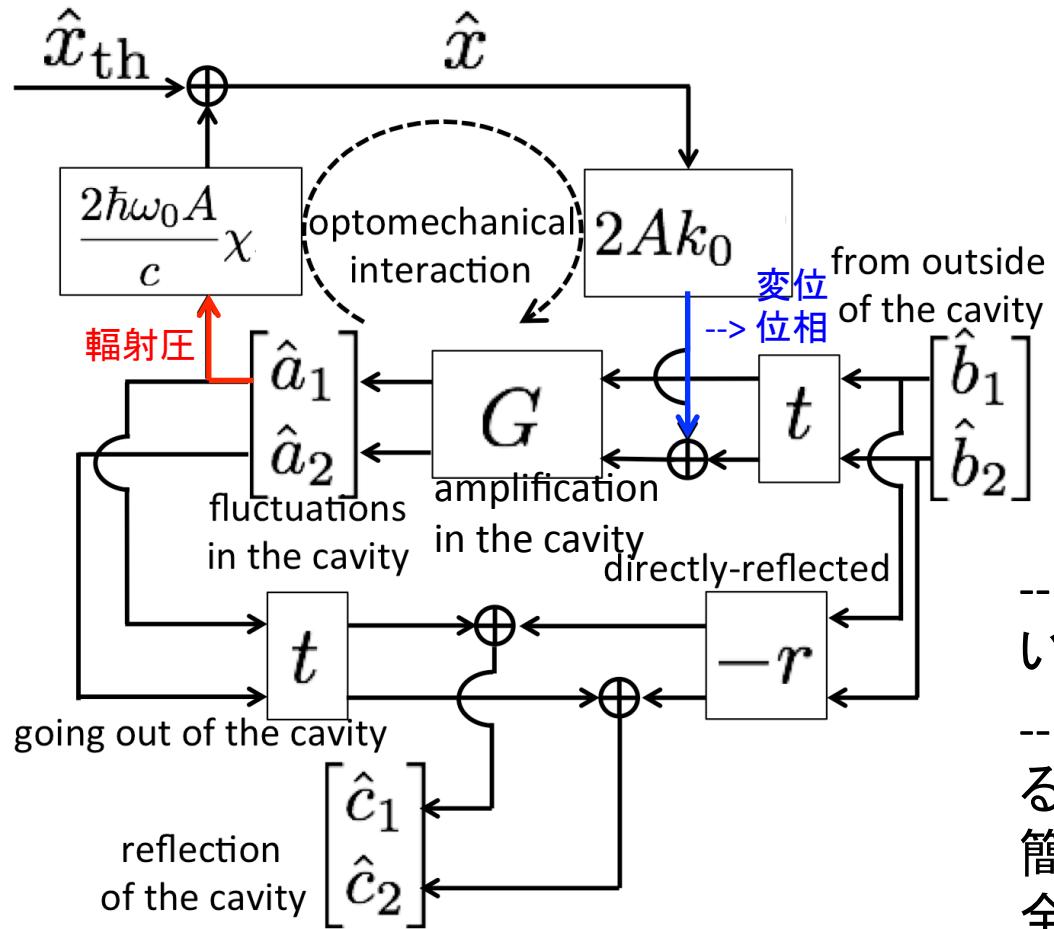
振幅/位相揺らぎによる表現



upper/lower sidebandによる表現

修士での研究

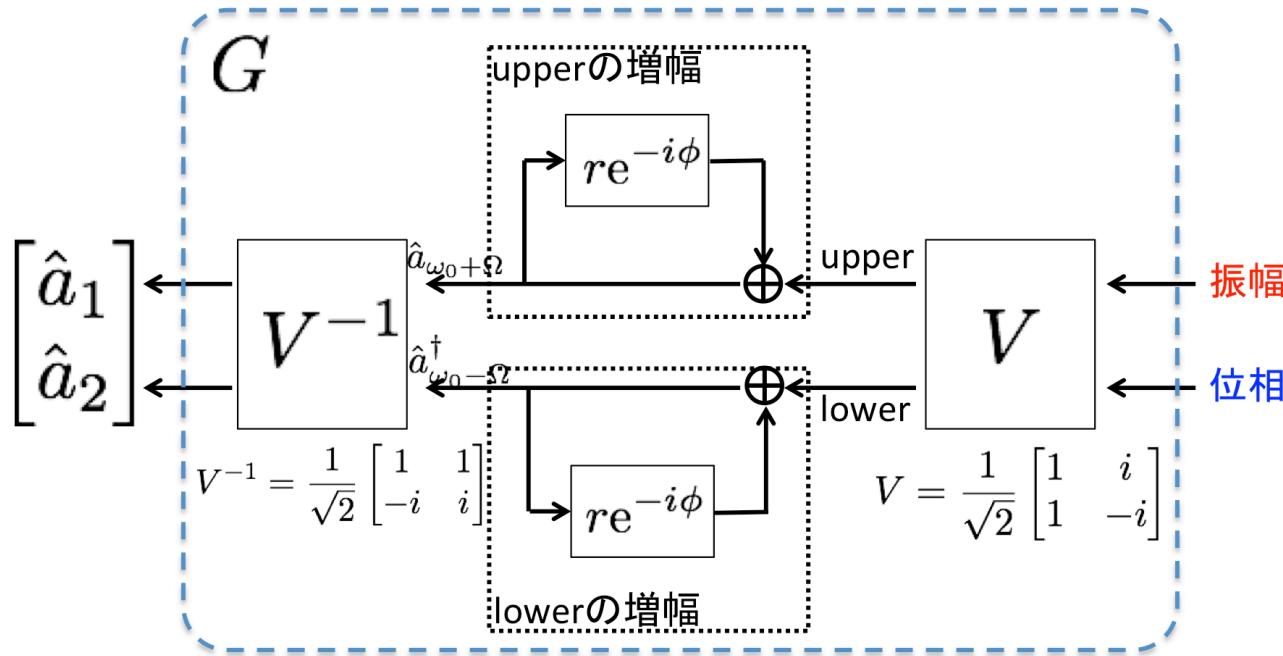
-- ブロック図で光学機械相互作用を表す



- 我々が扱い慣れたブロック図を用いることで直感的な理解が可能に。
- フィードバックループの追加による鏡の運動の変化も、ブロック図の簡略化 ($1/(1+OLG)$) を用いることで全体像が掴みやすい。

修士での研究

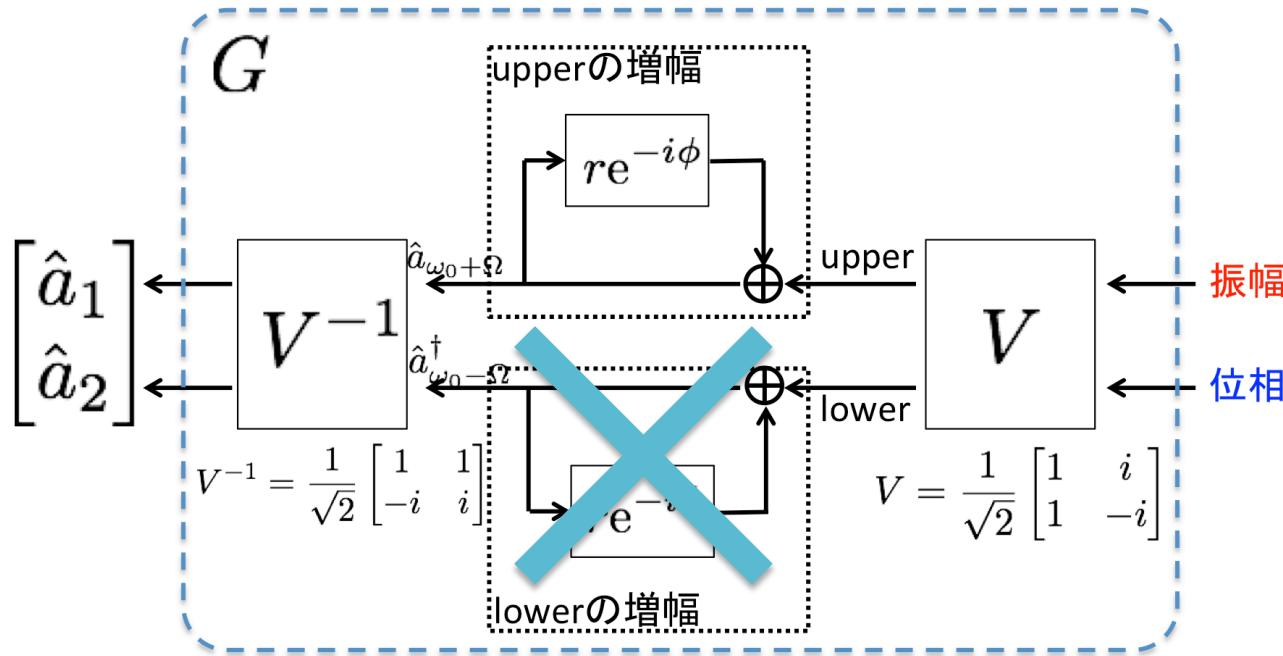
-- 共振器での増幅 G の中身に注目



-- upper (lower) のみ共振器で共振しているような場合を考えると、光学機械相互作用のループが簡単になることがわかる。

修士での研究

-- 共振器での増幅 G の中身に注目

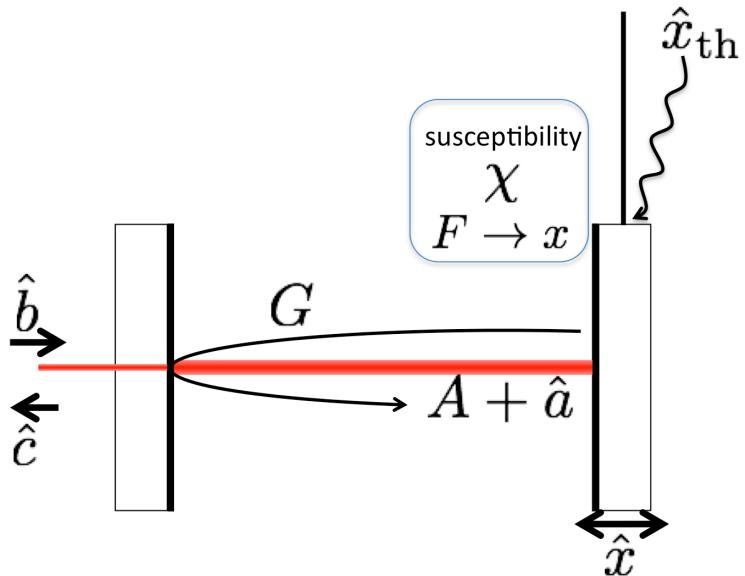
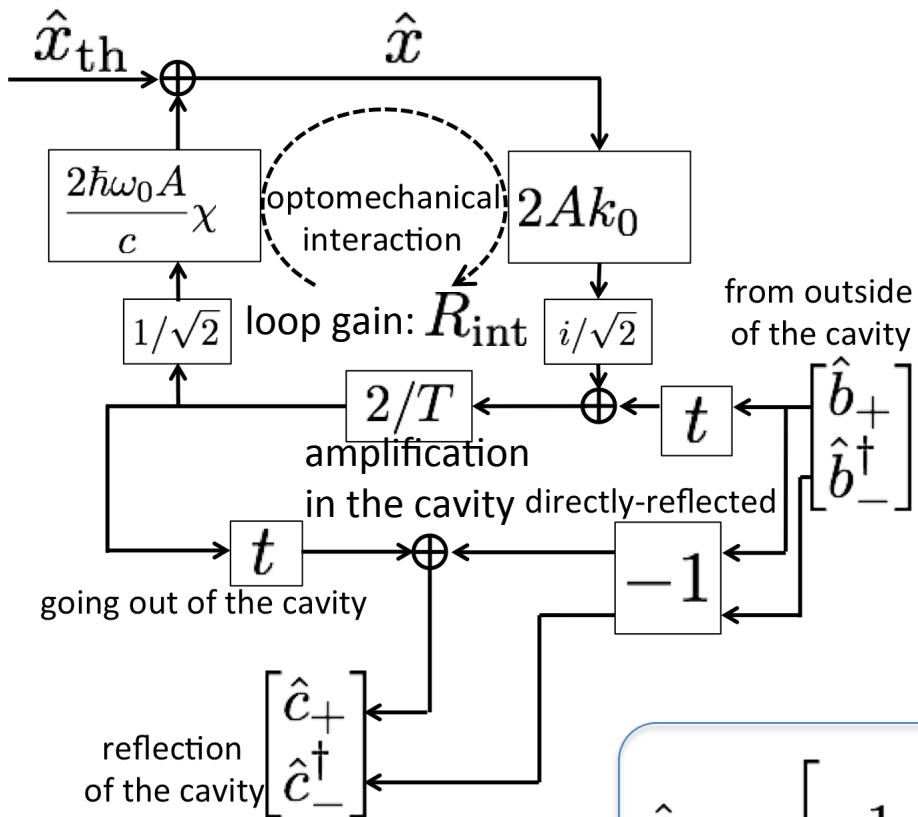


-- upper (lower) のみ共振器で共振しているような場合を考えると、光学機械相互作用のループが簡単になることがわかる。

=> このような場合 (resolved sideband limit) を考えてみる。

修士での研究

-- Upper sidebandのみ共振の場合

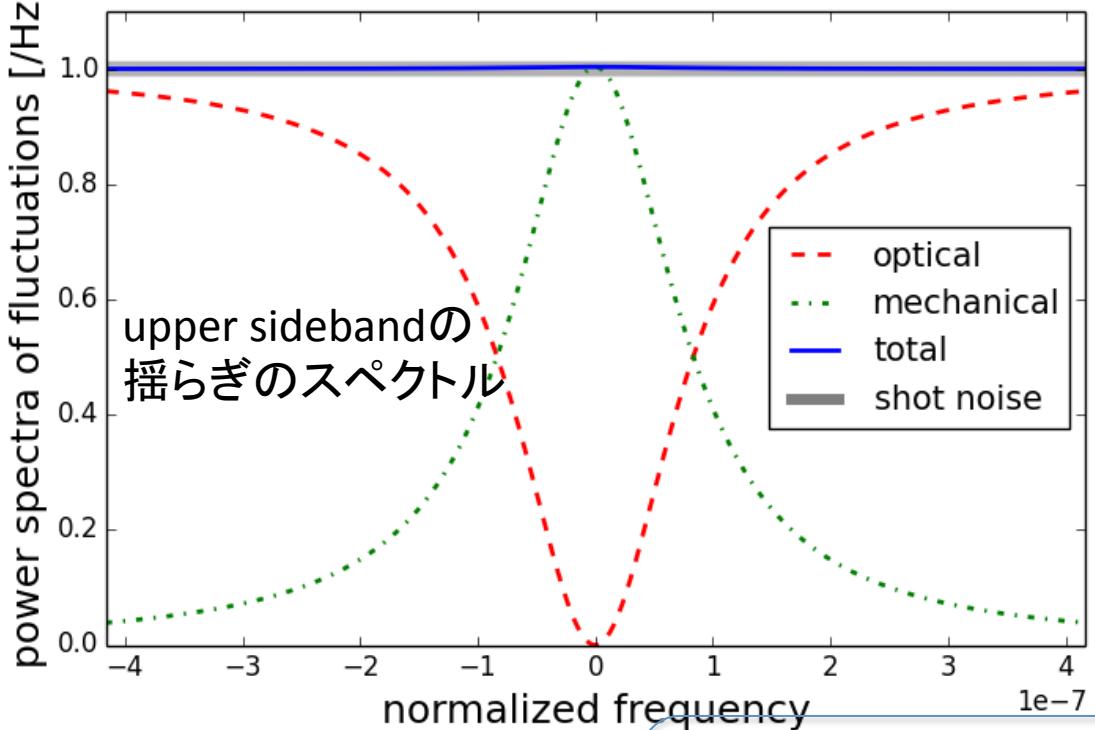


$$\hat{c}_+ = \left[-1 + \frac{2}{1 - R_{\text{int}}} \right] \hat{b}_+ + \frac{i2\sqrt{2}Ak_0}{(1 - R_{\text{int}})\sqrt{T}} \hat{x}_{\text{th}}$$

$R_{\text{int}} = -1$ でゼロに

修士での研究

-- aLIGOの腕共振器のパラメータで計算した結果



共振周波数のところで、反射光の揺らぎ = 振動子のもともとの変位揺らぎ(熱・量子揺らぎ)となっている。

振動子の状態の雑音なしでの転写

$$\hat{c}_+ = \left[-1 + \frac{2}{1 - R_{\text{int}}} \right] \hat{b}_+ + \frac{i2\sqrt{2}Ak_0}{(1 - R_{\text{int}})\sqrt{T}} \hat{x}_{\text{th}}$$

$R_{\text{int}} = -1$ でゼロに

修士での研究

-- 考えうる応用と残る疑問:

-- 振動子の変位の量子雑音ゼロでの測定

$x(\Omega)$ が測れるのではなく $x(\Omega) + x^\dagger(\Omega)$ のような量 ($\cos \Omega t$ 成分) が測れる。

=> どのような意味が見出せるのか？？？

-- 振動子の基底状態への冷却

ホモダイン測定ではゼロ点振動をS/N=1で測定可能。フィードバックで冷却

=> 具体的にどうやって？ Sideband coolingなどと比較した場合の利点は？

-- 振動子の”テレポーテーション”

振動子 --> 光 --> 振動子 へと転写。光から振動子への転写は実質的に sideband cooling なので実証済み。

=> 面白いがどんな価値があるのか？本当にテレポーテーション？

ありえそうな実験

-- 私がこれからやりたいことにあるような実験をいくつか

* 「振動子の量子状態の光への転写」の原理実証

--> 実証することの意義・この現象の応用先があれば、テーマになりうるか

* mg 鏡 (cantilever ?) の基底状態への冷却

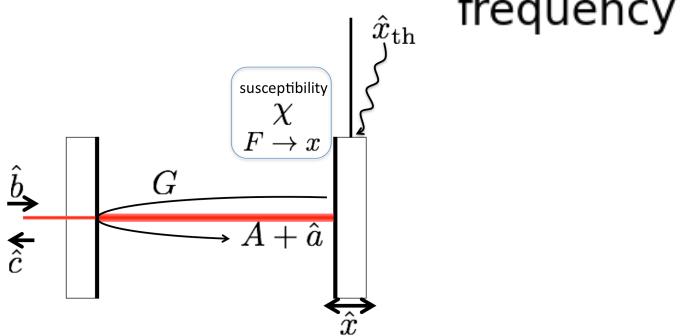
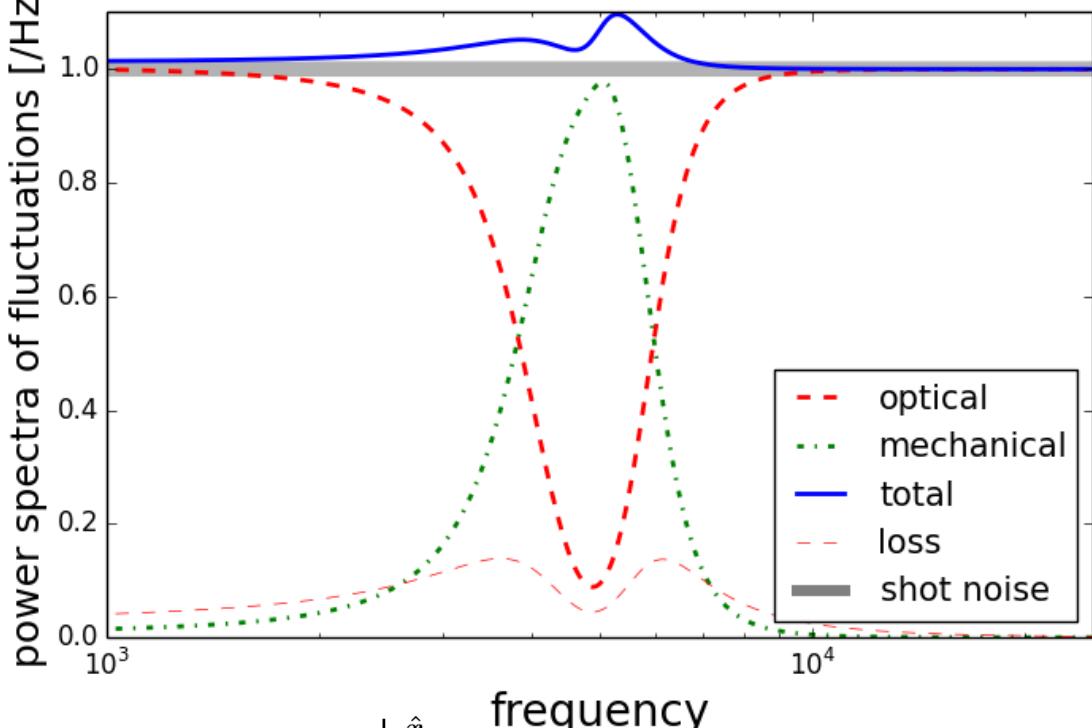
--> 意義や応用先はある。どのくらい実現可能だろうか？

* ねじれ振り子での量子輻射圧揺らぎの観測

--> 小森さんがやっている実験。有力。ここでは話さない。

ありえそうな実験

*「振動子の量子状態の光への転写」の原理実証

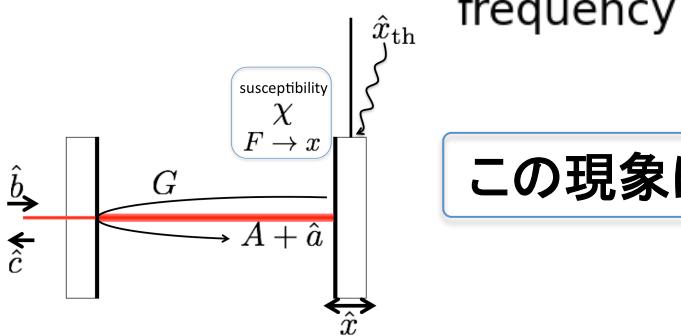
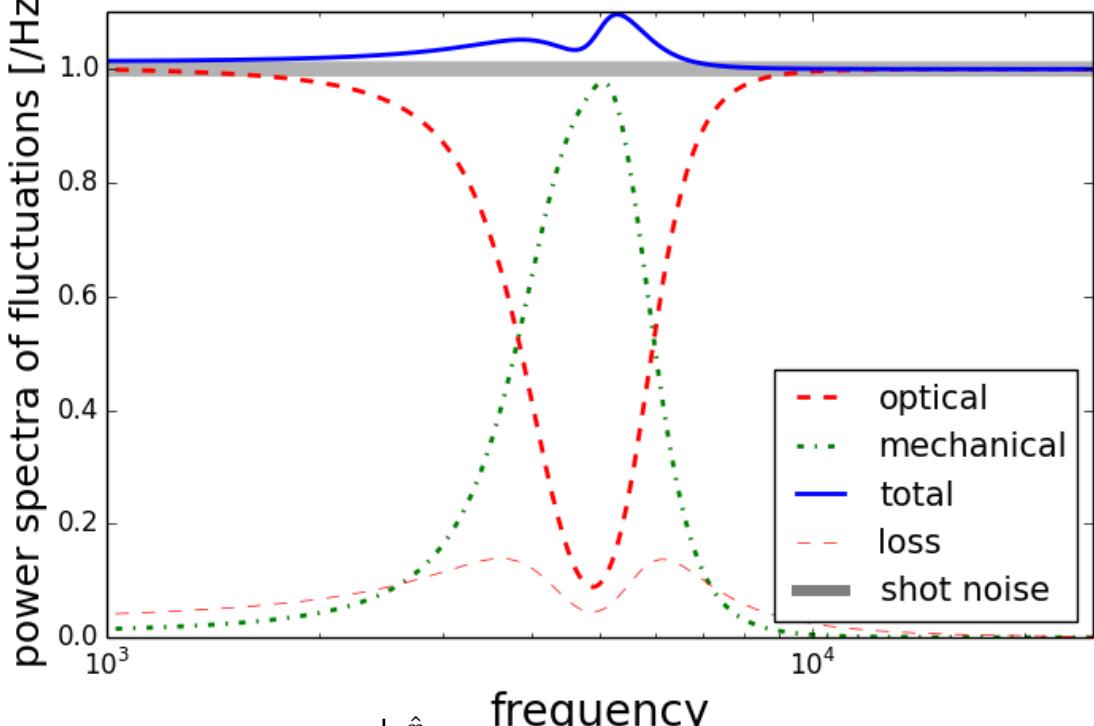


$\mathcal{F} = 20000$	$P_{\text{cav}} = 2 \text{ W}$
$\text{loss} = 16 \text{ ppm}$	$P_{\text{incident}} = 1.4 \text{ mW}$
$L = 2 \text{ m}$	$m = 5 \text{ mg}$
$\kappa/2\pi = 1.87 \text{ kHz}$	$f_{\text{res}} = 5 \text{ kHz}$
	$Q = 5$

- 完全にresolved sidebandではない ($\omega_{\text{res}}/\kappa \sim 5$)
- 共振器内のロスを考慮
- 量子雑音だけ考えると、反射光の揺らぎがゼロ点振動で支配されるような系が作れる。
- 実際にゼロ点振動の転写を実証するのは色々と難しいだろう。

ありえそうな実験

*「振動子の量子状態の光への転写」の原理実証



$\mathcal{F} = 20000$	$P_{cav} = 2 \text{ W}$
$\text{loss} = 16 \text{ ppm}$	$P_{\text{incident}} = 1.4 \text{ mW}$
$L = 2 \text{ m}$	$m = 5 \text{ mg}$
$\kappa/2\pi = 1.87 \text{ kHz}$	$f_{\text{res}} = 5 \text{ kHz}$
	$Q = 5$

-- 古典的な原理実証なら、比較的簡単にできるのではないか。

- 光源の古典雑音をわざと印加
- 振動子へ外力をかける
- > 光源の雑音にもかかわらず、反射光の揺らぎと振動子の外力に高いコヒーレンスが得られる。
- => 転写の古典バージョン

この現象に未来があるなら、原理実証はアリかもしれない

ありえそうな実験

* mg 鏡 (cantilever ?) の基底状態への冷却

ナノグラム・ $\sim 10 \text{ MHz}$ ・マイクロ波回路で基底状態への冷却がなされている。

同じようなことが、ミリグラムスケール・ $\sim 10 \text{ kHz}$ ・レーザーを用いてできないか?

-- 基底状態への冷却を実現するためには、fQ条件 (0 Kの熱浴でQ=1までdampした場合に基底状態になる条件) を満たす必要がある:

$$f_{\text{res}} Q \geq 6 \times 10^{12} \cdot \left(\frac{T}{300 \text{ K}} \right)$$

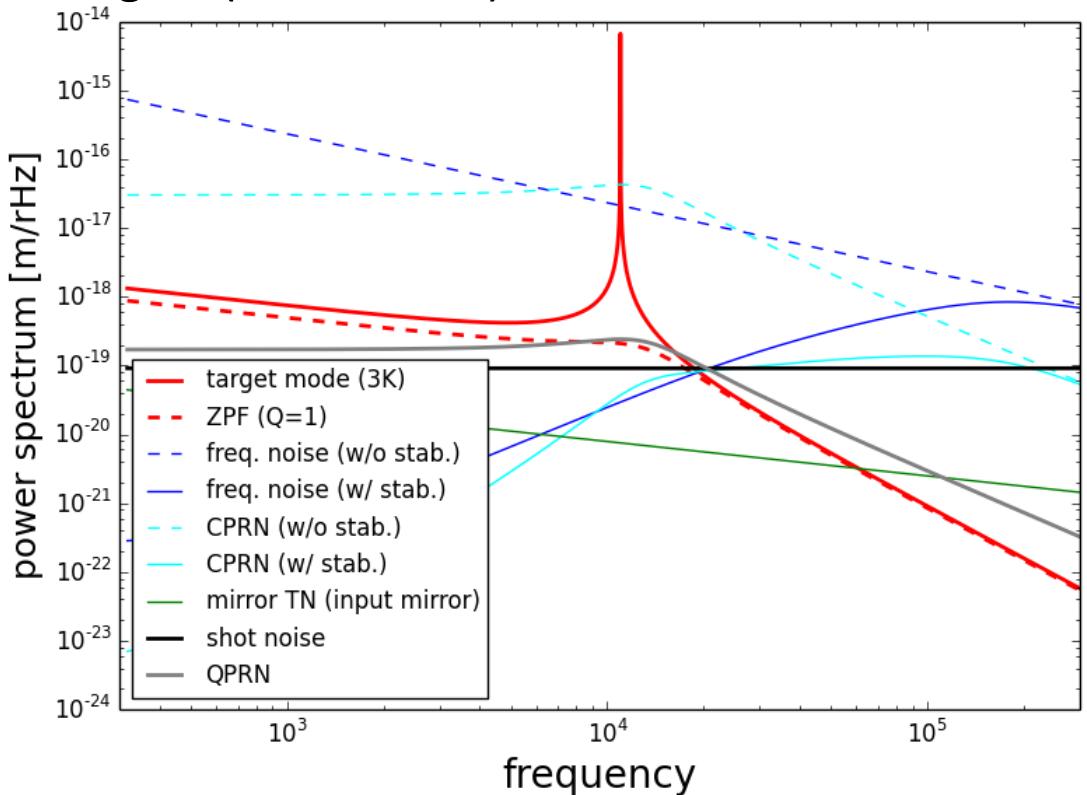
=> 高い共振周波数、高いQ、低温が求められる。

-- 光が振動子の運動を支配するためには、軽い振動子が望ましい。

=> 我々が実現可能な系では、ミリグラムスケールが良い。

ありえそうな実験

* mg 鏡 (cantilever ?) の基底状態への冷却



シリコンのcantilever
5 mm
1.7 mm 厚さ: 0.2 mm

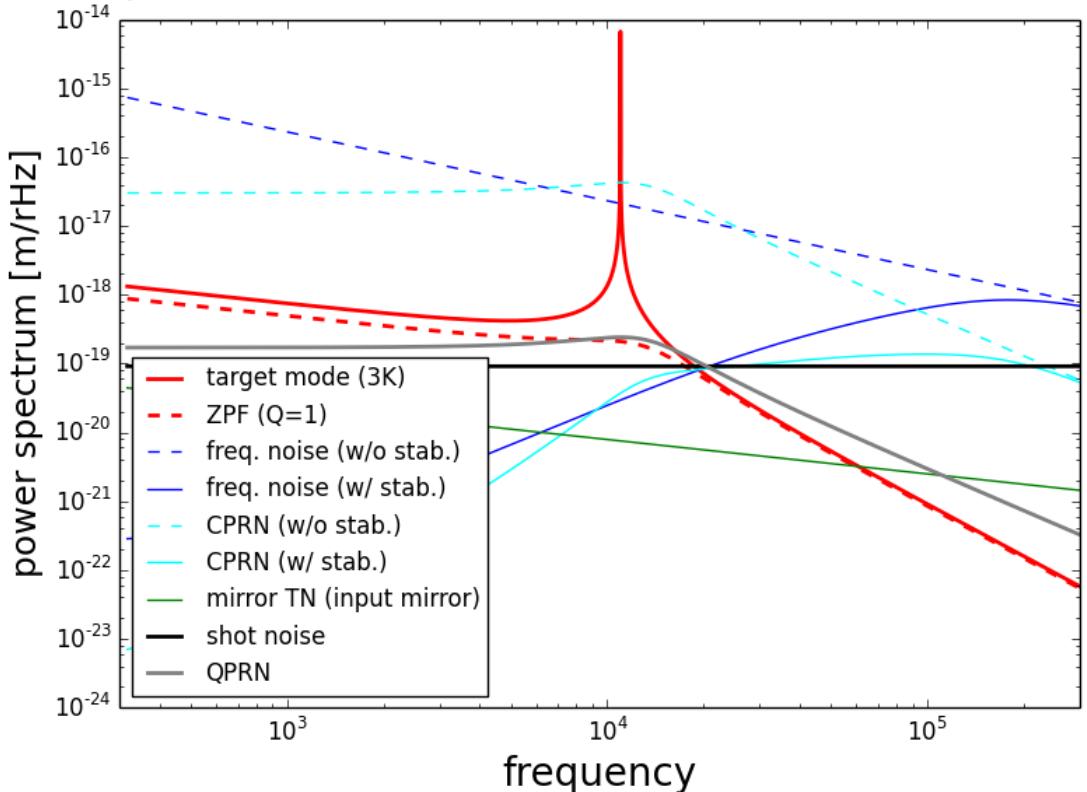
$$\begin{array}{ll} f_{\text{res}} = 11 \text{ kHz} & \mathcal{F} = 6000 \\ Q = 10^7 & L = 0.01 \text{ m} \\ m_{\text{eff}} = 1 \text{ mg} & P_{\text{incident}} = 8 \text{ mW} \\ & P_{\text{cav}} \sim 30 \text{ W} \end{array}$$

fQ条件は2倍程度満たす @T=3 K

※ 信号取得方法・冷却方法を定めていないため、周波数雑音や強度雑音は目安の値である。

ありえそうな実験

* mg 鏡 (cantilever ?) の基底状態への冷却



共振周波数を高くすると、鏡の熱雑音・周波数雑音がキツくなる。
低くすると、 fQ 条件がキツくなる。

問題点

- Q値が高い (10^7)
一部しかコーティングしないとしても、このようなQ値が出せるのか？
- 低温はどこまでいけるのか？
低温のことはわかりません。。
- 周波数雑音・強度雑音が厳しい
ともにUGF300 kHz程度
ある程度これらを低減しないと、冷却自体も見えない
- 周波数雑音が厳しいので共振器長が短くなる => 線幅が大きく、sideband coolingは使えない。
remote coolingの使用か。信号取得方法・フィードバックを含めた正確な雑音の見積もりが必要。

まとめ

- これからの私のテーマを考えたい。光学機械相互作用を使った実験。
- 修士での研究の中で「振動子の量子状態の転写」を考案。
- 具体的な実験の検討
 - * 「振動子の量子状態の光への転写」の原理実証
 - > この現象に意義があるなら、十分テーマになりそう。意義は？
 - * mg 鏡 (cantilever ?) の基底状態への冷却
 - > かなり頑張らないと実現が難しそう。結局 sideband cooling が厳しいのであれば、共振周波数を高くした意味がないのでは（松本さん・小森さんの実験と同じことをしていることになる）。
 - 短期間で新しい実験テーマを探すことは難しいということがわかった。
 - => 博士でのテーマのかたわら、これからもサイエンス側・実現可能なセットアップの側の両面から新しいテーマを継続して探し続ける。

予備

0. 本研究の概要

- ついに重力波の初の直接検出が果たされた今、さらに豊富な天文学的・宇宙論的な情報をもたらすために、重力波検出器の感度・安定度を向上させる研究が求められている。そこで、干渉計型重力波検出器の感度・安定度に密接かつ多面的に関わっている光学機械相互作用について理論的な研究を行った。
- 光学機械相互作用を、光の一般の空間モードと鏡の一般の運動モードに対してブロック図を用いて記述した。重力波検出器の量子雑音、光ばね効果、共振器の鏡の角度不安定性、パラメトリック不安定性といった光学機械相互作用による現象はこれまで全く個別に研究されてきたが、本研究の一般的な記述によってこれらを初めて統一的に扱った。
- さらに、この統一的な見方により、鏡の回転運動や弾性モードの測定の量子雑音といったこれまで見過ごされていた現象を見つけ、並進運動の場合との対応付けなどの物理的な考察を行った。

1. 重力波とその検出

-- 重力波とは、時空の歪みが空間を伝播する波である。

2015年、人類初の直接検出！

2つの $\sim 30 M_{\odot}$ のブラックホールからなる連星の合体のときの重力波を捉えた。

-- 重力波の及ぼす影響は非常に小さいので、大質量が速く動く場合にしか観測可能なものは放射されない。

--> ブラックホールや中性子星の連星合体、超新星爆発、パルサーなど

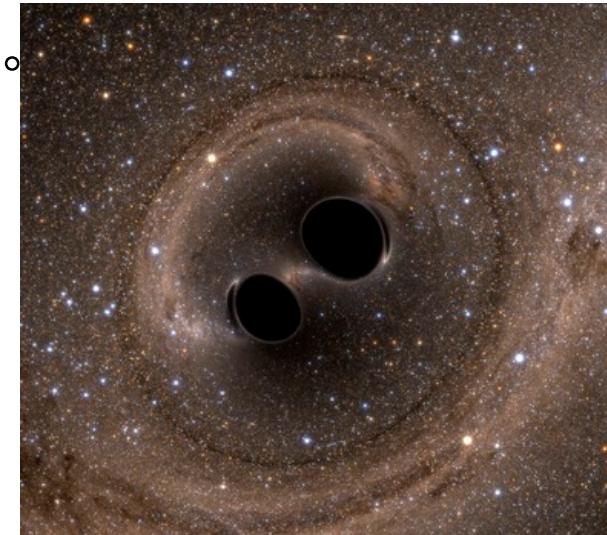
=> これらの天体现象に対して、**重力波は独自の観測を可能にする。**

-- 地球に到来する重力波の振幅 $h \lesssim 10^{-21}$

=> 1 km離れたテストマスの距離が $\sim 10^{-18} m$ だけ変化する。

-- このように小さな距離の変化を捉えるためには

=> **レーザー干渉計**が適している!!



LIGO lab web page

<https://www.ligo.caltech.edu/image/ligo20160211d> より

1. 重力波とその検出

干渉計型重力波検出器

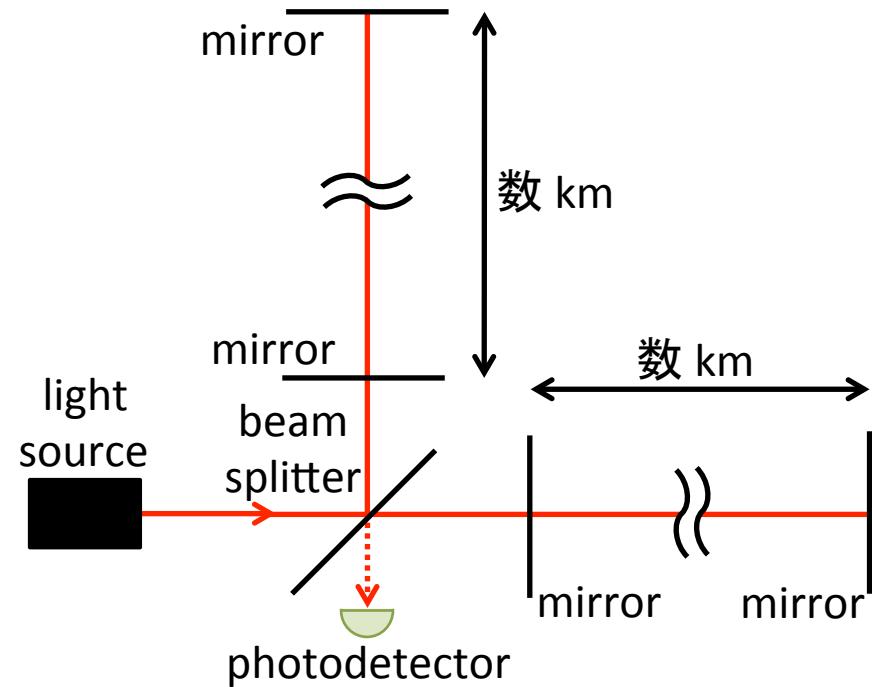
-- 大型重力波検出器の主流

干渉の明暗の変化で腕の長さの変化を読み取る。

--> 腕の長さに比例して、重力波による変位が大きくなる。

-- キロメートルクラスの検出器では、
Michelson干渉計と**Fabry–Perot共振器**を組み合わせた構成を用いている。

--> Michelson干渉計で2つの腕の長さの差を測る。光が共振器内を何度も往復することで、実効的な腕の長さを長くする。



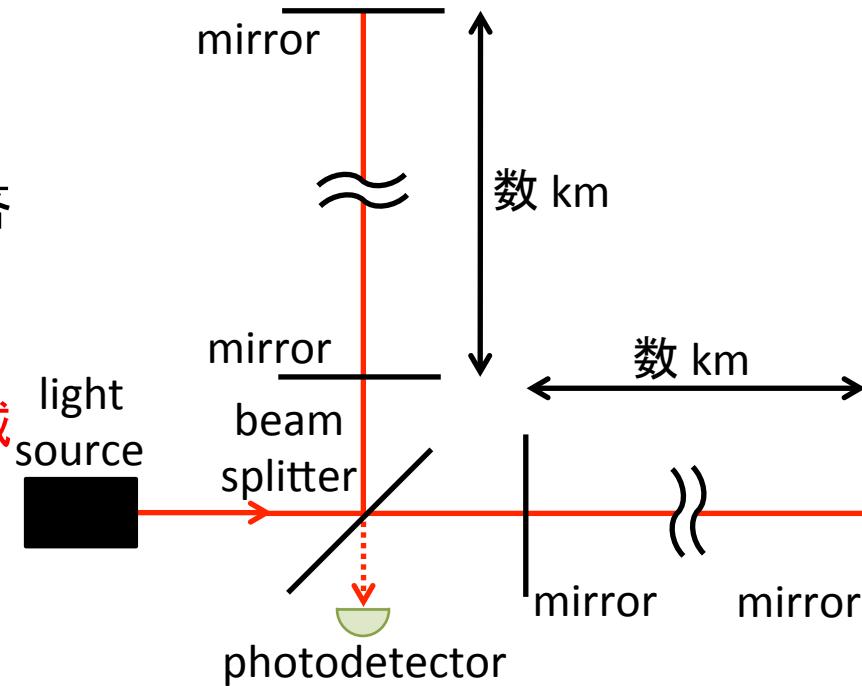
1. 重力波とその検出

干渉計型重力波検出器

- 各鏡は、**振り子**として吊られている。
(共振周波数は~1 Hz)
=> 重力波に対して自由質点のように応答するため・防振するため

- 鏡を吊る振り子、鏡自体は、非常に**機械的損失が小さい**。
=> 热運動による雑音を低減するため
=> 機械的モードの**ダンピングが小さい**。

- **非常に高パワーのレーザー光**を用いる。
(腕共振器の中で 100 kW – 1 MW 程度)
=> 光検出時のショットノイズ低減のため



重力波信号 $\propto P$
 強度揺らぎ $\propto \sqrt{P}$
 => S/N 比 $\propto \sqrt{P}$

2. 重力波検出器と光学機械相互作用

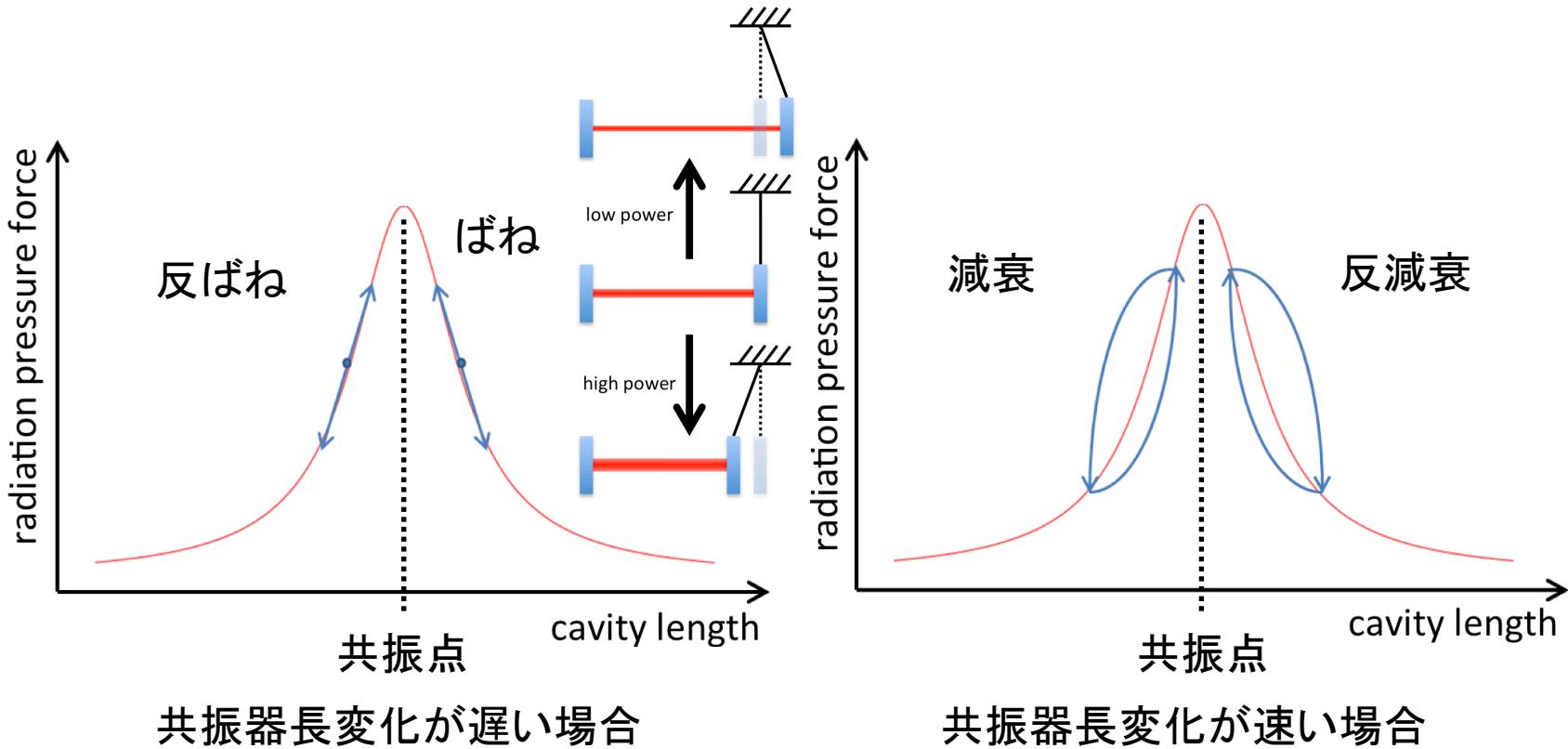
- 干渉計型重力波検出器では、光学機械相互作用が重要な役割を果たす。
∴ **非常に高い共振器内パワー**
- 具体的には
 - **量子雑音**: (光の)量子揺らぎが雑音になる。--> ほとんどの帯域で感度を制限
 - ↳ => 正しい量子雑音
 - **光ばね効果**: 光の輻射圧が“ばね”として鏡にはたらく。
 - **角度不安定性**: 光の輻射圧で鏡の姿勢が不安定になる。
 - **パラメトリック不安定性**: 鏡の弾性モードが光によって励起・増幅されてしまう。

=> 次ページ以降、以上の既知の現象を説明する。

鏡が受ける効果

2. 重力波検出器と光学機械相互作用

光ばね効果



-- 共振器長の変化によって、共振器内の光のパワーが変化

=> 輻射圧による力が変化

-- 共振点からのズレに応じて、ばね+反減衰 or 反ばね+減衰

2. 重力波検出器と光学機械相互作用

角度不安定性

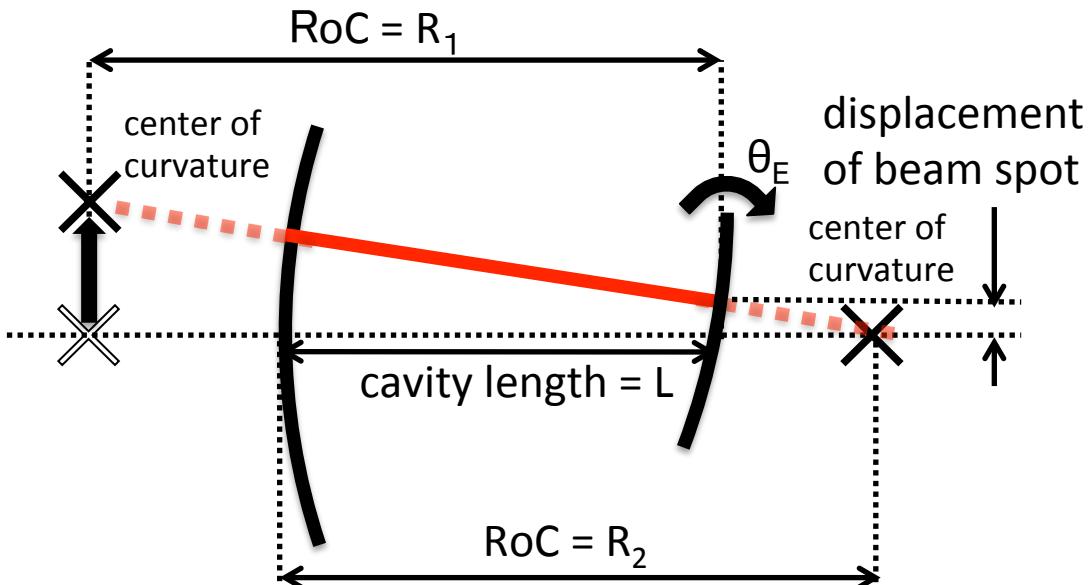
-- 共振器を構成する鏡が回転すると、共振している光の軸が変化する。

=> 鏡で反射する位置が変化

=> 辐射圧によるトルクが変化

-- この効果 (Sidles-Sigg効果)により、**反ばねトルク**が生じ、鏡の回転運動が不安定になる場合がある。

-- 角度制御は実際に検出器を運用するためには非常に重要である。



$$\frac{T_{RP}}{\text{トルク}} = F_{FP} \frac{Lg_2}{1 - g_1g_2} \theta_E$$

輻射圧の力
2P/c

$$g_j = 1 - \frac{L}{R_j}$$

2. 重力波検出器と光学機械相互作用

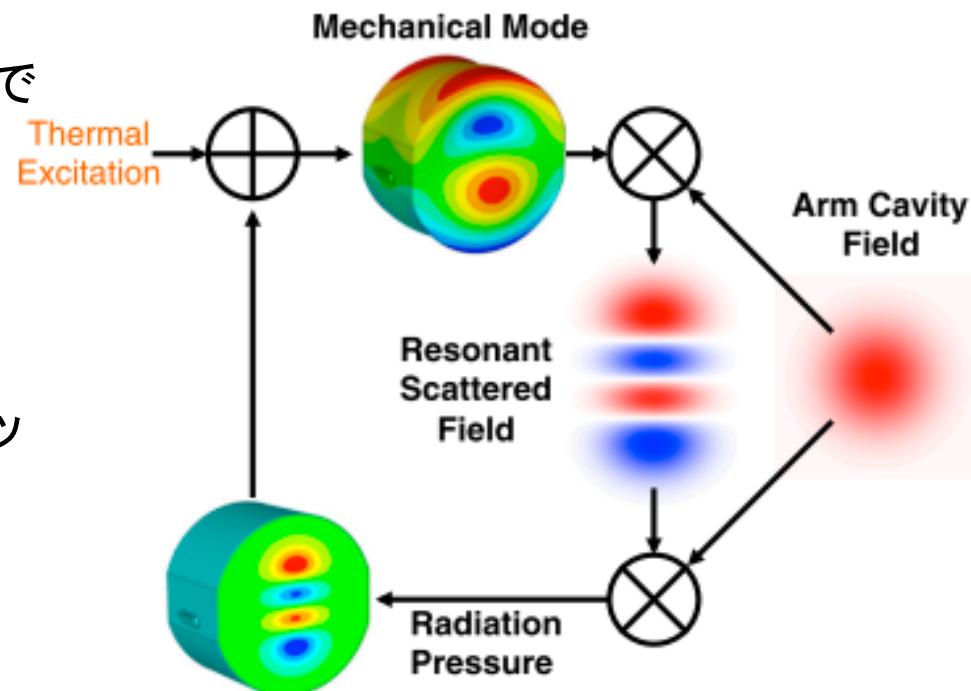
パラメトリック不安定

-- 鏡の弾性モードが、共振器内の光を散乱し、散乱された光が共振器内で共振し、輻射圧として弾性モードへフィードバックされる。

-- このフィードバックによる反減衰が機械的な減衰を超えると、パラメトリック不安定性を生じる。

--> Advanced LIGOで実際に観測

-- 共振器内の光のパワー上昇
-- 反減衰力の増大
-- 不安定性を生じるモード数の増大
=> 高パワー化の障害



Phys. Rev. Lett., 114 (2015) 161102 より

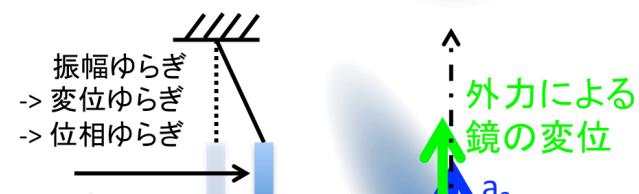
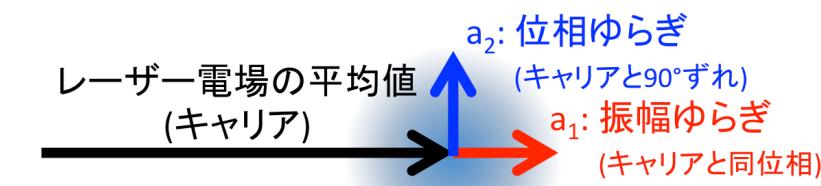
$$\mathcal{R}_n = \frac{4P k_0 Q_n}{M \Omega_n^2 c} \sum_{lm} \operatorname{Re} [G_{lm}^-(\Omega_n)] B_{lm,n}^2$$

パラメトリック
ゲイン (1を超えると不安定)

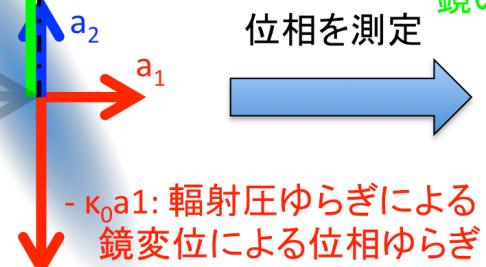
パワー 機械的Q値

2. 重力波検出器と光学機械相互作用

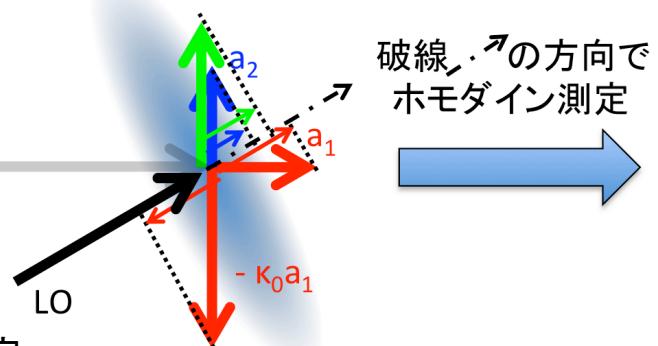
量子雑音



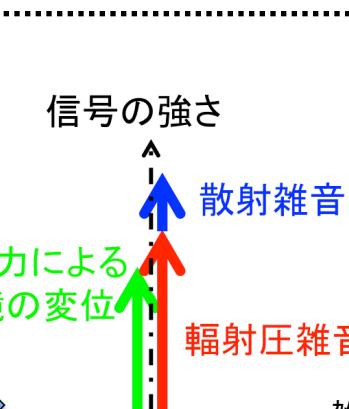
ポンデロモーティブ
スカイージング



位相を測定



-- 重力波検出器: 干渉計から出てくる光の
揺らぎを測定 => 元々の量子揺らぎが雑音



-- a₁とa₂は非可換

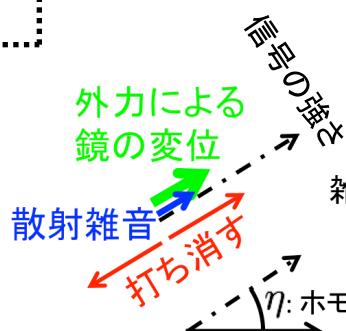
=> どちらか一方を測定。

通常の方法では、信号を含
んでいる位相方向を測定。

$$S_{z,\pi/2} = \frac{z_{SQL}^2}{2\kappa_0} (\kappa_0^2 + 1) \geq z_{SQL}^2$$

標準量子限界

-- ホモダイン測定: a₁とa₂の
線型和の測定



$$S_{z,\eta} = \frac{z_{SQL}^2}{2\kappa_0} [(-\kappa_0 + \cot \eta)^2 + 1]$$

標準量子限界の突破が可能

打ち消し

η: ホモダイン位相

3. 光の空間モード

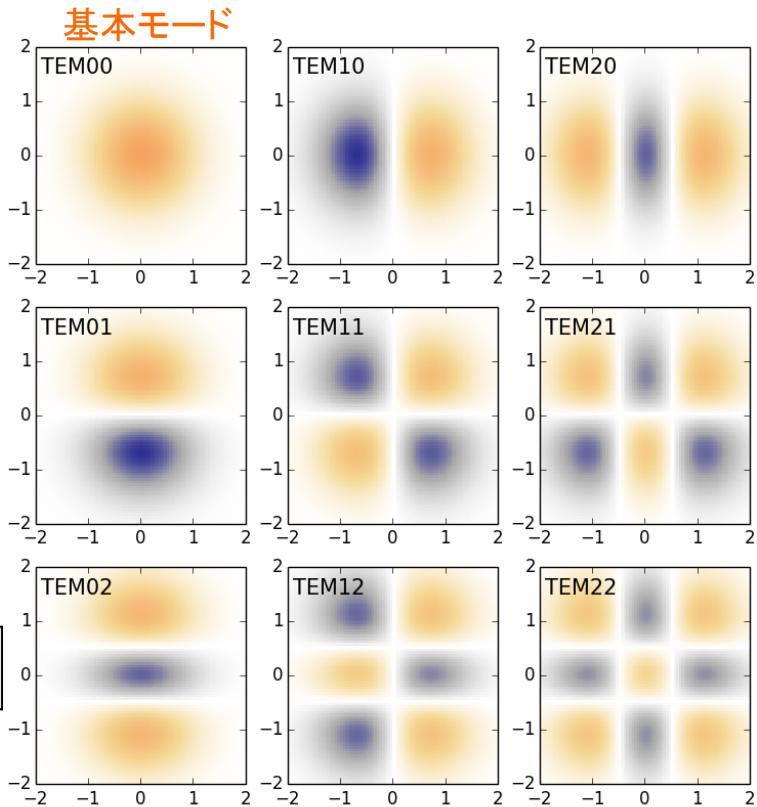
-- 電磁波の記述 --> 平面波が広く用いられる。
しかし、平面波は空間的広がりが無限。

-- レーザー光など実際の光を記述するため
には、適切な空間モードを考える必要がある。

--> 例えば Hermite-Gaussianモード

$$\psi_{lm}(\mathbf{x}, z, \omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_{lm} \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}, \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) \\ \times \exp \left[\left(-\frac{1}{w^2(z)} - i \frac{k}{2R(z)} \right) (x^2 + y^2) + i(l+m+1)\zeta(z) \right]$$

- 電場が Gaussianと直交多項式の積
- 自由度: 平面波 $(k_x, k_y, k_z) \leftrightarrow (l, m, \omega)$ HGモード
 => 近軸近似の範囲内で完全系をなす。
- Gouy位相 $\zeta(z)$: 次数(l+m)の異なるモードは
 Gouy位相分だけ位相がずれる。



橙は正、紺は負を表す。

3. 光の空間モード

レーザー光の表現

-- レーザー光の電場は、振幅が大きな(古典的な)基本モードの電場と、揺らぎを表す電場の重ね合わせで表される。

--> **全てのモードの揺らぎ**を考える必要がある。

-- 平面波の量子化から、空間モードで表される電場の量子化を導ける。

=> 理想的な光源であっても、**全てのモードに量子揺らぎが存在する**。

$$\hat{E}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{c}} \left\{ \underbrace{Au_{00} \cos \phi_{00}}_{\text{古典的な振幅}} + \sum_{lm} u_{lm} \left[\underbrace{\hat{a}_1^{lm}(z, t)}_{\substack{\text{Imモードの} \\ \text{"振幅"揺らぎ} \\ (\text{古典電場と} \\ \text{同位相})}} \cos \phi_{lm} + \underbrace{\hat{a}_2^{lm}(z, t)}_{\substack{\text{Imモードの} \\ \text{"位相"揺らぎ} \\ (\text{古典電場と} \\ 90度ずれ)}} \sin \phi_{lm} \right] \right\}$$

揺らぎ成分のフーリエ変換

$$\hat{a}_1^{lm}(\Omega) = \left(\hat{a}_{\omega_0+\Omega}^{lm} + \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^{\dagger lm} \right) / \sqrt{2}$$

\uparrow upper \downarrow lower

$$\hat{a}_2^{lm}(\Omega) = \left(\hat{a}_{\omega_0+\Omega}^{lm} - \hat{a}_{\omega_0-\Omega}^{\dagger lm} \right) / i\sqrt{2}$$

古典光の周波数 ω_0 に対して

$\omega_0 \pm \Omega$ の光の消滅/生成演算子の和

Imモードの電場分布

$$u_{lm}(\mathbf{x}, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi w^2(z)}} \frac{1}{\sqrt{2^l l! 2^m m!}} H_{lm} \left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}, \frac{\sqrt{2}y}{w(z)} \right) e^{-(x^2+y^2)/w^2(z)}$$

4. 一般のモードの相互作用

-- 光の一般的な空間モードと鏡の一般的な運動モードの相互作用を記述しよう。

以下の3つの過程から成っている:

1. 鏡面の変位で光の空間モードの揺らぎが励起される。

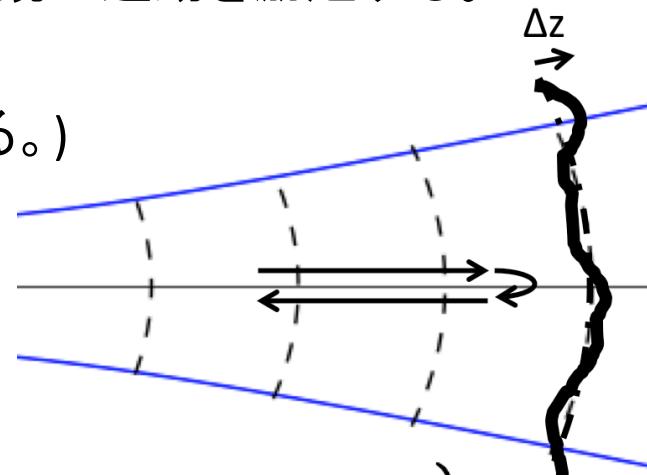
=> 位相揺らぎ成分を生み出す。

2. 光の空間モードの揺らぎによる輻射圧揺らぎが鏡の運動を励起する。

=> 振幅揺らぎ成分が輻射圧揺らぎに寄与。

3. (光の空間モードの揺らぎが共振器で増幅される。)

-- 一般的なモードの光学機械相互作用を
ブロック図にまとめることを考える。



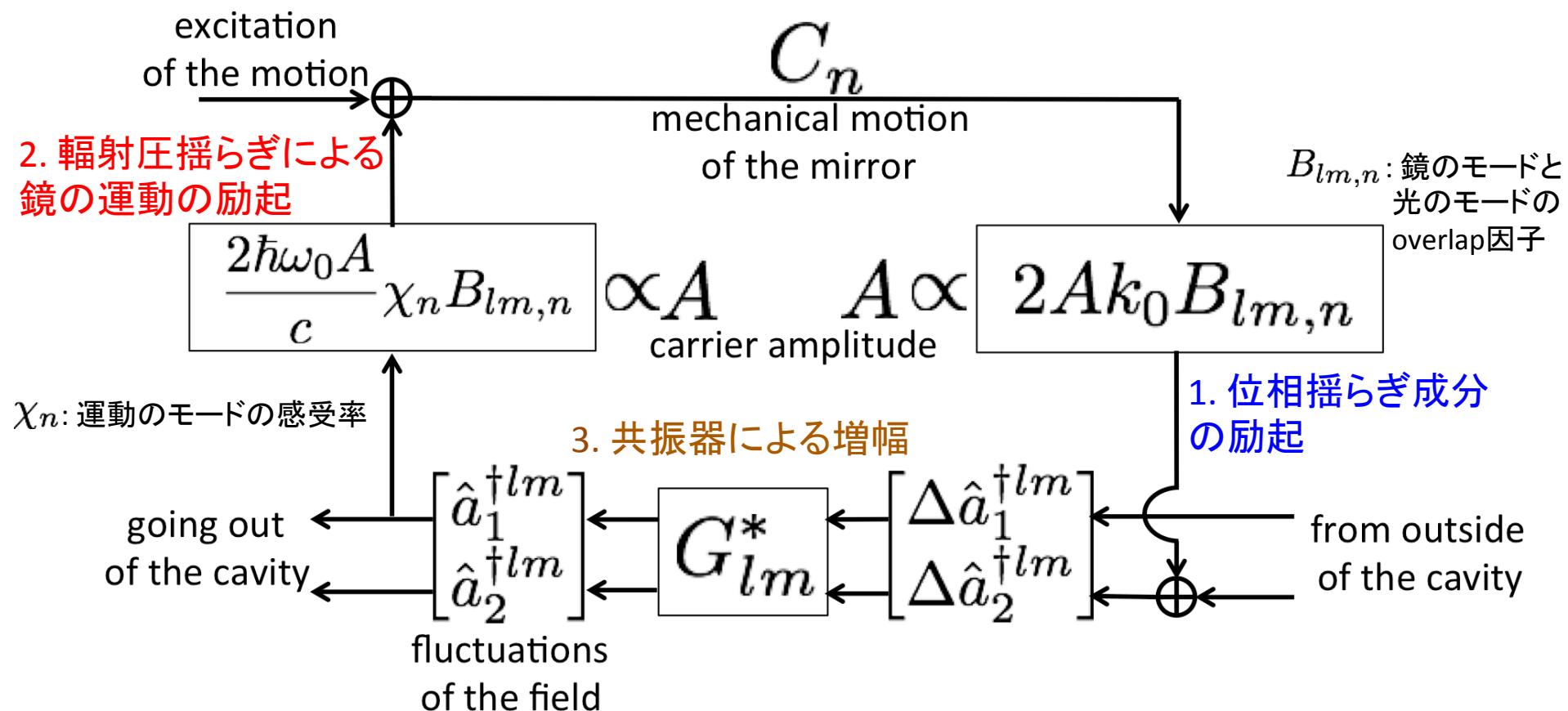
$$\hat{E}(\mathbf{x}, t) = \sqrt{\frac{4\pi\hbar\omega_0}{c}} \left\{ A u_{00} \cos \phi_{00} + \sum_{lm} u_{lm} \left[\underbrace{\hat{a}_1^{lm}(z, t) \cos \phi_{lm}}_{\text{古典的な振幅}} + \underbrace{\hat{a}_2^{lm}(z, t) \sin \phi_{lm}}_{\text{Imモードの“位相”揺らぎ}} \right] \right\}$$

↑
Imモードの
“振幅”揺らぎ

↑
Imモードの
“位相”揺らぎ

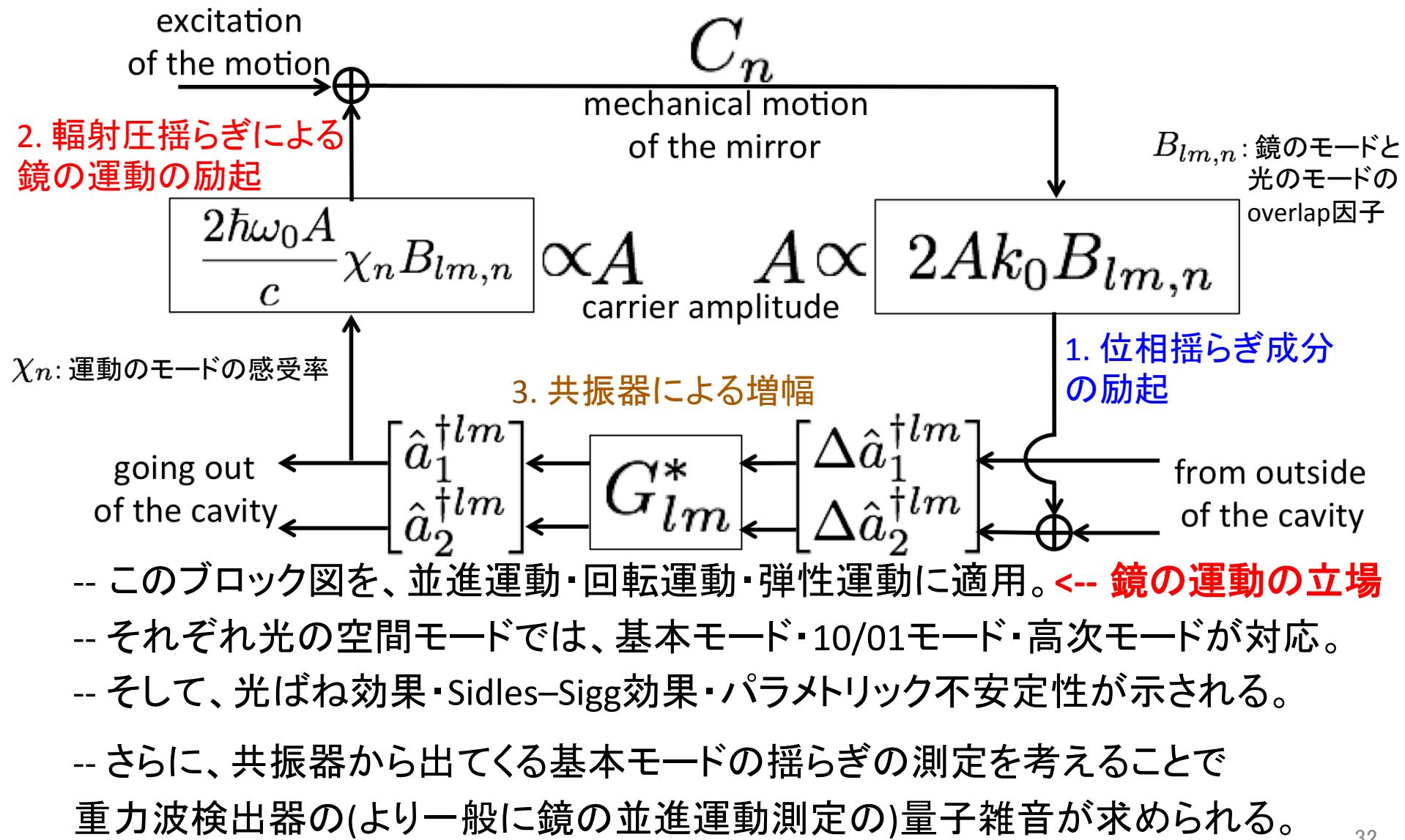
4. 一般のモードの相互作用

ブロック図



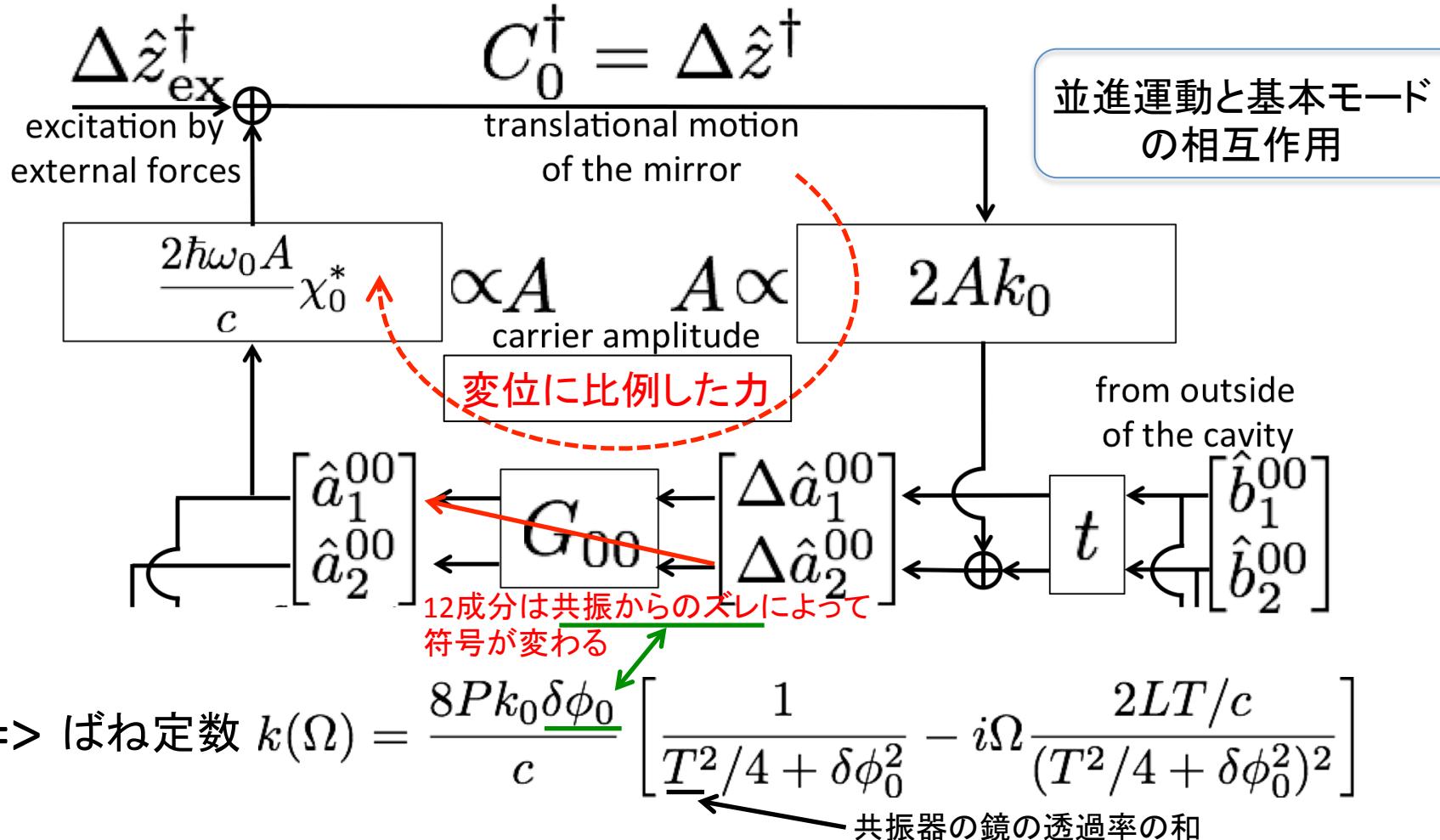
- 励起された位相揺らぎは、共振器に入射してくる揺らぎと重ね合わさる。
- 輻射圧による運動の励起は熱運動等と重ね合わさる。
- ループゲインは $A^2 (\propto P)$ に比例。 G_{lm}^* の12成分にも比例。

5. 既知の現象の再導出



5. 既知の現象の再導出

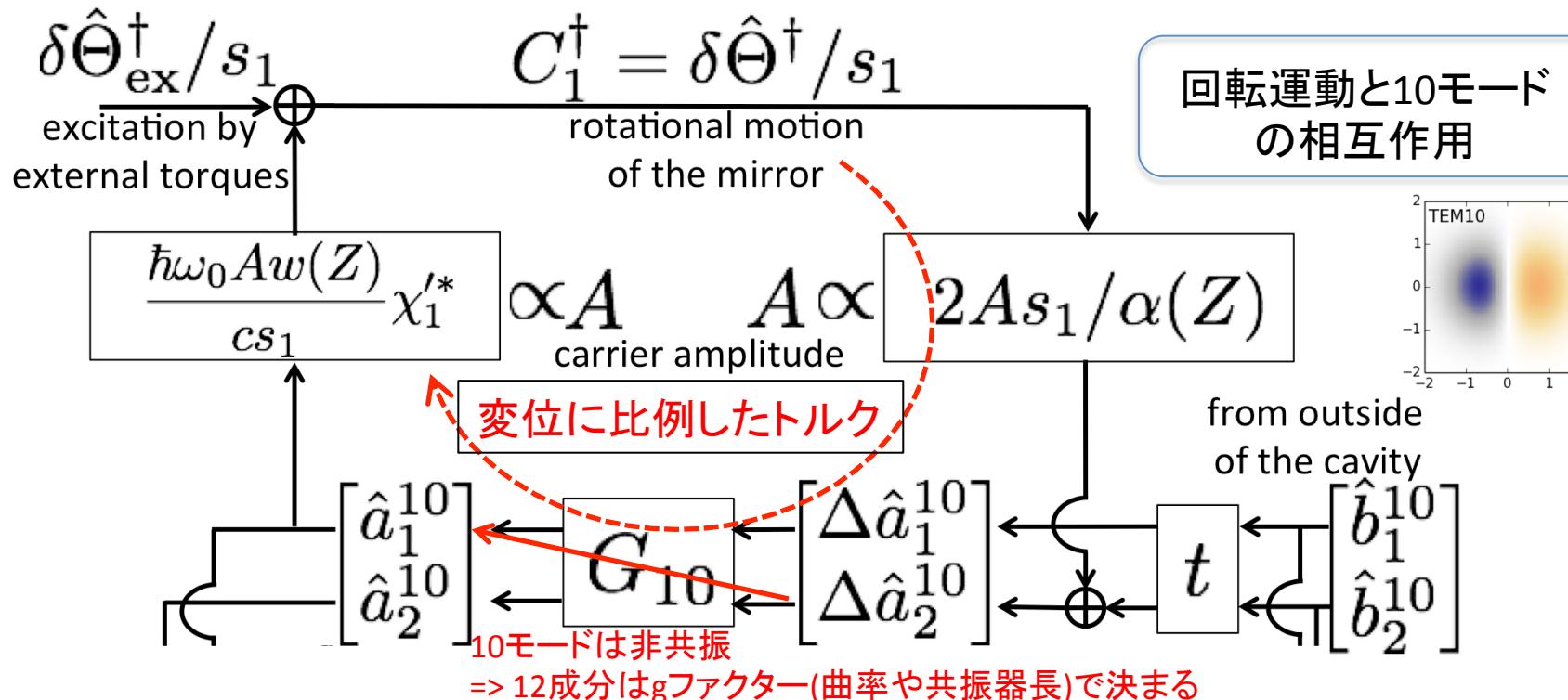
光ばね効果



-- ばね+反減衰 or 反ばね+減衰 の組み合わせで現れることがわかる。

5. 既知の現象の再導出

角度不安定性

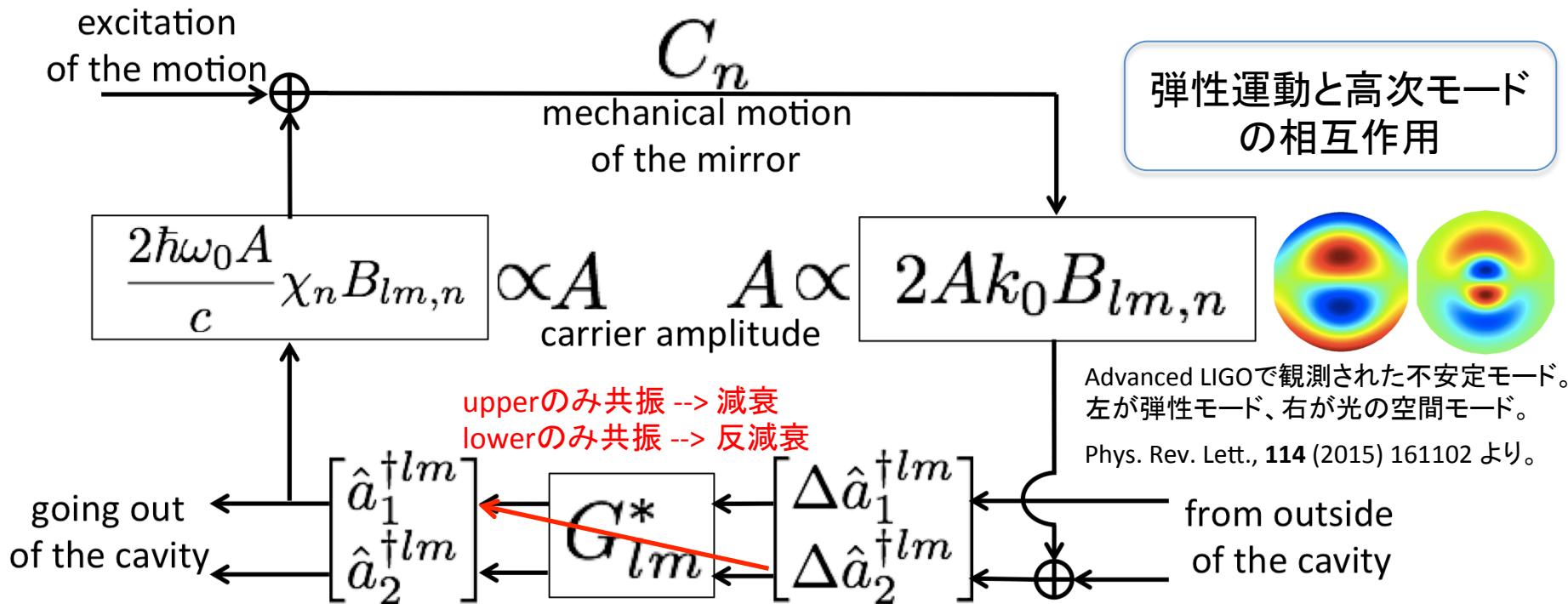


$$\Rightarrow \text{ばね定数 } k_{\text{rot}}(\Omega) = -\frac{2P}{c} \frac{Lg_2}{1-g_1g_2} \left(1 - i\Omega \frac{LT/c}{2(1-g_1g_2)} \right)$$

-- トルクについても、ばね+反減衰 or 反ばね+減衰 の組み合わせ

5. 既知の現象の再導出

パラメトリック不安定性



-- 一般論を弾性モードの共振周波数 Ω_n において適用することで導ける。

-- upper/lowerのどちらのサイドバンドが共振しているかで行列の12成分の符号が変わる。=> 減衰 or 反減衰

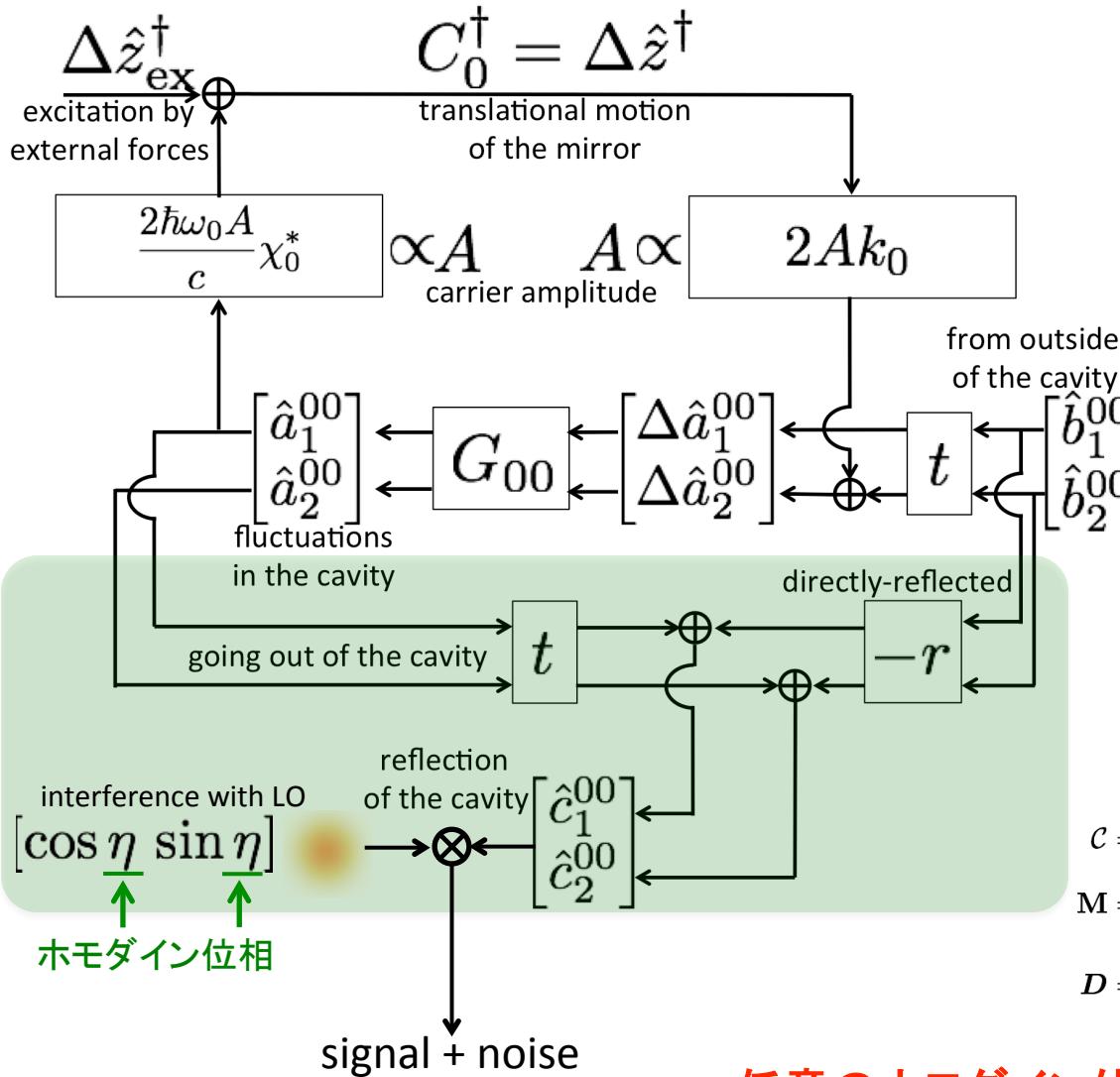
パワー 機械的Q値

$$\underline{\mathcal{R}_n} = \frac{4P k_0 Q_n}{M \Omega_n^2 c} \sum_{lm} \text{Re} [G_{lm}^-(\Omega_n)] B_{lm,n}^2$$

パラメトリック 行列の12成分
ゲイン (1を超えると不安定)

5. 既知の現象の再導出

量子雑音



並進運動と基本モードの相互作用

- 光ばねと全く同じブロック図。反射光(緑の部分)を陽に書いた。
- 反射光の揺らぎを求めることができて、

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \hat{c}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{c}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} &= t \begin{bmatrix} \hat{a}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{a}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{b}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{C} \left[M \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{00}(\Omega) \\ \hat{b}_2^{00}(\Omega) \end{bmatrix} + D h^*(\Omega) \right]\end{aligned}$$

h : 重力波の振幅 $\Delta \hat{z}_{\text{ex}} = Lh/2$

$$\begin{aligned}C &= \Omega^2[(\Omega + i\gamma)^2 - \Delta^2] + \Delta \iota_c, \\ M &= \begin{bmatrix} -\Omega^2(\Omega^2 + \gamma^2 - \Delta^2) - \Delta \iota_c & 2\gamma \Delta \Omega^2 \\ -2\gamma \Delta \Omega^2 + 2\gamma \iota_c & -\Omega^2(\Omega^2 + \gamma^2 - \Delta^2) - \Delta \iota_c \end{bmatrix}, \\ D &= \begin{bmatrix} \Delta \Omega \\ (-\gamma + i\Omega)\Omega \end{bmatrix} \frac{2\sqrt{\gamma \iota_c}}{h_{\text{SQL}}}\end{aligned}$$

=> 任意のホモダイン位相での量子雑音が求まる。

6. 未知の現象の議論

並進運動 -->	光ばね効果	重力波検出器(鏡の並進運動測定)の量子雑音
回転運動 -->	角度不安定性 (Sidles-Sigg 効果)	
弾性運動 -->	パラメトリック不安定	

-- ここまで一般論を個別に適用して、光ばね効果、角度不安定性、パラメトリック不安定性、重力波検出器の量子雑音を導いた。

6. 未知の現象の議論

	鏡の運動の立場	光の揺らぎの立場
並進運動 /基本モード	光ばね効果	重力波検出器(鏡の並進運動測定)の量子雑音
回転運動 /10 or 01モード	角度不安定性 (Sidles-Sigg 効果)	???
弾性運動 /高次モード	パラメトリック不安定	???

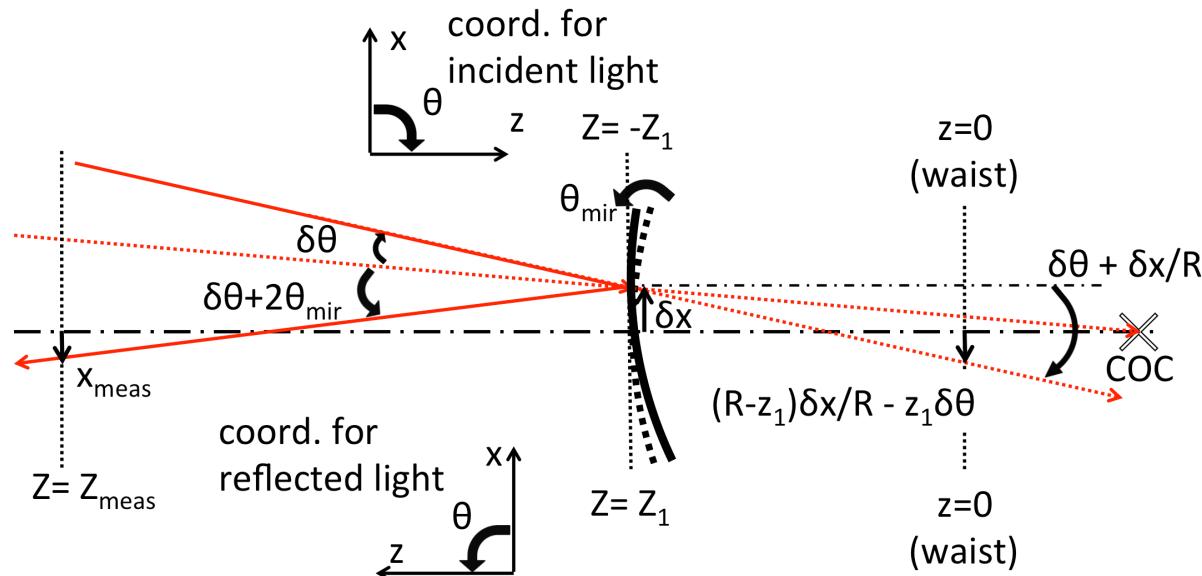
- ここまで一般論を個別に適用して、光ばね効果、角度不安定性、パラメトリック不安定性、重力波検出器の量子雑音を導いた。
- 表のように、導いた既知の現象をまとめると、??? の部分に対応する対象が考えられることがわかる。

=> 回転運動測定の量子雑音と10/01モードの揺らぎ

=> 弾性モード測定の量子雑音と高次モードの揺らぎ

6. 未知の現象の議論

回転運動測定の量子雑音



-- 鏡の回転を、反射光の測定を通じて測ることを考える。ここでは簡単のため、共振器ではなく鏡1枚の反射による回転の測定を考える(光てこ)。

-- 鏡から一定の距離のところ Z_{meas} で反射光の「横方向」の位置 x_{meas} を測定。

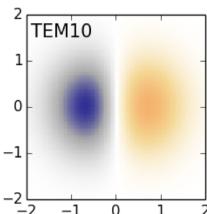
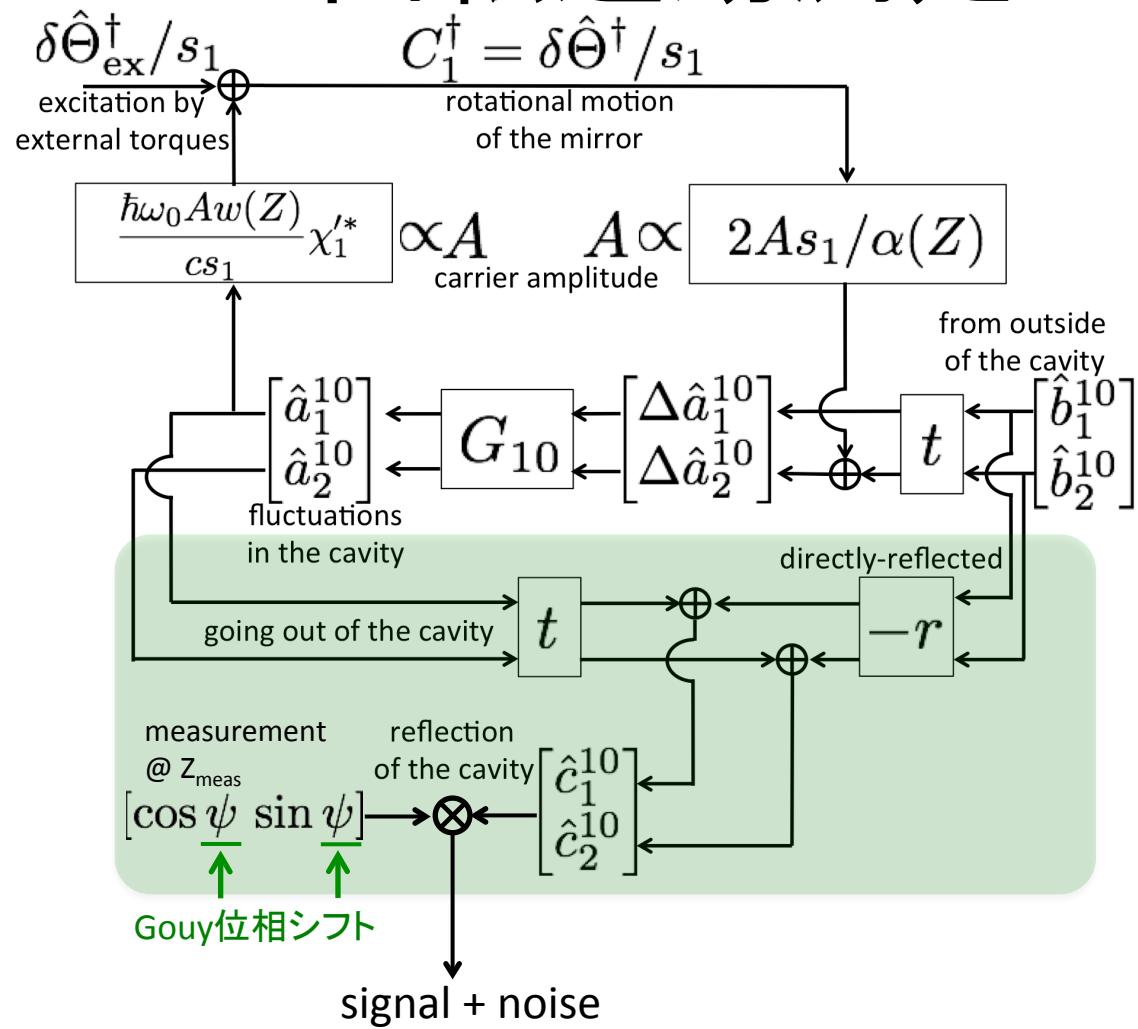
=> 10モードの**振幅**揺らぎ

-- 鏡から Z_{meas} までの自由伝播で、基本モードと10モードの位相差がGouy位相の分だけ変化するため、**振幅**揺らぎと**位相**揺らぎは回転する。

=> ブロック図の一般論を用いて量子雑音を求める。

6. 未知の現象の議論

回転運動測定の量子雑音



回転運動と10モードの相互作用

-- 並進運動測定の量子雑音と全く同様に導出することができる:

$$S_{\Theta, \psi} = \frac{\Theta_{\text{SQL}}^2}{2\kappa_1} [(-\underline{\kappa_1} + \cot \psi)^2 + 1]$$

打ち消し

=> 並進運動と全く同様の表式

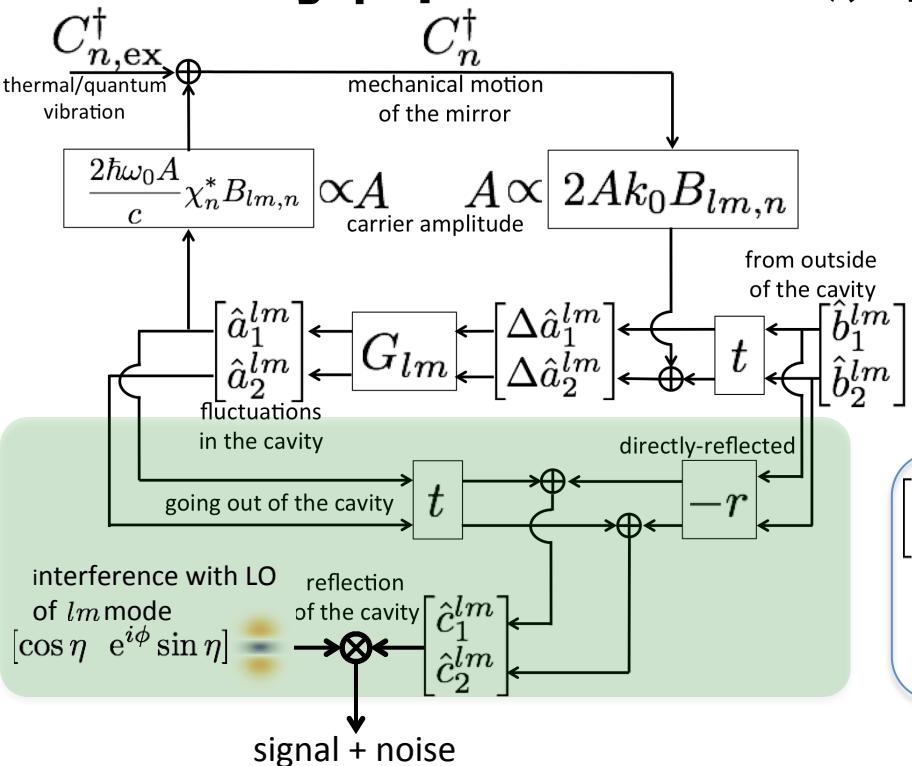
=> 回転運動測定の標準量子限界とその突破

=> Gouy位相シフト ψ がホモダイン位相の役割

-- この結果は、Y. Enomoto et al., Phys. Rev. A, 94 (2016) 012115 にまとめられた。

6. 未知の現象の議論

弾性モード測定の量子雑音



弹性モードと高次モードの相互作用

-- 鏡の弾性モードの変位を、それと“似た”光の空間モードの揺らぎの測定を通じて測ることを考える。

-- 反射光の揺らぎの表式:

$$\begin{bmatrix} \hat{c}_1^{lm} \\ \hat{c}_2^{lm} \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - R_n^*} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{TG_{lm}^{+*}}{2} - 1 + R_n^* & -\frac{iTG_{lm}^{-*}}{2} \\ \frac{iTG_{lm}^{-*}}{2} + \frac{iTR_n^*(G_{lm}^{+*2} - G_{lm}^{-*2})}{2G_{lm}^{-*}} & \frac{TG_{lm}^{+*}}{2} - 1 + R_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}_1^{lm} \\ \hat{b}_2^{lm} \end{bmatrix} \right. \\ \left. + \frac{2Ak_0B_{lm,n}}{\sqrt{T}} \begin{bmatrix} -iTG_{lm}^{-*} \\ \frac{2}{T G_{lm}^{+*}} \end{bmatrix} C_{n,\text{ex}}^\dagger \right\}$$

$$T = t^2 \quad G_{lm}^{+*} = 2[G_{lm}]_{11}$$

$$G_{lm}^{-*} = 2i[G_{lm}]_{12}$$

$$R_n^* = -\frac{4Pk_0i\chi_n^*}{c} G_{lm}^{-*} B_{lm,n}^2$$

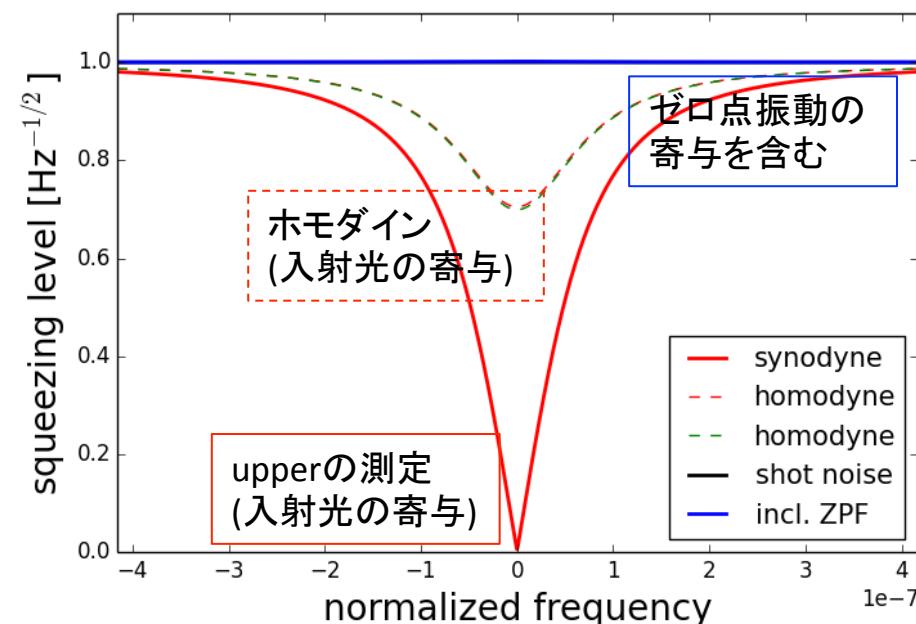
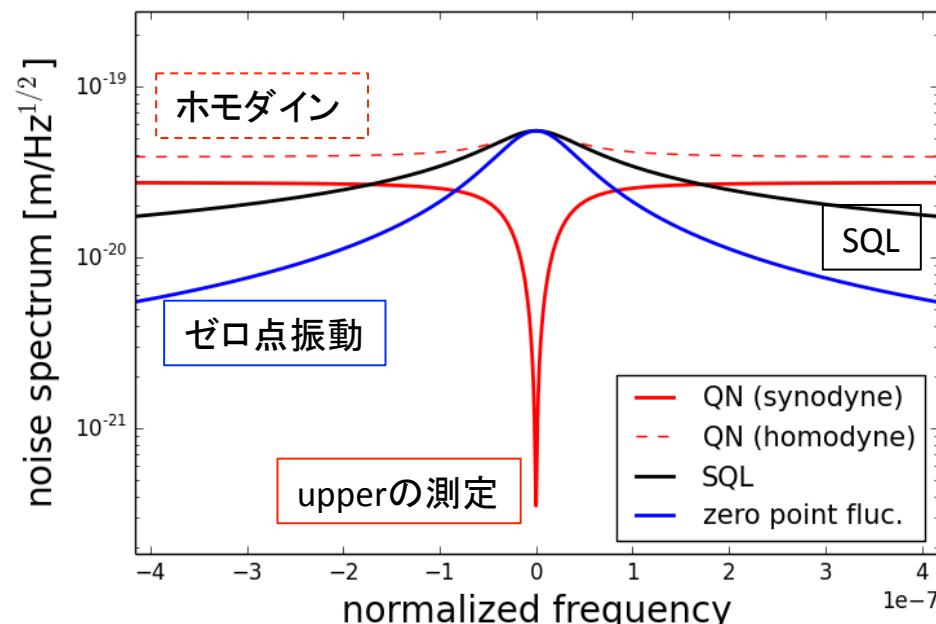
-- 以上の表式から量子雑音を計算できる。

-- パラメトリック不安定性のときと同様に、

弾性モードの共振周波数付近、かつupper/lowerのどちらかのサイドバンドのみが共振の場合を考えよう。

6. 未知の現象の議論

弾性モード測定の量子雑音



-- Advanced LIGOの腕共振器に対して計算した。

23 kHzの弾性モード、3次の空間モード、upperのみが共振器で共振。

パラメトリックゲイン($\doteq R_n^*$)が -1 になるようにパラメータを選んだ。

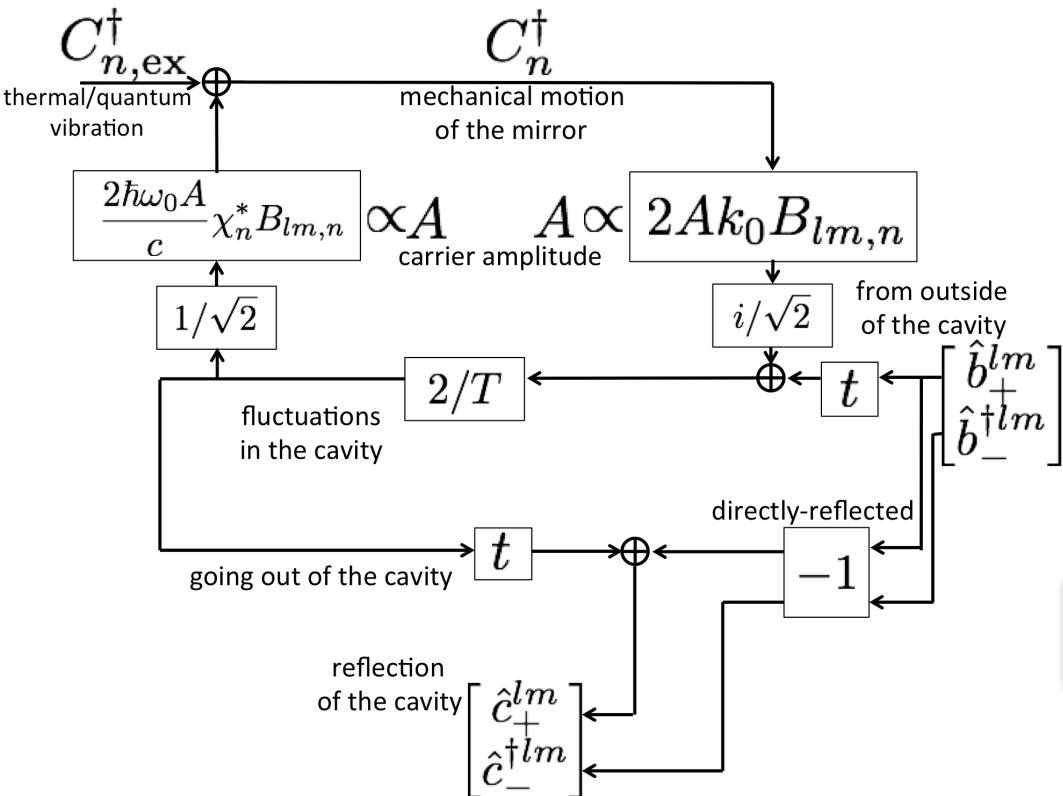
-- 左: 弹性モードの変位で規格化した量子雑音のスペクトル

右: 反射光の揺らぎのスペクトル

-- ゼロ点振動を観測するのに十分な感度を得られること、反射光の揺らぎはゼロ点振動を含めないとショットノイズレベルにならないことがわかる。

6. 未知の現象の議論

機械的振動子の状態の転写



(振幅揺らぎ、位相揺らぎ)の基底ではなく、(upper, lower)の基底で表している。

-- 共振周波数での量子雑音の特異な振る舞いは次のように理解できる:
共振器のフィネスが十分高い場合、共振器の中にlowerサイドバンドが存在しないとみなせるから、ブロック図を簡略化できる。

=> 反射光のupperサイドバンドは

$$\hat{c}_+^{lm} = \frac{1 + R_n^* \hat{b}_+^{lm}}{1 - R_n^*} + \frac{i2\sqrt{2}Ak_0 B_{lm,n}}{(1 - R_n^*)\sqrt{T}} C_{n,\text{ex}}^\dagger$$

$R_n^* = -1$ のとき、入射光の揺らぎの寄与が0になる。

-- 弾性モードが基底状態(=ゼロ点振動)にあるとき、upperサイドバンドのパワースペクトルは1(=ショットノイズレベル)になる。

7. まとめ・展望

= まとめ =

- 干渉計型重力波検出器の感度・安定度に密接かつ多面的に関わっている
光学機械相互作用についての理論的な研究を行った。そして、共振器における光学機械相互作用を光の一般の空間モードと鏡の一般の運動モードに対してブロック図を用いて記述した。
- 一般論から、重力波検出器の量子雑音、光ばね効果、共振器の鏡の角度不安定性、パラメトリック不安定性といった既知の現象を導き、**統一的な見方を与えた**。さらに、鏡の回転運動測定や弾性モード測定の量子雑音といった新規な対象を見つけ、物理的意味を考察した。
- とくに回転運動測定の量子雑音において、並進運動の場合との対応関係や量子雑音の低減方法を導いた。また弾性モード測定の量子雑音において、**量子雑音がゼロ・共振器の反射光の揺らぎに弾性モードの変位が転写**、という特異な振る舞いを導いた。

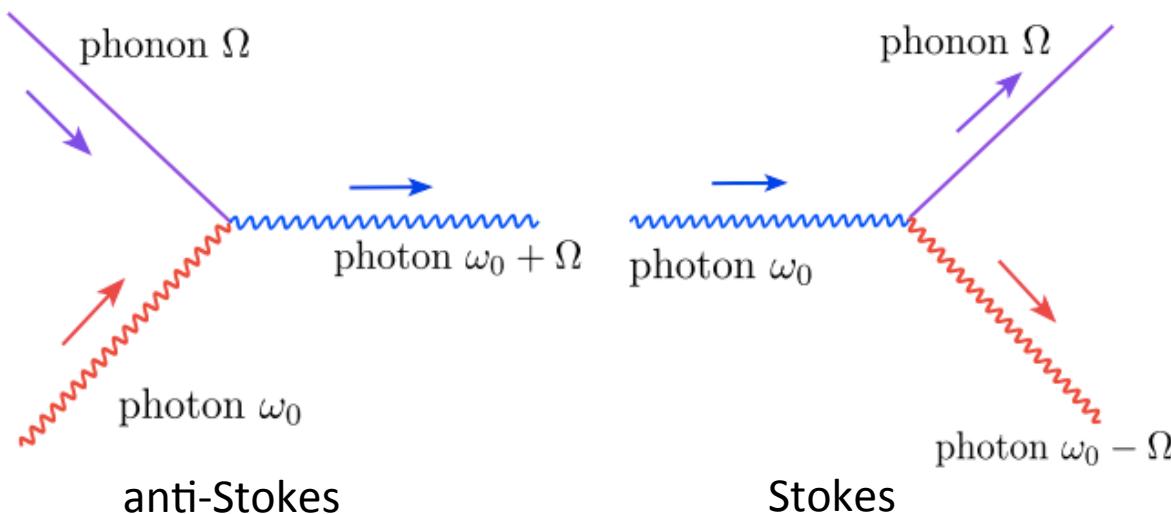
7. まとめ・展望

= 展望 =

- 統一的な視点を与えたことで、干渉計型重力波検出器における**雑音の見積もり**や**不安定性制御の方法**に応用できる。
 - 高次モードの(アンチ)スクイーズによる感度の悪化の計算
 - パラメトリック不安定性の制御への、他の不安定性制御の方法の応用
- 弹性モード測定の量子雑音で見られた振る舞い
(量子雑音がゼロになる、反射光の揺らぎに振動子の変位が転写される)は、一般的で、弹性モードに限ったものではない。
雑音なしで変位を測定
=> 光学機械相互作用を用いた**巨視的量子系の実験**への応用
(振動子の冷却など)

以上です。ありがとうございました。

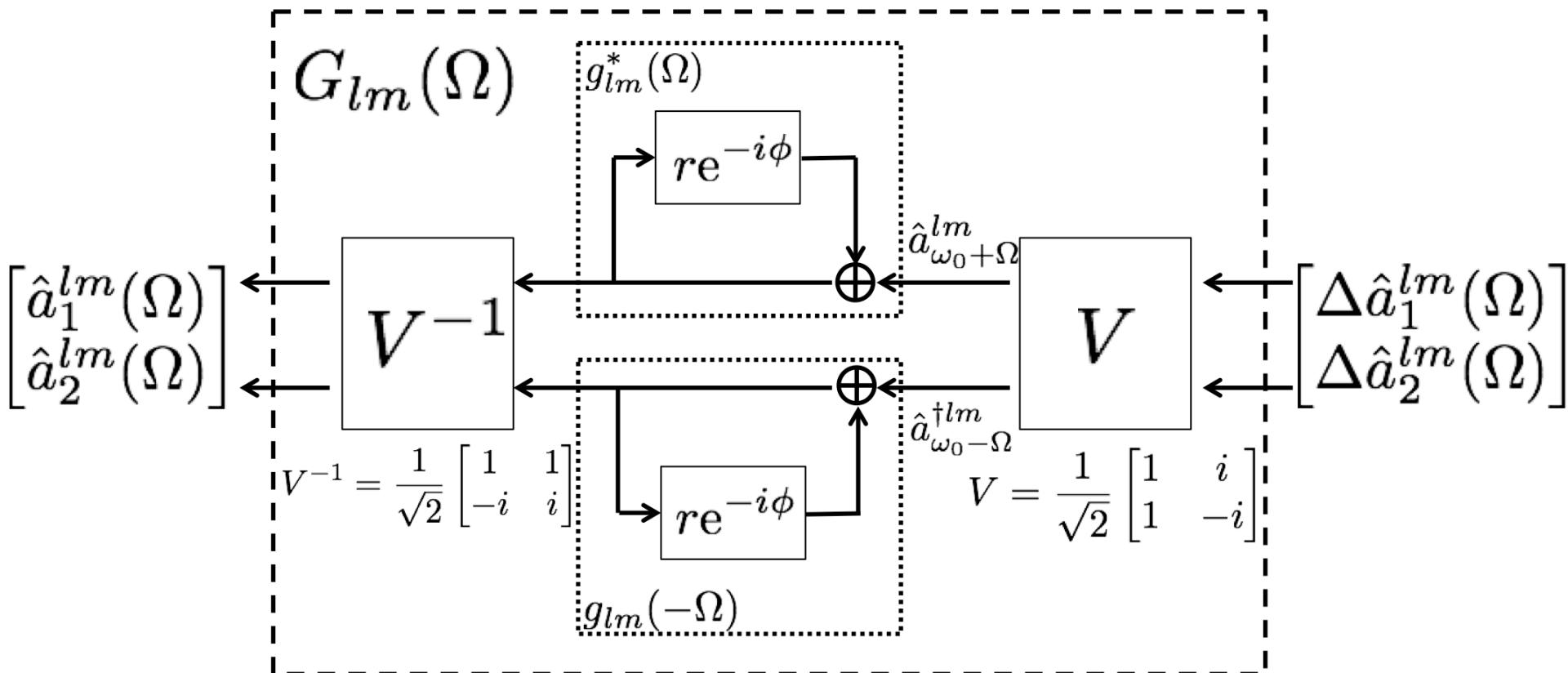
Stokes/anti-Stokes過程



Y. Ma, Ph.D. thesis, Univ. of Western Australia (2015)より

- upperのみ共振 => anti-Stokes 優勢 => damping
- lowerのみ共振 => Stokes 優勢 => anti-damping

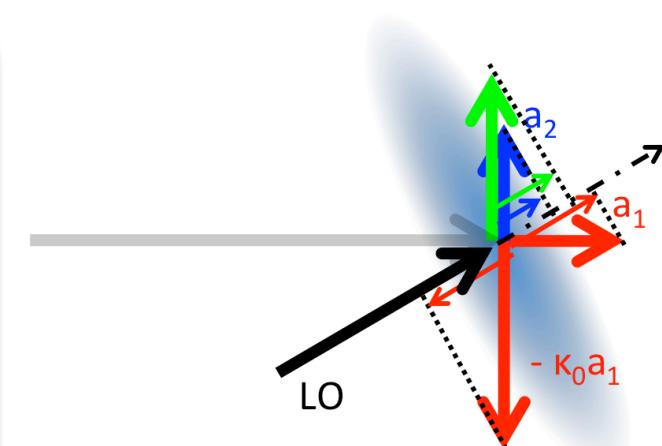
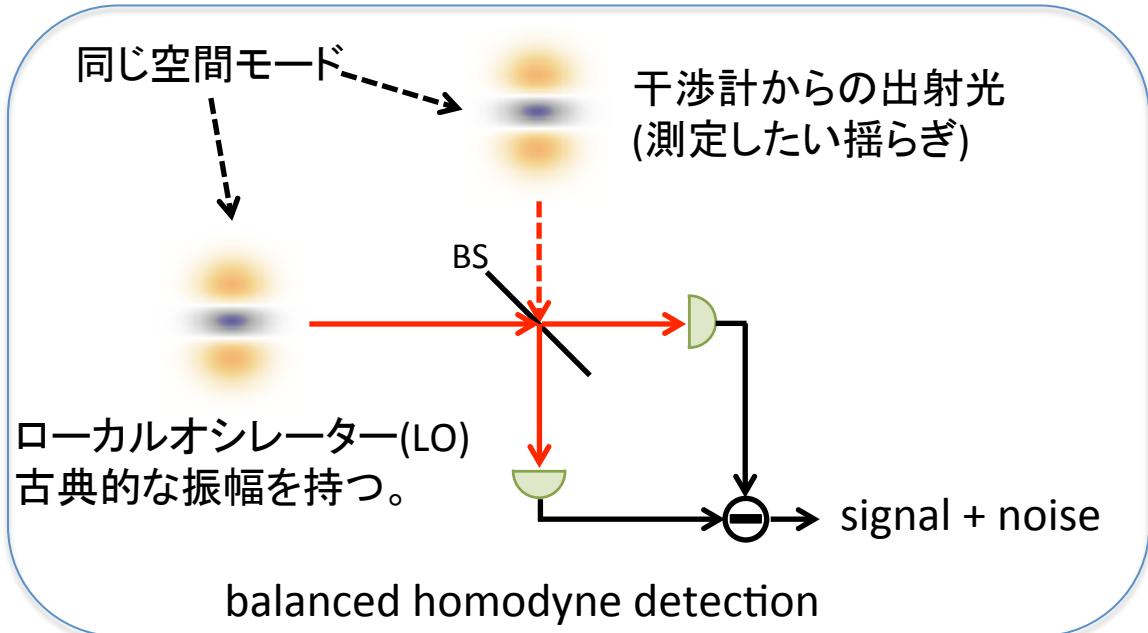
共振器による増幅



$$G_{lm}(\Omega) = V^{-1} \begin{bmatrix} g_{lm}^*(\Omega) & 0 \\ 0 & g_{lm}(-\Omega) \end{bmatrix} V$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} g_{lm}^*(\Omega) + g_{lm}(-\Omega) & i[g_{lm}^*(\Omega) - g_{lm}(-\Omega)] \\ -i[g_{lm}^*(\Omega) - g_{lm}(-\Omega)] & g_{lm}^*(\Omega) + g_{lm}(-\Omega) \end{bmatrix}$$

LOとの干渉



- LOと出射光の間の位相差がホモダイン位相となる。
- ホモダイン測定では、LOは ω_0 のレーザー光。
- $\omega_0 \pm \Omega$ のLOを用いることでの、 $\hat{c}_1^{lm} \cos \eta + \hat{c}_2^{lm} e^{i\phi} \sin \eta$ に対応する量の測定が提案されている (synodyne測定)。
- 実際、 $E \propto \cos(\omega_0 + \Omega)t$ のLOを用いると、 $[\hat{c}_{\omega_0+\Omega} + \hat{c}_{\omega_0+\Omega}^\dagger]/\sqrt{2}$ という量が測定でき、upperサイドバンドの測定を実現する。

弾性モードの測定: パラメータ

P	$\Omega_n/2\pi$	Q_n	M	$\lambda = k_0/2\pi$	$B_{lm,n}$	\mathcal{R}_n
34.35 kW	23.019 kHz	12×10^6	40 kg	1064 nm	0.42483	-1.000

- Advanced LIGO の腕共振器。 $L = 3995.5$ m, $\mathcal{F} = 450$
- 高次モード間隔は 5.1 ± 0.3 kHz、FSRは37.5 kHz
- 高次モード間隔が4.84 kHz のとき、ちょうど3次モードのupperが共振。

Hamiltonian approach

-- 並進運動と基本モードの相互作用の場合。

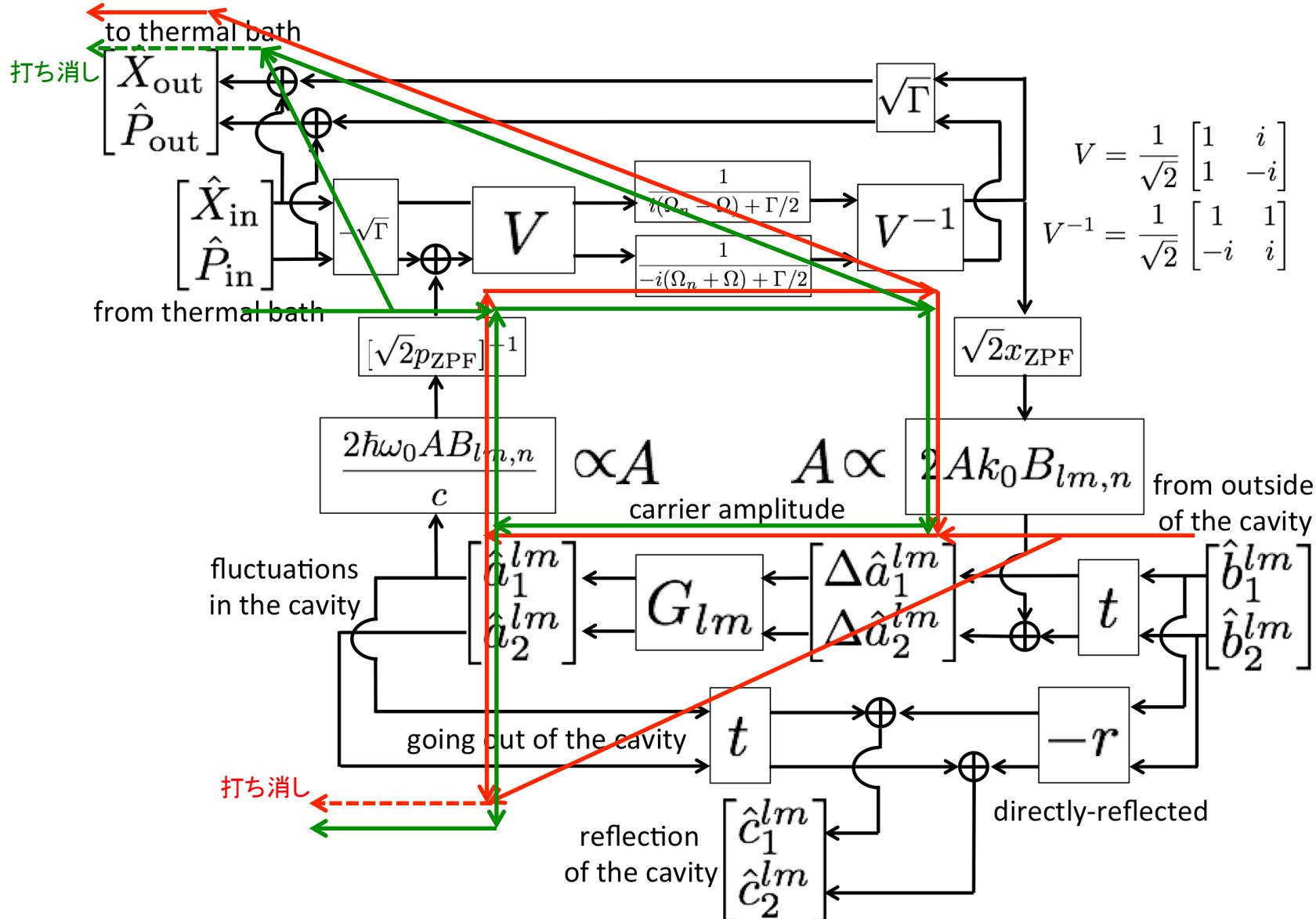
$$\begin{aligned}\hat{H} &= \hbar(\omega_c - G_0\hat{x})\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\hbar\sqrt{2\gamma}(\hat{a}\hat{a}_{\text{in}} - \text{H.c.}) + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega_n^2\hat{x}^2 \\ &\simeq \hbar\omega_c\bar{a}(\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger) + i\hbar\sqrt{2\gamma}(\hat{a}\hat{a}_{\text{in}} - \text{H.c.}) - G_0\hat{x}\bar{a}(\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger) + \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega_n^2\hat{x}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{\hat{p}} &= -m\Omega_n^2\hat{x} - \hbar G_0\bar{a}(\delta\hat{a} + \delta\hat{a}^\dagger) \\ \dot{\delta\hat{a}} &= iG_0\bar{a}\hat{x} + \dots\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} (\underbrace{\delta\hat{a} - \delta\hat{a}^\dagger}_{\text{位相揺らぎ}}) = 2iG_0\bar{a}\hat{x} + \dots$$

予備

“消えた”入射光の揺らぎ



予備

予備に書くことリスト

- synodyne
- aLIGOパラメタ
- PIの(anti-)Stokes processによる理解
- Hamiltonian approach
- 熱浴