

DPFサイエンス検討会
東京大学理学部4号館, November 24, 2009

Gravity Gradiometer in Space
衛星搭載型重力勾配計

坪野 公夫

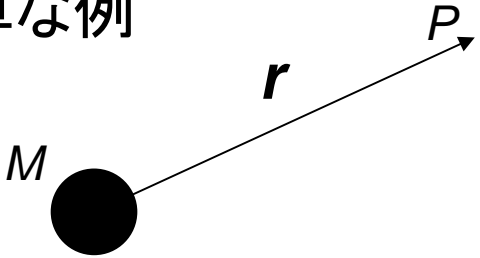
東京大学理学系研究科

contents

- gravity gradient とは
- gravity gradient の測定原理
- gradiometer の実現
- これまでのgravity gradiometer
- これからのgravity gradiometer
- まとめ

gravity gradient とは(1)

- 簡単な例



$$\mathbf{F} = -GM\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{per unit mass})$$

gravity potential: $\phi = -G\frac{M}{r}, \quad \mathbf{F} = -\nabla\phi$

$$F_x = -\phi_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -GM\frac{x}{r^3}$$

$$F_y = -\phi_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -GM\frac{y}{r^3}$$

$$F_z = -\phi_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = -GM\frac{z}{r^3}$$

gravity gradient: ϕ_{ij}

$$\phi_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = GM\frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$$

$$\phi_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = GM\frac{r^2 - 3y^2}{r^5}$$

$$\phi_{zz} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = GM\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

$$\phi_{xy} = \phi_{yx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -3GM\frac{xy}{r^5}$$

$$\phi_{yz} = \phi_{zy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} = -3GM\frac{yz}{r^5}$$

$$\phi_{zx} = \phi_{xz} = \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} = -3GM\frac{zx}{r^5}$$

$\sum_i \phi_{ii} = \Delta\phi = 0$ より、 ϕ_{ij} の独立成分は 5 つ

gravity gradient とは(2)

- 一般的な重力場では

$$\phi(\mathbf{r}, t) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{r}, t) dV}{r}$$

ϕ_{ij} の観測データから $\rho(\mathbf{r}, t)$ の情報を得る
ジオイド球面調和関数展開の係数決定

地球重力場のマッピング

測地学、固体地球、海洋、陸水、氷床、雪氷、

地震、気候、、、、

⇒ ϕ_{ij} をいかにして得るか

ϕ_{ij} の測定原理- 慣性系の場合 (1)

- 重力以外の力が働かないときの物体の運動

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial r'}, \quad \phi: \text{重力ポテンシャル}$$

$$g \equiv \frac{dv}{dt}, \quad g: \text{重力加速度}$$

$$g = -\frac{\partial\phi}{\partial r} \implies \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = -\phi_{ij}$$

つまり

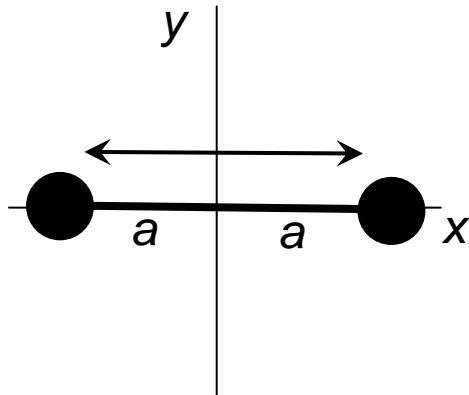
$$g_{ij} = -\phi_{ij} \quad \left(g_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right), \quad \text{加速度勾配} = - \text{重力勾配}$$

g_{ij} は4重極特性をもち潮汐力（リーマン曲率）に対応している
 $\implies g_{ij}$ の測定は基本的に重力波の測定法（共振型）と同じ

レーザー干渉計型でも低周波における gravity gradient noise は
深刻な問題

ϕ_{ij} の測定原理- 慣性系の場合 (2)

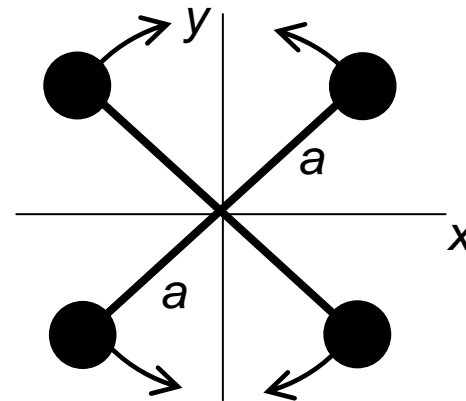
inline gradiometer



(Weber bar)

$$F_{//} = 2a g_{xx}$$

cross gradiometer



(torsion antenna)

$$\begin{aligned} N &= 2a^2(g_{xy} + g_{yx}) \\ &= 4a^2 g_{xy} \text{ (慣性系)} \end{aligned}$$

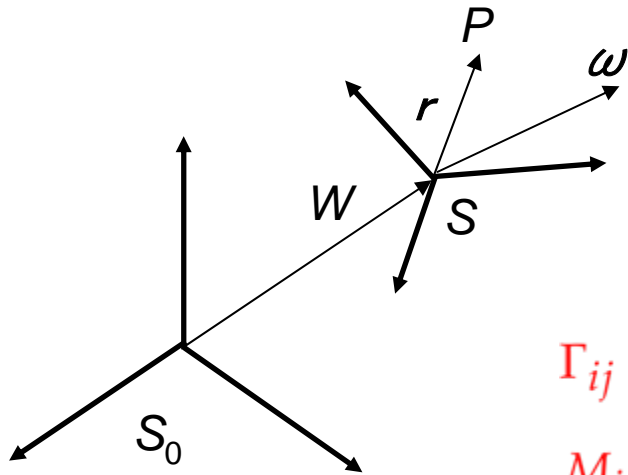
ϕ_{ij} の測定原理- 加速度系の場合

- 慣性系 S_0 に対して加速度 $W(t)$ で並進、角速度 $\omega(t)$ で回転する座標系を S とし、 S における運動方程式

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\partial\phi}{\partial r} - W + r \times \dot{\omega} + 2v \times \omega + \omega \times (r \times \omega)$$

非一様回転 コリオリ力 遠心力

Landau & Lifshitz "Mechanics" (1957)



$$g = \frac{dv}{dt} \quad : \text{重力加速度}$$

$$\Gamma_{ij} \equiv \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \equiv g_{ij} \quad : \text{加速度勾配 (測られるもの、} W \text{は消える)}$$

$$M_{ij} \equiv -\frac{\partial\phi}{\partial x_i \partial x_j} \quad : \text{重力勾配 (知りたいもの)}$$

運動方程式でコリオリ力は無視して変形すると

$$\Omega \equiv \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{\Gamma + \Gamma^T}{2} + \Omega^2$$

$$\dot{\Omega} = \frac{\Gamma^T - \Gamma}{2}$$

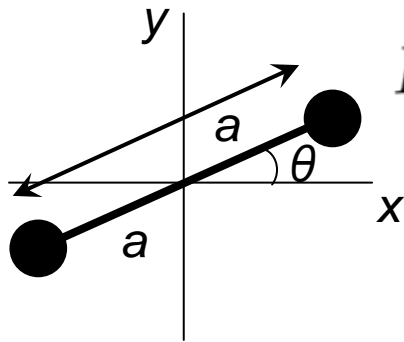
$$\Omega(t) = \Omega(t_0) + \int_{t_0}^t \dot{\Omega}(t) dt$$

$\Omega(t_0)$ は star tracker で測定

➡ $\Gamma_{ij} = g_{ij}$ をいかにして得るか

gravity gradiometer の実現(1)

- inline gradiometerでも g_{ij} の非対角項を測ることが可能



$$F_{//} = a(g_{xx} + g_{yy}) + a(g_{xx} - g_{yy}) \cos 2\theta + a(g_{xy} + g_{yx}) \sin 2\theta$$

回転 ($\theta = \omega t$) させることによって、 g_{ij} の対角項と非対角項の分離も可能

- ➡ さらに、 xy 平面から傾けると、 g_{ij} の z 成分も測定可能
z軸とinline方向のなす角を ϕ とすると

$$F_{//} = a(g_{xx} + g_{yy}) \sin^2 \phi + a(g_{xx} - g_{yy}) \sin^2 \phi \cos 2\theta + 2ag_{zz} \cos^2 \phi + a(g_{xy} + g_{yx}) \sin^2 \phi \sin 2\theta + a(g_{yz} + g_{zy}) \sin 2\phi \sin \theta + a(g_{zx} + g_{xz}) \sin 2\phi \cos \theta$$

gravity gradiometer の実現(2)

いくつかのgravity gradiometerがあれば g_{ij} を決めることができるか

gyroscopeはあまり感度が良くないので、gyro-freeを実現したい

加速度 $W(t)$ 、角速度 $\omega(t)$ をもった移動体の navigation

6個のinline加速度計があれば $W(t), \omega(t)$ の6個の成分を決定できる (gyro-free, GPS-free)

Chen et al., JOURNAL OF GUIDANCE, CONTROL, AND DYNAMICS (1994)

gravity gradientに関しては

- いくつかのinline gradiometerをどのように配置すればよいか？
- ミスアライメントに伴う誤差は？

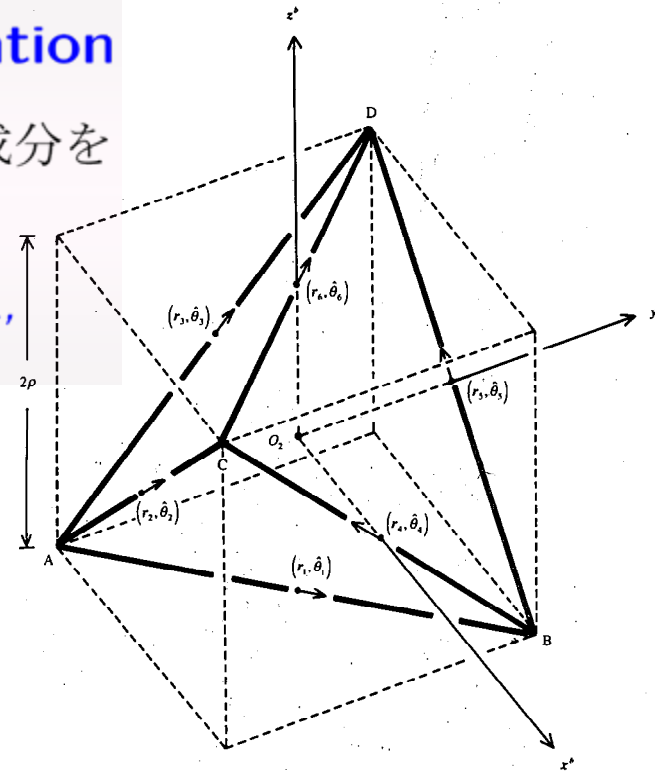


Fig. 2 Six-accelerometer configuration.

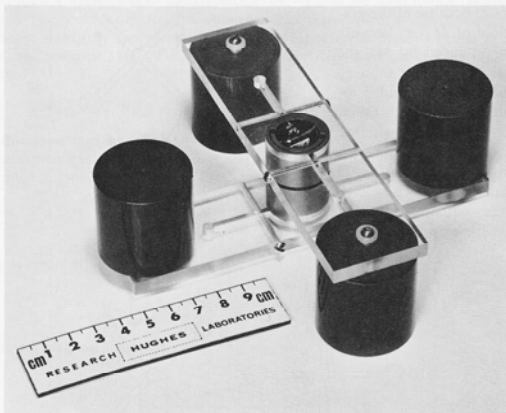
これまでの衛星搭載型重力勾配計(1)

R. L. Forward (1965-)

回転型 gradiometer

dynamic gravitational-gradient field

Box 16.5 GRAVITY GRADIOMETER FOR MEASURING THE RIEMANN CURVATURE OF SPACETIME



“GRAVITATION”

Misner, Thorne, Wheeler (FREEMAN, 1970)

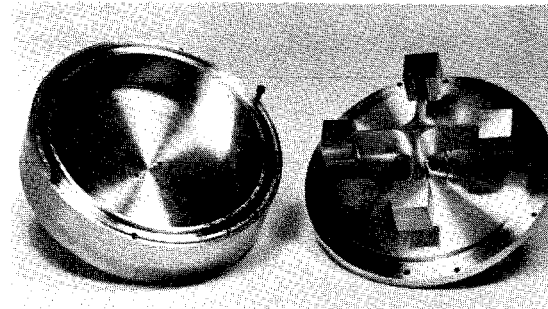


FIG. 1. Five-in.-diam cruciform gravitational-mass sensor.

*R.L. Forward, L.R. Miller,
J. Appl. Phys. (1967)*

初めてのレーザー干渉計型重力波検出器

*G. E. Moss, L. R. Miller, R. L. Forward,
Appl. Opt. (1971)*

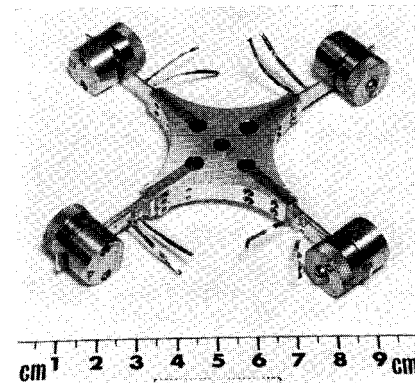
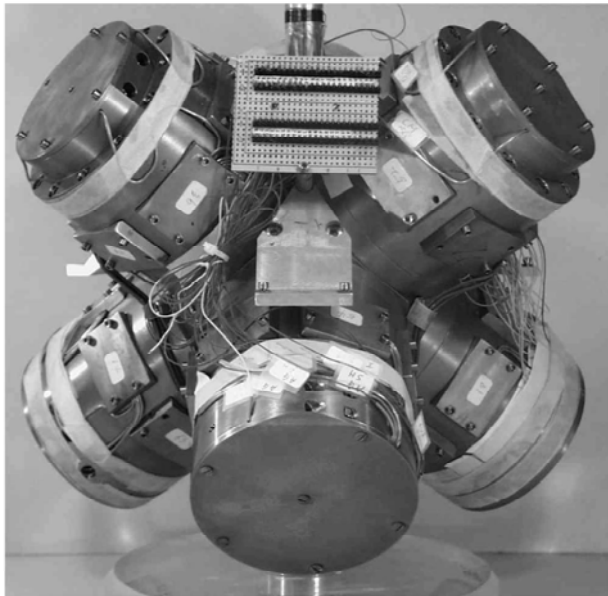


FIG. 3. Adjustable sensor.

44Hz

これまでの衛星搭載型重力勾配計(2)

H. J. Paik (1976-)



3軸gradiometer

Three-axis superconducting gravity gradiometer 3959

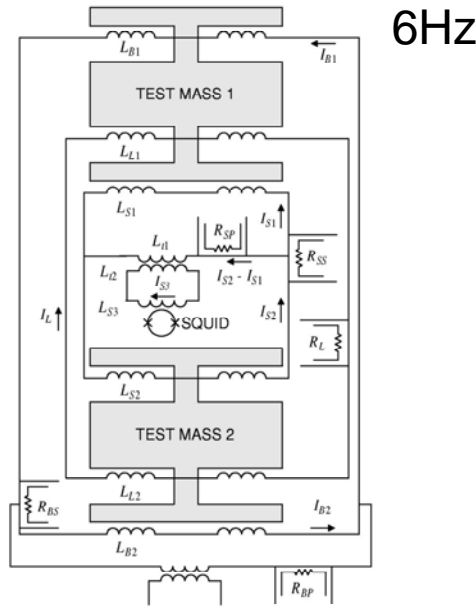


FIG. 2. Schematic of a gradiometer axis.

加速度計2台で勾配計
SQUIDセンサー@4.2K

SUPERCONDUCTING TENSOR GRAVITY GRADIOMETER

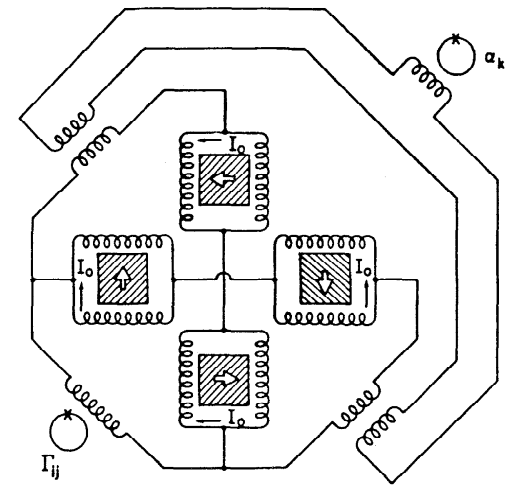


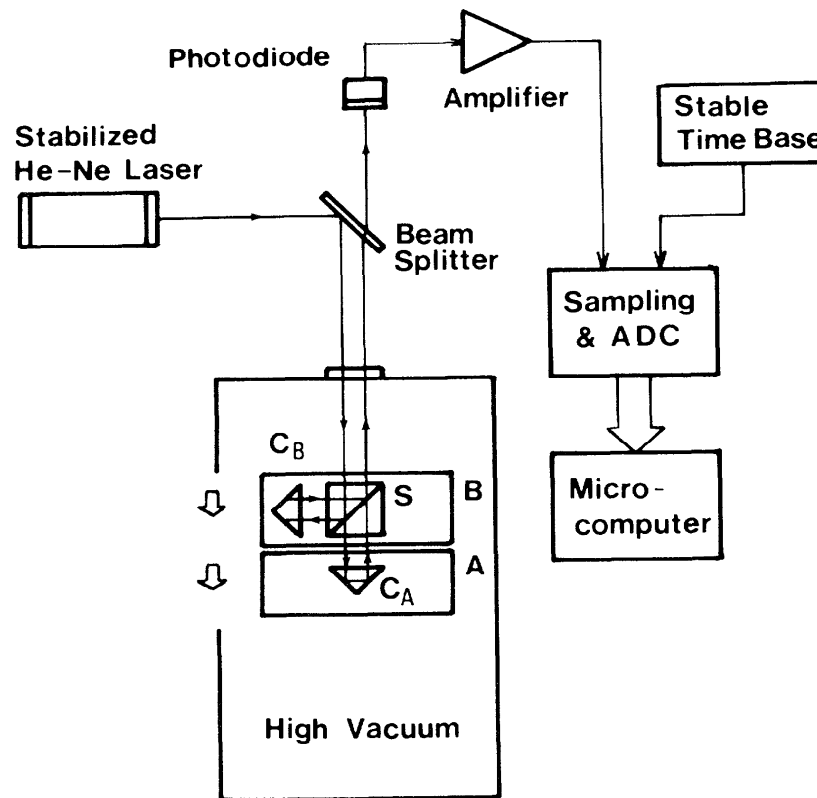
Fig. 5 - Schematic circuit diagram of superconducting cross component gravity gradiometer. The white arrows indicate sensitive axes of the proof masses. The circuit first adds signals from each diagonal pair of accelerometers, and then differences and sums the signals from the two diagonal pairs to obtain the cross gradient (Γ_{ij}) and the angular acceleration (α_k) with respect to the third axis, respectively.

cross gradiometer
SQUIDセンサー

M. V. Moody, H. J. Paik, E. R. Canavanc,
Rev. Sci. Instrum. (2002)

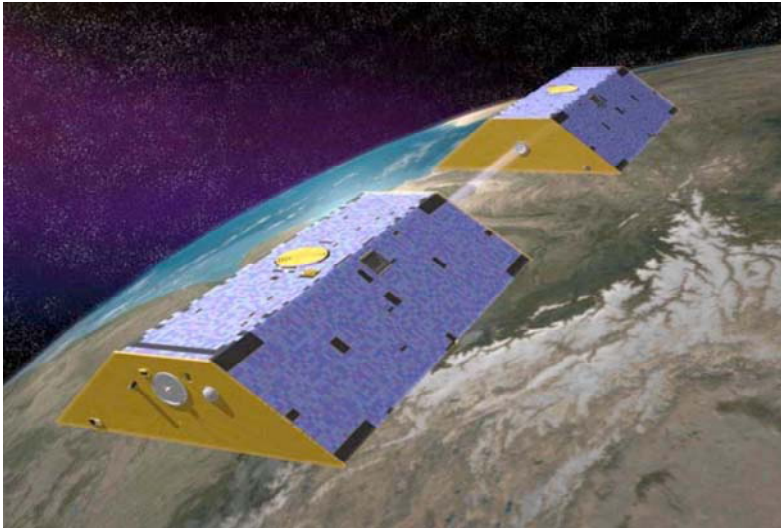
これまでの重力勾配計(番外編)

K. Kuroda, N. Mio, Phys. Rev. Lett. (1989)



これまでの衛星搭載型重力勾配計(3)

GRACE (2002-)



Gavity **R**ecovery and **C**limate **E**xperiment

baseline: $d=220\text{km}$

これまでの衛星搭載型重力勾配計(4-a)

GOCE (2009-)

Gavity field & steady-state **O**cean **C**irculation **E**xplorer



Launched on 17 March 2009

**GOCE achieves drag-free
perfection May 2009**

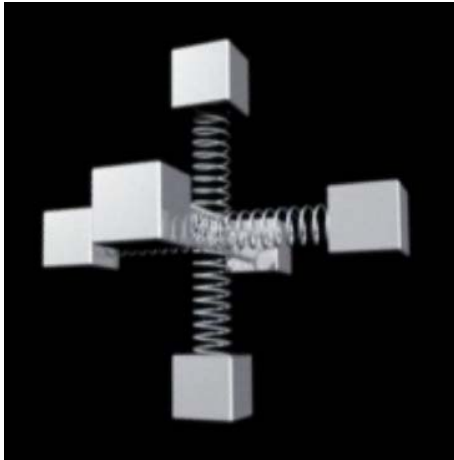
six 3-axis capacitive
accelerometers



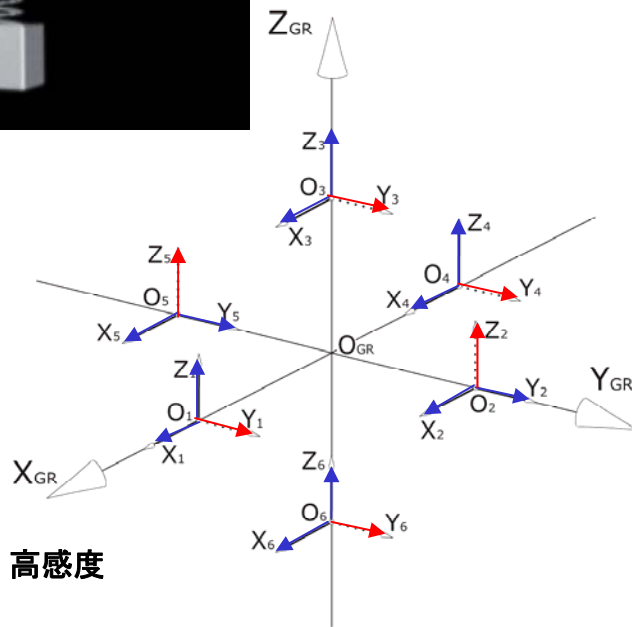
ESA -GOCE.flv

これまでの衛星搭載型重力勾配計(4-b) GOCE (2009-)

J. Muller, Advances in Geosciences (2003)



静電センサー
加速度計の差分→勾配



高感度

低感度

Fig. 1. The GOCE gradiometer with six three-axes accelerometers in the so-called diamond configuration. The dots indicate the less sensitive axes.

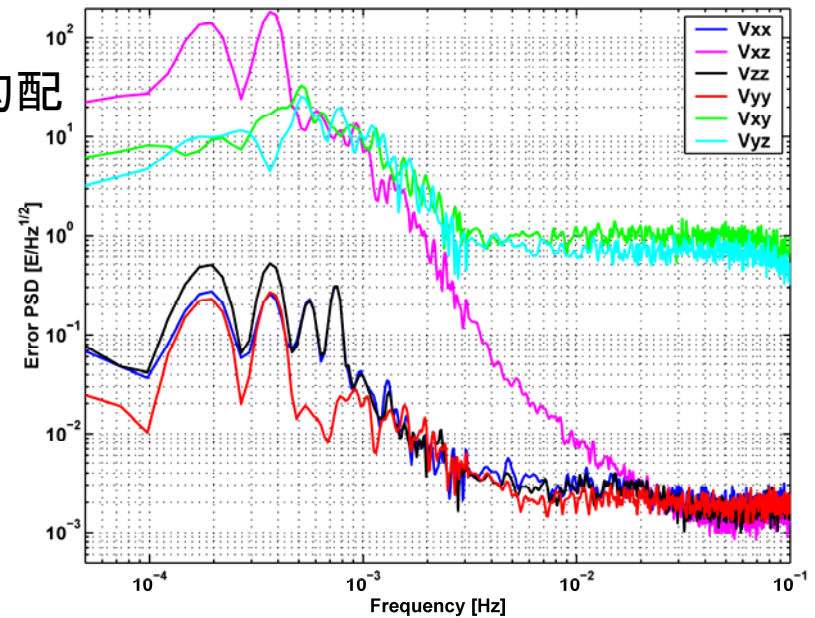
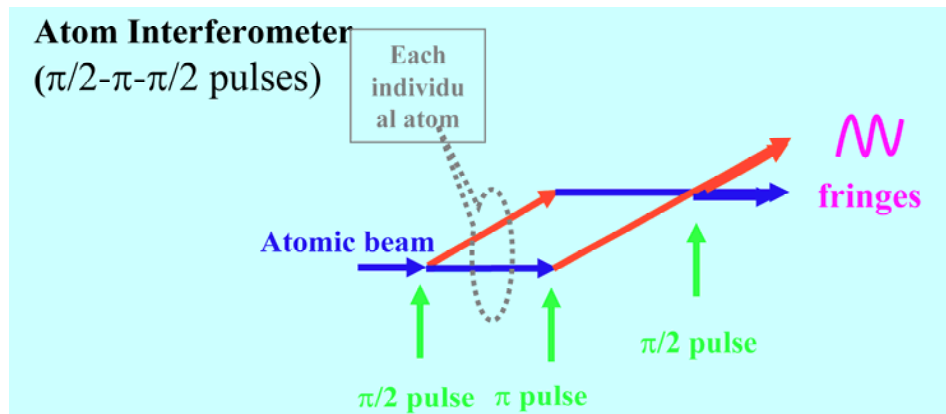


Fig. 2. Error PSD of the essential matrix elements of the gravitational tensor V . Only the in-line elements keep the full accuracy of $4 \text{ mE}/\sqrt{\text{Hz}}$ over the whole measurement bandwidth from 5 mHz to 100 mHz.

calibrationやmisalignmentが問題になる

これからの衛星搭載型重力勾配計(1)

atom interferometer



アイコナール(幾何光学)近似 $\psi = Ae^{iS/\hbar}$ S : action

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad L : \text{Lagrangian}$$
$$L = \frac{p^2}{2m} - U \quad U : \text{potential}$$

質量があるため、 U に重力ポテンシャル $-mgz$ を含む

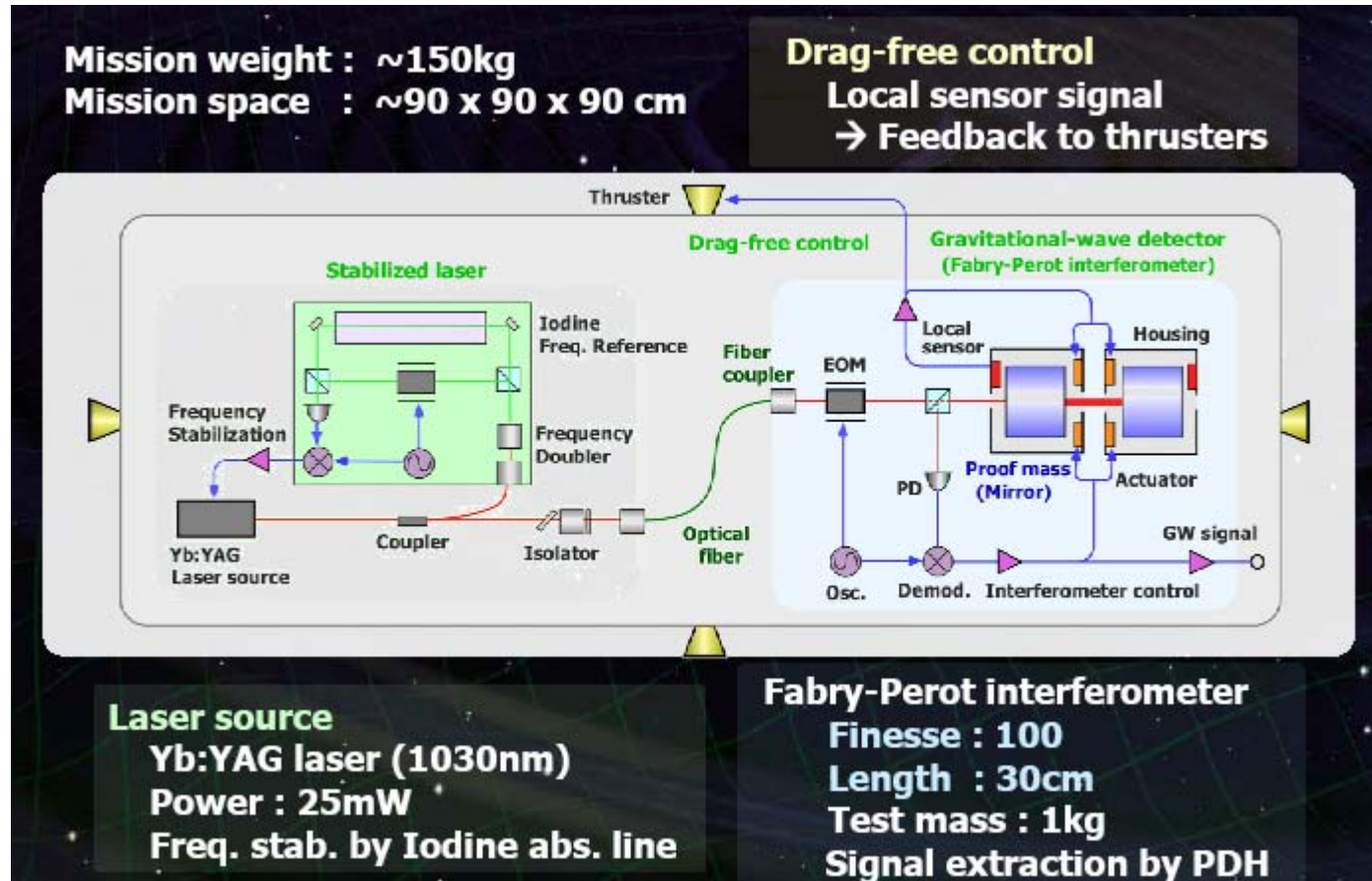
⇒ 位相差 $\Delta\phi$ は重力加速度 g を含む

⇒ 絶対重力の測定が可能

$$\Delta\phi \sim \frac{1}{\sqrt{N}} \Rightarrow \text{shot noiseが問題}$$

これからの衛星搭載型重力勾配計(2-a)

DPF FP



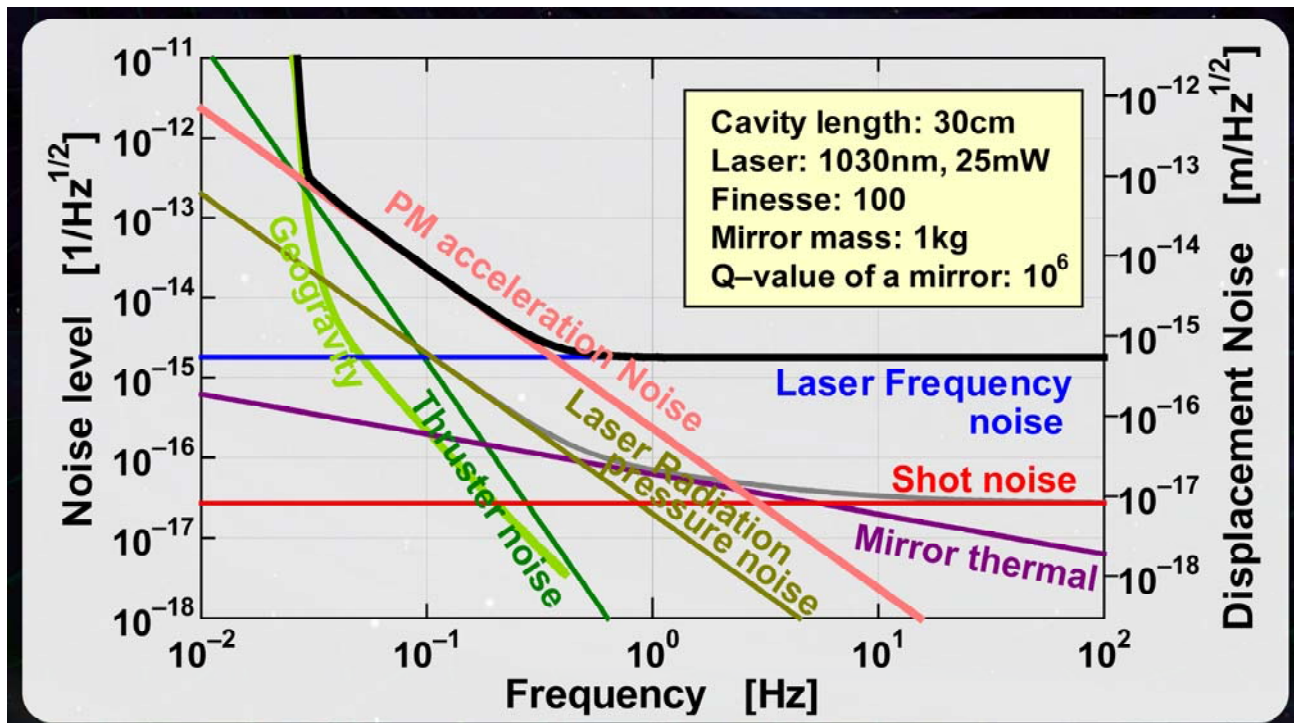
*Designed by
M. Ando*

Fabry-Perot(FP) cavity は超高感度な重力勾配計であり、spaceでは3軸も可能

これからの衛星搭載型重力勾配計(2-b)

DPF FP

これまでのgradiometerは2台の加速度計の差をとるものが多いが、FPはもともと差分のみでコモンは効かない



歪感度 :

$$3 \times 10^{-14} / \sqrt{\text{Hz}} \quad @0.1\text{Hz}$$

$d = 30\text{cm}$ より

加速度感度 :

$$3.6 \times 10^{-15} \text{ms}^{-2} / \sqrt{\text{Hz}}$$

重力勾配感度 :

$$1.2 \times 10^{-14} \text{s}^{-2} / \sqrt{\text{Hz}} \\ @0.1\text{Hz}$$

by M. Ando (DPF提案書)

H. Hanada, J. Opt. Soc. Am. A (1992)

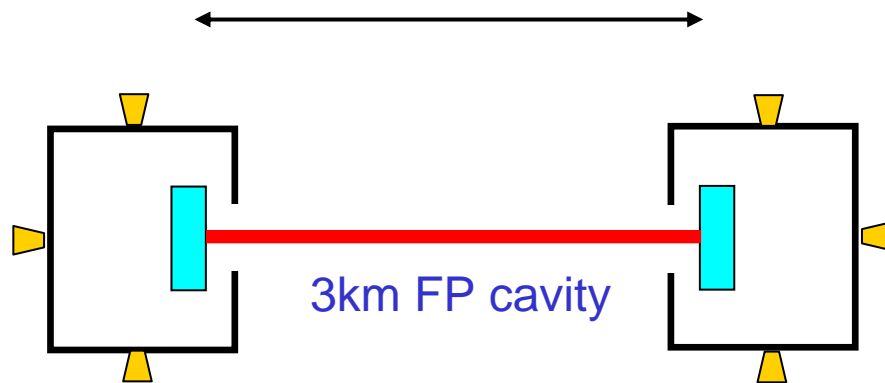
V. N. Rudenko, et. al., Measurement Techniques (2001)

これからの衛星搭載型重力勾配計(3)

twin satellite FP

GRACE type gradiometer

3km



*Designed by
K. Tsubono*

drag-free twin satellites

DPFの次のミッションの可能性??

まとめ

gradiometer単体の性能比較 $1E = 10^{-9} s^{-2}$

プロジェクト	gradiometer type	baseline	実現感度	設計感度
R.L. Forward	cross gradiometer +PZTセンサー	10cm	6E @88Hz	
H.J. Paik	inline gradiometer +SQUID @4.2K	19cm	20mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$ @0.01 – 1Hz	
GRACE	twin satellite microwave doppler	220km	100mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$	
GOCE	静電型加速度計	50cm	4mE/ $\sqrt{\text{Hz}}$ @5 – 100mHz	
atom int.1	Stanford, 10^6 atoms	70cm	40E/ $\sqrt{\text{Hz}}$	
atom int.2	JPL	2km		$3\mu\text{E}/\sqrt{\text{Hz}}$
DPF FP	FP	30cm		$12\mu\text{E}/\sqrt{\text{Hz}}$ @0.1Hz
twin satellite FP	FP	3km		$1.2\text{nE}/\sqrt{\text{Hz}}$ @0.1Hz

最後に

日本で**重力ミッション衛星**（地球環境衛星）
を打ち上げましょう！