

修士論文
TAMA300データを用いた未知パルサーの探査

鈴木健晃

平成19年2月5日

目次

第1章	はじめに	4
第2章	重力波とその検出	6
2.1	歴史	6
2.2	重力波	6
2.2.1	Einstein 方程式	6
2.2.2	Einstein 方程式の線形近似	7
2.2.3	波動方程式	8
2.2.4	重力波の伝播	8
2.2.5	重力波の自由度	9
2.2.6	質点に対する重力波の影響	10
2.3	パルサー	11
2.3.1	パルサーの一般論	11
2.3.2	回転体からの重力波	12
2.3.3	偏波と相対位相	13
2.3.4	理論的な upper limit	13
2.4	パルサーからの連続重力波と解析	14
2.4.1	これまでの解析 1、ターゲットの決まった解析	16
2.4.2	これまでの解析 2、ターゲットの決まっていない解析	17
第3章	解析手法	19
3.1	Hough 変換一般論	19
3.1.1	Hough 変換とは	19
3.1.2	Hough 変換の基本原理	19
3.1.3	Hough 変換を使ったパラメータ推定	21
3.1.4	Hough 変換の利点と欠点	24
3.2	未知パルサー探索における Hough 変換	24
3.2.1	未知パルサー探索で Hough 変換を使う利点、問題点	24
3.2.2	未知パルサー探索におけるマスター方程式	25
3.3	未知パルサーへの適用するための解析手順	25
3.3.1	$t-f$ 空間でのパワースペクトル	25
3.3.2	Hough 変換の実行	28

3.3.3	マスター方程式による投影とパラメータ推定の方法	29
第4章	解析手法の妥当性	36
4.1	妥当性	36
4.1.1	ガウス雑音	36
4.2	妥当性の評価	37
4.2.1	二項分布	37
4.2.2	ソフトウェア的信号注入試験	37
第5章	Hough変換の解析への適用と結果	41
5.1	TAMA300データへの適用	41
5.1.1	TAMA300データ	41
5.2	TAMA300でのHough変換	47
5.2.1	$t-f$ 空間でのパワースペクトル	47
5.2.2	マスター方程式の適用	47
5.2.3	マスター方程式を利用した投影と結果	47
5.2.4	パラメータ推定と結果	49
第6章	信号注入試験	52
6.1	上限値の定義	52
6.1.1	上限値	52
6.1.2	Hough変換での上限値の定義	52
6.2	信号注入試験と結果	53
6.2.1	信号注入	53
6.2.2	注入の実行	54
第7章	結論と今後の課題	57
7.1	結論	57
7.2	今後の課題	58
付録A	感度の計算	62
A.1	数学的準備	62
A.2	問題の設定	62
A.3	初期状態	62
A.4	重力波の方向	63
A.5	干渉計の位置	65
A.6	感度	65

付録 B Hough Map の統計的性質	69
B.1 Number Count 分布	69
B.2 閾値の設定	71
付録 C パラメータの制限	72
C.1 T_{coh} の制限	72
C.2 spindown	73
C.3 離散化の制限	73

第1章 はじめに

重力波は一般相対性理論で予測される現象の一つである。その存在は連星中性子星の観測によって間接的に存在が証明されているが、直接的にはまだ検出されていない。重力波の直接検出は一般相対性理論の検証のみならず、従来の電磁波による天文学とは異なる新たな天文学を開拓する可能性を秘めている。そのため、現在世界各地にてLIGO (アメリカ)、VIRGO (イタリア、フランス)、GEO (ドイツ)、TAMA (日本) など、大型のレーザー干渉計が建設され観測を始めている。さらに高度な次世代型干渉計として、日本では低温技術を用いた LCGT も計画されている。現在稼動中の検出器の1つである TAMA300 は、300m 基線長のレーザー干渉計型重力波検出器であり、東京三鷹に設置されている。TAMA300 では 1999 年から重力波の本格的観測が開始された。2003 年から 2004 年にかけて DT9 と呼ばれる観測が行なわれ、感度は観測毎に向上している。そして、そこで得られたデータはさまざまな種類の重力波をターゲットとして解析されている。

重力波は弱い相互作用という性質のため、源を天体現象に求めなければならない。重力波の種類は発生源により主に 3 つに分けられる。1 つめは超新星爆発などから発生するバースト波であり、その波形は正確に予測しきれない。2 つめは、連星中性子合体から放出されるチャープ波である。その波形はポストニュートニアン近似を使い正確に計算されている。3 つめは非軸対称なパルサーなどから発生する連続波である。この波形は正弦波であり、可視光、電波による観測から位置やスピンドOWNに関する情報が得られている。検出器からのデータを解析する際にはこれらの波形の特徴に応じて異なった手法が用いられている。チャープ波解析では星の質量をすこしずつ変えて多くの予想波形を準備し、データとの相関をウィナーの最適化フィルターで求める。連続波解析では、位相変調や振幅変調を補正した後、長時間積分により位相検波を行なう。

過去にはさまざまな連続波解析が行われているが、TAMA300 データを用いた連続波解析として、副田、梶村によるものがある。このときは SN1987A 残骸にあるパルサーからの連続波をターゲットとして解析を行なっている。本論文では TAMA300 の DT9 のデータを用いて未知のパルサーからの連続波検出を目標に解析を行なった。そのため SN1987A 残骸

の解析に用いた手法は計算コストの関係で使えず、Hough変換と呼ばれる手法を用いて解析を行なった。

Hough変換は雑音から信号を抽出する際に使われるもので、画像処理でよく用いられ、ノイズに強いという特徴を持っている。これにより、未知のパラメータが多い場合でも、計算コストをかけずに、解析を行ない、パラメータの推定や重力波の有無を統計的に調べることができる。この手法をTAMA300データ(DT9のR140)に適用して、1020-1030Hzの重力波信号を探した。結果としてこの周波数帯には重力波信号は見つからなかった。そこで、上限値を求めるために、信号注入試験を行なった。その結果として求めた上限値は1020-1021Hzでの $h = 8.6 \times 10^{-22}$ (confidence level 95 %) という値であった。

第2章 重力波とその検出

2.1 歴史

重力波は、一般相対論において Einstein 方程式を弱場近似の元で解いた時に得られる 4 重極放射の波動解であり、光速で伝播する時空の歪みである。重力波の存在は 1916 年に Einstein によって理論的に予言され、J.H.Taylor らの連星パルサー PSR1913+16 の公転周期変化の観測によって、その存在が間接的に証明された。J.H.Taylor らはこの功績により 1993 年にノーベル物理学賞を受賞している。しかし、重力相互作用はきわめて微弱なものであるため、いまだにその直接検出に成功した例はない。重力波の直接検出は、一般相対論の検証実験というだけでなく、現在の電磁波による天文学とは質の異なった、新しい天文学を拓く可能性をもっており、将来の発展が大いに期待される分野である。

2.2 重力波

2.2.1 Einstein 方程式

Einstein の一般相対性理論によると、4 次元時空内の異なる 2 点 x^μ と $x^\mu + dx^\mu$ 間の局所的な距離 ds は、計量テンソル $g_{\mu\nu}$ によって

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (2.1)$$

で与えられる。ここで $x^\mu = (ct, x, y, z)$ であり、 $g_{\mu\nu}$ は Einstein 方程式に従う。重力と質量の相互作用を表す Einstein 方程式は、二つの 2 階対称テンソル、Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ と物質のエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ を用いて

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

と表すことができる。Einstein テンソル $G_{\mu\nu}$ は

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \quad (2.3)$$

で定義できる量で、 G は重力定数、 $R_{\mu\nu}$ は

$$R_{\mu\nu} \equiv \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^{\beta}_{\mu\nu} \Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma} \Gamma^{\gamma}_{\nu\beta} \quad (2.4)$$

$$\Gamma^\mu_{\nu\gamma} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(g_{\alpha\nu,\gamma} + g_{\alpha\gamma,\nu} - g_{\nu\gamma,\alpha}) \quad (2.5)$$

で定義される量であり、リッチテンソルと呼ばれている。 $\Gamma^\mu_{\nu\gamma}$ はクリストフェル記号と呼ばれ、ベクトルを座標で微分する際に、基底ベクトルがいたるところで一定でないという理由からでてくる、基底ベクトルに付随する係数をまとめた量である。 R と $R_{\mu\nu}$ には

$$R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.6)$$

の関係があり、 R はリッチスカラーと呼ばれる。

2.2.2 Einstein 方程式の線形近似

重力場のない平坦な時空、すなわちミンコフスキー空間において計量テンソルは

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \eta_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

とすることができる。弱い重力場を考えると、4次元時空はミンコフスキー空間からのわずかなずれを受けるので、計量テンソルは平坦な時空の計量 $\eta_{\mu\nu}$ とそこからの摂動 $h_{\mu\nu}$ を加えた形

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

で表すことができる。 $h_{\mu\nu}$ の1次の範囲で式(2.3),(2.4),(2.5),(2.6)は

$$\Gamma^\mu_{\nu\gamma} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\gamma} + h_{\alpha\gamma,\nu} - h_{\nu\gamma,\alpha}) \quad (2.9)$$

$$R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\mu} + h_{\alpha\mu}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - h_{,\mu\nu}) \quad (2.10)$$

$$R = \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \quad (2.11)$$

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(h_{\alpha\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\mu} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - h_{,\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\nu}{}^{,\alpha\nu} - h^{,\alpha}{}_{,\alpha}) + h_{\alpha\mu}{}^{,\alpha}{}_{,\nu}) \quad (2.12)$$

となる。 h は $h_{\kappa\nu}$ の対角和

$$h \equiv \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \quad (2.13)$$

である。ここで

$$\bar{h} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (2.14)$$

というテンソルを導入し、Einstein 方程式を整理すると、

$$\frac{1}{2}[\bar{h}_{\alpha\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\mu} + \bar{h}_{\alpha\mu}{}^{,\alpha}{}_{,\nu} - \bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} - \bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\nu}{}^{,\alpha\nu}] = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.15)$$

となるが、ゲージ条件としてローレンツ条件

$$\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\mu} = 0 \quad (2.16)$$

を用いると線形化された Einstein 方程式

$$-\frac{1}{2}\bar{h}_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_{,\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (2.17)$$

を得ることができる。

2.2.3 波動方程式

特に真空状態では、式 (2.17) で

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.18)$$

とおくことで Einstein 方程式は

$$\left(-\frac{\partial^2}{c^2\partial t^2} + \Delta\right)\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.19)$$

となり、3次元の波動方程式に帰着される。これにより、ミンコフスキー空間の摂動が光速で伝播することを意味し、この方程式の解が重力波となる。

2.2.4 重力波の伝播

式 (2.19) の解として平面波解

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu}\exp(ik_\alpha x^\alpha) \quad (2.20)$$

を考える。これが式 (2.16)、式 (2.19) を満たすためには

$$A_{\mu\alpha}k^\alpha = 0 \quad (2.21)$$

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad (2.22)$$

という条件が k_α が課されなければならない。この2つの式によって重力波の振幅が進行方向を直行する、すなわち、横波であるということと、重力波は電磁波と同じように光速で進むということがわかる。

2.2.5 重力波の自由度

ローレンツゲージの条件、式(2.16)はゲージを一意にきめるわけではないので、まだ座標の取り方に任意性が残る。よってさらに、

$$A_{\alpha\beta}U^\beta = 0 \quad (2.23)$$

$$A^\alpha{}_\alpha = 0 \quad (2.24)$$

という条件を課す。ただし U^β は任意に選べる時間的な単位ベクトルである。式(2.21), 式(2.23), 式(2.24)を合わせて TTgauge(Transverse Traceless gauge)と呼ぶ。式(2.21), 式(2.23)は局所ローレンツ系において任意の観測者からみて重力波を横波(Transverse wave)として観測することができる座標系が必ずあるということを意味する。一方、式(2.24)は $\bar{h}_{\mu\nu}$ の対角和が 0(traceless) であるということ、

$$\bar{h}^{\alpha}{}_{\alpha} = 0 \quad (2.25)$$

であり、

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} \quad (2.26)$$

を意味する。ここでバックグラウンドのミンコフスキー空間に対して U_μ を時間基底

$$U^\mu = \delta^\mu{}_0 \quad (2.27)$$

となるようなローレンツ系をとり、このとき重力波の進行方向を z 軸にとると、

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik(ct-z)} \quad (2.28)$$

$$A_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

と書ける。 h_+ と $h_\times$ は $t-z$ の任意関数であり、上式より、

$$h_+ = A_+ \exp(i\omega(t-z)) \quad (2.30)$$

$$h_\times = A_\times \exp(i\omega(t-z)) \quad (2.31)$$

と表すことができる。このように、重力波は横波で二つの自由度を持っていることがわかる。

2.2.6 質点に対する重力波の影響

固有距離の変化

重力以外に力を受けていない自由質点の運動は、測地線の方程式

$$\frac{d}{d\tau}U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0 \quad (2.32)$$

に従う。ここで、 U^α は質点の 4 元速度、 τ は質点の固有時間である。質点が始めに静止しているようなローレンツ系を選び、この系に対する TT gauge をとる。このとき、質点に働く加速度は、

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} = -\Gamma_{00}^\alpha \quad (2.33)$$

$$= -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}(h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) \quad (2.34)$$

$$= 0 \quad (2.35)$$

となり、質点は加速度を受けないため、見かけ上は重力波の作用は現れない。重力波の影響をみるには、二つの近接した質点間の固有距離を調べなければならない。二つの自由質点の TT gauge 上での座標を $(0, 0, 0)$ と $(\epsilon, 0, 0)$ とする。重力波が入射してもより座標値は保たれるが、2 質点間の固有距離 Δl は

$$\begin{aligned} \Delta l &= \int |ds^2|^{\frac{1}{2}} \\ &= \int |g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_0^\epsilon |g_{xx}|^{\frac{1}{2}} dx \\ &\simeq |g_{xx}(x=0)|^{\frac{1}{2}} \epsilon \\ &\simeq [1 + \frac{1}{2}h_{xx}^{TT}(x=0)]\epsilon \end{aligned} \quad (2.36)$$

となり、重力波に対して変化することがわかる。

重力波の偏光

式 (2.32) より、測地線偏差の方程式

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = R^i_{\alpha\beta j} U^\alpha U^\beta \xi^j \quad (2.37)$$

が導かれる。今 $h_{\mu\nu}^{TT}$ の一次までを考えると、

$$U^\alpha \simeq (1, 0, 0, 0) \quad (2.38)$$

$$\tau \simeq ct \quad (2.39)$$

とできるので、式 (2.35) は

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^i = -R^i{}_{0j0} \xi^j \quad (2.40)$$

となる。さらに TT gauge では

$$R^i{}_{0j0} = -\frac{1}{2c^2} \frac{\partial^2 h^{TTi}{}_j}{\partial t^2} \quad (2.41)$$

が成り立つので、式 (2.37) は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi^i = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h^{TTi}{}_j}{\partial t^2} \xi^j \quad (2.42)$$

という結果になる。 $t \rightarrow \infty$ で発散しないような解をもとめると、 ξ^i の変化量 $\delta \xi^i$ は

$$\delta \xi^i = \frac{1}{2} h^{TTi}{}_j \xi^j \quad (2.43)$$

となる。よって

$$\delta \xi^x = \frac{1}{2} h_{+} \xi^x e^{ik(ct-z)} + \frac{1}{2} h_{\times} \xi^y e^{ik(ct-z)} \quad (2.44)$$

$$\delta \xi^y = -\frac{1}{2} h_{+} \xi^y e^{ik(ct-z)} + \frac{1}{2} h_{\times} \xi^x e^{ik(ct-z)} \quad (2.45)$$

となる。この2式で、第1項と第2項はそれぞれ重力波の2つの偏光(+modeと×mode)を表す。この2つのモードの名前は、 $x-y$ 平面内で環形に配置された自由質点群の重力波が入射したときの変位の形と結びつけることができる。

2.3 パルサー

2.3.1 パルサーの一般論

パルサーは中性子星であり、非常に高密度で強い重力場をもっている。さらにパルサーは強い磁場をもっており、この効果によりパルサーは非軸対称性をもつことになる。そして、この非軸対称性が重力波を生む。またパルサーの自転軸と地軸のずれによる歳差運動からも重力波は生じる。さまざまなパルサーの観測により、パルサーはその名が示す通り、非常に規則正しいパルス（信号）を発生していることがわかっている。

われわれの銀河内には知られているだけでも1500以上のパルサーが存在するが、それらのほとんどは銀河面に集中している。パルサーは電磁

波の放射、粒子の放出、重力波の放出によってエネルギーを失う。すなわち、回転周波数は完全に一定ではなく、時間によって変化していくものがある。典型的にできたばかりのパルサーは大きなスピンドウンレートをもっている。現在までのところ、スピンドウンは主に電磁波の放出によるところが大きいということになっている。

2.3.2 回転体からの重力波

パルサーからどのように重力波が発生するかをみるために軸のまわりで回転する剛体からの重力波を計算してみることにする。簡単のため慣性主軸 x_3 のまわりで剛体が回転する場合を考えることにする。あるデカルト座標系 S 系でその剛体を見たとき、剛体の角速度が Ω であるとする。これにたいして剛体の静止系 S' 系を考える。 S' 系から見たとき、質量の分布の 2 次のモーメントは

$$A^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

と書けるが、これを S 系からみると

$$J_{ij} = R^t J R \quad (2.47)$$

に見える。ここで

$$R = \begin{bmatrix} \cos \Omega t & \sin \Omega t & 0 \\ -\sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

である。これにしたがって $J_{ij}^{(3)}$ 計算すると 0 でない成分は

$$J_{11}^{(3)} = \frac{8\Omega^3}{c^3} \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\Omega t \quad (2.49)$$

$$J_{22}^{(3)} = -\frac{8\Omega^3}{c^3} \frac{J_1 - J_2}{2} \sin 2\Omega t \quad (2.50)$$

$$J_{12}^{(3)} = J_{21}^{(3)} = -\frac{8\Omega^3}{c^3} \frac{J_1 - J_2}{2} \cos 2\Omega t \quad (2.51)$$

となる。結果だけ書くと、単位時間に重力波によってエネルギーの放出される割合は、 $q_{\alpha\beta}$ を質量分布の 4 重極能率テンソルのうち時間的に変化する成分として、

$$P = \frac{G}{5c^5} \sum \left(\frac{d^3}{dt^3} q_{\alpha\beta} \right)^2 \quad (2.52)$$

と表されるので、式 (2.49) (2.50) (2.51) から、結局放出される重力波は回転角速度 Ω の 2 倍の角周波数をもっていることがわかる

2.3.3 偏波と相対位相

重力波信号を検出するときの問題について考察を得るために、予想される重力波の形はどのようなものかを理解しておくことは重要である。重力波のプラスモード、クロスモードはそれぞれ次のように書ける。

$$h_+ = h_0 \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos \Phi t \quad (2.53)$$

$$h_\times = h_0 \cos \iota \sin \Phi t \quad (2.54)$$

太陽系重心系では2次までのテーラー展開で

$$\Phi(t) = \Phi_0 + 2\pi \left(f_0 T + \frac{1}{2} \dot{f} T^2 \right) \quad (2.55)$$

また ι は地球とパルサーを結ぶ線とパルサー回転軸のなす角である。 h_0 は無次元の振幅であり、

$$h_0 = \frac{16\pi^2 G}{c^4} \frac{I_{zz} \epsilon f_r^2}{d} \quad (2.56)$$

$$\epsilon = \frac{I_{xx} - I_{yy}}{I_{zz}} \quad (2.57)$$

であり、 d は重力波源からの距離、 I_{jk} はパルサーの慣性テンソルである。ここで、式 (2.53) (2.54) をみればわかる通り、各モードの振幅はパルサーの回転の向きに依存しており、またパルサーから発生する重力波の二つのモードの位相差は常に $\frac{\pi}{2}$ である。

2.3.4 理論的な upper limit

ここでいう理論的な upper limit の意味するところはパルサーのスピンダウンによるエネルギーロスが全て重力波によるとして計算した重力波の振幅のことである。通常はスピンダウンによるエネルギーロスの大半は電磁波の放出によるものであるが、そのような電磁波によるエネルギーロスがまったくないとして計算するので理論的 upper limit と呼ぶのである。

今ここでその最大の重力波振幅を求めてみる。地球における重力波は

$$S_{GW} = \frac{c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (2.58)$$

で与えられる。地球とパルサーとの距離を d とすると、パルサーから単位時間に放射されるエネルギーは $4\pi d^2 S_{GW}$ となる。観測されるエネルギー散逸 $-\frac{dE}{dt}$ が全て重力波に変換されるとして

$$-\frac{dE}{dt} = 4\pi d^2 S_{GW} = \frac{c^3 d^2}{8G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle \quad (2.59)$$

を得る。

$$E = \frac{1}{2} I \omega_{rot}^2 \quad (2.60)$$

より

$$\begin{aligned} -\frac{dE}{dt} &= -I \omega_{rot} \dot{\omega}_{rot} \\ &= I \frac{2\pi}{P} \frac{2\pi}{P^2} \dot{P} \\ &= I \frac{4\pi^2}{P^3} \dot{P} \end{aligned} \quad (2.61)$$

となる。ここで P はパルサーの自転周期である。また、

$$\begin{aligned} \langle \dot{h}_+^2 \rangle &= \omega_{GW}^2 \langle h_+^2 \rangle \\ &= 4\omega_{rot}^2 \langle h_+^2 \rangle \\ &= \frac{16\pi^2}{P^2} \langle h_+^2 \rangle \end{aligned} \quad (2.62)$$

である。同様に h_x も計算できるので、

$$\langle h_+^2 \rangle = \langle h_x^2 \rangle = h_{max}^2 \quad (2.63)$$

とすると、

$$h_{max} = \sqrt{\frac{GI\dot{P}}{d^2 c^3 P}} \quad (2.64)$$

となる。

2.4 パルサーからの連続重力波と解析

ここで、連続波についてまとめておく。パルサーの非軸対称性等によって生じる重力波は、短い時間だと周波数一定の正弦波とみなすことができるため、その波形は連続波と呼ばれる。連続波のパラメータは以下表 2.1 の 7 つある。 $\vec{n}$ と ι は図 2.1 のように定義される。

連続波の解析には位置や周波数などのパラメータが観測からある程度わかっているパルサーからの連続波解析と、パラメータがわかってない未知のパルサーからの連続波全天探索解析の 2 つがある。それぞれで解析手法は異なってくる。以下に過去の解析結果を述べる。

表 2.1: 連続波のパラメータ

表現	パラメータ
f	周波数
$\dot{f}$	スピンドウン
$\vec{n}$	位置
Ψ	偏向角
ι	地球とパルサーを結ぶ線とパルサー回転軸のなす角
Φ_0	位相
h_0	振幅

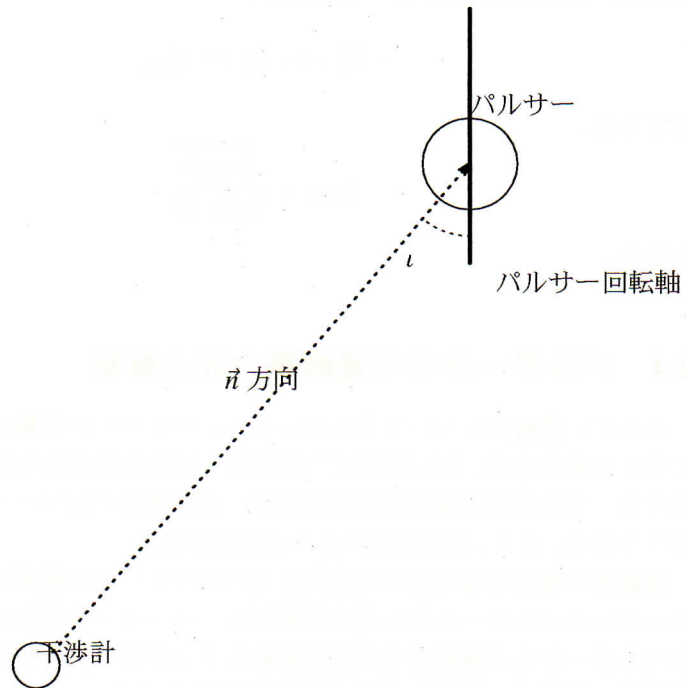


図 2.1: $\vec{n}$ と ι を示す図

2.4.1 これまでの解析 1、ターゲットの決まった解析

パルサー J0534+2200 (かにパルサー)

連続重力波に関しては干渉計型ではなく共振型の装置を使った解析が行なわれてきた。かにパルサーの重力波周波数は 60Hz であり、この周波数に対して得られた今までで一番良い連続重力波の upper limit は $h = 2 \times 10^{-22}$ である [1]

SN1987A 残骸中のパルサー

1987 年、大マゼラン星雲の中で超新星爆発が起こった。この残骸にパルサーがあると考えられて解析が行なわれた。まず、Niebauer らのグループによって 1989 年に解析が行なわれた。当時、このパルサーから放出される重力波周波数は 1968.629Hz と報告されており、Garching と Glasgow のレーザー干渉計で 1989 年に得られたデータを用いて、その周波数をターゲットとした解析が行なわれた。また、雑音は理想であると仮定して、閾値を設定して重力波の有無を決定した。彼らは重力波のそれぞれのモードの strain に対して upper limit を求めており、その値は $h = 9 \times 10^{-21}$ である。このとき false alarm rate は 5 %、false dismissal rate は 50 %であった。[2]

副田はこのパルサーから放出される重力波周波数を 935Hz とし、TAMA の DT6 のデータを使い (約 1000 時間) 解析を行なった。また雑音は理想的である仮定して、閾値を設定して重力波の有無を決定した。彼は重力波のそれぞれのモードの strain に対して upper limit を求めており、その値は $h = 5.5 \times 10^{-23}$ である。このとき false alarm rate は 5 %、false dismissal rate は 50 %であった。[3]

梶村は TAMA DT9 のデータを前半、後半の 2 つに分け (それぞれ約 100 時間) 相関解析を行なうことで副田の解析手法で問題だった SN ロスを減らすことに成功し、upper limit の値を $h = 4 \times 10^{-23}$ まで小さくすることができた。このとき false alarm rate は 5 %であった。[4]

パルサー J1939+2134

2002 年 LIGO と GEO による初観測 S1 が行なわれた。このデータを使って、パルサー J1939+2134 から放出される連続重力波 (周波数 1284Hz) に対する解析がなされた。このとき時間領域でベイズ統計を用いて解析が行なわれた。その結果 upper limit を求めており、その値は $h = 3 \times 10^{-22}$ である。このとき false alarm rate は 5 %であった。[5]

28 個のパルサー

2003 年に LIGO で観測 S2 が行なわれた。このデータを使って、28 個のパルサーから放出される連続重力波に関する解析を行なった。このとき、上のパルサー J1939+2134 で用いられた手法で解析され、この 28 個のパルサーに関する上限値が求められた。そのうち 26 個は上限値がはじめて決められた。このとき false alarm rate は 5 % であった。[6]

Sco X-1

Sco X-1 は連続波を記述するパラメータに不定性が大きい、たとえば周波数は 40Hz もの不定性をもっている。そのため計算コストがかかり全時間解析は難しい。そのため、計算コストを減らすため解析に用いるデータを 6 時間分にした。このとき、F 統計を用いた手法で、さらに L1 と H1 の 2 つのデータによる相関解析が行われた。求められた上限値は 2×10^{-22} であり、false alarm rate は 5 % であった。[7]

2.4.2 これまでの解析 2、ターゲットの決まっていない解析

位置がわからないため、全天探査が必要となる。そのため、ターゲットの決まった解析で用いた手法は計算コストがかかるため使えず、解析手法に工夫が必要となる。

全天探査には、まず、(A) 位置や周波数等のパラメータを絞り込んだあと、(B) さらに詳しく探査するという多段階の解析方法が考えられている。現在までのところ、(A) (B) それぞれで解析が研究され両方を同時に実行した結果は公表されていない。

Hough 変換を用いた全天探査

(A) の絞りこみの手法の研究として、Hough 変換を用いた解析が LIGO の S2 データを用いて行われた。Hough 変換は画像処理等で用いられるノイズから信号を抽出する技術である。この手法を用いてパラメータを絞り込んでそれぞれの周波数帯での上限値を求めた。このときには 200 – 400Hz 帯の全天探査を行って、最小の上限値は 4.43×10^{-23} (200-201Hz) であった。このとき false alarm rate は 5 % であった。[8]

F 統計を用いた全天探索

(B) の手法の研究として、F 統計を用いた全天探索が LIGO の S2 データを用いて行われた。このときに探索されたのは、160-728.8Hz であり、計算コストを減らすため解析に使われたデータは 10 時間分であった。L1、H1、H2 の 3 つのデータの相関解析を行ってそれぞれの周波数帯での上限値を求め、最小の上限値は 6.6×10^{-23} であった。このとき false alarm rate は 5 % であった。[7]

現在進行中の解析

現在、LIGO の S4 データを用いて、Hough 変換で 50-1000Hz 帯の全天探索も行われている。また (A) のもう一つの手法として考えられている、stack-slide とよばれる手法で LIGO の S3 のデータが解析されている。

第3章 解析手法

3.1 Hough 変換一般論

今回の未知パルサー探査で用いた手法である Hough 変換について説明する。

3.1.1 Hough 変換とは

Hough 変換とは、投票メカニズムを使った曲線（直線）パラメータ推定アルゴリズムのことである。他にも曲線パラメータ推定の手法として、エッジ検出やグルーピングなどがあるが、Hough 変換の特徴としてはノイズ（雑音）に比較的強いということがあげられる。この雑音に対して強いという特徴が、未知パルサーからの探査におけるパラメータ推定に役立つ。Hough 変換の具体的な原理について以下に述べる。

3.1.2 Hough 変換の基本原理

Hough 変換の基本原理は、P.V.C.Hough が 1962 年に提唱した。この中では、次のように Hough 変換の原理が導入された。 $x-y$ 平面上のある点 (x_0, y_0) を通過する直線群 (図 3.1) は、傾き a 、切片 b をパラメータとして

$$y_0 = ax_0 + b \quad (3.1)$$

で表される。これは $a-b$ パラメータ空間では、

$$b = -ax_0 + y_0 \quad (3.2)$$

となり、可能な全ての a, b の組、 (a, b) の描く軌跡は一本の直線 (図 3.2) となる。これらの式を「マスター方程式」といい、後に述べる Hough 変換の性質のもととなる重要な式である。また $x-y$ 座標上の点 (x_i, y_i) [$i = 1, 2, 3, \dots, N$] は $a-b$ パラメータ平面上では、 N 本の直線で表される。逆に考えると、2次元の場合パラメータ空間の直線は実空間の点に対応するという特徴をもつことがわかる (cf. パラメータ空間の点は実空間の直線に対応)。この「一方の空間の点が他方の空間の直線に、一方の空間の直線が他方の空間の点に対応する」という性質を使って以下の説明をしていく。

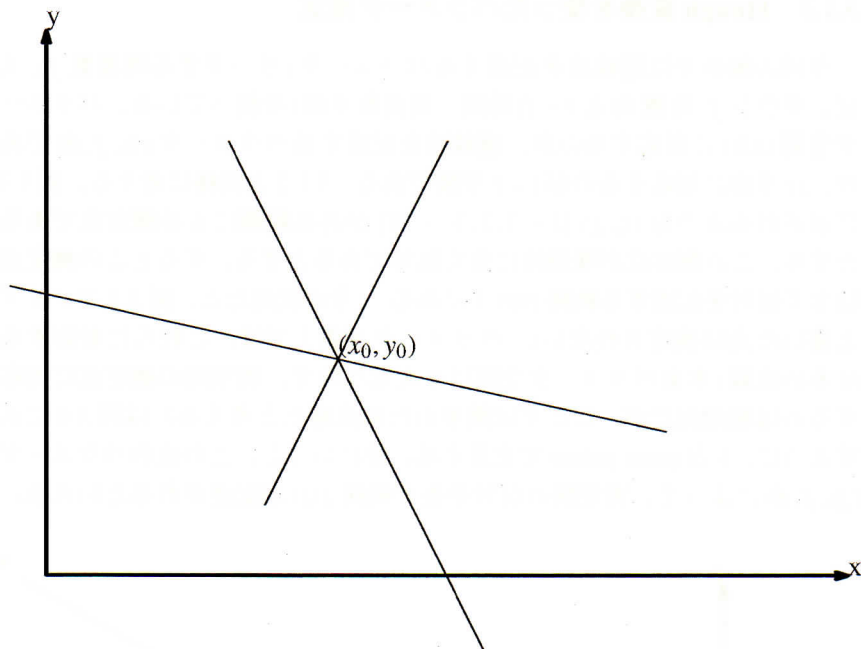


図 3.1: (x_0, y_0) を通過する直線群

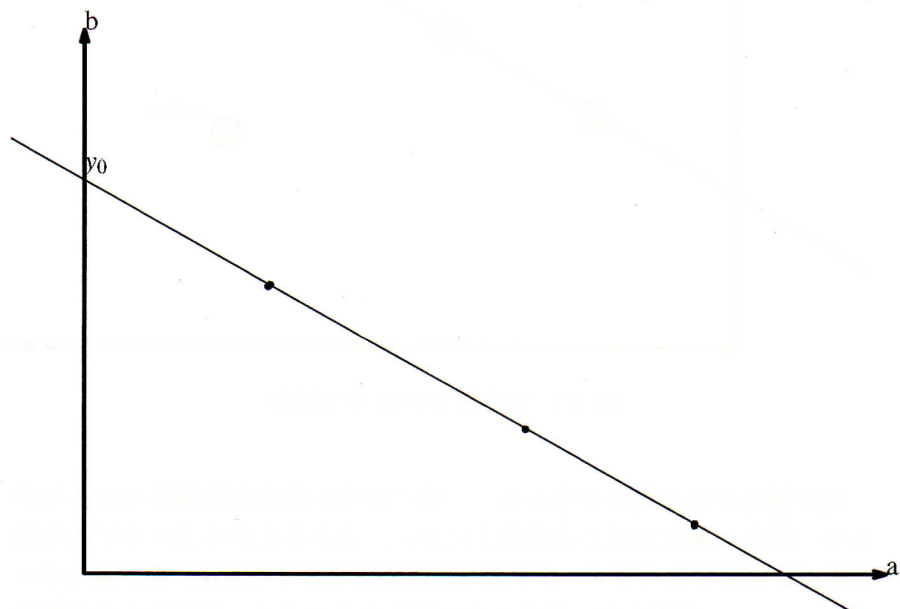


図 3.2: (a, b) の描く軌跡

3.1.3 Hough 変換を使ったパラメータ推定

今回の解析では連続波を記述するパラメータ (サーチする周波数 f_0 , スピンドアウン $\hat{f}$, 位置 $\hat{n}$) と $t-f$ (時間-周波数平面) を使っている。パラメータ空間 (a,b) に対応するのが、連続波を記述するパラメータ $(f_0, \hat{f}, \hat{n})$ であり、 xy 平面に対応するのが $t-f$ 空間である。3.1.2 と同様に考える。図 3.3 に示されるような (t_i, f_i) [$i = 1, 2, 3, \dots, N$] がある観測による測定点であるとする。この測定点が理想的に全て信号であるとする。するとこの測定点は全て信号を記述する軌跡 $f(t)$ 上にある。(今の状況だと、図 3.3 でノイズと書いた点は測定されない)。パラメータ平面上では、これらに対応する N 本の直線 (本来パラメータ空間は 4 次元なので、実空間の測定点に対応するのは超曲面だが、ここでは簡単のため直線だと考える) は図 3.4 に示すように、1 点 (max point) で交差する。逆にいうと、この点のパラメータ $(f_0, \hat{f}, \hat{n})$ によって、実空間の信号を表す軌跡 $f(t)$ が記述されるといえる。

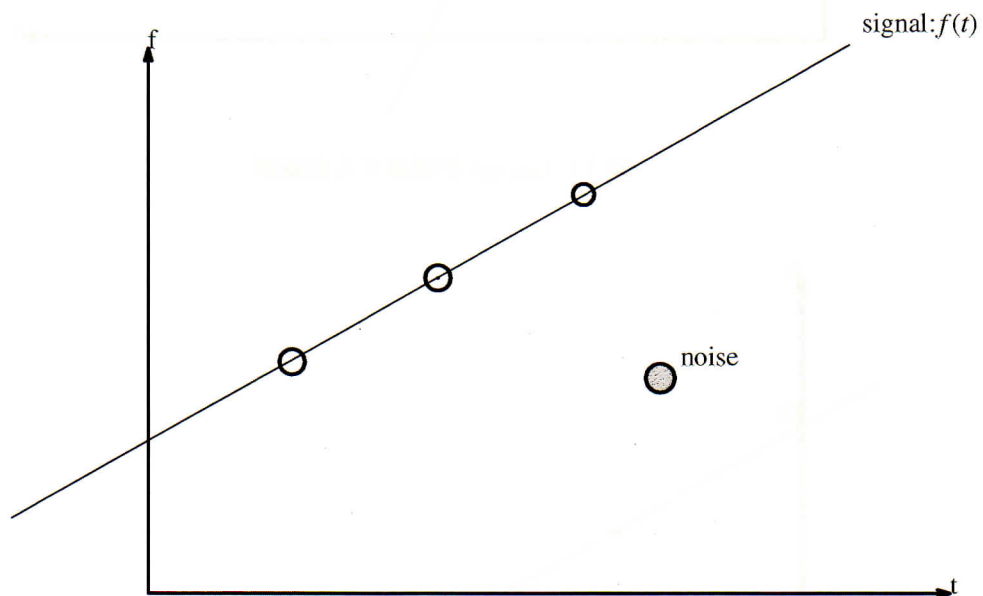


図 3.3: 実空間での信号と雑音

次に雑音がある場合を考える。一般に信号の測定点は軌跡 $f(t)$ 上にあるが、雑音の測定点はこの軌跡上にはない。このことから $f(t)$ 上にある信号の点に対応するパラメータ平面上の直線は交差する直線の数が多い点 (max point) を通るが、雑音の点に対応するパラメータ平面上の直線は交差する直線の数が多い点 (max point) を通らない。

この交差する直線の数が多い点 (max point) が信号を記述している

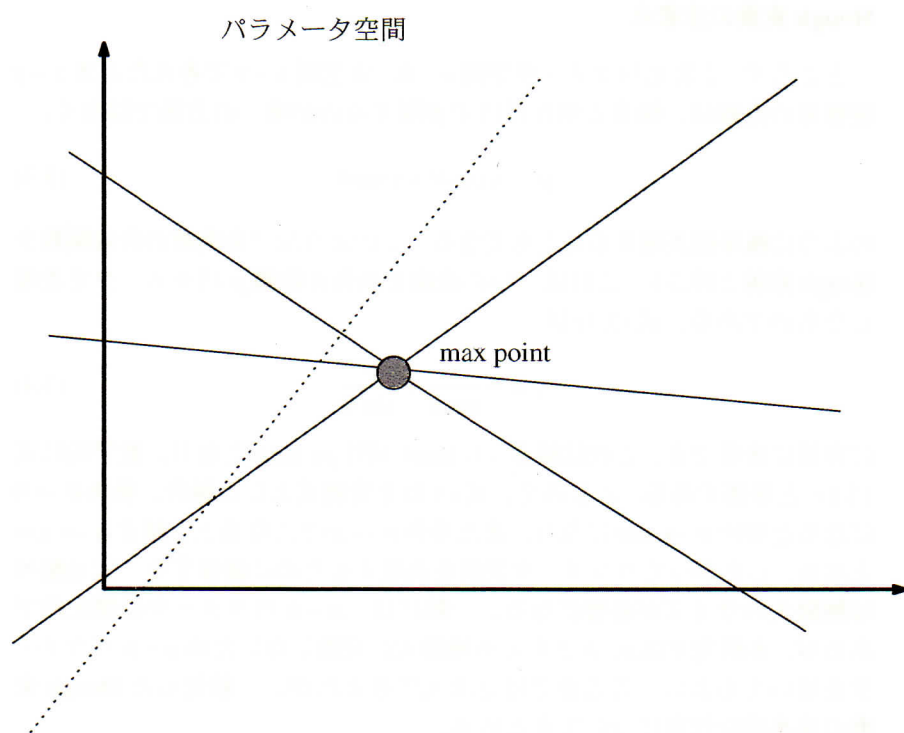


図 3.4: 図 3.3 に対応するパラメータ空間での信号 (実線) と雑音 (点線)

パラメータである。このようにして、雑音と信号から信号を記述するパラメータを探しあてることが可能となる(図 3.4)。それには交わる直線の数 Number Count (NC) をかぞえればよい。max point での NC は 3 である。パラメータ推定はこの Number Count (NC) を数えて行なう。(たとえば、図 3.4 だと、max point で NC が 3 で、それ以外の交点では NC が 2 となり、NC の値が最大となるものが探しているパラメータである)。このようにして雑音中からでも信号を記述するパラメータを推定することができる。

Hough 変換の注意点

ところで、2 次元パラメータ空間 $a-b$ 、実空間 $x-y$ で考えたとき $x-y$ 座標系の直線は、傾きと切片だけで表現するのが唯一の方法ではなく、

$$\rho = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3.3)$$

のように極座標表現することもできる(このような三角関数の合成関数を Hough 曲線と呼ぶ)。これは一つの直線を垂角 θ -距離 ρ パラメータで表現したものである。式 (3.3) は

$$y = -\frac{x}{\tan \theta} + \frac{\rho}{\sin \theta} \quad (3.4)$$

に容易に変更でき、これは傾き $-1/\tan \theta$ 、切片 $\rho/\sin \theta$ となり、数学的に式 (3.1) と等価である。ところで、式 (3.3) を変換式とした場合、垂角 $\theta \rightarrow 0$ になると切片 $b \rightarrow \pm\infty$ になり、また垂角 $\theta \rightarrow \pi/2$ となると、傾き $a \rightarrow \pm\infty$ となる。したがってパラメータ空間を表現するために確保する二次元配列は無限大のサイズが必要になる。一般には、 $a-b$ パラメータは禁止的であるが、本研究では a, b どちらも無限大に発散しないため $a-b$ パラメータを用いてもよい。ここまでは 2 次元で考えたが、一般化した Hough 変換の基本的な性質についてまとめる。

1. (x, y) を通過する全ての直線群は、パラメータ平面上の一本の Hough 曲線で表される。
2. パラメータ平面上の一点は、直線一本に対応する。
3. 共線上の任意の二点の Hough 曲線は、パラメータ平面上でただ一回だけ交差する。
4. 均一な分解能の直線検出感度を得られる。例として、上の垂角 θ -距離 ρ パラメータで考える。 $x-y$ 平面の等間隔な平行直線群は、パラメータ空間で ρ 軸に平行な等間隔のピーク群として現れる。角度方向に対しても、円接線群は θ 軸に平行な等間隔なピーク群として

現れる。このように、パラメータ空間を θ , ρ とも等間隔に分割できる。

3.1.4 Hough 変換の利点と欠点

Hough 変換の利点としては

1. 雑音の影響が少なく安定的に直線を検出できる
2. 直線が不完全でも検出することができる
3. 複数の直線を同時に検出できる

問題点としては

1. パラメータ空間を表すために大きなメモリが必要となる
2. パラメータ空間をデジタル化する際のサンプリング間隔（解像度）を決める基準が明確でない
3. Hough 曲線の集積点を（ピーク）を検出する方法が明確でない

といった特徴がある。

今回の解析で使うパラメータとここまで述べてきたパラメータとの対応関係をもう一度整理する。パラメータ空間 (a, b) に対応するのが、連続波を記述するパラメータ $(f_0, f, \vec{n})$ であり、 xy 平面に対応するのが $t-f$ 空間である。

Hough 変換をする際には、この $(f_0, f, \vec{n})$ と $t-f$ を結ぶマスター方程式が必要となる。

この節で述べたことをまとめると Hough 変換によるパラメータ推定は、『(1) 実空間のものを (2) マスター方程式でパラメータ空間に投影し、(3) 交差する直線の数が多いパラメータを探す』である。

3.2 未知パルサー探査における Hough 変換

3.2.1 未知パルサー探査で Hough 変換を使う利点、問題点

未知パルサー探査は、(A) パラメータの絞込みと (B) 更なる解析の 2 段階からなる。このうち Hough 変換は (A) で用いられる手法である。(B) で行われる手法 (例、SN1987A 残骸にたいして行ったマッチドフィルター) のみで未知パルサー探査を行ってもよいが、長時間データの解析には年単位の解析時間がかかることになり、計算コストの点から現実的ではない。

そのため、どうしても (A) の手法が必要となる。(A) の手法としては、stack-slide と Hough 変換等がある。stack-slide は、各時間でのパワーをそのまま足し合わせてパラメータを推定する。それに対して Hough 変換は各時間で閾値を超えたパワーを 1 とし、+1 ずつたしていく手法である。このため、Hough 変換は閾値を超えたパワーを+1 にする分若干計算の手間がかかるが、ノイズによる影響は少ない（例えば、仮にある時間でパワーがノイズの影響でそれまでの 100 倍だとすると、stack-slide はその大きさで足すため、もろにこの時間のノイズによるパワーの影響を受けるが、Hough 変換は 2 倍だろうが、100 倍だろうが+1 するだけなので影響は少ない）といった特徴がある。

3.2.2 未知パルサー探索におけるマスター方程式

未知パルサー探索での Hough 変換で用いるマスター方程式は、非相対論のドップラー効果の 1 次の近似式であり、 $f(t)$ を時刻 t における干渉計での周波数とすると、

$$f(t) - \hat{f}(t) = \hat{f}(t) \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{n}}{c} \quad (3.5)$$

である。ここで、 $\vec{n}$ は干渉計からパルサーへの単位ベクトル、 $\vec{v}(t)$ は SSB (Solar System Barycenter) 系での干渉計の速度、 c は光速。また、 $\hat{f}(t)$ は SSB 系での時刻 t での周波数であり、1 次までの近似で

$$\hat{f}(t) = f_0 + \dot{f}(t)(t - t_0) \quad (3.6)$$

と書ける。 f_0 は重力波の周波数であり、 $\dot{f}(t)$ はスピンドアウンである。付録 C.2 にあるようにスピンドアウンは今回の解析では考慮しない。スピンドアウンを考慮しないため、 $\hat{f} = f_0$ である。式 (3.5) が連続波を記述するパラメータ $(f_0, \dot{f}, \vec{n})$ を $t-f$ と結びつけるマスター方程式である。

3.3 未知パルサーへの適用するための解析手順

先に述べたように『(1) 実空間のものを (2) マスター方程式でパラメータ空間に投影し、(3) 交差する直線が最も多いパラメータを探す』が Hough 変換である。この順で実行する。

3.3.1 $t-f$ 空間でのパワースペクトル

ここでは (1) の実空間に対応する $t-f$ に関して適用手順を述べる。

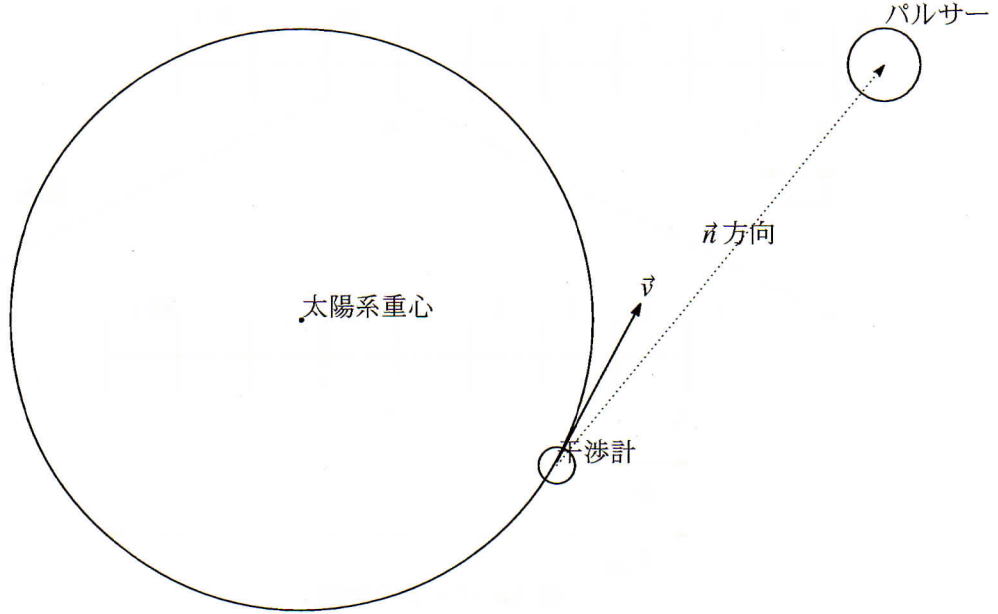


図 3.5: SSB での干渉計とパルサー

ある時刻における、ある周波数のパワーについて考える。観測される量は離散量であるため、パラメータ等には分解能がある。TAMA300 データの DT9 (R140) では 11 日間の観測が行なわれていた。このうち解析に用いた 10000files の時間は $T_{obs} \sim 6.5 \times 10^5$ である。これを N 等分した T_{coh} を 1 ユニットとして考える。つまり、 $T_{obs}/N \equiv T_{coh}$ である。その周波数分解能は

$$\delta f = \frac{1}{T_{coh}} = 1.525 \times 10^{-3} \quad (3.7)$$

である。それぞれのユニットに $a = 0, 1, \dots, (N-1)$ とラベルをつける (図 3.6 参照)。それぞれのユニットの開始時間を t_a とし、そのユニットを a_{th} と名づける。 a_{th} のユニットは $[t_a, t_a + T_{coh}]$ の時間である。また、 $x(t)$ を時刻 t での干渉計の出力とする。

次に 1 ユニット内のデータ数を M とする。データユニットは M 個のサブユニットにわけられる。それぞれのサブユニットの開始時間を t_j とする。各サブユニットを δt 時間とすると $t_j = t_a + j\delta t$ である。 $(j = 0, 1, \dots, (M-1))$ 。以上から $\delta t = T_{coh}/M$ となる。また以下では $x_j \equiv x(t_j)$ とあらわす。

x_j の離散フーリエ変換は

$$\tilde{x}_k = \delta t \sum_{j=0}^{M-1} x_j e^{-2\pi i j k / M} \quad (3.8)$$

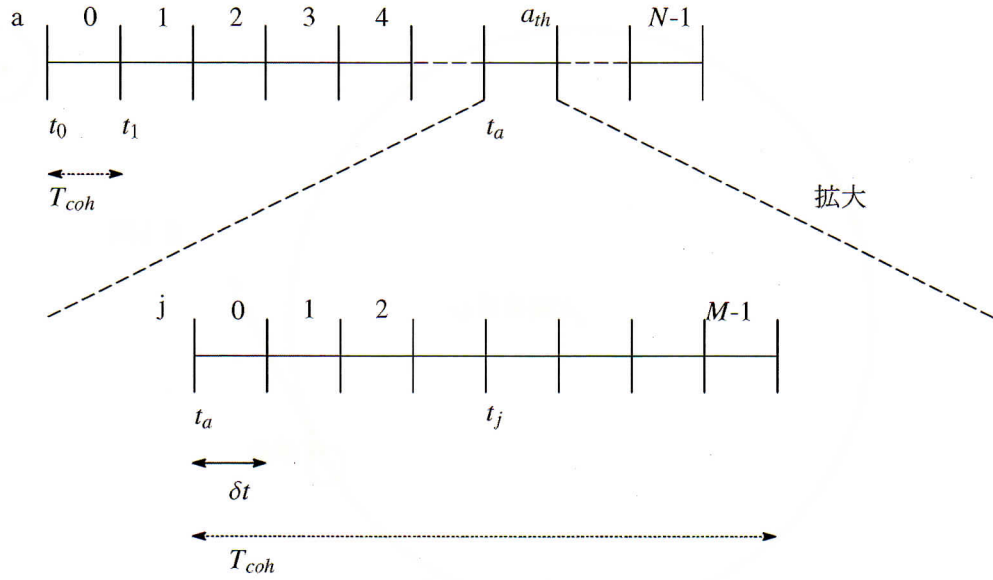


図 3.6: データの分割

である。ここで $k = 0, 1 \dots (M-1)$ 。時刻 t における干渉計の出力 $x(t)$ は重力波信号 $h(t)$ とノイズ $n(t)$ の合計

$$x(t) = h(t) + n(t) \quad (3.9)$$

で書き表される。今後特に断りがない限り、ノイズ（雑音）は定常なガウス雑音だとする。観測時間が無限なとき片側パワースペクトル密度 $S_n(f)$ は $f > 0$ で自己相関関数のフーリエ変換により定義される。

$$S_n(f) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle n(t)n(0) \rangle e^{-2\pi i f t} dt \quad (3.10)$$

ここで $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す。規格化パワースペクトルは

$$\rho_k = \frac{|\tilde{x}_k|^2}{\langle |\tilde{n}_k| \rangle^2} \quad (3.11)$$

とする。ここで

$$\langle |\tilde{n}_k|^2 \rangle \approx \frac{M \delta t}{2} S_n(f_k) = \frac{T_{coh}}{2} S_n(f_k) \quad (3.12)$$

より、

$$\rho_k \approx \frac{2|\tilde{x}_k|^2}{T_{coh} S_n(f_k)} \quad (3.13)$$

となる。もし、 $\rho_k \geq \rho_{th}$ (閾値) ならばその周波数 bin を select し、そうでなければ reject する。これによって $t-f$ 空間に 0 と 1 からなる分布ができる。 ρ_{th} はガウス雑音の場合に 20 % の ρ_k が $\rho_k \geq \rho_{th}$ を満たすように設定した。

3.3.2 Hough 変換の実行

前小節で $t-f$ 空間の準備ができたので

(2) マスター方程式でパラメータ空間に投影を行う

マスター方程式によるパラメータ空間への投影

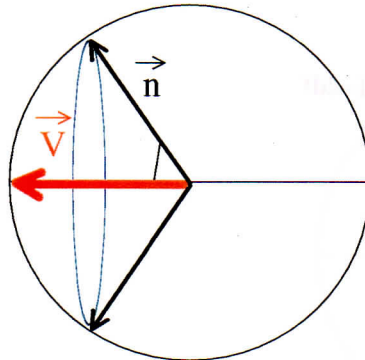


図 3.7: ベクトルとパルサーの位置。外円は天球

先に述べたようにマスター方程式は

$$f(t) - \hat{f}(t) = \hat{f}(t) \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{n}}{c} \quad (3.14)$$

である。 ϕ は $\vec{v}(t)$ と $\vec{n}$ のなす角とすると、 $\vec{n}$ は単位ベクトルなので

$$\cos \phi = \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{n}}{v(t)} = \frac{c}{v(t)} \frac{f(t) - \hat{f}(t)}{\hat{f}(t)} \quad (3.15)$$

となる。この式は、 ϕ が一定あることを暗示している。物理的には、観測量 $f(t)$ を満足させる、パルサー候補の集まりは天球上に円を描く（図 3.7 参照）ことを表している。ここで、周波数 bin の分解能が δf なので ϕ の分解能を求めるため上の式で $f(t) - \hat{f}(t) = \delta f$ とすると、スピンドウンを考慮しないため、 $\hat{f} = f_0$ であるから

$$\delta\phi \approx \frac{c}{v} \frac{\delta f}{f_0 \sin \phi} \quad (3.16)$$

次に一般的に $f = f_0 + n\delta f$ (整数 n) で考えると

$$\cos \phi_n = \frac{nc\delta f}{vf_0} \quad (3.17)$$

と書き表すことができる。これが物理的に意味するのは、整数 n が変わることによって天球上の円の位置が変わることである（図 3.8 参照）。 n は $\pm 100 \sim 150$ までなら天球上にある。

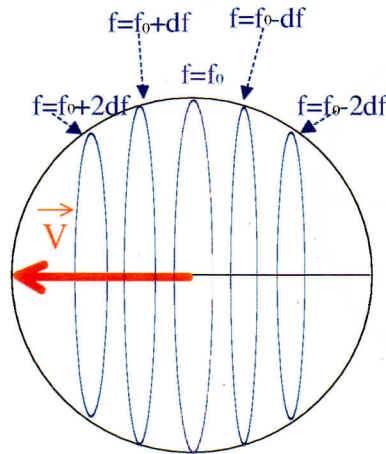


図 3.8: それぞれの周波数に対応する円群。図中の df は本文中の δf を表す

3.3.3 マスター方程式による投影とパラメータ推定の方法

(3) 最後に交差する直線の数が多いパラメータを探す。

前節をまとめると、「ある観測量 $f(t)$ によるパルサーの候補はマスター方程式により天球上の円になる。 $f(t)$ 、つまり n を変えると、マスター方

程式の変形式 (3.15) より ϕ の値は変わり、天球上の円の位置は変わる。さらに $f(t)$ を変えていくと、円群が天球上にできる (図 3.9)」ということである。式 (3.13) のパワースペクトルで閾値を超えた周波数 bin のみが採用されるが、この操作が意味するのは天球上で図 3.9 から図 3.10 のように円群を選び出すことである。

後に述べる Hough Map を作るため、この円を 2 次元平面に投影する。本研究ではこの投影を図 3.10 から図 3.11 のように黄道面に投影した。これによって天球上での円群は黄道面上で直線群になる。よってある周波数の投影は図 3.11 のように黄道面と直線群になる。これら一連の作業により、ある周波数での投影図ができる。これを Partial Hough Map (PHM) という。

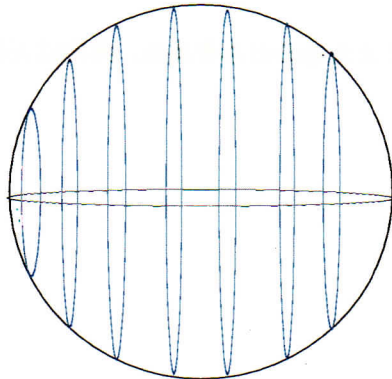


図 3.9: ある時間でのパルサーの位置。外円は天球

今度は時刻の異なる別のユニットで上の作業を行う。地球の自転、公転などにより φ が別の方向を向く。この前のユニットでの φ との角度差分、投影された直線群が先ほどとは異なる (図 3.12)。この異なる時間のデータから作られた図 3.11 の黄道面上の直線群と図 3.12 の黄道面上の直線群をあわせたものが図 3.13 である。

この作業をさらに繰り返していったのが、THM (Total Hough Map) である。これによって、それぞれの周波数での Number Count を求めることができる (図 3.15 参照)。足しあわせ方は今回はスピンドウンを考えないので、傾き 0 の直線である。これをそれぞれの周波数 bin で行なう。

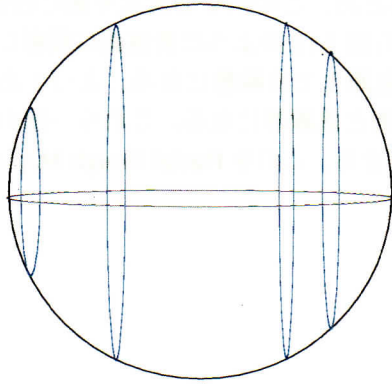


図 3.10: 図 3.9 から閾値をこえたもののみ考える。外円は天球

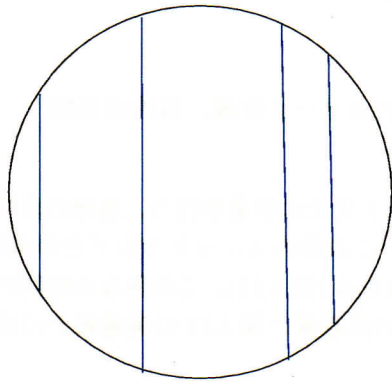


図 3.11: 図 3.10 を黄道面へ投射したもの

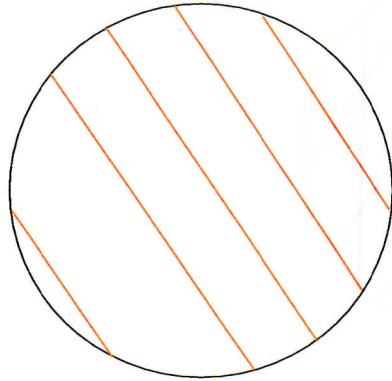


図 3.12: 別の時間で行なった黄道面への投射。 $\vec{v}$ の方向は図 3.11 と異なる

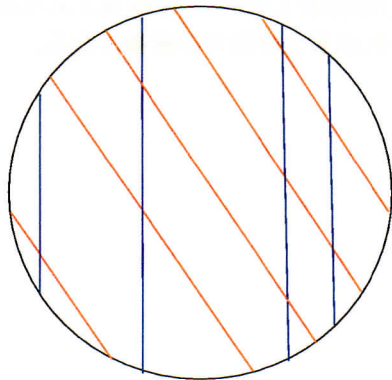


図 3.13: 図 3.11 と図 3.12 を合わせたもの

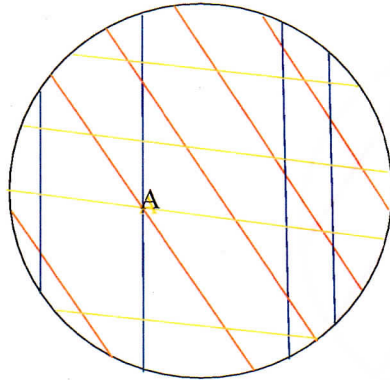


図 3.14: 図 3.13 に別の時間帯での投射図を加えたもの

この THM での直線群の Number Count が最大となる値を示すパラメータが探しているパラメータの候補となる (例えば図 3.14 の A 点)。

ただ扱っているデータは連続量ではなく、離散量である。したがって円を図 3.16 のように 600×600 に分割し、その 1 ピクセル (全部で 360000 ピクセル) 内での交点の数を求めた。ただ投影された黄道面は円なので解析に用いたのは $300 \times 300 \times \pi$ ピクセルである。(付録 C.3)

もしもある位置での交点の数 (Number Count) が付録 B.2 より計算される閾値 n_{th} を越えたとすると、それが重力波信号の候補となる。

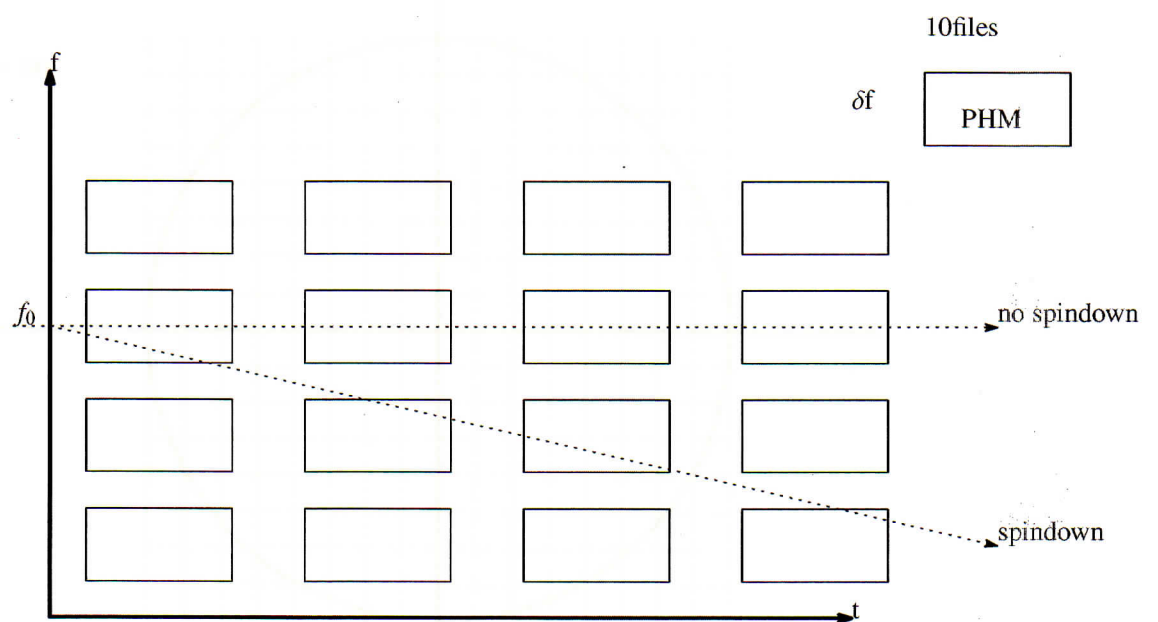


図 3.15: THM と $t-f$ 空間の関係

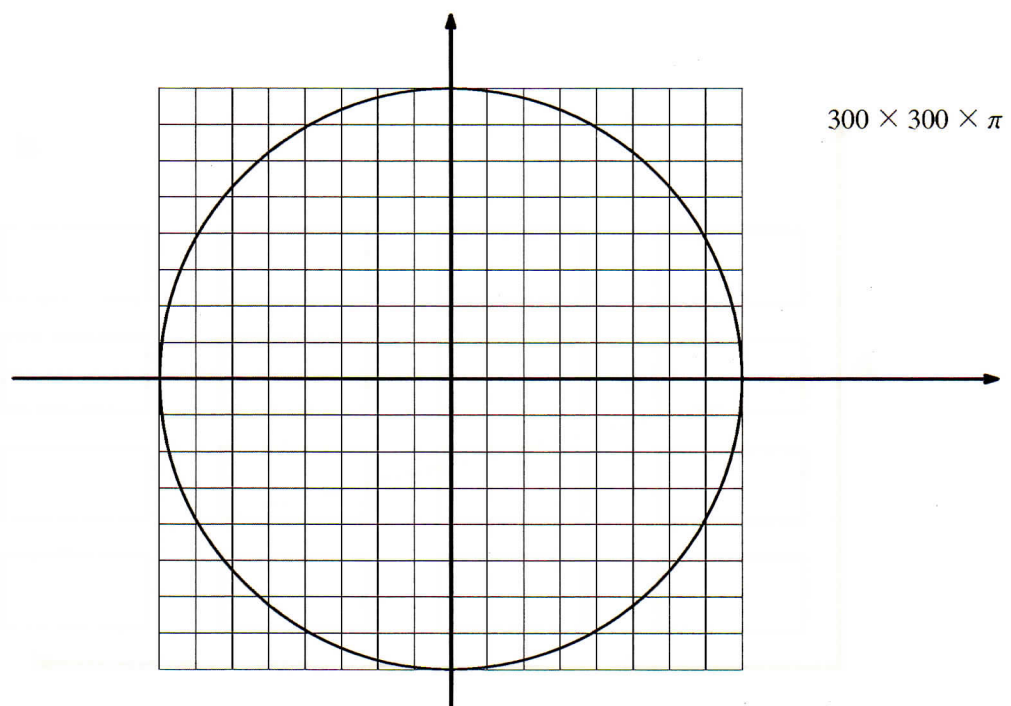


図 3.16: 黄道面の離散化

第4章 解析手法の妥当性

4.1 妥当性

本研究で行なった手法の妥当性を確かめるために、以下の二つの作業を行なった。

1. ガウス雑音のみの場合、本当に Number Count が二項分布に従う（付録 B.1 参照）かを確かめた $\Rightarrow$ 5 章の解析手法の妥当性の評価のため
2. ガウス雑音に位置を特定したある大きさの信号を加えた場合にどうなるかを調べた $\Rightarrow$ 6 章の解析手法である信号注入試験 (injection test) の妥当性の評価のため

1 によって Hough 変換を行なって Number Count (NC) を求める場合の手法の妥当性が確かめられる。もし手法が正しいのならば、理論的に予測される二項分布に従うはずである。2 によって信号注入試験の妥当性が評価される。もし正しく信号が注入されていたのならば、その信号に対応した場所に NC のピークが立つことが予測される。

4.1.1 ガウス雑音

ここでノイズ過程 $n(t)$ のあらゆる点は時間領域で正規分布をもつ独立なランダム変数であるとしよう

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-(n - n_0)^2/2\sigma^2) \quad (4.1)$$

ここで n_0 、 σ^2 はそれぞれ分布の平均と分散を表す。もし信号がなければ n_0 はゼロである。またノイズが時間的に定常ならば分散 σ^2 は定数である。ノイズ $n(t)$ の離散フーリエ変換 (DFT) によってノイズのパワースペクトル $\tilde{n}(\omega)$ は次のように与えられる。

$$\tilde{n}(\omega) = \sum_t n(t) \exp(-i\omega t) \quad (4.2)$$

ガウス型ランダム変数の線形結合は、またガウス型ランダム変数なので、すべての周波数点において実部と虚部はまたランダム変数となっている。

サンプリングが時間領域で相関を持たない限り、スペクトルは周波数間で相関をもたない、すなわち白色である。

4.2 妥当性の評価

5章、6章で行なう手法の妥当性を評価するため、以下の2つのシミュレーションを行った。

4.2.1 二項分布

まず、ガウス雑音を発生させて、第3章3節で述べた解析手順に従って解析を実行していった。今回は $N = 100$ でシミュレーションを行なった。つまり NC(=Number Count) は最大で 100 である。このとき、付録 B.1 より理論的には平均

$$N\alpha = 100 \times 0.2 = 20 \quad (4.3)$$

分散

$$N\alpha(1 - \alpha) = 100 \times 0.2 \times 0.8 = 16 \quad (4.4)$$

の二項分布に従うと考えられる。以下の図 4.1 に理論確率分布とシミュレーション結果を示す。この図 4.1 をみると、二項分布に従っているといえる。これによって第3章3節の解析手順に従って実行される第5章のアルゴリズムの妥当性が証明された。また図 4.2 は黄道面上で Number Count の分布である。

4.2.2 ソフトウェア的信号注入試験

今度は、ガウス雑音を発生させ、そこに以下の擬似的な信号を注入させた。この人工的な信号は黄経が 45° 、黄緯が 60° の位置にパルサーがあると仮定しているので x 座標、 y 座標はそれぞれ (129, 75) にピークが現れるはずである。ただし、プログラムの都合上 x 方向、 y 方向に 301 ずつ並行移動させている [ex. 原点 $\rightarrow$ (301, 301)] ので (430, 376) のところにピークが現れるはずである。図 4.3 より確かにピークが立っている。今回は $N = 400$ で行なったが、このとき、雑音のみの理想的な分布をとると仮定すると、付録 B より平均 80、分散 64 の二項分布に従う。ピークの値は 350 を超えており、統計的に起こりうる値から逸脱している。つまり人工的に注入した信号に対応した値と考えられ、信号注入試験の妥当性が証明された。

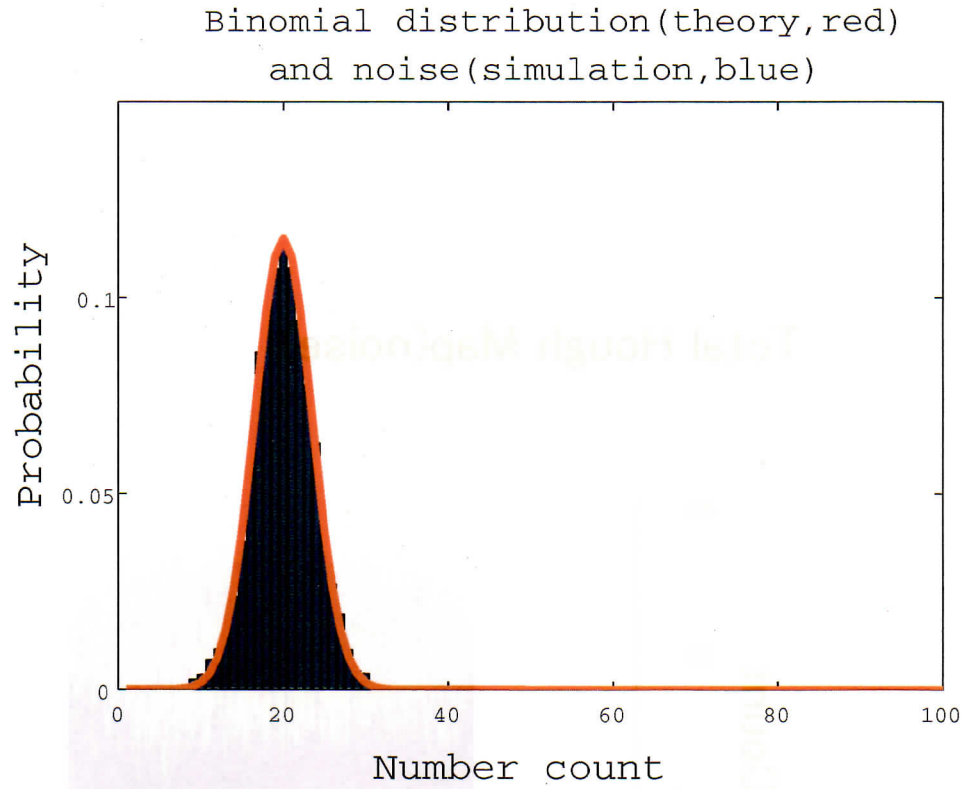


図 4.1: 理論値 (曲線) とシミュレーションの値 (棒)

表 4.1: 注入した信号のパラメータ

パラメータ	値
f (周波数)	1025
$\dot{f}$ (スピンダウン)	0
λ (黄経)	1.5h
β (黄緯)	60
Ψ (偏向角)	0
$\cos \iota$	0
Φ_0 (位相)	0
h_0 (大きさ)	10^{-15}

Total Hough Map(noise)

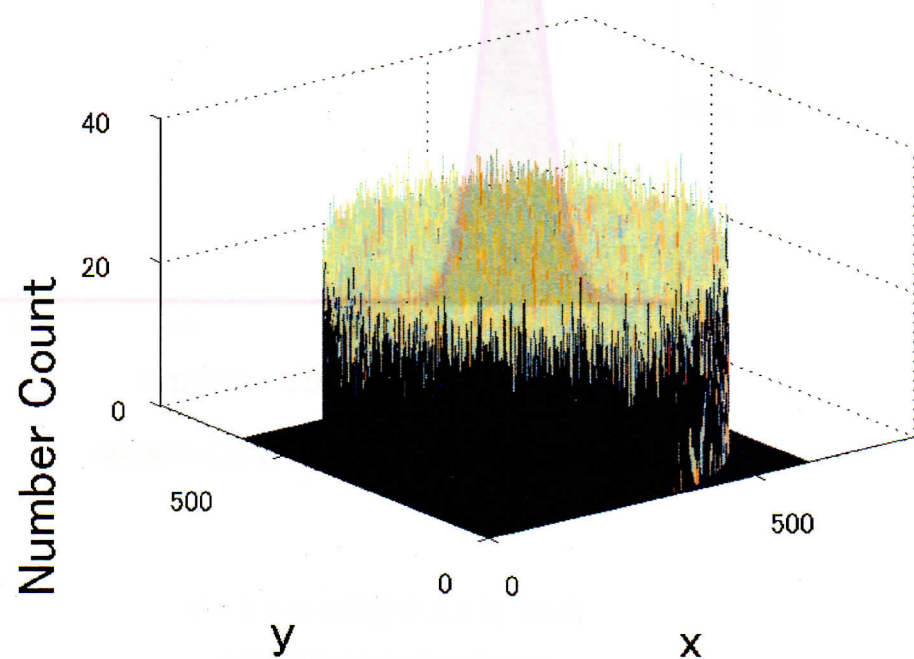


図 4.2: 雑音のみのときの黄道面上での Number Count 分布

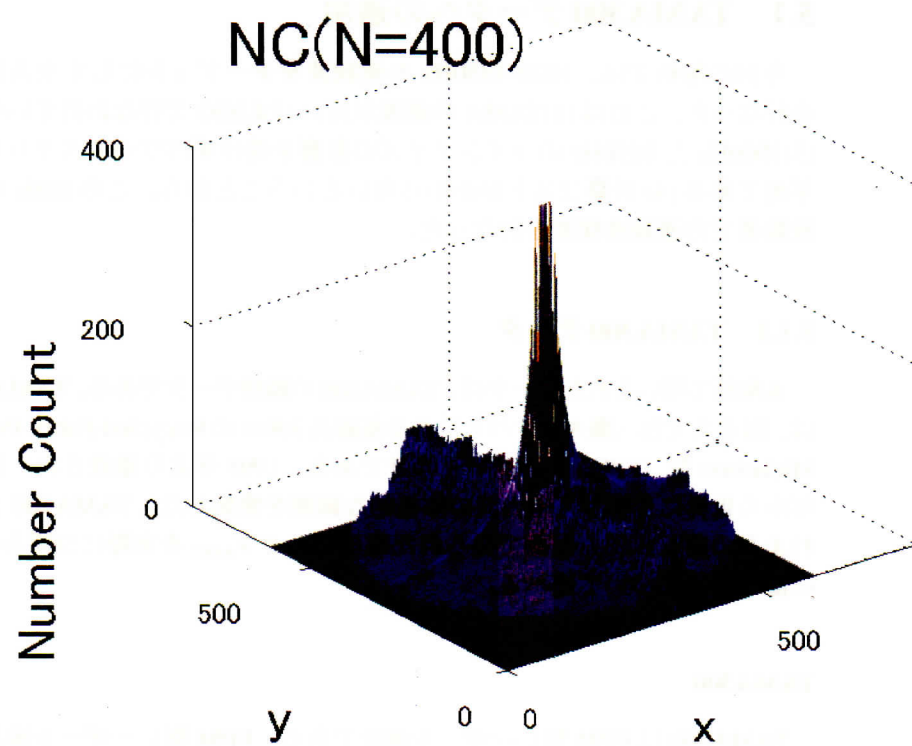


図 4.3: ガウス雑音に信号を注入したときの Number Count

第5章 Hough変換の解析への適用と結果

5.1 TAMA300 データへの適用

今回の解析では、1020-1030Hz の連続波をターゲットにして全天探索を行なった。これは (1)TAMA の感度が良い (2)LIGO で行なわれていない (3)1000Hz と 1050Hz のラインノイズの影響を受けずパワースペクトルが平坦である (4) 計算コストがかからないということから、この 10Hz の周波数帯での連続波探索を行なった。

5.1.1 TAMA300 データ

本解析で用いられたデータは、TAMA300 の観測データである。TAMA300 は、国立天文台三鷹キャンパスにある基線長 300m の Recycled-Fabry-Perot-Michelson 型 (FPM) レーザー干渉計である。1995 年より建設され、1999 年から世界に先駆けて重力波の本格的な観測を開始した。TAMA300 とこれまでの運転状況、観測で得られた電圧データ V_{ADC} を実際にひずみ $h(t)$ に直す方法について述べる。

TAMA300

TAMA300 は FPM 型レーザー干渉計である。FPM 型レーザー干渉計では、レーザーからの光をビームスプリッター (BS) で直行する 2 方向に分割し、その両極をなす 2 本の Fabry-Perot 共振器に入射する。共振器から戻る光の位相は、FP 鏡間の固有距離に依存する。固有距離は重力波の影響を受けて変動するので、共振器から戻る光を再び BS 上で結合し、その干渉縞から重力波信号を取り出すことができる。これがレーザー干渉計型検出器の重力波検出の原理である。

TAMA300 の目的は、将来の km クラス大型レーザー干渉計に必要な技術を確認することである。次に、これを実証型検出器として運転し、実際に重力波検出を狙う。この研究は、国立天文台、東京大学、高エネルギー加速器研究機構、電気通信大学、大阪市立大学、京都大学、大阪大学など

多くの研究機関からの研究者が参加している。TAMA300 は、欧米の km クラスの検出器に比べると、スケールは 1 桁小さい。その代わり、短期間での建設が可能であり、ほかに先駆けて観測が開始された。

干渉計の出力は 20kHz でサンプリングされており、それが磁気テープにファイルとして記録される。記録されるのは干渉計の出力だけでなく、干渉計の状態や、時間に関する情報なども記録される。つまり観測データは多チャンネルの時系列データである。観測データのファイルは Frame Format という形式で記録されている。これは、データを Frame という単位で管理するフォーマットで、重力波干渉計の観測データを記録するフォーマットの国際規格として考えられたものである。今回の観測データでは、データ点 2^{16} 個 (約 3.2 秒) が 1 つの Frame に記録され、Frame 20 個 (約 1 分) が 1 つのファイルに記録されている。

レーザー干渉計型重力波検出器

等価原理により一点における重力波の有無は重力場と加速度との違いを見分けられないので意味がない。重力波の有無もそういう意味で離れた 2 質点の 4 元速度ベクトルの変化の差を見てやらないと分からない。重力波が通るところに 2 つの自由質点があり、それらの空間座標を $(0, 0, 0)$ 、 $(\epsilon, 0, 0)$ の位置にあるとする (z 軸方向に波は進行)。その座標系に対してははじめ自由質点は静止していたとする。自由質点の測地線の方程式は

$$\frac{d}{d\tau} U^\alpha + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha U^\mu U^\nu = 0 \quad (5.1)$$

であるが、TTgauge で

$$\frac{d}{d\tau} U^\alpha = -\Gamma_{00}^\alpha = -\frac{1}{2} (h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}) = 0 \quad (5.2)$$

である。したがってこの座標系に対して静止している自由質点はその座標値が変化しない。物理的な量としてはその座標値でなく 2 点間の固有距離である。固有距離を計算すると

$$\begin{aligned} \Delta l &\sim (1 + h_+)^{\frac{1}{2}} \epsilon \\ &\sim \left(1 + \frac{1}{2} h_+\right) \epsilon \end{aligned} \quad (5.3)$$

となり、これは時間とともに変化していることがわかる次にレーザー干渉計に与える効果を考えてみる。簡単のため、計量が

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h(t)) dx^2 + (1 - h(t)) dy^2 + dz^2 \quad (5.4)$$

であるとし、干渉計の腕が x 軸と y 軸に平行に伸びているとする。まず簡単のため、Michelson 干渉計の場合について考える。 x 軸方向を進む光についてはヌル測地線を進むので

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + (1 + h(t)) dx^2 = 0 \quad (5.5)$$

であり、 $h \ll 1$ なので、その 1 次まで展開すると

$$\left(1 - \frac{1}{2}h(t)\right) c dt = dx \quad (5.6)$$

となる。今、鏡が原点を座標値 l のところにあるとし、座標時間 Δt_x かけて光がその間を往復するとする。このとき、上の式を積分すれば

$$\Delta t_x = \frac{2l}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\Delta t_x}^t h(t') dt' \quad (5.7)$$

が導かれる。 Δt_x を h の 1 次まで求めれば、

$$\Delta t_x = \frac{2l}{c} + \frac{1}{2} \int_{t-\frac{2l}{c}}^t h(t') dt' \quad (5.8)$$

となる（逐次近似）。ところで、先の考察から重力波がきても、静止している質点はこの座標系では静止し続けるもので、この Δt_x は鏡にとっての固有時間に相当する。第一項は重力波がこなくても存在する項であり、重力波の効果は第二項である。

したがって固有時間間隔の差は

$$\delta \Delta t_x = \int_{t-\frac{2l}{c}}^t h(t') dt' \quad (5.9)$$

である。同様に y 方向については

$$\delta \Delta t_x = -\delta \Delta t_y \quad (5.10)$$

となる。この x 軸方向と y 軸方向で固有時間の差が位相差を引き起こし、この位相差によって重力波を検出する。

TAMA300 の運転状況

TAMA300 では、これまでに 9 回の運転を行なっている。一回の運転期間は Data Taking (DT) と呼ばれ、最新の運転観測は DT9 である。本解析では DT9 のデータを用いている。DT9 は Run138-142 からなる。観測時間と目的などを示す。

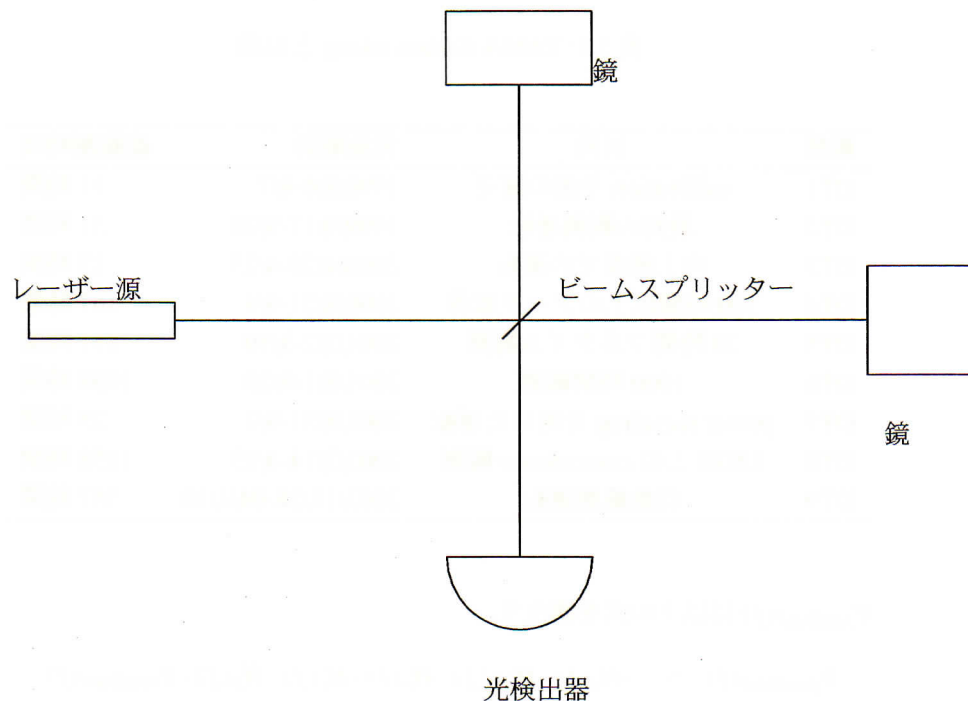


図 5.1: マイケルソン干渉計

キャリブレーション

レーザー干渉計型重力波検出器では、干渉計を動作点に保つためにいくつかのフィードバック制御がなされている。特に重要なのは、干渉計の2つの腕の差動制御であり、重力波信号はこの制御信号から取り出される。この2つの腕の差動変位信号は L 信号と呼ばれている。鏡は振り子に吊るされており、コイルマグネット・アクチュエータを用いて非接触に変位させることができる。TAMA300では、この鏡へのフィードバック信号をホワイトニングフィルタとアンチエイリアスフィルタを通した後、AD変換し、電圧データ V_{ADC} を実データとして保存している。このため、AD変換し、電圧データ V_{ADC} から重力波 h ひずみ変換するには、フィードバック制御、ホワイトニングフィルタ、そしてアンチエイリアスフィルタの周波数応答を考慮しなければならない。また、入射光量やFabry-perot共振器のフィネスの変化によるフィードバック制御信号の周波数応答の変化を検出するために、TAMA300では、'Single Peak Calibration Method'という方法がとられている。 L の制御とデータ取得のブロック図をに示す。

今、キャリブレーションの信号 V_{in} がない場合、フィードバック信号

表 5.1: TAMA の data taking と目的

観測	目的	実施期間	総観測時間
DT1	calibration 手法の確立	1999/8/6-8/7	11 時間
DT2	最初の観測運転	1999/9/17-9/20	31 時間
DT3	向上感度での運転	2000/4/20-4/23	13 時間
DT4	100 時間以上のデータ取得	2000/8/21-9/4	167 時間
DT5	24 時間フルタイム観測	2001/3/2-3/10	111 時間
DT6	1000 時間観測	2001/8/1-9/20	1038 時間
DT7	power recycling を用いた運転	2001/8/31-9/2	25 時間
DT8	LIGO との coincidence 観測	2003/2/14-4/15	1158 時間
DT9	自動観測運転	2003/11/28-04/1/10	557 時間

$V_{feedback}(f)$ は以下の式を満たす。

$$V_{feedback}(f) = -H_e(f) \cdot H_{PD}(f) \cdot H_o(f) \cdot H_c(f) \cdot H_p(f) \cdot V_{feedback}(f) + H_e(f) \cdot H_{PD}(f) \cdot H_o(f) \cdot H_c(f) \cdot L_- \quad (5.11)$$

ここで、 $H_e(f)$ 、 $H_{PD}(f)$ 、 $H_o(f)$ 、 $H_c(f)$ 、 $H_p(f)$ はそれぞれ、制御の電気回路の伝達関数、光検出器の光電気変換効率、入射光量、FP 共振器の伝達関数、コイルドライバーの入力から振り子に吊るされた鏡の変位への伝達関数である。この式を解いて

$$L_-(f) = \frac{1 + G(f)}{G(f)} H_p(f) \cdot V_{feedback}(f) \quad (5.12)$$

ただし

$$G(f) = H_e(f) \cdot H_{PD}(f) \cdot H_o(f) \cdot H_c(f) \cdot H_p(f) \quad (5.13)$$

を得る。さらにフィードバック信号は、ホワイトニングフィルタとアンチエイリアスフィルタを通して取得されるので、フィードバック信号と取得された信号の関係は

$$V_{ADC} = H_A(f) \cdot H_w(f) \cdot V_{feedback}(f) \quad (5.14)$$

とあらわされる。 V_{ADC} 、 $H_A(f)$ 、 $H_w(f)$ はそれぞれ、ADC で取得された信号、ホワイトニングフィルタの伝達関数、アンチエイリアスフィルタの伝達関数である。

$$L_-(f) = \frac{1 + G(f)}{G(f)} \frac{H_p(f)}{H_A(f) \cdot H_w(f)} \cdot V_{ADC} \quad (5.15)$$

となる。 $L(f)$ は鏡の変位であり、TAMA300 の Fabry-perot 共振器の基線長は 300m なので、ひずみ量に換算すると、

$$h(f) = \frac{1}{300} H_A(f) \cdot H_w(f) \cdot V_{feedback}(f) \quad (5.16)$$

となる。したがって、 V_{ADC} から $h(f)$ を得るには、伝達関数 $G(f)$ 、 $H_p(f)$ 、 $H_w(f)$ 、 $H_A(f)$ が必要である。 $H_w(f)$ 、 $H_A(f)$ は、観測期間中における変化は無視できる程度に小さい。また $G(f)$ のうち、 $H_e(f)$ 、 $H_{PD}(f)$ 、 $H_p(f)$ も変化を無視できる。これら、観測期間中の変化が無視できる部分の伝達関数は、あらかじめ測定しておき、その伝達関数を用いる。 $H_o(f)$ 、 $H_c(f)$ は変化するために、'Single Peak Calibration Method' によってその変化を検出し補正していく。'Single Peak Calibration Method' では、フィードバック信号に V_{in} として 625Hz の正弦波を加え、その前後の信号の比 (G) をとることで、625Hz における振幅と位相を取得し、 $H_o(f)$ 、 $H_c(f)$ を決定する。 $H_o(f)$ は周波数 f によらず一定であり、 $H_c(f)$ は Fabry-perot 共振器のキャビティーポールをカットオフ周波数とする 1 次のローパスフィルタである。よって 625Hz の位相から共振器のカットオフ周波数を決定でき、 $H_c(f)$ をえられ、625Hz の振幅から $H_o(f)$ を得ることができる。キャリブレーション信号は、625Hz の正弦波であるため、625Hz 以外の周波数では、干渉計に影響を及ぼさない。このため $h(f)$ を求める式は 625Hz を除いて成り立つ。以上の方法で電圧 V_{ADC} からひずみ $h(f)$ を得た。

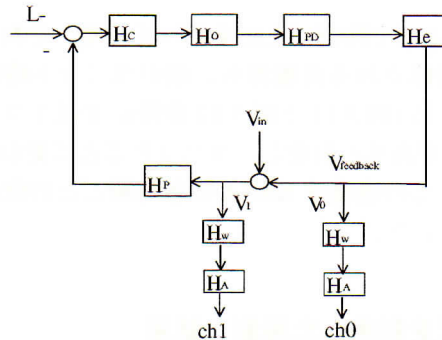


図 5.2: キャリブレーション

5.2 TAMA300でのHough変換

3章で述べた順で、TAMA300データにHough変換を適用した。

5.2.1 $t-f$ 空間でのパワースペクトル

まずTAMA300データを2500Hzでリサンプリングした。次にTAMA300データを用いてHough変換を実行するには、 $t-f$ 空間でのパワースペクトルを求める必要がある。付録C.1にあるように1ユニットの時間は、地球の運動より制限される。また短いとSN比の悪化を招く。これらのことを考慮して本研究では1ユニットをTAMAデータ10files(約11分)とした。このそれぞれのユニットに対してフーリエ変換を行ないパワースペクトルを求めた。このとき1つの周波数binでの規格パワースペクトルを求めるときに式(3.11)を使うが、分母の雑音の大きさはその周波数binまわり100周波数binの中央値で代用して、規格化パワースペクトルを求めた。

5.2.2 マスター方程式の適用

マスター方程式は式(3.14)のようになっている。実際のTAMA300のデータを使ってこの式を適用した。3.3.3で述べたように、本研究では黄道座標系を用いているので、SSB系から見た干渉計の速度 $\vec{v}$ は黄道面上にある。したがって、未知パルサーの候補は黄道面に垂直な円群を描く。(図3.7-図3.10参照)

$\vec{v}$ は地球の公転などによって時刻ごとに変わってくる。それによって円群が変わり、黄道面に投影される直線群も、前のユニット時間から作られる直線群と変わってくる(図3.11と図3.12参照)。 $\vec{v}$ は1ユニットの間(10files=約11分)は一定であると仮定し、ユニットごとに変わってくるものとした。各ユニットごとの速度はNASAの各時間ごとの位置データから微分して求めることとした。

5.2.3 マスター方程式を利用した投影と結果

前節で求めた円群を投影して、PHMを求めた。これによって黄道面上への投射図ができた。以下に示す図5.3が1025Hzでの1ユニット分のPHMである

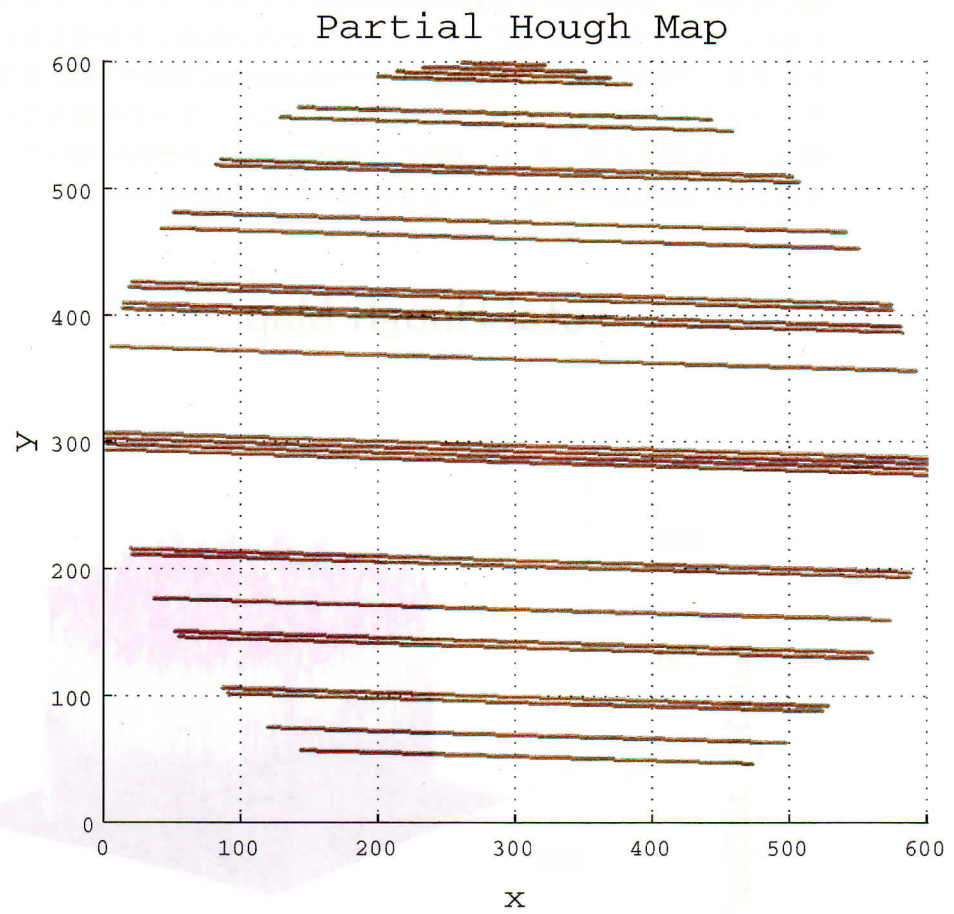


図 5.3: マスター方程式を使って黄道面上に適用した結果。f=1025Hz で使ったのは1ユニット分

5.2.4 パラメータ推定と結果

前小節でできた PHM はある周波数 bin の 1 ユニット時間での黄道面への投射図である。この PHM を全時間で足し合わせる必要がある。その足しあわせ方はスピンドウンがない場合は傾き 0 の直線 (時間軸に平行な直線)、スピンドウンが 1 次の場合には傾き f を持った直線、2 次では放物線となるが、今回の解析では観測時間の関係上 1 次のスピンドウンを考慮しない。また 2 次以上のスピンドウンは十分小さいためこれも考えないこととする。今回の解析では R140 (DT9) の file number [1001-11000] までの 1 万ファイル、つまり 1000 ユニットで行なったが、ロックが落ちている 60 ユニットは使えないため、実際には 940 ユニットの解析に用いた。以下図 5.4 に 1025Hz の 940 ユニットから作られた THM を示す。

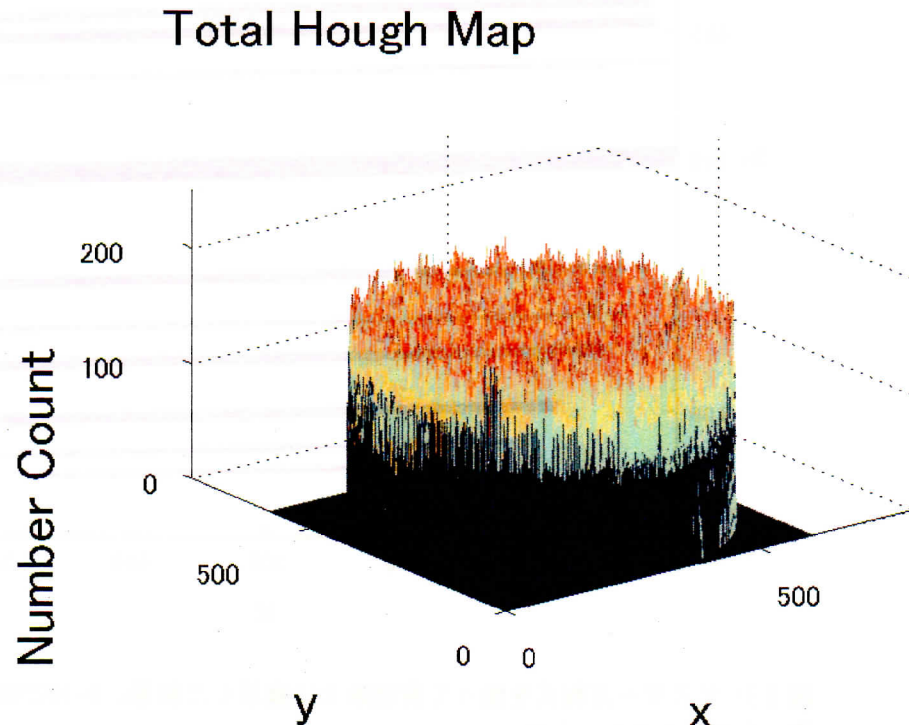


図 5.4: 1025Hz での黄道面上での Number count の分布

1025Hz での最大の NC は 209 である。

このようにしてそれぞれの周波数 bin での最大値を求めた。その際ある 1 Hz の範囲 (たとえば 1025-1026Hz) にあるおよそ 600 周波数 bin の NC を比

較して、その中から最も大きな NC をその 1 Hz の maxNC (1025-1026Hz では 229) として代表させた。この作業は 6 章の信号注入試験のために行なった。結果は以下の表 5.2 のようになった。

表 5.2: それぞれの周波数帯での最大の Number Count

周波数 [Hz]	maxNC
1020-1021	212
1021-1022	246
1022-1023	224
1023-1024	254
1024-1025	244
1025-1026	229
1026-1027	262
1027-1028	240
1028-1029	256
1029-1030	248

付録 B にあるように、雑音のみの場合には、 $N = 940$ 、 $\alpha \sim 0.2$ として平均 $N\alpha \sim 188$ 、標準偏差 $\sqrt{N\alpha(1-\alpha)} \sim 17.3$ の二項分布に従うと考えられる。このとき、false alarm rate を 1 % として、式 (B.24) に値を代入していくと $n_{th} = 271$ である。これの意味するところは、もし雑音のみの場合に、この値を超える確率は 1 % である。雑音のみの場合でも 1020-1030Hz にあるおよそ 6000 周波数 bin のうち 60 個は超えるはずだが、近くの 200-300 周波数 bin がとる最大の Number Count は相関しているので、独立なのはおよそ 20-30 周波数 bin である。その独立な周波数 bin の最大の Number Count を求めたのが次の図 5.5 である。以上の考察より閾値を越えないのは妥当である。今までの議論で 1020-1030Hz の範囲に有意な重力波信号はないことがわかった。

本来ならその後、「これまでの解析」のところで述べた (B) の手法でさらに詳しい解析をしていくべきである。しかし、本研究では次章で行う信号注入試験によって、各周波数帯での重力波の上限値を決めた。

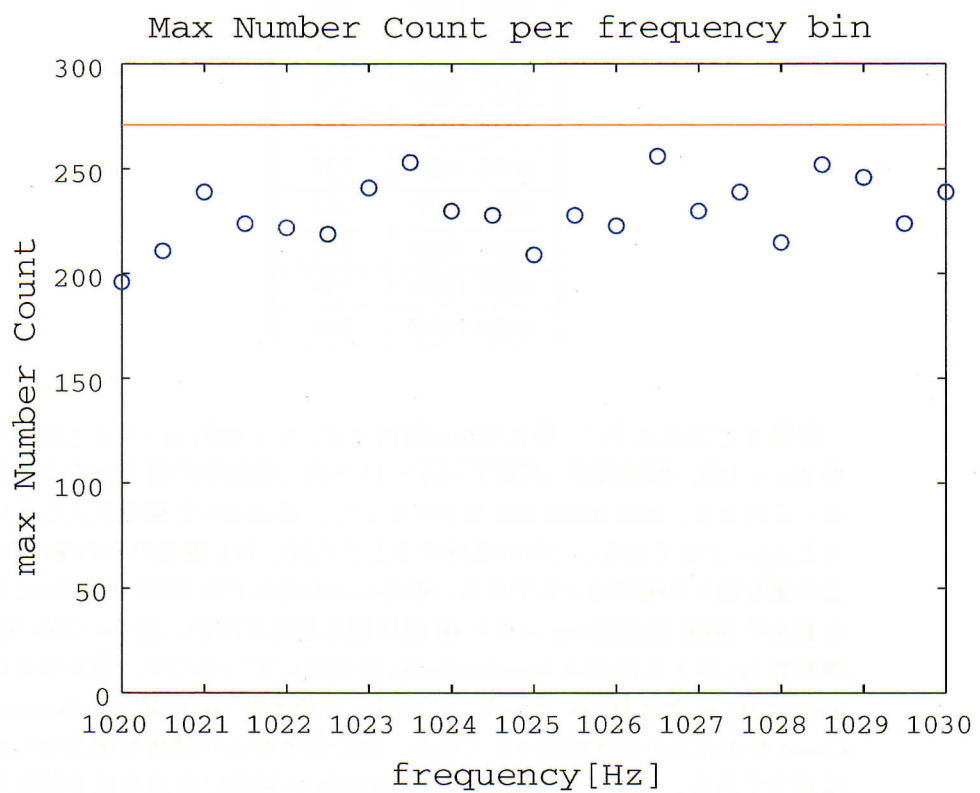


図 5.5: 独立な周波数 bin の最大の Number Count。赤線が閾値。

第6章 信号注入試験

6.1 上限値の定義

6.1.1 上限値

信号の検出は実際には起こらないような大きな値によって示される。代わりに、その値が純粋な雑音によるものならば、信号の強さに上限値をおくことができる。合計 strain h の大きさに confidence level (C) で上限値 $h(C)$ を置いたということについて説明する。たとえば confidence level ($C = 90$) 90 % での上限値 $h(C)$ が意味するところは、合計 strain が h 以上の重力波は存在したとしても 10 % の確率ということである。この上限値を求めるには大きさ h の合計 strain を持つ本物の重力波の干渉計出力信号がデータの中にあつたらどういふ応答、すなわちどういふ確率分布をするかを求める必要がある。

6.1.2 Hough 変換での上限値の定義

今回 Hough 変換という手法を用いて解析を行ない、それにより Number Count を求めた。ある周波数 f での上限値は全空間 (天球) での最大の Number Count n^* を用いて決めることとする。confidence level (C) での重力波の振幅の上限値 h_0^C は、もしも h_0^C 以上の大きさの信号が実際のデータ中にあつたときに、最大の Number Count が n^* 以上の値を持つ確率が C となる大きさで定義される。式で書くと

$$\text{Prob}(n \geq n^* | h_0^C) = \sum_{n=n^*}^N p(n | h_0^C) = C \quad (6.1)$$

ここで、 $p(n | h_0)$ は、 h_0 の信号が存在したときの Number Count の分布である。本研究では C として 95 を用いた。

もし、 n^* に対して、分布 $p(n | h_0)$ がわかっていれば、上の式を解くだけである。もしも重力波信号がなく雑音のみの場合にはこの分布は二項分布になるが、信号があつたとすると雑音の非定常性やパルサーの位置等によって、二項分布からずれてくる。したがって次節で述べるように、実際

のデータに偽の信号をいれるという信号注入試験をすることでこのずれた分布を求め、さらに上限値を決定しなければならない。

6.2 信号注入試験と結果

6.2.1 信号注入

TAMA300 データに strain h_0 の値だけを変えて信号を注入していった。その際に以下のようにパラメータをランダムにふって信号注入試験を行った。

表 6.1: 注入した信号のパラメータ。値の項の [...] は一様な分布を表す

パラメータ	値
$\dot{f}$ (スピンドウン)	0
α (赤経)	[0h,24h]
β (赤緯)	[0, π]
Ψ (偏向角)	[0,2 π]
$\cos \iota$	[-1,1]
Φ_0 (位相)	[0,2 π]

$$h(t) = F_+(t)h_+(t) + F_\times(t)h_\times(t) \quad (6.2)$$

が干渉計の出力である。ここで、2 章より

$$h_+ = h_0 \frac{1 + \cos^2 \iota}{2} \cos \Phi t \quad (6.3)$$

$$h_\times = h_0 \cos \iota \sin \Phi t \quad (6.4)$$

また F はアンテナパターン関数であり

$$F_+(t) = -\frac{1}{4}S_+ \cos 2\Psi + \frac{1}{4}S_\times \sin 2\Psi \quad (6.5)$$

$$F_\times(t) = \frac{1}{4}S_\times \cos 2\Psi + \frac{1}{4}S_+ \sin 2\Psi \quad (6.6)$$

とかける。付録 A より

$$\begin{aligned} S_+ = & [3 \sin^2 \theta \cos 2\psi \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha \sin 2\theta \cos 2\psi \cos \eta - 2 \sin 2\alpha \sin \theta \sin 2\psi \sin \eta \\ & + (1 + \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\psi \cos 2\theta \\ & - 2(1 + \cos^2 \alpha) \cos \theta \sin 2\psi \sin 2\eta] \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$S_- = [4 \sin \alpha \sin \theta \sin 2\psi \cos \eta + 2 \sin \alpha \sin 2\theta \cos 2\psi \sin \eta + 4 \cos \alpha \cos \theta \sin 2\psi \cos 2\eta + 2(1 + \cos^2 \alpha) \cos \alpha \cos 2\psi \sin 2\eta] \quad (6.8)$$

である。

信号を注入する際には赤道座標系だが、Hough 変換を実行する際には黄道座標系で考えているため、座標変換が必要となる。黄道座標系 (λ, β) から赤道座標系 (α, δ) に変換するには

$$\cos \delta \cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda \quad (6.9)$$

$$\cos \delta \sin \alpha = -\sin \beta \sin \epsilon + \cos \beta \sin \lambda \cos \epsilon \quad (6.10)$$

$$\sin \delta = \sin \beta \cos \epsilon + \cos \beta \sin \lambda \sin \epsilon \quad (6.11)$$

によって変換できる。ここで ϵ は黄道傾斜角 ($\sim 23.4^\circ$)。

6.2.2 注入の実行

以下の信号注入試験は file number 2001-4500 の約 50 時間分のデータに信号をソフトウェア的に注入して行った。ここでは 1025 – 1026Hz を例にとって説明する。この 2500files では 1025 – 1026Hz の最大の NC は 57 である。これを超える NC が 95 パーセントとなるような h_0 の大きさを求める。

表 6.2: それぞれの周波数帯での最大の Number Count

周波数 [Hz]	maxNC
1020-1021	53
1021-1022	62
1022-1023	56
1023-1024	65
1024-1025	61
1025-1026	57
1026-1027	67
1027-1028	60
1028-1029	66
1029-1030	63

$h_0 = 8 \times 10^{-22}$ を代入したときの結果が以下の図 6.1 である。

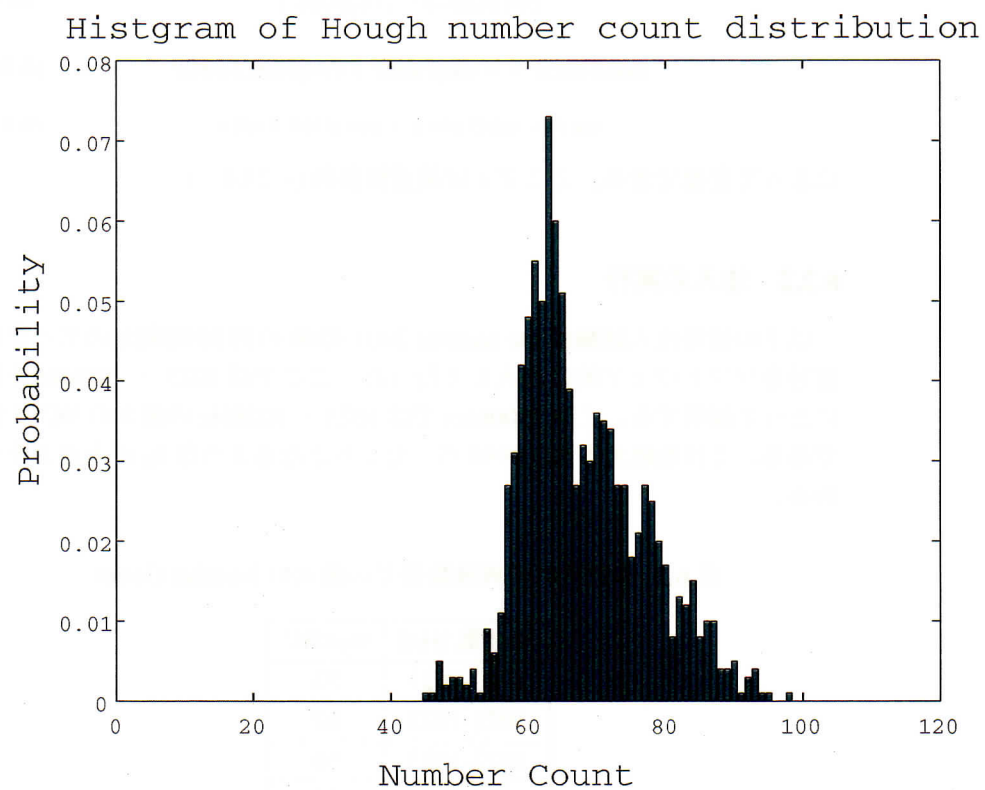


図 6.1: $h_0 = 8 \times 10^{-22}$ の大きさの信号を注入したときの確率分布。 n^* は 57

このとき横軸の NC を比較すると、57 より大きいのはおよそ 87 パーセント存在する、つまり信号注入試験の結果から、 $h_0 = 8 \times 10^{-22}$ のとき

$$Prob(n \geq n^* | h_0^C) = \sum_{n=n^*}^N p(n | h_0^C) \sim 87 \quad (6.12)$$

となる。

この最後の値 87 が C が 95 となる上限値を求めることが目的である。この目的を達成するため、95 パーセントをはさむ 2 つのパーセントの対応する h_0 の大きさから線形的に 95 パーセントのときの h_0 の大きさを求めた。たとえば、1025-1026Hz では、 $h_0 = 8.5 \times 10^{-22}$ で 91.6 パーセント、 $h_0 = 9.0 \times 10^{-22}$ で 97.6 パーセントなので、この間で線形近似し、さらに統計誤差も考慮して考えて 95 パーセントでの strain h_0 の大きさを有効数字 2 桁で 8.9×10^{-22} とした。同様にして各 1Hz 周波数帯での上限値を求めた。それが以下の表 6.3 である。

表 6.3: 各周波数帯での上限値

周波数 [Hz]	$h[\times 10^{-22}]$
1020-1021	8.6
1021-1022	9.1
1022-1023	8.8
1023-1024	9.3
1024-1025	9.1
1025-1026	8.9
1026-1027	9.4
1027-1028	9.0
1028-1029	9.3
1029-1030	9.2

第7章 結論と今後の課題

7.1 結論

本論文では、1020-1030Hz の連続波信号を探して全天探索を行なった。用いた手法は Hough 変換と呼ばれる手法である。この手法の長所は計算コストが少ないということと、雑音に対して強い (robust である) ことである。全天探索を行う際に、TAMA300 の DT9 (R140) の約 200 時間分のデータを用いた。

妥当性の評価のために、ガウス雑音を発生させこれが理論的に予測される二項分布に従うかについて調べた結果、二項分布に従っていることを確認した。またガウス雑音の中に人工的な信号を注入し、それが検出されることも確認した。

TAMA300 データに対する解析を行ない、1020-1030Hz 帯に有意な重力波信号がないことがわかった。そこで、信号注入試験を行ない振幅の上限値を求めた。以下にそれぞれの周波数帯での上限値を示す。この 10Hz の

表 7.1: 各周波数帯での上限値

周波数 [Hz]	$h[\times 10^{-22}]$
1020-1021	8.6
1021-1022	9.1
1022-1023	8.8
1023-1024	9.3
1024-1025	9.1
1025-1026	8.9
1026-1027	9.4
1027-1028	9.0
1028-1029	9.3
1029-1030	9.2

周波数帯でのもっともよい重力波の上限値は 8.6×10^{-22} であった。

本論文で求められたもっともよい上限値 8.6×10^{-22} を同じ TAMA300

の DT9 データによる SN1987A 残骸からの連続波解析より得られた上限値 4.0×10^{-23} [4] と比較すると約 21 倍悪い。振幅の上限値はパワースペクトルを求める際に用いたデータ時間 T のとき、 $\frac{1}{\sqrt{T}}$ に比例して変わると考えられる。SN1987A 残骸からの連続波解析 [4] では T は約 100 時間、本研究では約 0.2 時間で、この比の二乗根を求めると約 20 である。よって、振幅の上限値が悪くなったのは、このパワースペクトルを求める際に用いたデータ時間の差が主な要因ではないのかと考えられる。

また今回の解析と副田の行った解析 [3] から、Hough 変換が計算コストの点で、全天探査に有用な解析であることが実証された。今回の解析では約 200 時間分のデータを使い全天の約 28 万箇所を探索したが、かかった時間は約 20 時間である。もし同じ CPU を使い、マッチドフィルターの手法で約 28 万箇所全天探査の解析が行われたとしたら、計算上 50 万日かかる [3] と予想される。つまり Hough 変換は計算時間を $\frac{1}{10^4}$ に減らすことができ、計算コストがかからないことがわかった。

また今回の解析により、多段階式の探索のうち (A) 絞り込みの手法に関して TAMA データを用いて初めて行われ、さらに LIGO では解析されていない周波数帯での上限値が求められたことは有意義なことであったと思われる。

7.2 今後の課題

今後の課題としては、

1、FFT の方法

今回の解析では FFT は 10files を 1 ユニットとして、そのまま 1 ユニット全てを用いて FFT を行なった。しかしこの場合、10files 分全ての情報が反映されない。したがって 10files の前後 1file を加えた 12files で FFT を行い、10files 分全ての情報が反映されるようにする必要がある。

2、Hough 変換の仕方

今回は、マスター方程式を用いて天球上の候補点を探すときに、一度黄道面上に投射して解析を行なったが、その際に位置の情報が縮退してしまう。3次元球面上での Hough 変換の手法を用いれば、そのようなこともなくなり、より位置情報の正確性が増すはずである。

3、信号注入試験

今回の解析では、最初の Hough 変換のときには、DT9 の R140 の約 200 時間分のデータを用いて解析を行なったが、信号注入試験の際に使ったのは DT9 の R140 の前半 4 分の 1 だけである。上限値の信頼性を増すためには、R140 の 200 時間分のデータを用いる必要性がある。

4、更なる探索

今回の解析では、(A)の絞込みの方法のみで解析を行った。その後、絞り込んだパラメータに対して(B)の更なる解析を実行し、より詳細な探索を行なう必要がある。

関連図書

- [1] T.Suzuki,'*Search for continuous gravitaional wave from pulsars with resonant detector*', Gravitational Wave Experiments,edited by E.Coccia,G.Pizzella and F.Ronga(World Scientific),115 (1995)
- [2] T.M.Niebauer,A.Rudiger,R.Schilling,L.Schnupp,W.Winker and K.Dauzmann,'*Pulsar search using data compression with the Garching gravitational wave detector*',Phys.Rev.D 47,3106 (1991)
- [3] 副田憲志「TAMA300 データを用いた連続波解析」,東京大学修士論文 (2003)
- [4] 榊村宰 「TAMA300 データを用いた連続重力波解析」,東京大学修士論文 (2005)
- [5] B Allen and G Woan (for LIGO Scientific Collaboration),'*Upper limits on the strength of periodic gravitational waves from PSR J1939+2134*',Classical and Quantum Gravity 21 S671-S676 (2004)
- [6] B.Abbot et al. (The LIGO Scientific Collaboration),'*Limits on Gravitational-Wave Emission from Selected Pulsars Using LIGO data*',Phys.Rev.Lett.94,181103 (2005)
- [7] B.Abbot et al. (The LIGO Scientific Collaboration),'*Coherent searches for periodic gravitational waves from unknown isolated sources and Scorpius X-1*',gr-qc/0605028 (2006)
- [8] B.Abbot et al. (The LIGO Scientific Collaboration),'*First all-sky upper limits from LIGO on the strength of periodic gravitational waves using the Hough transform*',Phys.Rev.D 72,102204 (2005)
- [9] B.Abbot et al. (The LIGO Scientific Collaboration),'*Hough transform search for continuous gravitational waves*',Phys.Rev.D 70,082001 (2005)
- [10] <http://www.ephemeris.com/>

[11] 信号理論の基礎 実教出版株式会社 高橋進一 中川正雄 共著

[12] 重力波をとらえる 京都大学学術出版会 中村卓史、三尾典克、大橋正健 編著

書目要聞

付録A 感度の計算

A.1 数学的準備

z 軸まわりに角度 θ_z 回転させる行列は

$$R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} \cos \theta_z & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z & \cos \theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

である。また y 軸まわりに角度 θ_y 回転させる行列は

$$R_y(\theta_y) = \begin{bmatrix} \cos \theta_y & 0 & \sin \theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & \cos \theta_y \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

である。ベクトル $\vec{d}$ が行列によって $\vec{d} \rightarrow R\vec{d}$ と変換される際に、行列 A は $A \rightarrow RAR^{-1}$ と変換される。ある点の方向を表すとき、原点とその点とを結ぶ直線と z 軸のなす角 θ 、その直線と z 軸を含む平面と x 軸のなす角 ψ との組 (θ, ψ) によって表す。南極に干渉計があるとき $(\pi, 0)$

A.2 問題の設定

パルサーが (α, δ) の方向にあり、重力波干渉計が $(\theta, \lambda + \Omega_E t)$ の方向にあり (Ω_E は自転の角速度)、片方の腕と北極とのなす角が ψ のとき、感度を求める。

A.3 初期状態

南極に干渉計があり、2本の腕が x 軸、 y 軸を向いていて、重力波が z 軸方向に伝播しているとする。干渉計から見れば、真上から重力波

が来ていることになる。このとき、重力波の行列は

$$R_z(\theta_z) = \begin{bmatrix} h_+ & h_\times & 0 \\ h_\times & h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

と表される。以後、この行列を変換していった感度を求めるが重力波の行列は常に南極にある干渉計で測定したものであることに注意する。

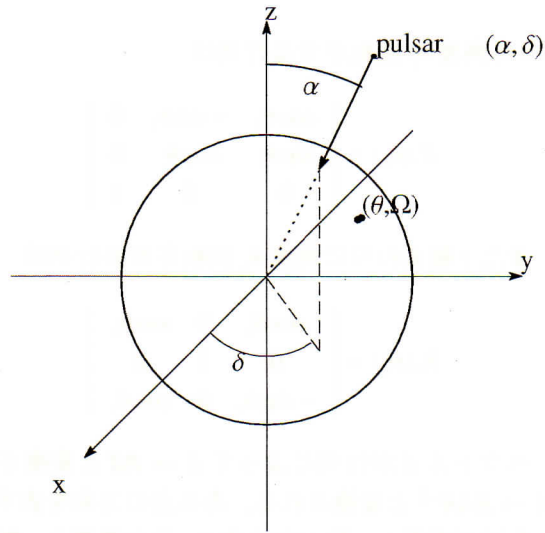


図 A.1: 問題の設定

A.4 重力波の方向

まず重力波の方向を合わせる。

(1) y 軸まわりに $-(\pi - \alpha)$ 回転させる。($\times R_y(\alpha - \pi)$) (図 8.3)

(2) z 軸まわりに δ 回転させる。($R_z(\delta)$) (図 8.4)

以上により、重力波のくる方向は (α, δ) に定まった。このとき、重力波のベクトルは

$$R_z(\delta) R_y(\alpha - \pi) R_z(\theta_z) R_y^{-1}(\alpha - \pi) R_z^{-1}(\delta) \quad (\text{A.4})$$

である。

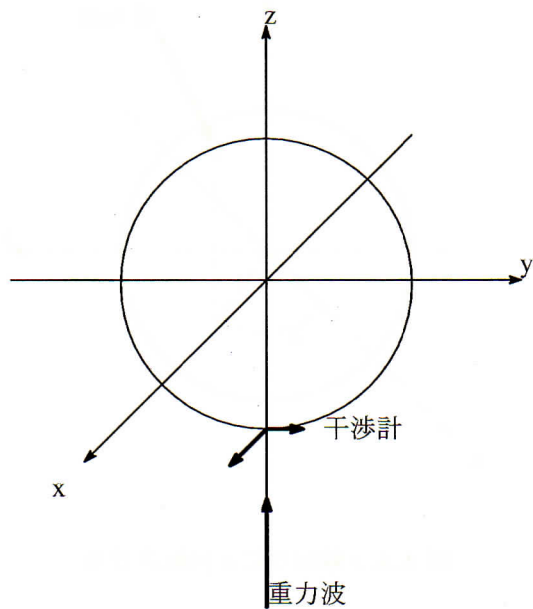


図 A.2: 初期状態

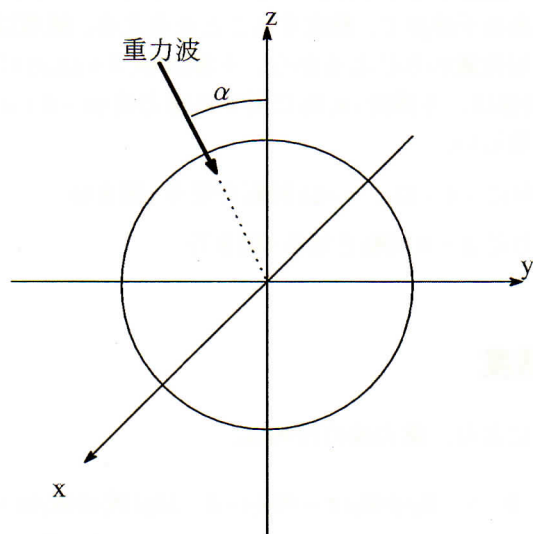


図 A.3: y 軸回りに $-\pi + \alpha$ 回転させる

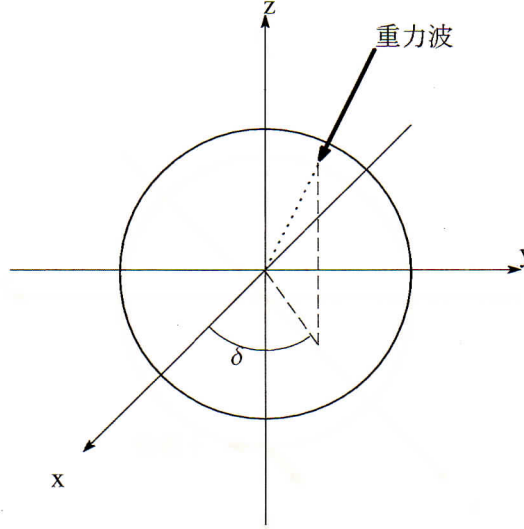


図 A.4: z 軸回りに δ 回転させる

A.5 干渉計の位置

次に干渉計の位置を合わせる。前節の操作によって、得られた行列は、南極の位置にある干渉計に対しての行列である。 $(\theta, \lambda + \Omega_E t (= \Omega))$ の位置にある干渉計で、測定することを考える。感度は干渉計とパルサーの相対位置のみによるから、干渉計 $(\theta, \lambda + \Omega_E t)$ に対する重力波 (α, δ) の関係は、干渉計 $(\pi, 0)$ に対する重力波 $(\pi - \theta + \alpha, -\lambda - \Omega_E t + \delta)$ の関係に等しい。

(1) z 軸回りに $-\lambda - \Omega_E t = -\Omega$ 回転させる (図 8.6)

(2) y 軸回りに $\pi - \theta$ 回転させる (図 8.7)

A.6 感度

上の操作により、重力波の行列は、

$$h = R_z(\psi)R_y(\pi - \theta)R_z(-\lambda - \Omega_E t)R_z(\delta)R_y(\alpha - \pi) \\ R_z(\theta_z)R_y(\pi - \alpha)R_z(-\delta)R_z(\lambda + \Omega_E t)R_y(\theta - \pi) \quad (\text{A.5})$$

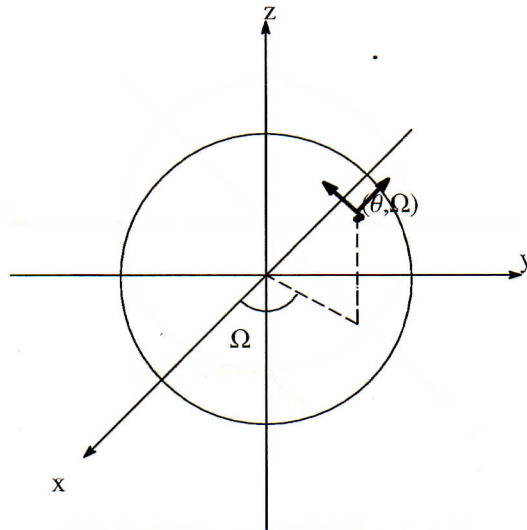


図 A.5: 干渉計の位置

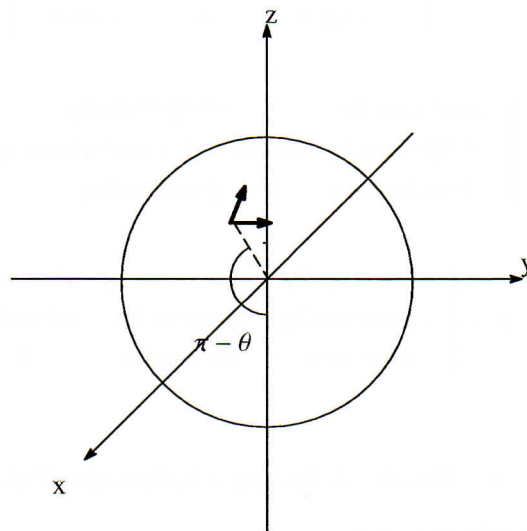


図 A.6: z 軸回りに $-\lambda - \Omega_E t = -\Omega$ 回転させる

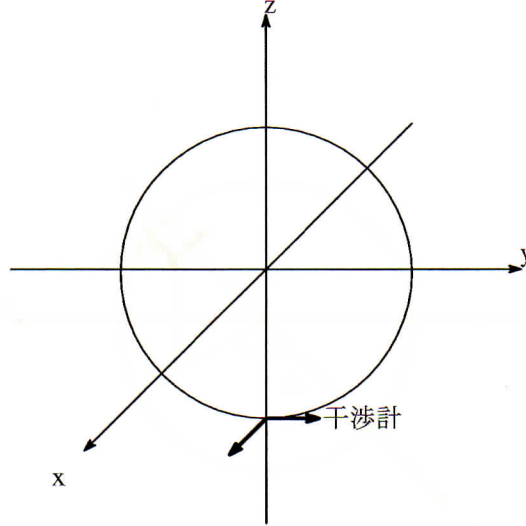


図 A.7: y 軸回りに $\pi - \theta$ 回転させる

となる。 $-\lambda + \delta - \Omega_E t = \eta(t)$ とおく。また、

$$R_z(\psi)R_y(\pi - \theta) = \begin{bmatrix} -\cos \theta \cos \psi & -\sin \psi & \sin \theta \cos \psi \\ \sin \theta \sin \psi & \cos \psi & \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & 0 & -\cos \theta \end{bmatrix} = R(\psi, \theta) \quad (\text{A.6})$$

$$R_1(\alpha, \eta) = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha \sin 2\eta & -\frac{1+\cos^2 \alpha}{2} \sin 2\eta & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \eta \\ -\frac{1+\cos^2 \alpha}{2} \sin 2\eta & \cos^2 \alpha - (1 + \cos^2 \alpha) \cos^2 \eta & -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin \eta \\ -\frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos \eta & \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin \eta & \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

$$R_2(\alpha, \eta) = \begin{bmatrix} -\cos \alpha \sin 2\eta & -\cos \alpha \cos 2\eta & \sin \alpha \sin \eta \\ -\cos \alpha \cos 2\eta & \cos \alpha \sin 2\eta & \sin \alpha \cos \eta \\ \sin \alpha \sin \eta & \sin \alpha \cos \eta & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

とおくと、

$$h = R(\psi, \theta) \times h_+ R_1(\alpha, \eta) + h_- R_2(\alpha, \eta) \times R^t(\psi, \theta) \quad (\text{A.9})$$

感度は $\frac{h(1,1)-h(2,2)}{2}$ なので

$$\begin{aligned} \text{感度} = & \frac{h_+}{4} [3 \sin^2 \theta \cos 2\psi \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha \sin 2\theta \cos 2\psi \cos \eta - 2 \sin 2\alpha \sin \theta \sin 2\psi \sin \eta \\ & + (1 + \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\psi \cos 2\theta - 2(1 + \cos^2 \alpha) \cos \theta \sin 2\psi \sin 2\eta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{h_{\times}}{4}[4 \sin \alpha \sin \theta \sin 2\psi \cos \eta + 2 \sin \alpha \sin 2\theta \cos 2\psi \sin \eta + 4 \cos \alpha \cos \theta \sin 2\psi \cos 2\eta \\
& + 2(1 + \cos^2 \alpha) \cos \alpha \cos 2\psi \sin 2\eta]
\end{aligned} \tag{A.10}$$

を得る。よって $S_{+}, S_{\times}$ の関数形は次のようになる。

$$\begin{aligned}
S_{+} = & [3 \sin^2 \theta \cos 2\psi \sin^2 \alpha + \sin 2\alpha \sin 2\theta \cos 2\psi \cos \eta - 2 \sin 2\alpha \sin \theta \sin 2\psi \sin \eta \\
& + (1 + \cos^2 \alpha)(1 + \cos^2 \theta) \cos 2\psi \cos 2\theta \\
& - 2(1 + \cos^2 \alpha) \cos \theta \sin 2\psi \sin 2\eta]
\end{aligned} \tag{A.11}$$

$$\begin{aligned}
S_{-} = & [4 \sin \alpha \sin \theta \sin 2\psi \cos \eta + 2 \sin \alpha \sin 2\theta \cos 2\psi \sin \eta + 4 \cos \alpha \cos \theta \sin 2\psi \cos 2\eta \\
& + 2(1 + \cos^2 \alpha) \cos \alpha \cos 2\psi \sin 2\eta]
\end{aligned} \tag{A.12}$$

パラメータについてまとめておく。

表 A.1: パルサーに関するパラメータ

α	パルサーの赤緯
δ	パルサーの赤経
ι	パルサー回転軸と重力波の伝播方向のなす角
Ψ	偏向角
f	重力波周波数
$\dot{f}$	スピンドウン

表 A.2: 干渉計に関するパラメータ

θ	干渉計の余緯度
λ	干渉計の経度
ψ	干渉計の腕と北向きのベクトルのなす角
η_0	$S_{+}, S_{\times}$ の初期位相

付録B Hough Mapの統計的性質

B.1 Number Count 分布

平均が0で定常なガウス雑音を考えると、そのパワースペクトルは

$$2\rho_k = z_1^2 + z_2^2 \quad (\text{B.1})$$

と書ける。ただし、

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}\text{Re}[\tilde{x}_k]}{\sqrt{|\tilde{n}_k|^2}} \quad (\text{B.2})$$

$$z_2 = \frac{\sqrt{2}\text{Im}[\tilde{x}_k]}{\sqrt{|\tilde{n}_k|^2}} \quad (\text{B.3})$$

である。

ここで干渉計の出力 $\tilde{x}_k$ はノイズ $\tilde{n}_k$ と信号 $\tilde{h}_k$ の和で $\tilde{x}_k = \tilde{h}_k + \tilde{n}_k$ であり、 $\text{Re}[\tilde{n}_k]$ 、 $\text{Im}[\tilde{n}_k]$ の分散が同じだとする。また z_1 、 z_2 の分布が標準偏差1の正規分布だとすると、 $2\rho_k$ は自由度2の χ^2 分布に従う。このとき非心パラメータ λ_k は

$$\lambda_k = (E[z_1])^2 + (E[z_2])^2 \quad (\text{B.4})$$

と書ける。したがって ρ_k の分布は

$$p(\rho_k|\lambda_k) = 2\chi^2(2\rho_k|2, \lambda_k) = \exp\left(-\rho_k - \frac{\lambda_k}{2}\right) I_0(\sqrt{2\lambda_k\rho_k}) \quad (\text{B.5})$$

である。ここで、 I_0 は0次の修正 Bessel 関数。信号がない場合 ($\lambda = 0$)、 $p(\rho_k|\lambda_k)$ は指数関数になる。この ρ_k の分布の平均と分散は

$$E[\rho_k] = 1 + \frac{\lambda_k}{2} \quad (\text{B.6})$$

$$\sigma^2[\rho_k] = 1 + \lambda_k \quad (\text{B.7})$$

である。

以上の考察からある周波数 bin が選ばれる確率を

$$\eta(\rho_{th}|\lambda) = \int_{\rho_{th}}^{\infty} p(\rho|\lambda) d\rho \quad (B.8)$$

と書き表わすことができる。これにより false alarm rate、 false dismissal rate はそれぞれ

$$\alpha(\rho_{th}) = \int_{\rho_{th}}^{\infty} p(\rho|0) d\rho = \exp(-\rho_{th}) \quad (B.9)$$

$$\beta(\rho_{th}|\lambda) = 1 - \eta(\rho_{th}|\lambda) = \int_0^{\rho_{th}} p(\rho|\lambda) d\rho \quad (B.10)$$

となる。信号がない ($\lambda = 0$) 場合 $\eta = \alpha$ である。もしも $\lambda \rightarrow \infty$ なら $\eta \rightarrow 1$ となる。

本来 λ と η は各 T_{coh} 毎に異なる値を持つが、以下の議論では一定の値だと仮定する。N 個の T_{coh} から作られる Hough Map で各ピクセルにおける Number Count が n である確率は二項分布

$$p(n|\rho_{th}, \lambda) = {}_N C_n \eta^n (1 - \eta)^{N-n} \quad (B.11)$$

である。この二項分布の平均と分散はそれぞれ

$$\bar{n} = N\eta \quad (B.12)$$

$$\sigma^2 = N\eta(1 - \eta) \quad (B.13)$$

である。信号がない場合、 $\eta = \alpha$ なので、

$$p(n|\rho_{th}, 0) = {}_N C_n \alpha^n (1 - \alpha)^{N-n} \quad (B.14)$$

と書ける。ところで離散量である Number Count を基に false alarm rate false dismissal rate を定義し直すと

$$\alpha_H = \sum_{n=n_{th}}^N p(n|\rho_{th}, 0) \quad (B.15)$$

$$\beta_H = \sum_{n=0}^{n_{th}-1} p(n|\rho_{th}, \lambda) \quad (B.16)$$

のようになる。

B.2 閾値の設定

Hough 変換を行なうには閾値 ρ_{th} を設定する必要がある。N が大きく、信号が小さい場合には以下のようにして閾値 ρ_{th} を決める。この場合 n が二項分布から正規分布に近づく。 n を正規分布で近似する。 n を正規分布と考えると標準化変数

$$\Psi = \frac{n - N\alpha}{\sqrt{N\alpha(1 - \alpha)}} \quad (\text{B.17})$$

の分布は平均 0、標準偏差 1 の標準正規分布に従う。信号がある場合には

$$\bar{\Psi}(\eta, \alpha) = \frac{N\eta - N\alpha}{\sqrt{N\alpha(1 - \alpha)}} \quad (\text{B.18})$$

となる。 η と α はそれぞれ式 (B.8)、(B.9) で定義される。ここで閾値を $\bar{\Psi}(\eta, \alpha)$ が最大となるように決める。その条件として

$$\frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \rho_{th}} = 0 \quad (\text{B.19})$$

が必要で、これを計算して

$$\ln \alpha = 2(\alpha - 1) \quad (\text{B.20})$$

となる。これを解くと、

$$\rho_{th} \approx 1.6 \quad (\text{B.21})$$

$$\alpha \approx 0.2 \quad (\text{B.22})$$

が求まる。また式 (B.17) より、Number Count n の閾値 n_{th} も求まる。この Number Count n の閾値 n_{th} を超える値が重力波の候補である。標準正規分布の場合には、false alarm rate が

$$\alpha_H = \frac{1}{2} \text{erfc} \left(\frac{n_{th} - N\alpha}{\sqrt{N\alpha(1 - \alpha)}} \right) \quad (\text{B.23})$$

なので

$$n_{th} = N\alpha + \sqrt{2N\alpha(1 - \alpha)} \text{erfc}^{-1}(\alpha_H) \quad (\text{B.24})$$

である。

付録C パラメータの制限

C.1 T_{coh} の制限

観測される量は離散量であるため、パラメータ等には分解能がある。TAMA300 データの DT9 では 11 日間の観測が行なわれていた。そのうち解析したデータの時間は $T_{obs} \sim 6.5 \times 10^5 [s]$ である。これを N 等分した T_{coh} の大きさには制限がある。周波数はドップラー効果やスピンドアウンによって変わるが、このうちスピンドアウンによる周波数シフトが T_{coh} 内で周波数 bin の半分以上動かないことが必要。式で表すと $|\dot{f}|T_{coh} \leq (2T_{coh})^{-1}$ つまり

$$T_{coh} \leq \sqrt{\frac{1}{2|\dot{f}|_{max}}} \quad (C.1)$$

である。ここで非相対論ドップラー効果の式

$$f(t) - \hat{f}(t) = \hat{f}(t) \frac{\vec{v}(t) \cdot \vec{n}}{c} \quad (C.2)$$

を微分してみるとわかるが $|\dot{f}|$ は制限される。つまり

$$\dot{f} \approx \frac{\hat{f}}{c} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{n} \quad (C.3)$$

$$\frac{\hat{f}}{c} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{n} \leq \frac{\hat{f}}{c} \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| \quad (C.4)$$

ここで $d\vec{v}/dt$ は地球の日周運動の加速度と考えて

$$|\dot{f}|_{max} = \frac{\hat{f}}{c} \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \frac{\hat{f}}{c} \frac{v_e^2}{R_e} = \frac{\hat{f}}{c} \frac{4\pi^2 R_e}{T_e} \quad (C.5)$$

となる。ここで、 v_e は地球の速度の大きさを、 T_e は一日の長さ、 R_e は地球の半径。これらの値を式 (C.5) に代入し、また式 (C.1) から

$$T_{coh} < 50_{min} \sqrt{\frac{500Hz}{\hat{f}}} \quad (C.6)$$

となる。今回のターゲット周波数は 1020-1030Hz なので、 $\hat{f}$ に代入して計算すると

$$T_{coh} < 34min \quad (C.7)$$

の条件が課されていることが分かる。

C.2 spindown

1 ユニット $T_{coh} = 655.36[s]$ 時間でのパワースペクトルを考えているので、その周波数分解能は

$$\delta f = \frac{1}{T_{coh}} = 1.525 \times 10^{-3} [Hz/s] \quad (C.8)$$

と決められる。またスピンドウン $\dot{f}$ の分解能 $\delta \dot{f}$ は、全観測時間で周波数が周波数分解能以上変化しないという条件で決められる。式でかくと

$$\delta \dot{f} = \frac{\delta f}{T_{obs}} = \frac{1}{T_{obs} T_{coh}} \sim 2.409 \times 10^{-9} \quad (C.9)$$

である。式 (C.5) より $|\dot{f}_{max}| \approx 1.1 \times 10^{-9}$ である。

われわれは、スピンドウンとして $-\dot{f}_{max} \leq \dot{f} \leq 0$ となるスピンドウンを選ぶべきだが、スピンドウンの分解能よりとりうる最大のスピンドウンが小さいため、本研究ではスピンドウンを考慮しない。

C.3 離散化の制限

今回 $300 \times 300 \times \pi$ に離散化したのがこれは 3.3.2 でマスター方程式を変形させて導出した ϕ の分解能

$$\delta \phi \approx \frac{c}{v} \frac{\delta f}{f_0 \sin \phi} \quad (C.10)$$

と以下の図 C.1 にある $\delta \theta$ の値が

$$2\delta \phi = \delta \theta$$

を満たすように設定するのが最もよいことが示されている [9]。これにしたがって $300 \times 300 \times \pi$ に離散化した。

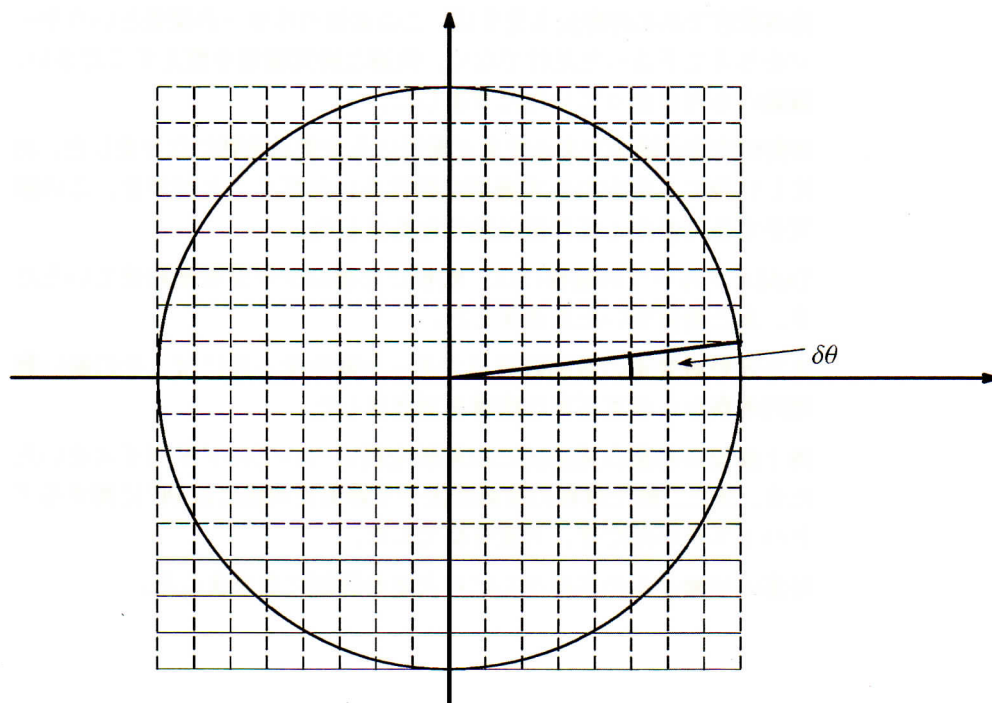


図 C.1: 離散化するための角度

謝辞

本研究を行うにあたっては多くの人にお世話になりました。

指導教官である坪野公夫先生は、この未知バルサーの探索というテーマを与えて下さっただけでなく、快適な研究環境を整えてください、議論にも付き合ってくださいました。

坪野研究室の助手である安東正樹氏にも大変お世話になりました。お忙しい身にもかかわらず適切な助言をいただくことができ、この研究をするにあたって非常に役にたちました。

TAMA グループの皆様には、解析に必要なデータを使わせていただき、また助言もいただきました。

また坪野研究室の特別研究員であった麻生洋一氏には、その鋭い物理的考察からさまざまな指導を頂きました

博士課程の石徹白晃治氏には解析全般についてのアドバイスをいただき、また、修士課程の高橋走氏や小野里光司氏にはPCに関するアドバイスをいただき、大変有益でした。

秘書の早瀬さんや古林さんにも大変お世話になりました。